UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

TESIS DOCTORAL

“Teorema Fundamental de Valoración de Activos: Extensiones Teóricas y Aplicaciones Empíricas”

Anna Downarowicz

Directores:
Alejandro Balbás de la Corte
José Javier Gil-Bazo

Departamento de Economía de la Empresa

Getafe
noviembre 2006

Mojemu Dziadkowi

za to że jest, był i zawsze będzie dla mnie jak Ojciec

Antes de empezar esta Tesis me gustaría dedicar unas palabras a las personas que durante estos años me han ayudado y apoyado para que este proyecto saliera adelante.

En primer lugar, me gustaría agradecer a Alejandro que durante todos estos años me estaba guiando por los caminos de la investigación, con toda su paciencia, amabilidad, siempre proponiéndome nuevos retos y apoyando en el trabajo. Gracias Alejandro, por haber puesto tu confianza en mi al principio cuando te pedí que me dirigieras la Tesis, y luego, ya en el camino por estar siempre allí para darme tus opiniones y argumentos, para indicarme lo que podía ser importante y lo que no, y echarme la mano con los problemas que surgían el día a día. Creo que a tu lado he crecido mucho tanto como persona como investigadora. Me gustaría poder seguir trabajando contigo y seguir explorando a tu lado nuevos caminos en la ciencia.

También a ti Javier, quiero darte las gracias por tu ayuda en el desarrollo de este trabajo, por compartir conmigo tu experiencia y conocimientos necesarios para llevar a un final feliz determinadas partes de esta Tesis. Te agradezco todas tus opiniones y comentarios que siempre resultaban acertados y me hacían aprender. Creo que podía haber aprendido mucho más si las circunstancias y el tiempo permitieran, pero aún, todo el tiempo que hemos pasado trabajando juntos me ha resultado muy fructífero. Gracias por eso.

Durante todos estos años he conocido muchos compañeros en la Universidad que de una forma u otra también me han ayudado a llegar hasta aquí. Empezando por los principios, quería dar las gracias a Szabi, Brice y Peter con los que durante varios años trabajábamos juntos, compartiendo las dudas, problemas y momentos de tensión relacionados con el trabajo. Pero también quiero daros las gracias por poder divertirme y pasármelo bien con vosotros fuera de la Universidad. Unas palabras especiales quiero dirigirle a Szabi que siempre era y es un gran amigo y un perfecto compañero. Estoy convencida que dentro de poco tú también llegarás a este punto que culminará todo el esfuerzo de estos largos años. Una mención especial se merecen Julián, Silvia, Eva y Merché que por ser compañeros mayores me han echado la mano en varias ocasiones, dándome sus consejos, opiniones, informándome de los trámites y, principalmente, dándome el apoyo que me permitió superar las dudas e indecisiones. Gracias a vosotros.

También quiero agradecer al Departamento de Economía de la Empresa que me ha acogido durante estos años, proporcionándome unas condiciones económicas, materiales y de obligaciones docentes, así como el ambiente de trabajo que me han permitido como doctoranda centrarme en el desarrollo de la Tesis Doctoral con la tranquilidad y seguridad. También me gustaría agradecer a las secretarias del Departamento, Begoña y Raquel, su paciencia y amabilidad que han tenido conmigo para resolver los problemas de papeleo.

Finalmente me gustaría agradecer a José Luis y su familia todo su cariño y apoyo y que siempre dentro de sus posibilidades han intentado hacerme sentir en España como en casa.

Las últimas líneas quiero dirigir a las cinco personas más importantes para mí en este mundo: mi madre, Dziadek Zenek, Babcia Ala, Agnieszka i Fafiñski que simplemente siempre han estado a mi lado apoyándome en todo. No tengo palabras ...

FE DE ERRATAS

Pág. 5.
Dice:
Lo que se refiere a ....

Debe decir:
En lo que se refiere a ....

Pág. 8, 89.
Dice:
iliquidez

Debe decir:
falta de liquidez

Pág. 14.
Dice:
Desde que Harrison y Kreps (1979) han establecido....
Debe decir:
Desde que Harrison y Kreps (1979) establecieran....

Pág. 27, 28, 30, 36, 40.
Dice:
J-ísimo mercado
Debe decir:
J-ésimo mercado

Pág. 28.
Dice:
(véase Schwarz (1979))
Debe decir:
(véase Schwarz (1973))

Pág. 62.
Dice:
Como vamos a demostrar en el Capítulo 4, resultados teóricos....
Debe decir:
Como vamos a demostrar en el Capítulo 4, los resultados teóricos....

Pág. 63.
Dice:
es decir, si la compra (venta) de un determinado activo está dominada entonces un trader podía....
Debe decir:
es decir, si la compra (venta) de un determinado activo está dominada entonces un trader podría....

Pág. 64.
Dice:
3.2. Nociones Prelimiares y Definiciones Básicas
Debe decir:
3.2 Nociones Preliminares y Definiciones Básicas

Pág. 65.
Dice:
...suponer la existencia de $\upsilon_0 \in IR$ tal que la desigualdades
Debe decir:
...suponer la existencia de $\upsilon_0 \in IR$ tal que las desigualdades

Pág. 74.
Dice:
que los costes de transacción de pagan
Debe decir:
que los costes de transacción se pagan

Pág. 87.
Dice:
20 años debido a la deregulación de los mercados de energía.
Debe decir:
20 años debido a la desregulación de los mercados de energía.

Pág. 88.
Dice:
billiones
Debe decir:
billones

Pág. 94, 124.
Dice:
acabo...
Debe decir:
a cabo...

Pág. 112, 113, 114, 115, 116.
Dice:
beneficio
Debe decir:
ingreso

Índice General

Capítulo 1

Introducción

En la literatura financiera varios autores, entre otros, Harrison y Kreps (1979), Dalang *et al.* (1990), Schachermayer (1992), Delbaen y Schachermayer (1998), Jacod y Shiryaev (1998) o Pham y Tuozi (1999) han demostrado diferentes versiones del tal llamado "Teorema Fundamental de Valoración de Activos" (de aquí en adelante $TFVA$). En el caso de mercados sin fricciones con un número finito de activos y en el tiempo discreto finito, este teorema simplemente establece la equivalencia entre la ausencia de arbitraje y la existencia de medidas de martingalas equivalentes. La ausencia de arbitraje en estos casos implica el cumplimiento de la "Ley de Precio Único" y lleva a la existencia de Factores de Descuento Estocástico (FDE) que proporcionan las reglas de valoración y carteras óptimas en términos de media-varianza (véase por ejemplo, Chamberlain y Rothschild 1983, Hansen y Jagannathan, 1997).

Sin embargo, si el conjunto de activos es infinito, o el conjunto de fechas de negociación es infinito, o bien si existen fricciones (costes de transacción, horquillas de precios bid-ask, restricciones de compra/venta de determinados activos, etc.) en el mercado, una versión simple del $TFVA$ no se puede probar ya que la ausencia de arbitraje no es suficiente para construir las probabilidades neutrales al riesgo bajo las que el proceso de precios sea una martingala. Back y Pliska (1991) y Schachermayer (1992) han presentado simples contraejemplos para demostrar la ausencia de medidas de martingalas equivalentes en mercados libres de arbitraje en el caso de tiempo infinito e infinitos activos, respectivamente. Para poder solucionar este problema y caracterizar la existencia de medidas de martingalas equivalentes, varios autores han utilizado un concepto mucho más débil que el concepto de arbitraje, llamado "free-lunch" (comida gratuita) e introducido por Clark (1993). Desde entonces el "free lunch" ha sido la clave en las futuras extensiones del $TFVA$. Sin embargo, la ausencia de arbitraje es un concepto mucho más intuitivo y de más fácil comprobación empírica que la ausencia del "free-lunch'. Merece la pena también recordar que los clásicos modelos de valoración (por ejemplo, el modelo binomial, el modelo de Black-Scholes, etc.) suelen tratar con el concepto de arbitraje. Sería interesante, entonces, estudiar la posibilidad de extender el $TFVA$ bajo un supuesto simple e intuitivo como la ausencia de arbitraje en los casos mencionados arriba.

INTRODUCCIÓN

Lo que se refiere a los mercados con imperfecciones, estos han sido tratados, por ejemplo, por Garman and Ohlson (1981), He and Modest (1995), Luttmer (1996), Prisman (1986, 1997), Bizid and Jouini (2005). En particular, Jouini y Kallal (1995) han demostrado la equivalencia entre la ausencia del "free-lunch" y la existencia de un proceso de precios que se encuentra entre los procesos de precios bid y ask que cumple la propiedad de martingala con respecto a una medida de probabilidad. Sin embargo, la ausencia de arbitraje en un mercado con fricciones no implica, en general, el cumplimiento de la Ley de Precio Único o la existencia de FDE. Luttmer (1996) trata con una clase de pagos teóricos (pero no necesariamente alcanzables) tales que la esperanza de pago distorsionado de un activo (es decir, pago del activo multiplicado por esta clase de pagos teóricos) tiene que estar entre la horquilla inicial de los precios bid/ask. En He and Modest (1995) para funciones de utilidad típicas en las inversiones óptimas solo se adquieren (venden) algunos activos cuyo precio bid (ask) se obtiene como la esperanza de su pago distorsionado final. A pesar de los resultados anteriores, no existe ningúna extensión de la noción de FDE al caso de mercados imperfectos, es decir, un resultado independiente de la función de utilidad que garantice la existencia de un pago alcanzable que minimice la varianza de los retornos y que simultáneamente proporcione las reglas de valoración para calcular los precios bid y ask.

Teniendo en cuenta los problemas que acabamos de mencionar, nos proponemos en esta Tesis estudiar el $TFVA$ y sus posibles extensiones utilizando el concepto de arbitraje. Los resultados de la Tesis tanto teóricos como empíricos nos permiten contribuir de forma significativa a la investigación en la moderna Teoría Financiera y resolver varios problemas identificados en la literatura. La Tesis, aparte de esta Introducción, consiste en tres capítulos que resumimos brevemente a continuación.

Resumen de la Tesis

En el Capítulo 2 pretendemos proporcionar una versión del $TFVA$ en el caso de mercado perfecto con infinitos activos bajo el supuesto de ausencia de arbitraje. Siguiendo el enfoque de sistemas proyectivos propuesto por Balbás *et al.* (2002) establecemos la equivalencia entre la ausencia de arbitraje y la existencia de medidas de martingalas proyectivamente equivalentes que proporcionan las reglas de valoración que permiten valorar nuevos activos.

El enfoque de sistemas proyectivos permite extender el conjunto de estados de la naturaleza e identificarlo con el conjunto de precios reales. La equivalencia completa entre la medida de probabilidad inicial y la medida de martingala no se verifica en general. Sin embargo, el concepto de "equivalencia proyectiva" que implica que ambas medidas, la medida de martingala y la medida de probabilidad inicial generan proyecciones equivalentes, permite garantizar la existencia de densidades entre las probabilidades "reales" y "neutrales al riesgo". Resulta que este tipo de equivalencia se cumple en muchos casos significativos como, por ejemplo, mercados completos o finitamente generados. La reglas de valoración proyectivamente equivalentes han sido encontradas también para mercados más complejos. Bajo unas propiedades de regularidad, solamente la posibilidad de valorar nuevos activos es necesaria y suficiente.

Los Capítulos 3 y 4 tratan con mercados imperfectos. En el Capítulo 3 introducimos y analizamos una nueva y bastante general definición de la eficiencia de carteras relacionada con la dominancia. Una cartera se llama globalmente dominada si existe una estrategia alternativa más barata que tiene pago superior. Este nuevo concepto de eficiencia nos permite extender la noción del FDE al caso de mercados imperfectos. Nuestro principal resultado de este Capítulo establece la existencia del FDE extendido bajo el supuesto de ausencia de arbitraje y ausencia de carteras dominadas (ineficientes). El FDE extendido permite establecer una conexión entre los pagos y precios ya que proporciona un proceso teórico de precios que está situado debajo del proceso real de precios y que casa al mismo tiempo los precios de carteras eficientes. El nuevo FDE se puede utilizar para caracterizar y calcular en práctica aquellas estrategias que no están globalmente dominadas. Además, este nuevo tipo de FDE está también íntimamente relacionado con carterasóptimas en el contexto de media-varianza.

Los resultados de este Capítulo proporcionan una intuitiva metodología que puede ser utilizada para analizar la eficiencia de carteras en mercados financieros reales y valorar las carteras eficientes. Es una metodología lo suficientemente general para poder ser aplicada en cualquier mercado financiero, y por lo tanto puede permitir estudiar los mercados emergentes y posiblemente ilíquidos que pueden resultar interesantes desde el punto de vista de la diversificación del riesgo.

En el Capítulo 4 aplicamos empíricamente los resultados teóricos y la metodología propuesta en el Capítulo 3 para analizar y valorar los derivados sobre petróleo que se negocian en el $NYMEX$, uno de los más grandes mercados mundiales de instrumentos derivados de energía. Los mercados de derivados ligados a energía son un buen ejemplo de mercados imperfectos ya que se caracterizan por altos costes de transacción, horquillas de precios bid-ask, iliquidez y falta de precios disponibles. Merece la pena subrayar la utilidad de la metodología del Capítulo 3 en la valoración de carteras en este tipo de mercados donde, debido a las imperfecciones, puede ser difícil aplicar los clásicos métodos de valoración desarollados para mercados perfectos. En este Capítulo aplicamos el nuevo concepto de FDE para mercados imperfectos para analizar la existencia de activos y carteras dominadas en el mercado y estudiar la posibilidad de mejorar los precios existentes. El estudio se basa en los datos de precios bid/ask perfectamente sincronizados de algunos activos disponibles en el $NYMEX$ y suministrados por Reuters.

INTRODUCCIÓN

A pesar de alto nivel de generalización en el análisis, nuestros resultados revelan la existencia de claras ineficiencias en el mercado. Activos y carteras dominadas han estado frecuentemente presentes en el mercado durante el periodo analizado. A lo largo del Capítulo comentamos múltiples ejemplos específicos de posibles estrategias que se podían haber implementado en el mercado durante el periodo del análisis y presentamos el informe general de los resultados obtenidos para toda la muestra. Los resultados de este Capítulo proporcionan una nueva evidencia empírica sobre el grado de eficiencia de mercados financieros ligados a energía. Instrumentos negociados en estos mercados reciben cada vez mayor atención de muchos brokers que utilizan los derivados de petróleo como una alternativa de diversificación de riesgo.

Bibliografía

[1] Back, K. and S.R. Pliska, 1991. On the fundamental theorem of asset pricing with an infinite state space. *Journal of Mathematical Economics,* 20, 1–18.

[2] Balbás, A., M. Mirás and M.J. Muñoz-Bouzo, 2002. Projective system approach to the martingale characterization of the absence of arbitrage. *Journal of Mathematical Economics*, 37, 4, 311-323.

[3] Bizid, A. and Jouini, E., 2005, Equilibrium Pricing in Incomplete Markets. *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* 40, 4, 833-849.

[4] Chamberlain, G. and M. Rothschild, 1983. Arbitrage, factor structure, and mean-variance analysis on large assets. *Econometrica*, 51, 1281-1304.

[5] Clark, S.A., 1993. The valuation problem in arbitrage price theory. *Journal of Mathematical Economics*, 22, 5, 463-478.

[6] Dalang, R. C., Morton, A. and W. Willinger, 1990. Equivalent martingale measures and no-arbitrage in stochastic securities market models. *Stochastics and Stochastic Reports*, 29, 185–201.

[7] Delbaen, F. and W. Schachermayer, 1998. The fundamental theorem of asset pricing for unbounded stochastic processes. *Mathematische Annalen* 312, 2, 215–250.

[8] Garman, M. and J. Ohlson, 1981. Valuation of Risky Assets in Arbitrage-Free Economies with Transaction Costs. *Journal of Financial Economics*, 9, 271-280.

[9] Harrison, M. and D.M. Kreps, 1979. Martingale and arbitrage in multiperiod security markets. *Journal of Economic Theory*, 20, 381–408.

[10] Hansen, L.P. and R. Jagannathan, 1997. Assessing specification errors in stochastic discount factor models. *The Journal of Finance*, 52, 2, 567-590.,

[11] He, H., and D. M. Modest, 1995. Market Frictions and Consumption-Based Asset Pricing. *Journal of Political Economy*, 103, 94-117.

[12] Jacod, J. and A. Shiryaev, 1998. Local martingales and the fundamental asset pricing theorems in the discrete-time case. *Finance and Stochastics*, 2, 3, 259–273.

[13] Jouini, E. and H. Kallal, 1995. Martingales and arbitrage in securities markets with transaction costs. *Journal of Economic Theory*, 66, 178-197.

[14] Luttmer, E., 1996. Asset Pricing in Economies with Frictions. *Econometrica*, 64, 1439-1467.

[15] Pham, H. and N. Tuozi, 1999. The fundamental theorem of asset pricing with cone constraints. *Journal of Mathematical Economics*, 31, 265-279.

[16] Prisman, E.Z., 1986. Valuation of Risky Assets in Arbitrage-Free Economies with Frictions. *Journal of Finance*, 41, 293-305.

[17] Prisman, E.Z. and N. Charupat, 1997, Financial Innovations and Arbitrage Pricing in Economies with Frictions: Revisited. *Journal of Economic Theory*, 74, 435-447.

[18] Schachermayer, W., 1992. A Hilbert space proof of the fundamental theorem of asset pricing in finite discrete time. *Insurance: Mathematics and Economics*, 11, 4, 249–257.

.

Capítulo 2

"Teorema Fundamental de Valoración con un Número Infinito de Activos"

2.1 Introducción

La existencia de reglas de valoración, factores de descuento o precios de estado es crucial en la literatura de mercados de capitales. Está íntimamente relacionada con los conceptos de arbitraje y equilibrio (por ejemplo, Chamberlain y Rothschild (1983)). Harrison y Kreps (1979) han demostrado la relación entre las reglas de valoración y medidas de martingalas.

Desde que Harrison y Kreps (1979) han establecido la existencia de medidas de martingalas para algunos modelos de valoración libres de arbitraje, su resultado ha sido extendido en múltiples direcciones, generando el Teorema Fundamental de Valoración de Activos ($TFVA$). Por ejemplo, Dalang *et al.* (1990), Schachermayer (1992), Delbaen y Schachermayer (1998) o Jacod y Shiryaev (1998) han caracterizado la existencia de medidas de martingalas bajo distintos supuestos.

Sin embargo, una versión simple del $TFVA$ no se puede probar, es decir, la ausencia de arbitraje no es suficiente para construir medidas de martingalas si el conjunto de fechas de negociación es infinito. Este problema ha sido señalado por Back y Pliska (1991) en un simple contraejemplo dinámico en tiempo discreto. Para solucionar este problema, Clark (1993) ha introducido el concepto de "free lunch" (comida gratuita), mucho más débil que el concepto de arbitraje. La ausencia de "free lunch" ha sido la clave en las futuras extensiones del $TFVA$, incluso en el caso de mercados imperfectos (por ejemplo Jouini y Kallal (1995)).

Un "free lunch" se puede entender como un "arbitraje aproximado", es decir, está "muy cerca" de una cartera de arbitraje. Sin embargo, aunque es casi un arbitraje, no es un arbitraje, no es tan intuitivo y su interpretación económica no es tan clara. Al contrario, se introduce en términos matemáticos y resuelve un problema matemático pero los modelos clásicos de valoración (modelo binomial, modelo de Black y Scholes, etc.) normalmente tratan con el concepto de arbitraje. Los recientes estudios sobre eficiencia en mercados imperfectos evitan utilizar el término de "free lunch" y recuperan el concepto de arbitraje, pero tienen que tratar con los modelos que contienen un número finito de estados de la naturaleza, el caso en el que las estrategias de arbitraje y las de "free lunch" coinciden (por ejemplo: Jouini y Kallal (2001)).

Si fuese posible, sería interesante obtener las probabilidades neutrales al riesgo y las reglas de valoración (medidas de martingalas) bajo simples supuestos, como la ausencia de arbitraje. Esto está en línea con muchos otros Teoremas de Representación en Finanzas Matemáticas. Por ejemplo, la representación de medidas coherentes, convexas o algunas concretas medidas de riesgo (Artzner *et al.* (1999), Fölmer y Schied (2002) o Rockafellar y Uryasev (2000) y (2002)) y reglas de valoración en mercados imperfectos de único periodo (Chateauneuf *et al.* (1996)) han sido formuladas utilizando hipótesis simples e intuitivas.

Balbás *et al.* (2002) han probado que es posible resolver el contraejemplo de Back y Pliska (1991) sin utilizar el "free lunch" y han caracterizado la ausencia de arbitraje en modelos de valoración dinámicos en tiempo discreto. Los autores construyen un sistema proyectivo de medidas perfectas de probabilidad (véase Musial (1980)) que son neutrales al riesgo para cada subconjunto finito de fechas de negociación. Luego, demuestran que el límite proyectivo es neutral al riesgo para todo el conjunto de las fechas de negociación, es decir, el conjunto de los estados de naturaleza y el proceso de precios se puede extender de tal manera que el "nuevo proceso de precios" sea una martingala con respecto a este sistema proyectivo. La medida de probabilidad inicial y la medida neutral al riesgo no pueden ser equivalentes, como ha sido ilustrado en el contraejemplo de Back y Pliska (1991). Sin embargo, para cada subconjunto finito de fechas de negociación se pueden encontrar proyecciones de ambas medidas de tal manera que éstas sean equivalentes, y que existan las derivadas de Radon-Nikodym en ambas direcciones. Balbás *et al.* (2002) utilizan esta propiedad para introducir el concepto de " *equivalencia proyectiva* " de las medidas de probabilidad.

Un problema parecido al anterior aparece a la hora de caracterizar la ausencia de arbitraje en modelos (incluso estáticos) con infinitos activos. Schachermayer (1992) lo ha señalado claramente en un simple contraejemplo con un número contable de activos. Como en el caso de tiempo infinito, es imposible encontrar las reglas de valoración y extender el $TFVA$ para modelos significativos. Por ejemplo, uno podría considerar un mercado de derivados donde están disponibles las opciones de compra con un número infinito de precios de ejercicio. Por otra parte, como se va a ilustrar en la Observación 7 (Sección 6) de este Capítulo, cada modelo dinámico de valoración se puede adaptar de tal manera que éste se pueda considerar como un modelo de infinitos activos, ya que cada pareja compuesta por un activo y una fecha define un nuevo activo. Todos los argumentos mencionados arriba, nos hacen pensar que sería interesante analizar los modelos libres de arbitraje con infinitos activos.

Los resultados de Balbás *et al.* (2002) podrían ser útiles para analizar nuevos problemas relacionados con el $TFVA$. Por ejemplo, los mercados imperfectos son cada vez más importantes en finanzas (véase: por ejemplo Schachermayer (2004)) o mercados con infinitos activos. Este Capítulo sigue esta línea de investigación y trata con los modelos perfectos de único periodo y con número infinito de activos. Nuestro análisis parece ser bastante general ya que no se hacen ningunos supuestos sobre las propiedades del conjunto de activos.

La existencia de las probabilidades neutrales al riesgo se establece a través de los límites proyectivos de los sistemas proyectivos de medidas de probabilidad de Radon (véase: Schwartz (1973)), y no a través de sistemas proyectivos de medidas perfectas, como en Balbás *et al.* (2002). Estos sistemas proyectivos nos permiten extender el concepto de la equivalencia proyectiva y ampliar el conjunto de los estados de naturaleza. El nuevo conjunto de los estados de naturaleza se puede identificar con un conjunto de las trayectorias de precios reales, y por lo tanto, podrá describir mejor el comportamiento de los precios. Se podría interpretar que este fallo del $TFVA$ se debe parcialmente a la "insuficiencia" del conjunto de estados a explicar todo el proceso de precios.

El esquema de este Capítulo es el siguiente. En la Sección 2 se introduce los conceptos básicos y la notación. En la Sección 3 presentamos dos contraejemplos que muestran el fallo del $TFVA$. El primero es una adaptación del ejemplo de Back y Pliska (1991), aunque nosotros consideramos sólo dos fechas de negociación (en lugar de infinitas fechas) y un número infinito de activos (en lugar de sólo dos). El segundo es el contraejemplo introducido por Schachermayer (1992). En la Sección 4 se transforma el problema para poder introducir el enfoque de “sistemas proyectivos” y se define el concepto de medidas de martingalas proyectivamente equivalentes. Los mercados completos se analizan en la Sección 5. Se demuestra que la completitud del modelo es suficiente para establecer la equivalencia entre la ausencia de arbitraje y la existencia de una (única) medida de martingala proyectivamente equivalente, lo que permite valorar nuevos activos en el mercado. Esto resuelve el contraejemplo de Back y Pliska (1991). En la Sección 6 analizamos en profundidad la existencia de medidas de martingalas proyectivamente equivalentes. Resulta que la equivalencia proyectiva se verifica en los mercados en los que algún tipo de nuevos activos se puede valorar sin violar la ausencia de arbitraje. Mercados completos son un caso particular de ellos, como también los mercados que vamos a llamar ”finitamente generados” (estos mercados permiten ilustrar que los modelos de un periodo con número contable de activos se podrían considerar como más generales que los modelos dinámicos en el tiempo discreto). El contraejemplo de Schachermayer (1992) demuestra que pueden existir mercados (incompletos) para los que no es posible encontrar ningún precio para algunos nuevos activos. En la última Sección se concluye el Capítulo. En el Apéndice se presentan resultados técnicos y demostraciones más complejas.

2.2 Conceptos Básicos y Notación

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de probabilidad compuesto por el conjunto Ω, la $\sigma-$álgebra $\mathcal{F}$ y la medida de probabilidad μ.

Sea $(S_i)_{i\in I}$ un conjunto de todos los activos disponibles y $(f_i)_{i\in I} \subset L^2(\mu)$ un conjunto de variables aleatorias que definen los pagos en una fecha futura T de S_i, para cada $i \in I$. Por $(p_i)_{i\in I} \subset \mathbb{R}$ denotamos la familia de los precios actuales. Asumimos que $0 \in I$ y S_0 es un numerario, es decir, $p_0 = 1$ y $f_0 = 1$, $\mu - c.s.$

El conjunto de todas carteras factibles será un espacio vectorial

$$E_\infty = \{(x_i)_{i\in I} \subset \mathbb{R}; \, existe\ J \subset I\ con\ J\ finito\ y\ x_i = 0\ siempre\ si\ i \notin J\}.$$

Es bien conocido que E_∞ es denso en el espacio de secuencias $l^q(I)$ $(1 \leq q < \infty)$. El precio actual y los pagos futuros de $x = (x_i)_{i\in I} \in E_\infty$ están dados por

$$\lambda(x) = \sum_{i\in I} x_i p_i \in \mathbb{R}$$

y

$$\Lambda(x) = \sum_{i\in I} x_i f_i \in L^2(\mu)$$

respectivamente. Como es habitual, una cartera de arbitraje permite obtener “dinero sin riesgo”. Una medida neutral al riesgo hace que los precios sean los valores medios de cada pago. Tenemos:

Definición 1 *Se dice que una cartera $x \in E_\infty$ es un arbitraje si*

a) $\lambda(x) \leq 0$

b) $\Lambda(x) \geq 0,\ \mu - c.s.$

c) $\mu\left(\omega \in \Omega : \ \Lambda(x)(\omega) - \lambda(x) > 0\right) > 0.$ □

Nótese que los beneficios de arbitraje obtenidos en la fecha actual se pueden reinvertir en el activo libre de riesgo S_0. Entonces la existencia de arbitraje es equivalente a la existencia de arbitraje auto-financiado para el que *a)* se cumple en términos de igualdad.

Definición 2 *Se dice que la medida $\sigma-$ aditiva $\nu : \mathcal{F} \longmapsto [0,1]$ es una probabilidad neutral al riesgo (o una medida de probabilidad neutral al riesgo, o una medida de martingala) si*

a) *μ y ν son equivalentes, es decir, $\mu(A) = 0 \Longleftrightarrow \nu(A) = 0$.*

b)

$$p_i = \int_\Omega f_i d\nu \tag{2.1}$$

para cada $i \in I$. □

La ausencia de arbitraje y el $TFVA$ garantizan la existencia de las medidas de probabilidad neutrales al riesgo para cada conjunto finito de activos (véase por ejemplo Dalang *et al.* (1990), Schachermayer (1992) o Jacod y Shiryaev (1998)).

De aquí en adelante, sea $\mathcal{P}_F(I)$ el conjunto de subconjuntos finitos de I que contienen 0.

Teorema 1 *El modelo está libre de arbitraje si y solo si existe una red* $(\tilde{\nu}_J)_{J\in\mathcal{P}_F(I)}$ *de medidas de probabilidad* $\sigma-$ *aditivas en* $\mathcal{F}$ *tales que* μ *y* $\tilde{\nu}_J$ *sean equivalentes para cada* $J \in \mathcal{P}_F(I)$ *y*

$$p_i = \int_\Omega f_i d\tilde{\nu}_J \tag{2.2}$$

siempre cuando $J \in \mathcal{P}_F(I)$ *y* $i \in J$. □

A pesar del resultado anterior, varios contraejemplos han señalado que la medida neutral al riesgo $\tilde{\nu}_J$ depende de J, *es decir*, en general, no es posible encontrar $\nu : \mathcal{F} \longmapsto [0,1]$ que verifique las condiciones de Definición 2.

2.3 Dos Contraejemplos con Soluciones Distintas

En esta Sección vamos a introducir dos contraejemplos que señalan la falta de probabilidades neutrales al riesgo para muchos mercados libres de arbitraje. Primer contraejemplo es una modificación adaptada de Back y Pliska (1991), que presentan un modelo de valoración dinámico en tiempo discreto libre de arbitraje en el que no existe ninguna medida de martingala. El segundo contraejemplo ha sido propuesto por Schachermayer (1992). Como lo mostraremos en este Capítulo ambos ejemplos son importantes porque sus propiedades son esencialmente diferentes.

Ejemplo 1 *Sea* $I = \{0,1,2,...\} = \mathbb{N}$, $\Omega = \{1,2,...\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathcal{F}$ *una* $\sigma-$*álgebra discreta de* Ω *y* $\mu(\omega) > 0$ *para cada* $\omega \in \Omega$. *Sea* $p_i = 1$, $i = 0,1,2,...$ *y*

$$f_i(\omega) = \begin{cases} \frac{\omega^2+2\omega+2}{2^\omega} & \omega \leq i \\ \\ \frac{1}{2^i} & \omega > i \end{cases}$$

$i, \omega = 1,2,...$ *La matriz de pagos está dada por la siguiente matriz infinita tal que la í-sima columna refleja el pago de* S_i, $i = 0,1,2,...$

$$.\mathcal{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5/2 & 5/2 & 5/2 & 5/2 & ... \\ 1 & 1/2 & 10/4 & 10/4 & 10/4 & ... \\ 1 & 1/2 & 1/4 & 17/8 & 17/8 & ... \\ 1 & 1/2 & 1/4 & 1/8 & 26/16 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}$$

Consideremos $i, \omega \in \Omega$ *tal que* $\omega > i$ *y definamos* $\nu_{i,\omega} > 0$ *tal que se verifique*

$$\sum_{\omega=i+1}^{\infty} \nu_{i,\omega} = 1 - \sum_{\omega=1}^{i} \frac{1}{2\omega(\omega+1)} = \frac{i+2}{2i+2} \tag{2.3}$$

Claramente, la existencia de $(\nu_{n,\omega})_{\omega=n+1}^{\infty}$ *está garantizada para cada* $n \in \Omega = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Tomemos $n \in \Omega$, $J_n = \{0, 1, ..., n\}$, *y definamos*

$$\tilde{\nu}_n(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2\omega(\omega+1)} & \omega \leq n \\ \\ \nu_{n,\omega} & \omega > n \end{cases}$$

Se demuestra fácilmente que μ *y* $\tilde{\nu}_n$ *son equivalentes para* $n = 1, 2, ...$ *y la condición (2.2) se verifica siempre cuando* $i \in J_n$. *Por lo tanto, el Teorema 1 asegura que el mercado está libre de arbitraje. Sin embargo, se puede observar que una medida de probabilidad neutral al riesgo* ν *como en Definición 2 no existe. De hecho, si existiese, obtendríamos por inducción*

$$\nu(\omega) = \frac{1}{2\omega(\omega+1)} \tag{2.4}$$

pero entonces $\sum_{\omega=1}^{\infty} \nu(\omega) = \frac{1}{2}$ *y* $\sum_{\omega=1}^{\infty} f_i(\omega)\nu(\omega) < 1$ *para cada* $i = 0, 1, ...$ □

Observación 1 *Si extendiésemos el espacio* Ω *añadiendo un evento correspondiente al punto del* ∞, *definiéramos* $\nu(\infty) = \frac{1}{2}$ *y consideráramos el proceso de precios extendido tal que* $f_i(\infty) = \lim_{\omega\to\infty} f_i(\omega)$ *para todo* $i \in \mathbb{N}$, *entonces* ν *cumpliría (2.1) pero como* ν *asignaría probabilidad positiva al evento* $\mu-$*nulo* ∞, μ *y* ν *no serían medidas de probabilidad equivalentes. Sin embargo, siguiendo el enfoque de Balbás et al. (2002) vamos a introducir el concepto de equivalencia proyectiva y vamos a demostrar que las proyecciones de* ν *y* μ *tienen derivadas de Radon-Nikodym positivas en ambas direcciones.* □

Ejemplo 2 *Considere* $I = \mathbb{N}$, $\Omega = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathcal{F}$ *la* $\sigma-$*álgebra discreta de* Ω *y suponga que* $\mu(\omega) > 0$ *Para cada* $\omega \in \Omega$. *Sea* $p_i = 0$, $i = 1, 2, ...$*y* $f_i(i) = 1$, $f_i(i+1) = -1$ *y* $f_i(\omega) = 0$ *para cada* $i, \omega = 1, 2, ...$*con* $\omega \neq i$ *y* $\omega \neq i+1$.

Como en el Ejemplo 1, *podemos escribir la matriz de pagos como*

$$\mathcal{M}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & ... \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & ... \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & ... \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}$$

Si definimos

$$\tilde{\nu}_n(\omega) = \frac{1}{2(n+1)}$$

para $n = 1, 2, ...$*y* $\omega = 1, 2, ..., n, n+1$, *y*

$$\tilde{\nu}_n(\omega) = \frac{\mu(\omega)}{2\sum_{\omega^*=n+2}^{\infty} \mu(\omega^*)}$$

para $n = 1, 2, ...$*y* $\omega = n+2, n+3, ...$, *entonces se puede probar fácilmente que el Teorema* 1 *es válido y, por lo tanto, el mercado está libre de arbitraje. Además, según (2.1), una probabilidad neutral al riesgo* ν *debería verificar*

$$0 < \nu(1) = \nu(2) = \nu(3) = ...$$

Lo que hace imposible que se verifique

$$\nu(1) + \nu(2) + \nu(3) + ... = 1.$$

$\square$

Observación 2 *Nótese que la solución propuesta para el Ejemplo* 1 *no se puede aplicar aquí. De hecho, si se extiende el conjunto de estados a* $\Omega \cup \{\infty\}$ *y el proceso de precios de tal manera que* $f_0(\infty) = 1$ *y*

$$f_1(\infty) = f_2(\infty) = f_3(\infty) = ... = 0$$

entonces una manipulación directa muestra que (2.1) lleva a

$$\nu(\Omega) = 0$$

y

$$\nu(\infty) = 1$$

y entonces no es posible establecer ningún tipo de equivalencia entre μ *y* ν*.* $\square$

2.4 Enfoque de Sistemas Proyectivos

Para cada conjunto C vamos a denotar por $\mathbb{R}^C$ el conjunto de funciones con valores en $\mathbb{R}$ sobre C dotado con la habitual topología de producto y la $\sigma-$álgebra de Borel $\mathcal{B}_C$.

Sea $J \in \mathcal{P}_F(I)$. Considere el espacio de probabilidad

$$(\mathrm{I\!R}^J, \mathcal{B}_J, \mu_J) \tag{2.5}$$

donde μ_J es la medida de probabilidad $f_J(\mu)$ dada por

$$\mu_J(B) = \mu\left[f_J^{-1}(B)\right]$$

para cada $B \in \mathcal{B}_J$, siendo f_J la función medible

$$\Omega \ni \omega \longmapsto f_J(\omega) = (f_i(\omega))_{i \in J} \in \mathrm{I\!R}^J. \tag{2.6}$$

Entonces, $(\mu_J)_{J \in \mathcal{P}_F(I)}$ es un sistema proyectivo de medidas de probabilidad de Radon (véase Schwartz (1973)), es decir, denotando las proyecciones naturales por

$$\pi_{J,K} : \mathrm{I\!R}^K \longmapsto \mathrm{I\!R}^J$$

tenemos que

$$\mu_J = \pi_{J,K}(\mu_K)$$

siempre cuando $J, K \in \mathcal{P}_F(I)$ y $J \subset K$.

Para cada $J \in \mathcal{P}_F(I)$ se puede considerar el modelo de valoración de un periodo definido en el espacio de probabilidad (2.5) y generado por las familias finitas de activos cuyos precios actuales son $(p_i)_{i \in J}$ y cuyos pagos están dados por las proyecciones naturales

$$\pi_{\{i\},J} : \mathrm{I\!R}^J \longmapsto \mathrm{I\!R}$$

$i \in J$. Vamos a llamar a este nuevo modelo: J-ísimo mercado.

Proposición 2 *El modelo inicial está libre de arbitraje si y solo si J-ísimo mercado está libre de arbitraje para cada $J \in \mathcal{P}_F(I)$.*

Demostración.

J-ísimo mercado no está libre de arbitraje si y sólo si existe una cartera autofinanciada $(x_i)_{i \in J}$ tal que

$$\mu_J \left[(\alpha_i)_{i \in J} : \sum_{i \in J} x_i \alpha_i \geq 0 \right] = 1$$

y

$$\mu_J \left[(\alpha_i)_{i \in J} : \sum_{i \in J} x_i \alpha_i > 0 \right] > 0.$$

Esto es equivalente a

$$\mu \left[\omega \in \Omega : \sum_{i \in J} x_i f_i(\omega) \geq 0 \right] = 1$$

y

$$\mu \left[\omega \in \Omega : \sum_{i \in J} x_i f_i(\omega) > 0 \right] > 0$$

lo que significa que el modelo inicial no está libre de arbitraje. $\square$

Supuesto 1. De aquí en adelante vamos a suponer que $(f_i)_{i\in I} \subset L^\infty(\mu)$.[1] $\square$

Supuesto 1 implica que μ_J tiene un soporte compacto incluido en el conjunto compacto [2]

$$\Pi_{i\in J}\left[-\|f_i\|_\infty, \|f_i\|_\infty\right] \subset \mathbb{R}^J \tag{2.7}$$

para cada $J \in \mathcal{P}_F(I)$. Entonces el Teorema de Prokhorov (véase: Schwartz (1973)) garantiza la existencia de una única medida de probabilidad de Radon μ_I sobre un espacio medible $(\mathbb{R}^I, \mathcal{B}_I)$ que es un límite proyectivo del sistema $(\mu_J)_{J\in\mathcal{P}_F(I)}$, es decir,

$$\mu_J = \pi_{J,I}(\mu_I)$$

se cumple para cada $J \in \mathcal{P}_F(I)$. Además, μ_I tiene un soporte compacto incluido en el conjunto compacto

$$\Pi_{i\in I}\left[-\|f_i\|_\infty, \|f_i\|_\infty\right] \subset \mathbb{R}^I. \tag{2.8}$$

Ahora podemos introducir el concepto clave para este Capítulo.

[1] Este supuesto simplifica de forma significativa la exposición. De todas formas, la mayor parte de la teoría seguiría siendo válida también si el supuesto no se cumpliese. En tal caso el papel del Teorema de Prokhorov (véase: Schwartz (1979)) tendría que ser sustituido por el Teorema de Daniel-Kolmogorov (véase: Kopp (1984)).

[2] $[-\|f_0\|_\infty, \|f_0\|_\infty] = [-1, 1]$ puede ser sustituido por $\{1\}$. Un comentario análogo se aplica a (2.8).

Definición 3 *Una medida de probabilidad de Radon* ν_I *sobre un espacio medible* $(\mathbb{R}^I, \mathcal{B}_I)$ *es una medida de martingala proyectivamente equivalente (o una probabilidad neutral al riesgo proyectivamente equivalente) si:*

a) μ_I *y* ν_I *son proyectivamente equivalentes, es decir,* μ_J *y* $\nu_J = \pi_{J,I}(\nu_I)$ *son equivalentes para cada* $J \in \mathcal{P}_F(I)$*.*

b) Dado $J \in \mathcal{P}_F(I)$ *tenemos que* ν_J *es una medida de martingala para J-ísimo mercado.*[3] □

A pesar de que μ_I y ν_I no tengan por qué ser equivalentes la Condición *a*) arriba garantiza la existencia de densidades positivas entre sus proyecciones. Esto implica también que los soportes compactos de ν_I y sus proyecciones están incluidas en (2.8) y (2.7) respectivamente.

Nótese que Ω se puede interpretar como un subconjunto de $\mathbb{R}^I$ con la "inmersión" (2.6) donde J está sustituido por I.[4] Entonces, el enfoque de sistemas proyectivos nos permite, de alguna manera, extender el conjunto de estados de naturaleza e identificar este conjunto con el conjunto de precios reales.

[3] es decir, $p_i = \int_{\mathbb{R}^J} \pi_{\{i\},J} d\nu_J = \int_{\mathbb{R}^I} \pi_{\{i\},I} d\nu_I$ se cumple para cada $J \in \mathcal{P}_F(I)$ y cada $i \in J$.

[4] Esta inmersión no es necesariamente medible, aunque este problema se puede resolver si consideramos $\sigma-$álgebras cilíndricas de $\mathbb{R}^I$ en lugar de una de Borel (véase: Kopp (1984)).

2.5 Existencia de Medidas de Martingalas Proyectivamente Equivalentes en Mercados Completos

Primero, vamos a organizar y resumir los principales resultados ya tratados o comentados en este Capítulo.

Proposición 3 *Las afirmaciones abajo cumplen las implicaciones:* 3.1 $\Rightarrow$ 3.2 $\Leftrightarrow$ 3.3 $\Rightarrow$ 3.4.

3.1) *Existe una medida de martingala* ν.

3.2) *Existe un sistema proyectivo* $[\nu_J]_{J\in\mathcal{P}_F(I)}$ *de medidas de Radon tal que* ν_J *es una medida de martingala para J-ísimo mercado.*

3.3) *Existe una medida de martingala proyectivamente equivalente* ν_I.

3.4) *El modelo inicial está libre de arbitraje.*

Demostración:

3.1 $\Rightarrow$ 3.2. Dado $J \in \mathcal{P}_F(I)$ tomemos $\nu_J = f_J(\nu)$, donde f_J está representado en (2.6). Entonces la equivalencia entre μ y ν trivialmente lleva a la equivalencia entre μ_J y ν_J, y la igualdad

$$p_i = \int_{\mathbb{R}^J} \pi_{\{i\},J} d\nu_J,$$

para $i \in J$, sale de (2.1). Finalmente, si $J, K \in \mathcal{P}_F(I)$ y $J \subset K$, entonces $\nu_J = f_J(\nu) = \pi_{J,K} f_K(\nu) = \pi_{J,K}(\nu_K)$.

3.2 $\Rightarrow$ 3.3. Como cualquier ν_J es equivalente a μ_J entonces sus soportes están incluidos en los conjuntos compactos (2.7). Entonces el Teorema de Prokhorov asegura la existencia del límite proyectivo ν_I.

3.3 $\Rightarrow$ 3.2. Basta con definir $\nu_J = \pi_{J,I}(\nu_I)$ para cada $J \in \mathcal{P}_F(I)$.

3.2 $\Rightarrow$ 3.4. Teorema 1 asegura que el J-ísimo mercado está libre de arbitraje, entonces 3.4 sale trivialmente de la Proposición 2. □

Los Ejemplos 1 y 2 son claros contraejemplos que demuestran que, en general, 3.2 $\not\Rightarrow$ 3.1 y 3.4 $\not\Rightarrow$ 3.2. Para ambos casos se puede considerar el conjunto contable $(J_n)_{n=1}^{\infty}$, donde $J_n = \{0, 1, ..., n\}$, en lugar del conjunto directo $\mathcal{P}_F(\mathbb{N})$.[5]

Observación 3 *Fijémonos en el Ejemplo* 1. *Ya hemos demostrado que no existen medidas de martingalas. Para construir la medida de martingala proyectivamente equivalente observamos que las filas de* $\mathcal{M}_1$ *nos dan la medida* μ_{J_n} *asociada con el* J_n- *ésimo mercado. Es fácil ver que*

$$\mu_{J_n}(1, 5/2, 5/2, ..., 5/2)) = \mu(1)$$

$$\mu_{J_n}(1, 1/2, 10/4, ...10/4) = \mu(2)$$

[5]En general, $\mathcal{P}_F(I)$ se puede sustituir por sus conjuntos cofinales.

$$\mu_{J_n}\left(1, 1/2, 1/4, 17/8, ...17/8\right) = \mu\left(3\right)$$

....

$$\mu_{J_n}\left(1, f_1(n), f_2(n), ..., f_n(n)\right) = \mu\left(n\right)$$

$$\mu_{J_n}\left(1, f_1(n+1), f_2(n+1), ..., f_n(n+1)\right) = \sum_{r=n+1}^{\infty} \mu\left(r\right)$$

Es importante subrayar que J_n-*ésimo mercado es completo, es decir, existen* $n+1$ *activos independientes y el soporte de* μ_{J_n} *contiene* $n+1$ *puntos de* $\mathbb{R}^{J_n}$. *Por lo tanto, la probabilidad neutral al riesgo para este mercado es única y es fácil ver que está dada por:*

$$\nu_{J_n}\left(1, 5/2, 5/2, ..., 5/2)\right) = \nu(1)$$

$$\nu_{J_n}\left(1, 1/2, 10/4, ...10/4\right) = \nu(2)$$

$$\nu_{J_n}\left(1, 1/2, 1/4, 17/8, ...17/8\right) = \nu(3)$$

....

$$\nu_{J_n}\left(1, f_1(n), f_2(n), ..., f_n(n)\right) = \nu(n)$$

$$\nu_{J_n}\left(1, f_1(n+1), f_2(n+1), ..., f_n(n+1)\right) = \sum_{\omega=n+1}^{\infty} \nu_{n,\omega}$$

donde ν *y* $\sum_{\omega=n+1}^{\infty} \nu_{n,\omega}$ *están dados en (2.4) y(2.3) respectivamente. Para ver que* 3.2 *ó* 3.3 *se cumplen basta probar que*

$$\pi_{J_n,J_{n+1}}(\nu_{J_{n+1}}) = \nu_{J_n}$$

$n = 1, 2, ...,$ *pero esto sale trivialmente de las igualdades arriba.*

Finalmente, el sistema proyectivo anterior claramente converge a la medida $\nu_{\mathbb{N}}$ *cuyo soporte está concentrado en las filas de* $\mathcal{M}_1$ *más la secuencia adicional*

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ...\right) = \left(\frac{1}{2^n}\right)_{n=0}^{\infty}. \tag{2.9}$$

Además, $\nu(\omega)$ *coincide con* $\nu_{\mathbb{N}}$ *en la* $\omega-$*ísima fila de* $\mathcal{M}_1$, $\omega = 1, 2, ...,$ *y*

$$\nu_{\mathbb{N}}\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n=0}^{\infty} = \frac{1}{2}.$$

Claramente, esta medida se puede identificar con la medida presentada en la Observación 1. *En general, como ya lo hemos dicho al final de la sección* 4, *el enfoque de sistemas proyectivos permite extender el conjunto de estados de naturaleza e identificar este conjunto con el conjunto de precios reales, ya que (2.9) refleja "la única trayectoria de precios no contenida en las columnas de* $\mathcal{M}_1$*".* □

Observación 4 *A continuación vamos a demostrar que el Ejemplo* 2 *muestra que* 3.4 $\not\Rightarrow$ 3.2 *ó* 3.3. *Ya hemos probado que el mercado está libre de arbitraje. Además,* *como en el caso anterior, las filas de $\mathcal{M}_2$ nos dan la medida μ_{J_n}, es decir,*

$$\mu_{J_n}(1,1,0,...,0) = \mu(1)$$

$$\mu_{J_n}(1,-1,1,0,...,0) = \mu(2)$$

$$\mu_{J_n}(1,0,-1,1,0,...,0) = \mu(3)$$

$$\mu_{J^n}(1,0,0,-1,1,0,...,0) = \mu(4)$$

....

$$\mu_{J_n}(1,0,...,0,-1) = \mu(n+1)$$

$$\mu_{J_n}(1,0,...,0) = \sum_{r=n+2}^{\infty} \mu(r)$$

Obsérvese que hay una importante diferencia entre ambos ejemplos ya que J_n-ésimo mercado no es completo. De hecho, el número de estados es igual a $n+2$, mientras que el número de activos es igual a $n+1$. Entonces, el número de medidas neutrales al riesgo para este mercado es infinito. Por lo tanto, si Λ_n denota el conjunto de medidas neutrales al riesgo entonces cada elemento de Λ_n esta caracterizado por dos parámetros estrictamente positivos λ y λ^* tales que

$$(n+1)\lambda + \lambda^* = 1. \tag{2.10}$$

Entonces, la correspondiente medida neutral al riesgo verifica

$$\nu^{\lambda}_{J_n}(1,1,0,...,0) = \nu^{\lambda}_{J_n}(1,-1,1,0,...,0) = \nu^{\lambda}_{J_n}(1,0,0,-1,1,0,...,0)... = \nu^{\lambda}_{J_n}(1,0,...,0,-1) = \lambda$$

y

$$\nu^{\lambda}_{J_n}(1,0,...,0) = \lambda^*.$$

Para probar que 3.2 *falla supongamos que* $\left(\nu^{\lambda_n}_{J_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ *es un sistema proyectivo que verifica las condiciones de* 3.2. *Fijemos* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. *Tenemos que*

$$\pi_{J_n,J_{n+m}}(\nu^{\lambda_{n+m}}_{J_{n+m}}) = \nu^{\lambda_n}_{J_n}$$

para cada $m \in \mathbb{N}$, *y entonces*

$$\lambda_n = \nu^{\lambda_n}_{J_n}(1,1,0,...,0) = \nu^{\lambda_{n+m}}_{J_{n+m}}(1,1,0,...,0) = \lambda_{n+m}.$$

De (2.10) tenemos que

$$\lambda_n = \lambda_{n+m} < \frac{1}{n+m+1}$$

Y por lo tanto, tomando $m \longmapsto \infty$, *tenemos que* $\lambda_n = 0$. *Pero esto está en contradicción con la equivalencia entre* μ_{J_n} *y* $\nu^{\lambda_n}_{J_n}$. $\square$

A continuación vamos a introducir un primer resultado que justifica el éxito del Enfoque de Sistemas Projectivos en el Ejemplo 1. Adicionalmente, vamos a ilustrar la utilidad de las medidas de martingalas proyectivamente equivalentes en la valoración de nuevos activos.

Teorema 4 *Supongamos que existe un subconjunto cofinal* $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}_F(I)$ *tal que* $J-$*ísimo mercado es completo para cada* $J \in \mathcal{C}$. *Entonces las afirmaciones* 3.2, 3.3 *y* 3.4 *son equivalentes. Además, en el caso afirmativo, las siguientes propiedades se cumplen:*

4.1) *La medida de martingala proyectivamente equivalente* ν_I *es única.*

4.2) *Consideremos* $J \in \mathcal{P}_F(I)$, $\nu_J = \pi_{J,I}(\nu_I)$, $\varphi \in L^\infty\left(\mathbb{R}^J, \mathcal{B}_J, \mu_J\right)$ *y el activo nuevo* S_φ *cuyo pago en* T *está dado por*

$$f_\varphi = \varphi \circ f_J \in L^\infty(\mu). \tag{2.11}$$

Tenemos que

$$p_\varphi = \int_{\mathbb{R}^I} (\varphi \circ \pi_{J,I})\, d\nu_I \tag{2.12}$$

es el único precio de S_φ *que hace que el mercado* $(S_i)_{i\in I} \cup (S_\varphi)$ *esté libre de arbitraje.*

Demostración: Supongamos que 3.4 se cumple. Tomemos $K \in \mathcal{C}$. Proposición 2 y la completitud del $K-$ísimo mercado asegura la existencia de ν_K, la única medida de martingala para el $K-$ísimo mercado. Si $J \notin \mathcal{C}$ consideramos $K \in \mathcal{C}$ con $J \subset K$ y ponemos

$$\nu_J = \pi_{J,K}(\nu_K). \tag{2.13}$$

Está claro que ν_J no depende de K. De hecho, si $K' \in \mathcal{C}$ y $J \subset K'$ entonces tomamos $K^* \supset K \cup K'$ tal que $K^* \in \mathcal{C}$ y tenemos que

$$\nu_K = \pi_{K,K^*}(\nu_{K^*}) \tag{2.14}$$

se cumple por la unicidad de la medida de martingala para el $K-$ísimo mercado. De manera análoga

$$\nu_{K'} = \pi_{K',K^*}(\nu_{K^*}),$$

y por lo tanto tenemos que

$$\pi_{J,K}(\nu_K) = \pi_{J,K}\pi_{K,K^*}(\nu_{K^*}) = \pi_{J,K^*}(\nu_{K^*}) = \pi_{J,K'}\pi_{K',K^*}(\nu_{K^*}) = \pi_{J,K'}(\nu_{K'}).$$

Para ver que $(\nu_J)_{J\in\mathcal{P}_F(I)}$ es un sistema proyectivo basta recordar (2.13) y (2.14). Entonces, 3.2 se cumple.

Para probar 4.1 es suficiente darse cuenta de que las proyecciones de ν_I son únicas en un conjunto cofinal $\mathcal{C}$. En consecuencia, las proyecciones son únicas en todo el conjunto $\mathcal{P}_F(I)$ y la unicidad de ν_I sale trivialmente de la unicidad del límite proyectivo de sistemas de medidas de Radon (véase: Schwartz (1973)).

Finalmente, para demostrar 4.2, consideremos el activo arriba S_φ. Como en la demostración de la Proposición 2 se puede establecer que el mercado $(S_i)_{i\in I} \cup (S_\varphi)$ está libre de arbitraje si y solo si para cada $K \in \mathcal{P}_F(I)$ con $K \supset J$ el mercado

$$\left(\pi_{\{i\},K}\right)_{i\in K} \cup (\varphi \circ \pi_{J,K}) \tag{2.15}$$

está libre de arbitraje. En particular, si esto se verifica y $K \in \mathcal{C}$ la unicidad de $\pi_{K,I}(\nu_I)$ lleva a (2.12). Por otro lado, (2.12) garantiza que (2.15) está libre de arbitraje para cada $K \in \mathcal{C}$ y, por lo tanto, para cada $K \in \mathcal{P}_F(I)$. □

2.6 Mercados Incompletos y Valoración de Nuevos Activos

El último teorema y la expresión (2.12) señalan que las probabilidades neutrales al riesgo proyectivamente equivalentes pueden proporcionar reglas de valoración que permiten valorar nuevos activos en mercados completos. Es interesante entonces ilustrar el hecho de que la valoración de nuevos activos no siempre es factible en mercados incompletos. Además, esto también anticipa algunas intuiciones sobre los motivos por los que el Enfoque de Sistemas Proyectivos falla cuando se trata con el Ejemplo 2.

Observación 5 *Consideremos el mercado del Ejemplo* 2 *más un nuevo activo* S_φ *cuyo pago en* T *está dado por*

$$f_\varphi = (2f_1 - 1)^+ = \begin{cases} 1, & \omega = 1 \\ 0, & \omega \neq 1. \end{cases}$$

Obviamente, S_φ *se puede ver como una opción de compra que vence en* T*, con el precio de ejercicio igual a una unidad monetaria y el activo subyacente compuesto por dos unidades de* S_1*. También es fácil comprobar que*

$$f_\varphi = \varphi \circ f_{\{0,1\}}$$

si

$$\varphi : \mathbb{R}^{\{0,1\}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

está dado por

$$\varphi(x, y) = (2y - 1)^{+} ,$$

entonces S_φ *tiene la forma general propuesta en (2.11).*[6]

Ahora vamos a demostrar que es imposible proporcionar a S_φ *un precio* $p_\varphi \in \mathbb{R}$ *al menos que aceptemos la existencia de arbitraje. Primero,* $\mu(f_\varphi \geq 0) = 1$ *y* $\mu(f_\varphi > 0) > 0$*, junto con la ausencia de arbitraje, implican que* $p_\varphi > 0$*. Segundo, si el mercado*

$$(S_n)_{n \in \mathbb{N}} \cup (S_\varphi)$$

está libre de arbitraje entonces (véase la Definición 1*) el mercado*

$$\{S_0, S_1, ..., S_m, S_\varphi\} \tag{2.16}$$

está libre de arbitraje para cada $m \in \mathbb{N}$*. Escojamos* m *tal que*

$$\frac{1}{m+1} < p_\varphi$$

Entonces es fácil demostrar que cada medida neutral al riesgo $\tilde{\nu}_m$ *para el mercado* $\{S_0, S_1, ..., S_m\}$ *verifica*

$$\tilde{\nu}_m(1) \leq \frac{1}{m+1}$$

[6]Observe que φ está acotado excepto un conjunto $\mu_{\{0,1\}}-$nulo.

Por lo tanto, el precio p_φ no previene la existencia de arbitraje en (2.16). $\square$

Teorema 5 y la Observación 7 abajo proporcionan algunos modelos generales para los que la implicación 3.4 $\Rightarrow$ 3.3 se cumple. Además, esto demuestra que las probabilidades neutrales al riesgo proyectivamente equivalentes, si existen, proporcionan reglas de valoración también para mercados incompletos. Antes de presentarlos necesitamos unos conceptos adicionales.

Definición 4 *Supongamos que el modelo inicial está libre de arbitraje. Vamos a decir que la propiedad P se cumple si para cada $J \in \mathcal{P}_F(I)$ y cada $\varphi \in L^\infty\left(\mathbb{R}^J, \mathcal{B}_J, \mu_J\right)$, el nuevo activo S_φ cuyo pago en T está dado por $f_\varphi = \varphi \circ f_J \in L^\infty(\mu)$ tiene por lo menos un precio $p_\varphi \in \mathbb{R}$ tal que el mercado $(S_i)_{i\in I} \cup (S_\varphi)$ esté libre de arbitraje.* $\square$

Definición 5 *Supongamos que el modelo inicial está libre de arbitraje y para cada $J \in \mathcal{P}_F(I)$ consideremos el conjunto $\mathcal{R}_J$ de medidas se martingalas para $J-$ísimo mercado. La Proposición 2 garantiza que cada $\mathcal{R}_J$ está no-vacío. Vamos a decir que la propiedad *se cumple si existe un conjunto cofinal $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}_F(I)$ tal que $\mathcal{R}_J$ es uniformemente μ_J-contínuo para cada $J \in \mathcal{C}$, es decir, para cada $J \in \mathcal{C}$ y cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que la implicación*

$$B_J \in \mathcal{B}_J \text{ y } \mu_J(B_J) \leq \delta \Longrightarrow \theta_J(B_J) \leq \varepsilon, \text{para cada } \theta_J \in \mathcal{R}_J$$

se cumple. $\square$

Definición 6 *Decimos que el modelo inicial verifica la propiedad* ** *si existe un conjunto cofinal* $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}_F(I)$ *tal que para cada* $J \in \mathcal{C}$ *y cada conjunto compacto* $X_J \subset \mathbb{R}^J$ *con el interior vacío y probabilidad positiva* ($\mu_J(X_J) > 0$) *existe un* μ_J- *átomo* Y_J *con probabilidad positiva y tal que* $Y_J \subset X_J$. $\square$

Observación 6 *La propiedad* * *se cumple en muchos casos interesantes. Por ejemplo, se cumple en el caso de mercados completos ya que* $\mathcal{R}_J$ *es un singleton. Es fácil ver que también se verifica si para cualquier* μ_J *(o su familia cofinal) existe una colección finita y disjunta de* μ_J-*átomos*

$$B_J^1, B_J^2, ...B_J^r$$

(r dependiente de J) tal que

$$\sum_{s=1}^{r} \mu_J(B_J^s) = 1.$$

En particular, el modelo de Ejemplo 2 verifica la propiedad *.

De manera análoga, la propiedad ** *también se cumple para muchos casos interesantes como mercados completos o Ejemplo 2. En el caso más general, es fácil probar que la propiedad se cumple si cualquier* $\mathbb{R}^J$ *(o su familia cofinal) se puede dividir en una colección contable y disjunta de* μ_J-*átomos.* $\square$

Teorema 5 5.1) *Si existe* ν_I*, medida de martingala proyectivamente equivalente, entonces el modelo inicial está libre de arbitraje y verifica la propiedad* P*. Además, (2.12) es un precio de (2.11) que hace que el mercado* $(S_i)_{i\in I} \cup (S_\varphi)$ *esté libre de arbitraje.*

5.2) *Supongamos que* I *es contable. Si el modelo inicial está libre de arbitraje, verifica la propiedad* P, * *y* ***, entonces existe una medida de martingala proyectivamente equivalente.*

Demostración: Véase Apéndice. □

Observación 7 *Teorema* 4 *indica que la completitud es una condición suficiente para garantizar la existencia de medidas neutrales al riesgo proyectivamente equivalentes y para que nuevos activos se puedan valorar en mercados libres de arbitraje. Sin embargo, es interesante mostrar que la completitud no es una condición necesaria. De hecho, muchas alternativas se pueden dar para que la implicación* 3.4 $\Rightarrow$ 3.3 *se cumpla.*

Una de ellas se produce si se aplica los resultados de Balbás et al. (2002). Entonces se puede considerar un proceso dinámico de precios en tiempo discreto

$$S(\omega, t) = (S_0(\omega, t), S_1(\omega, t), ..., S_m(\omega, t)) : \Omega \times \{0 < t_1 < t_2 < ...\} \longrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$$

con un número finito $m+1 \in \mathbb{N}$ *de activos y un número infinito* $\{0 < t_1 < t_2 < ...\}$ *de fechas de negociación. Como es habitual, el proceso de precios tiene que ser adaptado a* *la llegada de nueva información. En este marco la ausencia de arbitraje no implica la existencia de medidas de martingalas, como se establece en Back y Pliska (1991). Pero el estudio de Balbás et al. (2002) demuestra la existencia de medidas de martingalas proyectivamente equivalentes, sin tener en cuenta la completitud del modelo. Entonces si consideramos un modelo de un periodo con infinitos activos tal que*

$$I = \{0, 1, ..., m\} \times \{t_1 < t_2 < ...\},$$

$$p_{(a,b)} = S_a(\omega, 0)$$

para cada $(a, b) \in I$ *y*

$$f_{(a,b)}(\omega) = S_a(\omega, b)$$

para cada $(a, b) \in I$ *y casi todo* $\omega \in \Omega$*, entonces la equivalencia entre* 3.3 *y* 3.4 *también se verificará para mercados incompletos. Este tipo de modelos se pueden llamar "finitamente generados" y, como ya lo hemos dicho en la introducción y al principio de la Sección* 3*, nuestro Ejemplo* 1 *es un caso particular que se produce a partir del contraejemplo de Back y Pliska (1991) (para* $m = 1$*). De algún modo, la existencia de Ejemplo* 2 *muestra que los modelos de un periodo con un cardenal infinto y contable de activos son "más generales" que los modelos dinámicos en tiempo discreto con una colección finita de activos.* □

2.7 Conclusiones

Se ha visto que Los Teoremas de Representación son cruciales en Finanzas Matemáticas. Con respecto a los mercados con infinitos activos, la caracterización de ausencia de arbitraje a través de la existencia de medidas de martingalas equivalentes falla en general.

Este Capítulo utiliza el enfoque de sistemas proyectivos para establecer la equivalencia entre la ausencia de arbitraje y la existencia de medidas de martingalas proyectivamente equivalentes, que proporcionan reglas de valoración que permiten valorar nuevos activos. El análisis parece ser bastante general ya que no se hacen ningunos supuestos sobre el conjunto de activos o sobre propiedades de futuros precios.

Resulta que la equivalencia se da en muchos casos significativos como, por ejemplo, mercados completos o finitamente generados. Además, el hecho de que los mercados finitamente generados pueden, de algún modo, extender muchos modelos dinámicos de valoración, permite pensar que el análisis de mercados con infinitos activos debería merecer una atención importante en Finanzas Matemáticas.

La reglas de valoración proyectivamente equivalentes han sido encontradas también para mercados más complejos. Bajo unas propiedades de regularidad, solamente la posibilidad de valorar nuevos activos es necesaria y suficiente.

El enfoque de sistemas proyectivos permite extender el conjunto de estados de naturaleza e identificarlo con el conjunto de precios reales. Entonces una equivalencia completa entre la medida de probabilidad inicial y la medida de martingala no se da en general. Sin embargo, la existencia de densidades entre las probabilidades "reales"y"neutrales al riesgo" está garantizada a través de la introducción del concepto de "equivalencia proyectiva" que implica que ambas medidas, la medida de martingala y la medida de probabilidad inicial generan proyecciones equivalentes

2.8 Apéndice. Demostración del Teorema 5

Lema 6 *Suponga que el mercado está libre de arbitraje. Entonces existe un sistema proyectivo* $(\lambda_J)_{J\in\mathcal{P}_F(I)}$ *de medidas de probabilidad de Radon tal que*

6.1) *El soporte de* λ_J *está contenido en (2.7) para cada* $J \in \mathcal{P}_F(I)$.

6.2) *Si* $J \in \mathcal{P}_F(I)$ *entonces* $p_i = \int_{\mathbb{R}^J} \pi_{\{i\},J} d\lambda_J$ *para cada* $i \in J$.

6.3) *Si el mercado verifica la propiedad* P, $J \in \mathcal{P}_F(I)$ *y* $B_J \subset \mathbb{R}^J$ *es un conjunto de Borel tal que* $\mu_J(B_J) \neq 0$, *entonces el sistema proyectivo* $(\lambda_K)_{K\in\mathcal{P}_F(I)}$ *se puede construir de tal manera que* $\lambda_J(B_J) \neq 0$.

6.4) *Si el mercado verifica la propiedad* * *entonces* λ_J *es* μ_J-*contínua para cada* $J \in \mathcal{P}_F(I)$.

Demostración: Para $J \in \mathcal{P}_F(I)$ vamos a considerar el conjunto compacto C_J dado por (2.7). Además, $\mathcal{R}_J^*$ va a denotar el conjunto de medidas de probabilidad de Radon sobre la $\sigma-$álgebra de Borel de C_J, y$\mathcal{R}_J$ está compuesto por aquellos $\rho_J \in \mathcal{R}_J^*$ tales que ρ_J y μ_J son equivalentes y

$$p_i = \int_{C_J} \pi_{\{i\},J} d\rho_J \tag{2.17}$$

para cada $i \in J$. La ausencia de arbitraje y la Proposición 2 implican que $\mathcal{R}_J$ es no vacío.

Por otro lado, el Teorema de Representación de Riesz permite identificar el espacio $\mathcal{C}^*(C_J)$ de medidas de Radon (no necesariamente positivas) sobre C_J con el dual de $\mathcal{C}(C_J)$, espacio de funciones contínuas sobre C_J, y el Teorema de Alaoglu garantiza que $\mathcal{R}_J^*$ sea $^*-$débilmente compacto ya que este conjunto es obviamente $^*-$débilmente cerrado en la bola de unidad de $\mathcal{C}^*(C_J)$. En consecuencia, el Teorema de Tijonov lleva a la compacidad de

$$\mathcal{R}^* = \Pi_{J \in \mathcal{P}_F(I)} \mathcal{R}_J^*.$$

Fijemos el elemento

$$(\rho_J)_{J \in \mathcal{P}_F(I)} \in \mathcal{R}^* \tag{2.18}$$

de tal manera que

$$\rho_J \in \mathcal{R}_J \tag{2.19}$$

para cada $J \in \mathcal{P}_F(I)$. Dados $J, H \in \mathcal{P}_F(I)$ denotemos $J^c = I \setminus J$ y consideremos

$$\lambda_J^H = \pi_{J \cap H, J} (\rho_J) \otimes \mu_{J^c \cap H},$$

donde $\otimes$ denota el habitual producto tensorial de medidas de Radon (véase: Schwartz (1973)).[7] Entonces es fácil ver que λ_J^H y μ_H son equivalentes.

Para cada $J \in \mathcal{P}_F(I)$ consideramos el elemento

$$\Lambda_J = \left(\lambda_J^H\right)_{H \in \mathcal{P}_F(I)} \in \mathcal{R}^*$$

La compacidad de $\mathcal{R}^*$ implica la existencia de

$$\left(\lambda_J\right)_{J \in \mathcal{P}_F(I)} \in \mathcal{R}^*$$

punto de aglomeración de la red $\left(\Lambda_J\right)_{J \in \mathcal{P}_F(I)} \subset \mathcal{R}^*$.

Para ver que $\left(\lambda_J\right)_{J \in \mathcal{P}_F(I)}$ es un sistema proyectivo, consideremos $J, K \in \mathcal{P}_F(I)$ con $J \subset K$. Claramente,

$$\left(\lambda_J, \lambda_K\right) \in \mathcal{R}_J^* \times \mathcal{R}_K^* \tag{2.20}$$

es un punto de aglomeración de la red

$$\left(\lambda_H^J, \lambda_H^K\right)_{H \supset K} = \left(\pi_{J,H}\left(\rho_H\right), \pi_{K,H}\left(\rho_H\right)\right)_{H \supset K} \subset \mathcal{R}_J^* \times \mathcal{R}_K^*$$

Entonces, (2.20) es el punto de aglomeración

$$\left(\pi_{J,K}\pi_{K,H}\left(\rho_H\right), \pi_{K,H}\left(\rho_H\right)\right)_{H \supset K}$$

y la continuidad de

$$\mathcal{R}_K^* \ni \alpha \longrightarrow \pi_{J,K}\left(\alpha\right) \in \mathcal{R}_J^*$$

[7] Obviamente $\lambda_J^H = \pi_{H,J}\left(\rho_J\right)$ siempre cuando $H \subset J$ y $\lambda_J^H = \mu_H$ si $H \subset J^c$.

(donde ambos espacios están dotados con la topología $^*-$débil) lleva a

$$\lambda_J = \pi_{J,K}\left(\lambda_K\right). \tag{2.21}$$

Demostremos 6.2. Consideremos $J \in \mathcal{P}_F(I)$ y $i \in J$. Está claro que λ_J es un punto de aglomeración de

$$\left(\lambda_H^J\right)_{H\supset J} = \left(\pi_{J,H}\left(\rho_H\right)\right)_{H\supset J}$$

y por lo tanto la continuidad de $\pi_{\{i\},J} : \mathbb{R}^J \longrightarrow \mathbb{R}$ implica que

$$\int_{\mathbb{R}^J} \pi_{\{i\},J} d\lambda_J = \int_{\mathsf{C}_J} \pi_{\{i\},J} d\lambda_J$$

es un punto de aglomeración de

$$\left(\int_{\mathsf{C}_J} \pi_{\{i\},J} d\left(\pi_{J,H}\left(\rho_H\right)\right)\right)_{H\supset J} = \left(\int_{\mathsf{C}_H} \pi_{\{i\},H} d\rho_H\right)_{H\supset J} = \left(p_i\right)_{H\supset J}$$

por (2.17) y (2.19).

Demostremos 6.3. Tomemos $J \in \mathcal{P}_F(I)$ y el conjunto de Borel $B_J \subset \mathbb{R}^J$ tal que $\mu_J(B_J) > 0$. Como μ_J es una medida de Radon con soporte en C_J, entonces existe un conjunto compacto $\tilde{C}_J \subset B_J \cap C_J$ con $\mu_J(\tilde{C}_J) > 0$. Vamos a probar que $\lambda_J(\tilde{C}_J) > 0$. Añadamos el activo nuevo S_φ con pago final $f_J \circ 1_{\tilde{C}_J}$, siendo

$$1_{\tilde{C}_J} = \begin{cases} 1 \text{ if } \omega \in \tilde{C}_J \\ 0 \text{ if } \omega \notin \tilde{C}_J \end{cases}$$

la función característica de $\tilde{C}_J$. La propiedad P implica la existencia de un (puede ser que no único) precio $p_\varphi > 0$ que hace que el mercado esté libre de arbitraje. Entonces, tal como en la demostración de la Proposición 2, para cada $H \supset J$ el mercado $H-$ísimo sigue siendo libre de arbitraje si añadimos el pago

$$1_{\pi_{J,H}^{-1}(\tilde{C}_J)\cap C_H}$$

con precio p_φ. En consecuencia, existen medidas de martingalas para este nuevo mercado, es decir, (2.18) se puede elegir de tal manera que (2.19) y $\rho_H(\pi_{J,H}^{-1}(\tilde{C}_J) \cap C_H) = p_\varphi$, para cada $H \supset J$. Entonces

$$\lambda_H^J(\tilde{C}_J) = p_\varphi$$

para cada $H \supset J$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $p_\varphi - \varepsilon > 0$. Como λ_J es una medida de Radon, entonces existe un conjunto abierto G_J tal que

$$G_J \cap C_J \supset \tilde{C}_J$$

y

$$\lambda_J((G_J \cap C_J) \setminus \tilde{C}_J) \leq \varepsilon.$$

El Lema de Uryson garantiza la existencia de una función contínua $h : C_J \longrightarrow [0,1]$ que es igual a uno en $\tilde{C}_J$ y desaparece en $C_J \setminus G_J$. Si $H \supset J$,

$$\int_{C_J} h d\lambda_H^J \geq \lambda_H^J(\tilde{C}_J) = p_\varphi$$

Entonces, $\int_{C_J} hd\lambda_J$, punto de aglomeración $\left(\int_{C_J} hd\lambda_H^J\right)_{H\supset J}$, verifica

$$\int_{C_J} hd\lambda_J \geq p_\varphi$$

Entonces,

$$\lambda_J(\tilde{C}_J) = \int_{\tilde{C}_J} hd\lambda_J = \int_{C_J} hd\lambda_J - \int_{C_J\setminus G_J} hd\lambda_J - \int_{(G_J\cap C_J)\setminus \tilde{C}_J)} hd\lambda_J \geq p_\varphi - \varepsilon > 0.$$

Finalmente, para demostrar 6.4, denotemos por $\mathcal{C}$ al conjunto cofinal de $\mathcal{P}_F(I)$ cuya existencia está asegurada por la propiedad *. Supongamos que $J \in \mathcal{P}_F(I)$ y $B_J \subset \mathbb{R}^J$ es un conjunto de Borel tal que $\mu_J(B_J) = 0$. Tenemos que probar que λ_J desaparece en B_J pero, siendo λ_J una medida de Radon podemos asumir que B_J está cerrado. Además, (2.21) permite asumir que $J \in \mathcal{C}$.

Fijemos $\varepsilon > 0$. Ya que $\pi_{J,H}(\rho_H)$, $H \supset J$, son uniformemente regulares por (2.19) y por la propiedad *, podemos tomar un conjunto compacto $\tilde{C}_J \subset C_J \setminus B_J$ tal que

$$\pi_{J,H}(\rho_H)\left((C_J \setminus B_J) \setminus \tilde{C}_J\right) \leq \varepsilon$$

para cada $H \supset J$. Si $C_J \cap B_J$ es no-vacío, entonces el Lema de Uryson garantiza la existencia de $h : C_J \longrightarrow [0,1]$ contínua y tal que h desaparece en $\tilde{C}_J$ y es igual a uno en $C_J \cap B_J$. Para cada $H \supset J$ se tiene que

$$\pi_{J,H}(\rho_H)(C_J \cap B_J) = 0.$$

Entonces

$$0 \leq \int_{C_J} hd\lambda_H^J = \int_{(C_J\setminus B_J)\setminus\tilde{C}_J} hd\lambda_H^J + \int_{C_J\cap B_J} hd\lambda_H^J \leq \varepsilon + \int_{C_J\cap B_J} hd\left(\pi_{J,H}(\rho_H)\right) = \varepsilon$$

y

$$0 \leq \lambda_J (C_J \cap B_J) \leq \int_{C_J} h d\lambda_J \leq \varepsilon$$

ya que $\int_{C_J} h d\lambda_J$ es punto de aglomeración de $\left(\int_{C_J} h d\lambda_H^J\right)_{H \supset J}$. En consecuencia, $\lambda_J (C_J \cap B_J) = 0$ porque ε puede tomar cualquier valor positivo.[8] $\square$

Lema 7 *Supongamos que el mercado está libre de arbitraje y verifica la propiedad P y* *. *Tomemos* $K \in \mathcal{P}_F(I)$ *y una colección contable* $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}_K$ *tal que* $\mu_K(B_n) \neq 0$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$. *Entonces el sistema proyectivo* $(\lambda_J)_{J\in\mathcal{P}_F(I)}$ *del Lema* 6 *se puede construir de tal manera que* $\lambda_K(B_n) \neq 0$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Vamos a utilizar la misma notación que en la demostración del Lema 6. Recordando 6.3 consideramos el sistema proyectivo $(\lambda_J^n)_{J\in\mathcal{P}_F(I)}$ tal que

$$\lambda_K^n(B_n) > 0 \tag{2.22}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}.}$ una secuencia decreciente de números reales positivos tale que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n = 1.$$

[8]Podría ser interesante observar que el Supuesto 1 no es necesariamente crucial en la demostración del lemma arriba. De hecho, si falla entonces el papel de $\mathcal{C}(C_J)$ y $\mathcal{C}^*(C_J)$ se puede sustituir por $L^\infty\left(\mathbb{R}^J, \mathcal{B}_J, \mu_J\right)$ y su dual $L_\infty^*\left(\mathbb{R}^J, \mathcal{B}_J, \mu_J\right)$, espacio de medidas finitamente aditivas de valores reales sobre $\mathcal{B}_J$ con variación finita y que desaparecen en cada conjunto μ_J-nulo.

Tomemos finalmente

$$\lambda_J = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \lambda_J^n$$

par cada $J \in \mathcal{P}_F(I)$. La convergencia tanto en norma como en la topología $^*-$débil de $\mathcal{C}^*(C_J)$ está garantizada por el criterio de Weierstrass. Entonces, es fácil ver que $(\lambda_J)_{J\in\mathcal{P}_F(I)}$ es un sistema proyectivo que verifica 6.1 y 6.2 y tal que λ_J es μ_J-contínua para cada $J \in \mathcal{P}_F(I)$. Además, $\lambda_K(B_n) \neq 0$ se da trivialmente de (2.22) y $\lambda_K \geq \epsilon_n \lambda_K^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. □

Observación 8 *Consideremos un espacio medible positivo $(W, \sum, \theta)$. Es interesante recordar el Lema de Saks (véase: Saks (1933))) que garantiza que para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición disjunta $W_1, W_2, ..., W_s, W_{s+1}, ...W_r$ de W tal que $W_1, W_2, ..., W_s$ son $\theta-$átomos y $\theta(W_i) \leq \varepsilon$, $i = s+1, ..., r$. Obviamente, se puede aplicar este lema otra vez en cada W_i, $i = s+1, ..., r$, y para $\varepsilon/2$. Es fácil probar por inducción la existencia de una secuencia disjunta $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que la restricción de θ a W_0 es no-atómica y W_n es un átomo para $n = 1, 2, ...$.* □

Lema 8 *Supongamos que el mercado está libre de arbitraje y verifica las propiedades P y *. Tomemos $K \in \mathcal{P}_F(I)$. Entonces el sistema proyectivo $(\lambda_J)_{J\in\mathcal{P}_F(I)}$ del Lema 6 puede ser construido de tal manera que $\lambda_K(B_K) \neq 0$ para cada conjunto de Borel $B_K \subset \mathbb{R}^K$ tal que $\mu_K(B_K) > 0$ y B_K es un conjunto abierto o un μ_K-átomo.*

Demostración: Según la Observación 8, consideremos una partición $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^K$ tal que μ_K es no-atómica en W_0 y $(W_n)_{n=1}^{\infty}$ son μ_K-átomos. Además, tomemos una base contable $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ de la topología habitual de $\mathbb{R}^K$. Entonces el Lema 7 asegura que el sistema proyectivo se puede construir de tal manera que λ_K no desaparece en aquellos elementos de

$$(W_n)_{n=1}^{\infty} \cup (G_n)_{n=1}^{\infty}$$

con la medida μ_K positiva. Entonces, el lema es cierto. $\square$

Demostración del Teorema 5. Supongamos que existe la medida neutral al riesgo proyectivamente equivalente ν_I y consideremos el modelo $(S_i)_{i\in I} \cup (S_\varphi)$ donde el precio p_φ de S_φ está dado por (2.12). Entonces, trivialmente el modelo $(S_j)_{j\in H} \cup (S_\varphi)$ está libre de arbitraje para cada $H \in \mathcal{P}_F(I)$ con $H \supset J$. Ahora, podemos demostrar que $(S_j)_{j\in I} \cup (S_\varphi)$ está libre de arbitraje siguiendo el mismo procedimiento que en la demostración de la Proposición 2.

Para demostrar 5.2, procedemos igual que en las Observaciones 3 y 4 y consideramos el subconjunto cofinal $(J_n)_{n=1}^{\infty}$. Según el lema anterior, para cada $m = 1, 2, ...$ natural tomemos el sistema proyectivo

$$(\lambda_{J_n}^m)_{n=1}^{\infty}$$

tal que $\lambda_{J_m}^m(B_m) > 0$ if $\mu_{J_m}(B_m) > 0$ y B_m es abierto o $\mu_{J_m}-$átomo. Tomemos finalmente una secuencia $(\epsilon_m)_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ como en la demostración del Lema 7, es decir, positiva, decreciente y que verifique $\sum_{m=1}^{\infty} \epsilon_m = 1$. Pongamos

$$\nu_{J_n} = \sum_{m=1}^{\infty} \epsilon_m \lambda_{J_n}^m$$

$n = 1, 2, ...$ Otra vez, como en la demostración del Lema 7, el criterio de Weierstrass garantiza la convergencia en topología de la norma. Solo queda por demostrar la implicación

$$\mu_{J_m}(B_m) > 0 \Longrightarrow \nu_{J_m}(B_m) > 0.$$

Ya que tratamos con las medidas de Radon se puede suponer que B_m es compacto e incluido en C_{J_m}. Si B_m^o denota el interior de B_m y $\mu_{J_m}(B_m^o) > 0$ entonces $\nu_{J_m}(B_m^o) > 0$. De otra manera, tenemos que $B_m \setminus B_m^o$ es un conjunto compacto con interior vacío y medida μ_{J_m} positiva. La propiedad ** implica que $B_m \setminus B_m^o$ contiene un $\mu_{J_m}-$átomo con medida μ_{J_m} positiva. Finalmente, tenemos que $\nu_{J_m}(B_m \setminus B_m^o) > 0$. $\square$

Bibliografía

[1] Artzner, P., F. Delbaen, J.M. Eber and D. Heath, 1999. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 9, 203-228.

[2] Back, K. and S.R. Pliska, 1991. On the fundamental theorem of asset pricing with an infinite state space. *Journal of Mathematical Economics*, 20, 1–18.

[3] Balbás, A., M. Mirás and M.J. Muñoz-Bouzo, 2002. Projective system approach to the martingale characterization of the absence of arbitrage. *Journal of Mathematical Economics*, 37, 4, 311-323.

[4] Chamberlain, G. and M. Rothschild, 1983. Arbitrage, factor structure, and mean-variance analysis on large assets. *Econometrica*, 51, 1281-1304.

[5] Chateauneuf, A., R. Kast and A. Lapied, 1996. Choquet pricing for financial markets with frictions. *Mathematical Finance*, 6, 3, 323-330.

[6] Clark, S.A., 1993. The valuation problem in arbitrage price theory. *Journal of Mathematical Economics*, 22, 5, 463-478.

[7] Dalang, R. C., Morton, A. and W. Willinger, 1990. Equivalent martingale measures and no-arbitrage in stochastic securities market models. *Stochastics and Stochastic Reports,* 29, 185–201.

[8] Delbaen, F. and W. Schachermayer, 1998. The fundamental theorem of asset pricing for unbounded stochastic processes. *Mathematische Annalen* 312, 2, 215–250.

[9] Föllmer, H. and A. Schied, 2002. Convex measures of risk and trading constraints. *Finance and Stochastics*, 6, 429-447.

[10] Harrison, M. and D.M. Kreps, 1979. Martingale and arbitrage in multiperiod security markets. *Journal of Economic Theory*, 20, 381–408.

[11] Jacod, J. and A. Shiryaev, 1998. Local martingales and the fundamental asset pricing theorems in the discrete-time case. *Finance and Stochastics*, 2, 3, 259–273.

[12] Jouini, E. and H. Kallal, 1995. Martingales and arbitrage in securities markets with transaction costs. *Journal of Economic Theory*, 66, 178-197.

[13] Jouini, E. and H. Kallal, 2001. Efficient trading strategies in presence of market frictions. *Review of Financial Studies*, 14, 343-369.

[14] Kopp, P.E., 1984, *Martingales and stochastic integrals*. Cambridge University Press, Cambridge.

[15] Musial, K., 1980. Projective limits of perfect measure spaces. *Fundamenta Mathematicae*, 40, 163–189.

[16] Rockafellar, R. and S. Uryasev, 2000. Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of Risk*, 2, 21-41.

[17] Rockafellar, R. and S. Uryasev, 2002. Conditional value at risk for general loss distributions. *Journal of Banking and Finance*, 26, 1443-1471.

[18] Saks, S., 1933. Addition to the note on some functionals. *Transactions of the American Mathematical Society*, 35, 4, 965-970.

[19] Schachermayer, W., 1992. A Hilbert space proof of the fundamental theorem of asset pricing in finite discrete time. *Insurance: Mathematics and Economics*, 11, 4, 249–257.

[20] Schachermayer, W., 2004. The fundamental theorem of asset pricing under proportional transaction costs in finite discrete time. *Mathematical Finance*, 14, 1, 19–48.

[21] Schwartz, L., 1973. *Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures*. Oxford University Press. London.

Capítulo 3

”Factores de Descuento Estocástico y la Dominancia Global en Mercados Imperfectos”

3.1 Introducción

Ausencia de arbitraje es un supuesto básico cuando se trata con los Modelos de Valoración y/o Equilibrio. Ha sido caracterizada por la existencia de precios de estado o probabilidades neutrales al riesgo con respecto a las que el proceso de precios es una martingala (Harrison and Kreps, 1979, Dalang *et al.* 1990). Además, ausencia de arbitraje implica el cumplimiento de la Ley de Precio Único (LPU) que lleva a la existencia de Factores de Descuento Estocástico (FDE) que proporcionan las reglas de valoración y, si el riesgo se mide mediante las desviaciones típicas, también las carteras óptimas (véase, por ejemplo: Chamberlain and Rothschild, 1983, Hansen and Richard, 1987, Hansen and Jagannathan, 1997). En particular, si se considera el clásico $CAPM$, existe una relación cercana entre la Cartera del Mercado y el FDE. Finalmente, si el mercado es completo, el FDE se puede entender como la función de densidad entre la probabilidad neutral al riesgo y la probabilidad inicial.

Imperfecciones de mercado reciben cada vez más atención de los investigadores ya que capturan mejor las propiedades de algunos importantes mercados financieros. El efecto de fricciones de mercado sobre los precios de activos financieros ha sido estudiado por ejemplo por: Garman and Ohlson (1981), He and Modest (1995), Luttmer (1996) and Prisman (1986, 1997), Bizid and Jouini (2005). Cuando existen las fricciones, la propiedad de martingala de mercados libres de arbitraje está verificada por el proceso de precios que está situado entre los procesos de precios bid y ask (Jouini and Kallal, 1995, Schachermayer, 2004, entre otros). Además, una clase de FDE se pueden introducir en el sentido de que existen pagos teóricos (pero no necesariamente alcanzables) δ tales que la esperanza de cada pago distorsionado X, es decir, la esperanza de $X\delta$, tiene que estar entre la horquilla inicial de los precios bid/ask de X (Luttmer, 1996). Además, para funciones de utilidad típicas, en las inversiones óptimas solo se adquieren (venden) algunos activos cuyo precio bid (ask) se obtiene como la esperanza de su distorsionado pago final (He and Modest, 1995).

Jouini y Kallal (2001) introducen y caracterizan un concepto general de dominancia estocástica (o eficiencia) en mercados imperfectos. Sin embargo, hasta donde sabemos, la existencia de carteras globalmente dominadas en mercados imperfectos libres de arbitraje todavía no ha sido tratada en profundidad, y la noción de FDE tampoco ha sido relacionada con las carteras globalmente no dominadas. La primera contribución de este Capítulo es el análisis de una nueva y bastante general definición de la dominancia/eficiencia. Una cartera se llama globalmente dominada si existe una estrategia alternativa más barata que tiene pago superior. La eficiencia de Jouini y Kallal (2001) implica la nuestra pero la implicación inversa no se cumple en general.

La segunda contribución de este Capítulo es la introducción de un nuevo tipo de FDE que permite caracterizar y calcular en práctica aquellas estrategias que no están globalmente dominadas. Además, este nuevo tipo de FDE está también íntimamente relacionado con carteras óptimas en el contexto de media-varianza. Por lo tanto, nuestro FDE podría ser crucial a la hora de tratar con los Problemas de Selección de Carteras en el caso de mercados imperfectos que cada vez reciben más atención tanto de los investigadores como del mundo financiero real.

En lo que se refiere a los resultados de Jouini y Kallal (1995) o Luttmer (1996), nuestros FDE muestran diferencias importantes. En primer lugar, nosotros no solamente analizamos la ausencia de arbitraje sino también una clase de eficiencia. Por otro lado, en comparación con He y Modest (1995) o Jouini y Kallal (2001), nosotros tratamos con un concepto de eficiencia mucho más débil, que no está basado en ningún tipo de función de utilidad. En consecuencia, aquellas estrategias que no son eficientes desde nuestro punto de vista no deberían ser consideradas por ningún Problema de Selección de Carteras. Este hecho podría ser especialmente interesante cuando se trata con activos cuyos retornos siguen distribuciones complejas (por ejemplo, activos derivados).

Como vamos a demostrar en el Capítulo 4, resultados teóricos de este Capítulo tienen una inmediata aplicación empírica ya que proporcionan una metodología sencilla e intuitiva que puede ser utilizada para determinar y valorar carteras eficientes en mercados financieros reales. Además, aunque nuestro análisis en el Capítulo 4 trata con el mercado de derivados ligados al petróleo $NYMEX$, esta metodología es lo suficientemente general para poder aplicarla en cualquier mercado financiero. Por lo tanto, permite estudiar mercados emergentes y/o ilíquidos que cada vez resultan más atractivos para los brokers e inversores que procuran correctamente valorar y/o diversificar su riesgo. Hay que tener en cuenta que las imperfecciones y otros fallos del mercado pueden hacer que sea imposible aplicar métodos clásicos de valoración de mercados sin fricciones. Por lo tanto, los resultados de este Capítulo pueden ser de una gran utilidad práctica ya que proporcionan a los brokers nuevos y sencillos métodos de valoración e inversión. Estos métodos extienden el método de valoración propuesto en Balbás *et al.* (1999) para derivados ligados a las catástrofes.[1] Además, teniendo en cuenta que agregando las estrategias eficientes el resultado final puede estar dominado, los brokers podrían también verificar la eficiencia de la cartera global de sus clientes. Si ésta está dominada, podrían construir y comprar la cartera dominante, en lugar de la inicial, para generar beneficios adicionales.

El Capítulo tiene la siguiente estructura: en la Sección 2 introducimos el modelo general del mercado, presentamos los supuestos generales y definiciones de los principales conceptos. En la Sección 3 extendemos la noción de FDE al caso de mercados imperfectos y presentamos el resultado que establece la existencia de FDE en mercados con fricciones en un marco dinámico general. En la Sección 4 consideramos un caso particular estático que nos permite establecer la metodología que puede ser aplicada para analizar y valorar carteras eficientes en mercados financieros reales. En la Sección 5 concluimos el Capítulo y comentamos posibles extensiones futuras de los resultados de este Capítulo. Las demostraciones de los resultados teóricos se presentan en el Apéndice.

[1] es decir, si la compra (venta) de un determinado activo está dominada entonces un trader podía poner un precio ask (bid) para este activo y simultáneamente mejorar su precio. Si un nuevo agente acepta y compra (vende) entonces la posición se puede cubrir por arbitraje.

3.2 Nociones Prelimiares y Definiciones Básicas

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de probabilidad compuesto por el conjunto Ω, la $\sigma-$álgebra $\mathcal{F}$ y la medida de probabilidad μ. Supongamos que $[0, T]$ representa un intervalo de tiempo y $\mathcal{T} \subset [0, T]$ es un conjunto (finito o infinito) de fechas de negociación tal que $\{0, T\} \subset \mathcal{T}$. Como es común, la llegada de nueva información va a ser generada por la familia creciente $[\mathcal{F}_t]_{t \in \mathcal{T}}$ de $\sigma-$álgebras de Ω (filtración) tal que $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ y $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.

Precios, costes de transacción y estrategias de inversión se van a introducir siguiendo el enfoque de Jouini y Kallal (1995), ya que éste incorpora las fricciones producidas por las horquillas de precios bid/ask y simultáneamente genera una relación lineal entre cada cartera y su precio actual.[2] Entonces, vamos a considerar $n+1$ distintos activos denotados por $S_0, S_1, ..., S_n$, cuyos precios bid (de venta) y precios ask (de compra) están representados por dos procesos adaptados con valores en $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\{b(\omega, t); \omega \in \Omega, t \in \mathcal{T}\}$$

y

$$\{a(\omega, t); \omega \in \Omega, t \in \mathcal{T}\}$$

[2]De hecho, este enfoque permite representar muchas clases de fricciones, y nos solo aquellas generadas por las horquillas de bid/ask (véase a Jouini y Kallal (1995))

respectivamente. Para simplificar la notación, la pareja anterior de procesos se puede también denotar por (b, a). Si

$$b(\omega, t) = (b_0(\omega, t), b_1(\omega, t), ..., b_n(\omega, t))$$

donde $b_j(\omega, t) \in \mathbb{R}$ para $\omega \in \Omega$, $t \in \mathcal{T}$ y $j = 0, 1, ..., n$, entonces $b_j(\omega, t)$ representa al precio bid de S_j en t bajo el estado ω. Una notación análoga se va a utilizar para los precios ask y, más generalmente, para cualquier proceso estocástico adaptado con valores en $\mathbb{R}^{n+1}$.

El primer activo S_0 va a jugar el papel del numerario, y por lo tanto vamos a suponer la existencia de $v_0 \in \mathbb{R}$ tal que la desigualdades

$$0 < v_0 \leq b_0(\omega, t) \leq a_0(\omega, t) \tag{3.1}$$

se verifican para cada $\omega \in \Omega$ y $t \in \mathcal{T}$.

Obviamente, vamos a requerir que se verifique el supuesto

$$b(\omega, t) \leq a(\omega, t)$$

para cada $\omega \in \Omega$ y $t \in \mathcal{T}$. Para un $\omega \in \Omega$ determinado, la correspondiente trayectoria de precio bid (ask) se va a denotar por $b(\omega, -)$ $(a(\omega, -))$, mientras que para cada determinada fecha de negociación $t \in \mathcal{T}$ el símbolo $b(-, t)$ $(a(-, t))$ denotara a la variable aleatoria que proporciona el precio bid (ask) en t.

Una cartera factible (x, y) es una pareja de procesos estocásticos adaptados con valores en $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\{x(\omega, t); \omega \in \Omega, t \in \mathcal{T}\}$$

y

$$\{y(\omega, t); \omega \in \Omega, t \in \mathcal{T}\}$$

tales que sus trayectorias $x(\omega, -)$ y $y(\omega, -)$ son funciones crecientes de $t \in \mathcal{T}$ y existe un número finito $r \in \mathbb{N}, \mathsf{r} \geq 1$, y una secuencia finita estríictamente creciente $\{t_0 = 0, t_1, t_2, ..., t_r = T\} \subset \mathcal{T}$ (que depende de (x, y) pero no depende de ω) para el que $x(\omega, -)$ y $y(\omega, -)$ permanecen constantes en cada $\mathcal{T} \cap [t_{i-1}, t_i)$, $i = 1, 2, ..., r$.

Además, si

$$[x(\omega, t_i) - x(\omega, t_{i-1})]\, a(\omega, t_i) - [y(\omega, t_i) - y(\omega, t_{i-1})]\, b(\omega, t_i) = 0 \tag{3.2}$$

$i = 1, 2, ..., r-1$, entonces la cartera (x, y) se va a llamar auto-financiada.[3] El conjunto de carteras auto-financiadas se va a denotar por $\mathcal{S}$. Se puede demostrar fácilmente que $\alpha_1(x^1, y^1) + \alpha_2(x^2, y^2) \in \mathcal{S}$ si $(x^i, y^i) \in \mathcal{S}$ y $\alpha_i \geq 0$ en $\mathbb{R}$, $i = 1, 2$.

Si $(x, y) \in \mathcal{S}$ entonces

$$\lambda(x, y) = x(\omega, 0)a(\omega, 0) - y(\omega, 0)b(\omega, 0) \in \mathbb{R} \tag{3.3}$$

[3]Nótese que los productos en (3.2) son escalares de $\mathbb{R}^{n+1}$.

será el precio de (x, y). Inmediatamente tenemos que $\lambda\left(\alpha_1(x^1, y^1) + \alpha_2(x^2, y^2)\right) = \alpha_1\lambda(x^1, y^1) + \alpha_2\lambda(x^2, y^2)$ si $(x^i, y^i) \in \mathcal{S}$ y $\alpha_i \geq 0$ in $\mathbb{R}$, $i = 1, 2$.

Sea $(x, y) \in \mathcal{S}$. La variable aleatoria $\mathcal{F}_T-$ medible

$$\Lambda(x, y)(\omega) = \left[x(\omega, t_{r-1}) - y(\omega, t_{r-1})\right]^+ b(\omega, T) - \left[y(\omega, t_{r-1}) - x(\omega, t_{r-1})\right]^+ a(\omega, T) \tag{3.4}$$

será el pago final de (x, y), y se va a denotar por $\Lambda(x, y)$ o, si fuese necesario, por $\Lambda(x, y)(\omega)$.[4] Otra vez más, $\Lambda\left(\alpha_1(x^1, y^1) + \alpha_2(x^2, y^2)\right) = \alpha_1\Lambda(x^1, y^1) + \alpha_2\Lambda(x^2, y^2)$ si $(x^i, y^i) \in \mathcal{S}$ and $\alpha_i \geq 0$ in $\mathbb{R}$, $i = 1, 2$.

Vamos a seguir la convención habitual para introducir el concepto de arbitraje.

Definición 1 *Sea $(x, y) \in \mathcal{S}$. Vamos a decir que (x, y) es un arbitraje si*

a) $\lambda(x, y) \leq 0$

b) $\Lambda(x, y)(\omega) \geq 0$, $\mu - c.s.$

c) $\mu\left(\Lambda(x, y) - \lambda(x, y) > 0\right) > 0$. □

De aquí en adelante, vamos a asumir que el mercado está libre de arbitraje.

[4] Como es habitual, $\alpha^+ = Max\{\alpha, 0\}$ and $\alpha^- = Max\{-\alpha, 0\}$ si $\alpha \in \mathbb{R}$, y, para cada $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{R}^m$, $\alpha^+ = (\alpha_1^+, \alpha_2^+, ..., \alpha_m^+)$ y $\alpha^- = (\alpha_1^-, \alpha_2^-, ..., \alpha_m^-)$.

Definición 2 *Sea* (x,y), $(x',y') \in \mathcal{S}$. *Vamos a decir que* (x,y) *domina o globalmente domina a* (x',y') *si*

a) $\lambda(x,y) \leq \lambda(x',y')$

b) $\Lambda(x,y)(\omega) \geq \Lambda(x',y')(\omega)$, $\mu - c.s.$

c) $\mu\left[(\Lambda(x,y) - \Lambda(x',y')) + (\lambda(x',y') - \lambda(x,y)) > 0\right] > 0.$ □

De aquí en adelante, las estrategias no dominadas se van a llamar eficientes.

Nótese que la Condición *c)* arriba se verifica si *a)* se cumple en términos de desigualdad estricta. El arbitraje y dominancia son conceptos vitales e íntimamente relacionados. En particular, un arbitraje es una cartera que domina a la estrategia nula. Como bien se sabe, la ausencia de arbitraje es equivalente a la ausencia de estrategias dominadas en el caso sin fricciones ($b = a$). Sin embargo, bajo nuestro enfoque actual, la existencia de costes de transacción puede llevar a la existencia de carteras dominadas en mercados libres de arbitraje (resultados empíricos del Capítulo 4 van a ser una clara demostración de este hecho).

El conjunto M de "marketed claims" está compuesto por aquellas variables aleatorias m, $\mathcal{F}_T-$ medibles con valores en $\mathbb{R}$ tales que existe $(x,y) \in \mathcal{S}$ con $m \leq \Lambda(x,y)$, $\mu - c.s.$ En tal caso, (x,y) se va a llamar una super-replica de m, y el conjunto de las super-replicas de m va a ser representado por $\mathcal{S}_m$. Se puede demostrar fácilmente que M es un cono convexo, es decir, $\alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 \in M$ si $m_i \in M$ y $\alpha_i \geq 0$ en $\mathbb{R}$,

$i = 1, 2$ y (3.1) muestra que $L^{\infty}(\mathcal{F}_T) \subset M$, siendo $L^{\infty}(\mathcal{F}_T)$ el espacio de variables aleatorias esencialmente acotadas $\mathcal{F}_T-$medibles con valores en $\mathbb{R}$. De forma más general, de aquí en adelante vamos a fijar $1 \leq p \leq \infty$ y una variedad lineal cerrada V de $L^p(\mathcal{F}_T)$ tal que $V \subset M$, donde para $p < \infty$ el espacio $L^p(\mathcal{F}_T)$ está compuesto por las variables aleatorias ξ, $\mathcal{F}_T-$medibles con valores en $\mathbb{R}$ tales que la esperanza de $\mid \xi \mid^p$ está acotada.

Vamos a definir la función de mínimo coste

$$M \ni m \to \pi(m) = Inf\{\lambda(x, y); (x, y) \in \mathcal{S}_m\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \tag{3.5}$$

Es fácil demostrar que π es creciente y sublineal en M, es decir,

$$\pi\left(m_1\right) \geq \pi\left(m_2\right) \tag{3.6}$$

siempre cuando $m_i \in M$, $i = 1, 2$, $m_1 \geq m_2$ $\mu - c.s.$,

$$\pi\left(m_1 + m_2\right) \leq \pi\left(m_1\right) + \pi\left(m_2\right) \tag{3.7}$$

si $m_i \in M$, $i = 1, 2$, y

$$\pi\left(\alpha m\right) = \alpha \pi\left(m\right) \tag{3.8}$$

si $m \in M$ y $\alpha > 0$ en $\mathbb{R}$.

La positividad de los precios bid y ask de S_0 y la ausencia de arbitraje llevan fácilmente a $\pi(0) = 0$ y $\pi(m) > -\infty$ para cada $m \in L^{\infty}(\mathcal{F}_T)$. Vamos a asumir también que $\pi(m) > -\infty$ para cada $m \in V \subset L^p(\mathcal{F}_T)$.[5]

Si $p < \infty$ entonces $q \in (1, \infty]$ va a denotar su valor conjugado, es decir, $(1/p) + (1/q) = 1$ se cumple y según el Teorema de Representación de Riesz $L^q(\mathcal{F}_T)$ es el espacio dual de $L^p(\mathcal{F}_T)$. Si $p = \infty$ entonces el espacio dual de $L^\infty(\mathcal{F}_T)$ está compuesto por las medidas fínitamente aditivas

$$\mathcal{F}_T \ni A \longmapsto \delta(A) \in \mathbb{R}$$

$\mu-$ contínuas (es decir, $\mu(A) = 0 \Longrightarrow \delta(A) = 0$) y con variación finita (véase, por ejemplo, Diestel and Uhl, 1977). Este espacio se va a denotar por $\mathcal{M}(\mathcal{F}_T)$.

3.3 Factores de Descuento Estocástico Generalizados

En esta Sección vamos a establecer la relación entre la ausencia de dominancia y la existencia de FDE. Las demostraciones se presentan en el Apéndice.

[5] Siendo V un espacio vectorial tenemos que $a_0(-, T) \in V$ es una condición suficiente. De hecho, supongamos que $v_0 \in V$ y $\pi(v_0) = -\infty$. Entonces para cada $v \in V \subset M$, $v - v_0 \in V \subset M$ y (3.7) lleva a

$$\pi(v) \leq \pi(v_0) + \pi(v - v_0) = -\infty,$$

lo que es una contradicción con la ausencia de arbitraje si se toma, por ejemplo, $v = a_0(-, T)$.

Primero, establecemos el siguiente Lema:

Lema 1 *Sea* $l \in \mathbb{N}$ *y* $(x^1, y^1), (x^2, y^2), ..., (x^l, y^l) \in \mathcal{S}$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.1. $\sum_{i=1}^{l} \beta_i(x^i, y^i)$ *no está dominada para cada* $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_l \geq 0$.

1.2. *Existen* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_l > 0$ *tales que* $\sum_{i=1}^{l} \alpha_i(x^i, y^i)$ *no esté dominada.* $\square$

De aquí en adelante el operador $\mathcal{E}$ se va a utilizar para representar el valor esperado de cualquier variable aleatoria.

Teoremas 2 y 3 abajo se establecen bajo el supuesto de que V satisface las propiedades de retículo de Banach. Por ejemplo, este supuesto se cumple si $V = L^p(\mathcal{F}_T)$. Las propiedades de retículo de Banach se pueden encontrar en Schaeffer (1974).

Teorema 2 *Sea* $l \in \mathbb{N}$ *y* $(x^i, y^i) \in \mathcal{S}$, $i = 1, 2, ..., l$. *Supongamos que* 1.1 *o* 1.2 *se cumple. Supongamos finalmente que* $\Lambda(x^i, y^i) \in V$, $i = 1, 2, ..., l$. *Entonces:*

2.1. *Si* $p < \infty$ *entonces existe* $\delta \in L^q(\mathcal{F}_T)$, $\delta \geq 0$ $\mu - c.s.$, *tal que*

$$\mathcal{E}\left(m\delta\right) \leq \pi\left(m\right) \tag{3.9}$$

para cada $m \in V$, *y*

$$\mathcal{E}\left(\Lambda(x^i, y^i)\delta\right) = \lambda(x^i, y^i) \tag{3.10}$$

$i = 1, 2, ..., l.$

2.2. *Si* $p = \infty$ *entonces existe* $\delta \in \mathcal{M}(\mathcal{F}_T)$ *no negativo tal que*

$$\int_\Omega m(\omega) d\delta(\omega) \leq \pi\,(m)$$

para cada $m \in V$, *y*

$$\int_\Omega \Lambda(x^i, y^i)(\omega) d\delta(\omega) = \lambda(x^i, y^i)$$

$i = 1, 2, ..., l.$ □

La expresión (3.10) permite establecer la conexión entre los precios y pagos de carteras eficientes. Los precios son esperanzas matemáticas de pagos distorsionados. Este resultado está en línea con las condiciones habituales de ausencia de arbitraje en mercados perfectos pero hay una importante diferencia ya que estamos tratando con la eficiencia en lugar de arbitraje. Como ya lo hemos mencionado, la ausencia de arbitraje en presencia de fricciones se estudia mediante la existencia de procesos de precios situados entre la horquilla bid/ask que verifican la propiedad de martingala con respecto a una distorsionada medida de probabilidad. Esto está íntimamente ligado a la expresión (3.9),[6] por lo tanto, podemos concluir que la combinación de (3.9) y (3.10) refleja la existencia de expresiones lineales que capturan ambas propiedades

[6]Nótese que si $(x, y) \in \mathcal{S}$ y $\Lambda(x, y) \in V$ entonces (3.9)implica $\mathcal{E}\,(\Lambda(x, y)\delta) \leq \lambda(x, y)$.

ya que se sitúan debajo del proceso de precios y al mismo tiempo casan los precios de carteras eficientes.

La variable aleatoria distorsionada δ está relacionada con ambos conceptos: medidas neutrales al riesgo y FDE. En este Capítulo vamos a centrarnos en el segundo concepto ya que éste esta más íntimamente relacionado con los Problemas de Selección de Carteras. Vamos a considerar entonces variables aleatorias con esperanza y varianza acotadas ($p = 2$).

Teorema 3 *Sea* $l \in \mathbb{N}$ *y* $(x^i, y^i) \in \mathcal{S}$*,* $i = 1, 2, ..., l$*. Supongamos que se verifica* 1.1 *ó* 1.2*. Supongamos finalmente que* $p = 2$ *y* $\Lambda(x^i, y^i) \in V$*,* $i = 1, 2, ..., l$*. Entonces, existe un único* $\delta \in V \subset L^2(\mathcal{F}_T)$ *tal que se verifica (3.9) y (3.10).* $\square$

Hay dos importantes diferencias con respecto al Teorema 2, ya que δ es único y puede ser super-replicado ($\delta \in V \subset M$). δ se va a llamar el FDE y es una extensión de FDE de mercado perfecto (véase, por ejemplo, Chamberlain and Rothschild, 1983 o Hansen and Jagannathan, 1997). Si un activo libre de riesgo está disponible y si δ es un pago alcanzable y distinto del pago de activo libre de riesgo, entonces se puede demostrar que cada cartera óptima en el contexto media-varianza está compuesta por el activo libre de riesgo menos $k\delta$ ($k > 0$), aunque no tratamos esta cuestión en este Capítulo siendo ésta fuera de nuestro objetivo.

3.4 Caso particular: Modelo Estático

Como un caso importante podemos considerar un marco estático ($\mathcal{T} = \{0, T\}$) en el que los costes de transacción de pagan en la fecha inicial, es decir, $a(\omega, T) = b(\omega, T)$ para $\omega \in \Omega$. Asumimos que ambas propiedades se cumplen en el resto de esta Sección. Vamos a asumir también que $a_j(-, T)$ tiene varianza acotada (es decir, está en $L^2(\mathcal{F}_T)$) para $j = 0, 1, ..., n$. Tomaremos como V variedad lineal de $L^2(\mathcal{F}_T)$ generada por $\{a_j(-, T)\}_{j=0}^n$. Es obvio que δ es alcanzable en este marco y se puede aplicar la discusión anterior.

Consideramos particiones (J_1, J_2, J_3) del conjunto de activos $J = \{0, 1, ..., n\}$. Por ejemplo, si $n = 3$, una partición factible podría ser $(J_1 = \{0, 2\}, J_2 = \emptyset, J_3 = \{1, 3\})$. Decimos que la cartera (x, y) está asociada a la partición (J_1, J_2, J_3) si $x_j = 0$ y $y_j > 0$ para cada $j \in J_1$ y $x_j > 0$, $y_j = 0$ para $j \in J_2$. Entonces, el Teorema 3 implica:

Teorema 4 *Consideramos una partición arbitraria* (J_1, J_2, J_3). *Si las carteras asociadas a esta partición son eficientes*[7], *entonces existe un único* δ *alcanzable tal que*

$$b_j(-,0) \leq \mathcal{E}\left(a_j(-,T)\delta\right) \leq a_j(-,0) \tag{3.11}$$

para $j = 0, 1, ..., n$,

$$b_j(-,0) = \mathcal{E}\left(a_j(-,T)\delta\right) \tag{3.12}$$

para $j \in J_1$ *y*

$$\mathcal{E}\left(a_j(-,T)\delta\right) = a_j(-,0) \tag{3.13}$$

para $j \in J_2$. □

Según Chamberlain y Rothschild (1983) el FDE δ se puede calcular fijando los retornos esperados y minimizando varianzas. Además, el FDE proporciona la familia de carteras óptimas si los inversores miden el riesgo mediante desviación típica.[8] Entonces, el Teorema 4 puede resultar bastante útil para contrastar la existencia de

[7]Recuerde que el Lema 1 implica que todas las estrategias asociadas a la partición son eficientes si existe por lo menos una cartera eficiente asociada.

[8]Esto depende de su función de utilidad y de la distribución cumulativa de cada $a_j(-,T)$. A pesar de que la desviación típica se aplique frecuentemente como una medida de riesgo, se pueden considerar muchas otras alternativas para medir el nivel de riesgo (véase, por ejemplo, Artzner *et al* (1999) para un enfoque general).

carteras ineficientes en mercados imperfectos. De hecho, como un primer paso, uno puede comprobar la existencia de FDE para algunas particiones factibles para poder garantizar que sus carteras asociadas no están dominadas. [9] Este paso es general y no depende de los métodos de medición de riesgo aplicados, ya que cada Problema de Selección de Carteras va a rechazar las estrategias que están dominadas en el sentido de la Definición 2.

El segundo paso se aplica cuando el grado de riesgo se mide mediante desviación típica. En tal caso, el pago δ del Teorema 4 indica las carteras que son óptimas ya que nos basamos en los resultados de Chamberlain y Rothschild (1983) para mercados perfectos. El cálculo práctico del FDE se puede llevar acabo mediante varios métodos de optimización (véase también Balbás y Mayoral, 2004).

3.5 Conclusiones y Posibles Extensiones Futuras

En este Capítulo se ha introducido un nuevo concepto de eficiencia de carteras relacionado con la dominancia y se ha tratado el problema de la extensión de la existencia de FDE en mercados imperfectos. Se ha demostrado que los FDE se pueden utilizar para analizar la existencia de carteras dominadas y determinar las carteras óptimas

[9] Se podría comprobar todo el conjunto de particiones pero este conjunto va a ser extremamente grande si n no es muy pequeño.

en términos de media/varianza. Además, los FDE establecen una conexión entre los pagos y precios ya que proporcionan un proceso teórico de precios que está situado debajo del proceso real de precios y que casa al mismo tiempo los precios de carteras eficientes.

Los resultados de este Capítulo proporcionan una intuitiva metodología de fácil aplicación empírica que puede ser utilizada para determinar y valorar carteras eficientes en mercados financieros reales. Es una metodología lo suficientemente general para poder ser aplicada en cualquier mercado financiero, y por lo tanto puede permitir estudiar los mercados emergentes y posiblemente ilíquidos que pueden resultar interesantes para muchos brokers que procuran correctamente diversificar el riesgo de sus carteras. Hay que tener en cuenta que las imperfecciones y otros fallos del mercado hacen que es más bien difícil aplicar los clásicos métodos de valoración de mercados sin fricciones.

Existen múltiples posibles extensiones de los resultados de este Capítulo que estamos actualmente desarrollando o que están en nuestra futura agenda. En primer lugar, sería interesante analizar en profundidad las propiedades de carteras no dominadas y relacionar el concepto de eficiencia introducido en este Capítulo con otras definiciones de eficiencia en mercados con imperfecciones tratados en la literatura, como por ejemplo, la eficiencia de Jouini y Kallal (2001) o "effectiveness" de Baccara et al. (2003). Por otro lado puede resultar interesante estudiar las propiedades del FDE para mercados imperfectos introducido en este Capítulo e investigar su conexión con los modelos de valoración de activos (CAPM, APT) en mercados con fricciones. Finalmente, ya que las propiedades de las reglas de valoración en mercados imperfectos están íntimamente relacionadas con la propiedad de subaditividad y las medidas coherentes de riesgo, también resultaría interesante estudiar nuevos teoremas de representación de las medidas coherentes de riesgo. Por último, sería de gran interés poder contrastar empíricamente las extensiones de los resultados teóricos en los mercados financieros poco estudiados hasta ahora debido a la existencia de imperfecciones, por ejemplo, mercados emergentes caracterizados por altos costes de transacción, considerables horquillas de precios, falta de liquidez, etc.

3.6 Apéndice. Demostraciones.

Antes de demostrar los resultados teóricos de la Sección 3 y 4 vamos a formular un simple lema cuya demostración es inmediata y por lo tanto no la presentamos aquí.

Lema 5 *Supongamos que (x, y) y (x', y') son carteras autofinanciadas tales que (x, y) domina a (x', y'). Entonces $\theta(x, y)$ domina a $\theta(x', y')$ para cada $\theta > 0$ y $(x, y)+(x'', y'')$ domina a $(x', y') + (x'', y'')$ para cada $(x'', y'') \in \mathcal{S}$.* □

Demostración del Lema 1. Supongamos que $\sum_{i=1}^{l} \alpha_i(x^i, y^i)$ no está dominada y tomemos $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_l \geq 0$. Consideremos $\theta > 0$ con $\theta\beta_i < \alpha_i$ para $i = 1, 2, ..., l$. Si demostramos que $\sum_{i=1}^{l} \theta\beta_i(x^i, y^i)$ no está dominada entonces podemos multiplicar por $1/\theta > 0$ y la eficiencia de $\sum_{i\in I} \beta_i(x^i, y^i)$ sigue del lema anterior. Supongamos que (x, y) domina a $\sum_{i=1}^{l} \theta\beta_i(x^i, y^i)$. Entonces

$$(x, y) + \sum_{i=1}^{l}(\alpha_i - \theta\beta_i)(x^i, y^i)$$

domina a

$$\sum_{i=1}^{l} \theta\beta_i(x^i, y^i) + \sum_{i=1}^{l}(\alpha_i - \theta\beta_i)(x^i, y^i) = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i(x^i, y^i)$$

lo que es contrario al supuesto inicial. □

Para demostrar el resto de los resultados presentamos sin demostración un lema de Análisis Convexo.

Lema 6 *Sea E un espacio vectorial y $\Gamma : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una función arbitraria tal que $\Gamma(m_1 + m_2) \leq \Gamma(m_1) + \Gamma(m_2)$ siempre cuando m_1 y m_2 pertenece a E y $\Gamma(\alpha m) = \alpha\Gamma(m)$ siempre cuando $\alpha \geq 0$ y m pertenece a E. Si $m_0 \in E$ entonces existe una función lineal $\phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\phi(m) \leq \Gamma(m)$ para cada $m \in E$ y $\phi(m_0) = \Gamma(m_0)$. Si E está ordenado y Γ es (estrictamente) creciente entonces ϕ es no negativa (positiva).*

Demostración del Teorema 2. Ya que $\sum_{i=1}^{l}(x^i, y^i)$ es eficiente tenemos que

$$\pi\left(\Lambda\left(\sum_{i=1}^{l}(x^i, y^i)\right)\right) = \lambda\left(\sum_{i=1}^{l}(x^i, y^i)\right) = \sum_{i=1}^{l}\lambda(x^i, y^i).$$

Tomemos $E = V$, $\Gamma = \pi$ and $m_0 = \sum_{i=1}^{l}\Lambda(x^i, y^i)$ y apliquémos el lema anterior. Existe $\phi : V \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\phi(m) \leq \pi(m)$$

para cada $m \in V$ y

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{l}\Lambda(x^i, y^i)\right) = \sum_{i=1}^{l}\lambda(x^i, y^i).$$

La primera desigualdad lleva a $\phi\left(\Lambda(x^i, y^i)\right) \leq \lambda(x^i, y^i)$, $i = 1, 2, ..., l$, y en consecuencia, la igualdad implica que $\phi\left(\Lambda(x^i, y^i)\right) = \lambda(x^i, y^i)$, $i = 1, 2, ..., l$. Además, ya que π es creciente, ϕ es no negativa. Por lo tanto la continuidad de ϕ está garantizada ya que cada operador lineal positivo de valores reales en retículo de Banach es continuo

(Schaeffer, 1974). Según el Teorema de Hanh-Banach (Schaeffer, 1974), existe una extensión lineal φ de ϕ a todo el espacio $L^p(\mathcal{F}_T)$. Y el Teorema de Representación de Riesz implica la existencia de δ. $\square$

Demostración del Teorema 3. La existencia de una ϕ contínua que satisfaga las condiciones de la demostración anterior es absolutamente similar. Siendo V un espacio de Hilbert, el Teorema de Representación de Riesz implica la existencia de una única $\delta \in V$ que representa a ϕ. $\square$

Demostración del Teorema 4. En primer lugar tomemos el conjunto de estrategias

$$\{((x_J = 0), (y_{J_1} = (0, ..., 1, ...0), y_{J_2} = 0, y_{J_3} = 0))\}$$

y

$$\{((x_{J_1} = 0, x_{J_2} = (0, ..., 1, ...0), x_{J_3} = 0), (y_J = 0))\}$$

Como en la demostración anterior se puede construir una función ϕ. Su continuidad se verifica incluso si V no es retículo de Banach ya que este espacio tiene una dimensión finita. Por lo tanto, la existencia de una única $\delta \in V$ que satisfaga (3.9) y (3.10) está garantizada. En particular, la expresión (3.10) aplicada a las estrategias arriba implica (3.12) y (3.13), y la expresión (3.9) aplicada en todo el conjunto de activos disponibles en posiciones largas y cortas, respectivamente, implica (3.11). $\square$

Bibliografía

[1] Artzner, P., F. Delbaen, J.M. Eber and D. Heath, 1999. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 9, 203-228.

[2] Baccara, M., Battauz, A., Ortu, F., 2003. Effective versus Efficient Securities in Arbitrage-Free Markets with Bid-Ask Spreads: A Linear Programming Characterization. *working paper.*

[3] Balbás A., I.R. Longarela and J. Lucia, 1999. How Financial Theory Applies to Catastrophe-Linked Derivatives. An Empirical Test of Several Pricing Models. *Journal of Risk and Insurance,* 66, 4, 551-582.

[4] Balbás, A. and S. Mayoral, 2004. Vector Optimization Approach for Pricing and Hedging in Imperfect Markets. *INFOR,* 42, 3, 217-233.

[5] Bizid, A. and Jouini, E., 2005, Equilibrium Pricing in Incomplete Markets. *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* 40, 4, 833-849.

[6] Black, F. 1976. The Pricing of Commodity Contracts. *Journal of Financial Economics*, 3, 167-179.

[7] Chamberlain, G. and M. Rothschild, 1983. Arbitrage, Factor Structure, and Mean-Variance Analysis on Large Assets. *Econometrica*, 51, 1281-1304.

[8] Clewlow, L. and C. Strickland 2000. *Energy Derivatives: Pricing and Risk Management.* Lacima Group.

[9] Constantinides, G.M., J.C. Jackwerth and S. Perrakis, 2004. Mispricing of $S\&P500$ Index Options. *Mimeo.*

[10] Dalang, R. C., Morton, A. and W. Willinger, 1990. Equivalent Martingale Measures and No-Arbitrage in Stochastic Securities Market Models. *Stochastics and Stochastic Reports*, 29, 185–201.

[11] Diestel, J. and J.J. Uhl, 1977. *Vector Measures*, Math Surveys (15), American Mathematical Society, Providence R.I.

[12] Garman, M. and J. Ohlson, 1981. Valuation of Risky Assets in Arbitrage-Free Economies with Transaction Costs. *Journal of Financial Economics*, 9, 271-280.

[13] Gibson, R. and E.S. Schwartz, 1990. Stochastic Convenience Yield and the Pricing of Oil Contingent Claims. *The Journal of Finance*, 45, 3, 959-976.

[14] Hansen, L.P. and R. Jagannathan, 1997. Assessing Specification Errors in Stochastic Discount Factor Models. *The Journal of Finance,* 52, 2, 567-590.

[15] Hansen, L.P. and S.F. Richard, 1987. The Role of Conditioning Information in Deducing Testable Restrictions Implied by Dynamic Asset Pricing Models. *Econometrica, 55,* 3, 587-613.

[16] Harrison, M. and D.M. Kreps, 1979. Martingale and Arbitrage in Multiperiod Security Markets. *Journal of Economic Theory*, 20, 381–408.

[17] He, H., and D. M. Modest, 1995. Market Frictions and Consumption-Based Asset Pricing. *Journal of Political Economy*, 103, 94-117

[18] Jouini, E. and H. Kallal, 1995. Martingales and Arbitrage in Securities Markets with Transaction Costs. *Journal of Economic Theory,* 66, 178-197.

[19] Jouini, E. and H. Kallal, 2001. Efficient Trading Strategies in Presence of Market Frictions. *Review of Financial Studies,* 14, 343-369.

[20] Luttmer, E., 1996. Asset Pricing in Economies with Frictions. *Econometrica*, 64, 1439-1467.

[21] Prisman, E.Z., 1986. Valuation of Risky Assets in Arbitrage-Free Economies with Frictions. *Journal of Finance*, 41, 293-305.

[22] Prisman, E.Z. and N. Charupat, 1997, Financial Innovations and Arbitrage Pricing in Economies with Frictions: Revisited. *Journal of Economic Theory*, 74, 435-447.

[23] Schachermayer, W., 2004. The Fundamental Theorem of Asset Pricing under Proportional Transaction Costs in Finite Discrete Time. *Mathematical Finance*, 14, 1, 19–48.

[24] Schaeffer, H.H., 1974. *Banach Lattices and Positive Operators*, Springer Verlag, Berlin.

[25] Schwartz, E. S., 1997. The Stochastic Behavior of Commodity Prices: Implications for Valuation and Hedging. *The Journal of Finance*, 52, 923-973.

Capítulo 4

"Activos y Carteras Ineficientes en el Mercado de Derivados Ligados al Petróleo: Análisis Empírico con Datos de NYMEX"

4.1 Introducción

El uso de los derivados de energía ha crecido de forma espectacular en los últimos 20 años debido a la deregulación de los mercados de energía. Anteriormente, los precios del petróleo, gas natural o electricidad eran fijados por el regulador y se mantenían estables durante largos periodos del tiempo. Mercados liberalizados han demostrado que los precios de energía son los más volátiles de todas las commodities. Distintos agentes del mercado han empezado a buscar maneras de protegerse contra la inestabilidad de los precios. Se ha demostrado que los instrumentos derivados: contratos de futuros, forwards, opciones, swaps, etc., resultan útiles en la gestión de riesgo ya que permiten transferir el riesgo a los agentes que lo quieren asumir. Derivados ligados a energía y, en particular al petróleo, están recibiendo cada vez más atención también por parte de muchos brokers e inversores ya que pueden ser considerados como una interesante alternativa de inversión y de diversificación de riesgo, especialmente, cuando se observan correlaciones negativas con los mercados de equities. Muchos de los, últimamente tan de moda, Hedge Funds (fondos de inversión alternativa) que están operando en los mercados incorporan los derivados de energía en sus carteras para maximizar la rentabilidad y diversificar el riesgo.

Por otro lado, la reciente historia de mercados financieros abunda en ejemplos de las enormes pérdidas a las que puede llevar el desconocimiento de mercado y el uso inadecuado de los derivados de energía. Por ejemplo, Metallgesellschaft perdió unos 1.3 biliones de dólares en 1993 en el trading de energía. Recientemente, un fondo de gestión alternativa Amaranth ha perdido unos 6 billiones de dólares después de haber invertido en contratos de futuros sobre gas natural. Los mercados de energía sufren varios problemas que dificultan la operación en ellos y el desconocimiento tanto de su funcionamiento como de las estrategias con los instrumentos negociados en estos mercados pueden llevar a casos como los mencionados arriba. Esto demuestra la necesidad de más investigación en este campo para poder conocer en profundidad las características de estos mercados. En el informe de Energy Information Administration del Departamento de Energía de los Estados Unidos (2002) se encuentra un amplio análisis de la situación actual en la que se encuentran los mercados de derivados de energía y su posible evolución futura. Los autores enfatizan la utilidad de este tipo de instrumentos, preven el crecimiento de estos mercados y recomiendan más investigación empírica en este campo. Nosotros en este Capítulo nos proponemos estudiar empíricamente uno de los mercados de derivados de energía - mercado de derivados ligados al petróleo.

Mercados de derivados sobre petróleo son mercados que se caracterizan por toda clase de imperfecciones como, por ejemplo, una elevada iliquidez, altos costes de transacción, horquillas de precios bid-ask, etc. Estas imperfecciones, junto con la falta de precios disponibles y de la transparencia de la información hacen que sea difícil aplicar en estos mercados, los métodos clásicos de valoración desarollados para mercados perfectos. En Black (1976), Gibson and Schwartz (1990), Schwartz (1997), Clewlow y Strickland (2000) se pueden encontrar interesantes métodos de valoración de instrumentos derivados ligados al petróleo, sin embargo, podrían volverse afectados por las fricciones reflejadas por esta clase de mercados. Como ya lo hemos mencionado anteriormente, los resultados teóricos del Capítulo 3 de esta Tesis proporcionan una metodología que puede ser utilizada para valorar los activos financieros en mercados con imperfecciones. Las técnicas de valoración del Capítulo 3 relacionadas con la dominancia de carteras y el FDE para mercados imperfectos permiten relacionar los pagos futuros de los activos o carteras de activos con sus precios, teniendo en cuenta las imperfecciones del mercado.

En este Capítulo demostramos la utilidad práctica de los resultados del Capítulo 3 de esta Tesis para valorar los derivados sobre petróleo aplicando empíricamente la metodología en el mercado $NYMEX$, unos de los más grandes mercados mundiales de negociación en contratos de futuros y opciones sobre productos de energía tales como: petróleo crudo, gasolina, fuel, gas natural, electricidad, etc. En el trabajo analizamos la existencia de activos y carteras dominadas en el mercado y estudiamos la posibilidad de mejorar los precios existentes. El estudio se ha hecho con la mayor precisión posible ya que nos hemos basado en los precios bid/ask perfectamente sincronizados de algunos activos disponibles en el $NYMEX$ y suministrados por Reuters. En nuestro análisis aplicamos los resultados teóricos de la nueva clase de FDE del Capítulo 3 y seguimos un enfoque estático para poder garantizar la robustez de las conclusiones sin hacer ningún supuesto sobre el comportamiento del precio spot o el precio futuro del petróleo crudo. Consideramos solamente las posiciones en opciones sobre los contratos de futuros, pero no las posiciones en los contratos de futuros en si mismos. Excluyendo los futuros evitamos identificar como ineficiencias las posibles diferencias en valoración debidas a los riesgos asociados a la entrega física del petróleo crudo.

A pesar de alto nivel de generalización del análisis, nuestros resultados revelan la existencia de claras ineficiencias en el mercado. Activos y carteras ineficientes han estado presentes en el mercado en varias ocasiones durante el periodo analizado. A continuación del Capítulo comentamos múltiples ejemplos específicos de posibles estrategias que se podían haber implementado en el mercado durante el periodo del análisis. Además, presentamos también el informe general de los resultados obtenidos para toda la muestra. Esta evidencia empírica es una gran contribución del trabajo por distintos motivos. En primer lugar, puede resultar útil proporcionar más evidencia sobre el grado de eficiencia de mercados financieros ligados a energía cuyo crecimiento futuro es indiscutible. Estos resultados podrían interesar a muchos brokers e inversores ya que estos cada vez se basan más en derivados de petróleo a la hora de construir carteras eficientes. Además, la existencia de ineficiencias proporciona a los brokers nuevos y prácticos métodos de valoración e inversión que pueden permitir a mejorar la rentabilidad de las carteras de sus clientes. Es decir, si la compra (venta) de un determinado activo está dominada, entonces el agente podría poner un nuevo precio ask (bid) para este activo y simultáneamente mejorar su precio. Si un nuevo agente acepta y compra (vende) entonces la posición se puede cubrir por arbitraje. Ejemplos concretos encontrados en el mercado se presentan a continuación del Capítulo (véase Ejemplo 2 abajo). Por otro lado, teniendo en cuenta que agregando las estrategias eficientes el resultado final puede estar dominado, los brokers podrían también verificar la eficiencia de la cartera global de los clientes. Si ésta está dominada, podrían construir y comprar la cartera dominante, en lugar de la dominada, para generar beneficios adicionales. Además, hay que subrayar que estas técnicas de valoración no están afectadas por ningunas de las fricciones significativas empíricamente reflejadas por este mercado. Al contrario, permiten a los traders mejorar los precios y proporcionar liquidez.

Nuestro estudio está relacionado con Constantinides *et al.* (2004) que también encuentra una clase de ineficiencias cuando considera los costes de transacción y las opciones sobre el índice $S\&P500$. Este interesante artículo empírico enfatiza que el análisis asume unas hipótesis mucho más débiles que aquellas asociadas al $CAPM$. Deberíamos subrayar que nuestros supuestos son incluso más débiles que los de Constantinides *et al.* (2004). También hay grandes diferencias entre su enfoque y el nuestro ya que las metodologías aplicadas en los dos trabajos son distintas. Además, ellos utilizan una muestra mucho más grande y no están tan interesados en los datos perfectamente sincronizados ya que estos no son importantes en un mercado con una historia más larga y en un contraste más relacionado con modelos clásicos de equilibrio. Al contrario, nuestra muestra no es grande ya que preferimos introducir la precisión en un mercado mucho menos estudiado y con unos costes de transacción bastante más altos.

El Capítulo tiene la siguiente estructura. En la Sección 2 presentamos una descripción del mercdo $NYMEX$ y resumimos las características de la base de datos empleada en el estudio. En la Sección 3 describimos brevemente la metodología aplicada y los resultados empíricos. Además, presentamos y discutimos varias interesantes estrategias que se podían haber implementado en el mercado durante el periodo del análisis. Finalmente, en la Sección 4 presentamos las conclusiones del Capítulo. Los gráficos se presentan en el Apéndice.

4.2 Mercado y Datos

The New York Mercantile Exchange, Inc. ($NYMEX$) es uno de los mercados más grandes del mundo donde se negocian los contratos de futuros y opciones sobre productos de energía tales como petróleo crudo, gasolina, fuel, gas natural, electricidad, etc. Entre otros productos, en el $NYMEX$ Division [1] se negocia el contrato de futuros sobre el petróleo crudo ("Light, sweet crude oil futures contract") utilizado como principal benchmark internacional, opciones sobre el contrato de futuros, calendar

[1]La negociación en $NYMEX$ se lleva acabo a través de dos divisiones: $NYMEX$ Division para energía, platina, palladium y $COMEX$ Division donde se negocian los demás metales.

spreads, crack spreads, opciones de precio medio, etc.

El contrato de futuros sobre petróleo crudo se negocia en unidades de $1,000$ barriles del petróleo crudo West Texas Intermediate (WTI) con entrega en Cushing, Oklahoma. La negociación se lleva acabo en el sistema de corros (open outcry system) y en el sistema electrónico de negociación "after-hours" $NYMEX\ ACCESS$. En el mercado se ofrecen contratos con liquidación física para 30 meses consecutivos y contratos a más largo plazo para 36, 48, 60, 72 y 84 meses. La negociación termina el tercer día hábil anterior al día 25 del mes que precede el mes de entrega del activo subyacente o el tercer día hábil anterior al día hábil que precede el día 25 del mes si éste no es un día laboral. La entrega se lleva acabo durante un mes y debe de comenzar en el primer (o después) día del mes y tiene que finalizar antes del último día del mes de entrega.

La opciones sobre petróleo crudo son opciones estandarizadas, negociadas en el parqué, de tipo americano cuyo subyacente es el contrato de futuros sobre petróleo crudo negociado en el $NYMEX$ División. Se ofrecen opciones con vencimientos en los 30 meses consecutivos y opciones a más largo plazo para 36, 48, 60, 72 y 84 meses. Los precios se denominan en dólares y centavos americanos por barril. Existen opciones con al menos 61 precios de ejercicio y comprenden 20 precios de ejercicio en incrementos de 50 céntimos por barril por debajo y por encima de los precios de ejercicio de las opciones "at-the-money" y 10 precios de ejercicio en incrementos de

2.50 dólares por encima de los más altos y por debajo de los más bajos precios de ejercicio existentes. La negociación de las opciones cesa tres días hábiles antes del último día de negociación del contrato de futuros subyacente.

Nuestro análisis se centra principalmente en el periodo comprendido entre el día 3 y 16 de noviembre de 2004, aunque, como lo comentaremos más adelante, también hemos testeado otras fechas en el año 2005 para verificar si las conclusiones del análisis son específicas para este periodo en particular, cuando los precios del petróleo crudo subyacente han descendido un 11%. Los datos han sido suministrados por Reuters y corresponden a precios de venta y compra de las opciones de compra y venta sobre los contrato de futuros de petróleo crudo negociados en el $NYMEX$, y los tipos de interés de las Letras de Tesoro de los Estados Unidos con vencimientos cercanos al vencimiento de los contratos. Gráfico 1 refleja la evolución de precios diarios medios de los contratos de futuros sobre petróleo crudo negociados en el $NYMEX$ con vencimientos en diciembre de 2004 y enero de 2005 durante el periodo del análisis.[2]

En total, analizamos los datos correspondientes a 10 días hábiles durante el periodo considerado (la muestra inicial de 14 días contiene dos fines de semana). Definimos

[2]En el análisis de la existencia de las carteras dominadas consideramos solo las posiciones en opciones sobre el contrato de futuros subyacente y no las posiciones en el mismo contrato. Excluyendo las posiciones en el contrato de futuros evitamos identificar como ineficiencias las posibles diferencias en valoración debidas a los riesgos asociados a la entrega física del petróleo.

como una observación el instante exacto de tiempo cuando observamos el mercado (por ejemplo, 3/11/2004 14 : 30 define una observación). Ya que los precios se registran en intervalos de 30 minutos, y el mercado de opciones está abierto desde las 10 de la mañana hasta las 2 : 30 de la tarde, cada día de negociación contiene 10 observaciones, por lo tanto el número total de observaciones en la muestra es de 100. Para cada observación analizamos los disponibles precios bid y ask de las opciones call y put con vencimientos en diciembre de 2004 y enero de 2005 junto con los tipos de interés a uno y tres meses de las Letras del Tesoro. Las fechas de expiración de los contratos de futuros con vencimiento en diciembre de 2004 y enero de 2005 son el 19 de noviembre de 2004 y 20 de diciembre de 2004, respectivamente. Para las opciones estas fechas son: el 16 de noviembre 2004 y 15 de diciembre de 2004, respectivamente. En total nuestra muestra consiste en 100 conjuntos de precios registrados en distintos instantes del tiempo durante todo el periodo del análisis.

En la Tabla 1 se especifican las opciones contenidas en nuestro conjunto de datos

TABLA 1

Opción	Vencimiento	Rango de Precios Strike	No de opciones en cada observación	
		(cada \$.50)	3/Nov - 15/Nov	16/Nov
Calls	Dic 04	\$32 – 63	63	–
	Ene 05	\$32 – 63	63	63
Puts	Dic 04	\$32 – 63	63	–
	Ene 05	\$32 – 58	53	53
		Total	242	116

Analizando la propiedades de los datos en la muestra observamos que, en general, durante el periodo de análisis ha habido más opciones con no nulos precios ask que con no nulos precios bid, es decir, más ordenes de venta que de compra se han registrado por parte de los dealers a los inversores. Solamente el día 8 y 9 de noviembre más posiciones largas que cortas en opciones de compra se registraron.[3] Precios bid de las opciones put han sido los menos frecuentes durante el periodo del análisis. Podemos observar también que durante este periodo las posiciones en opciones con tiempo más corto hasta el vencimiento se registraron con más frecuencia, y en particular, las posiciones largas. En la Tabla 2 se presentan algunos estadísticos descriptivos medios de las opciones con precios ask o bid no nulos durante el periodo del análisis.

[3]En estos días precios medios de los contratos de futuros subyacentes han descendido más que 2% (véase Gráfico 1).

TABLA 2

Opción	Vencimiento	Opciones con precio ask no nulo			Opciones con precio bid no nulo		
		Min*) en promedio	**Media*)**	**Max*) en promedio**	**Min en promedio**	**Media**	**Max en promedio**
Calls	Dic 04	1.6	3.77	5.3	0.3	1.49	2.6
	Ene 05	0.1	1	2.1	0.2	1.53	2.4
	Todas calls	1.8	4.77	7.1	0.8	3.02	4.6
Puts	Dic 04	1.2	3.35	5.1	0.1	0.88	1.7
	Ene 05	1.1	2.22	3.4	0.1	0.67	1.5
	Todas puts	2.2	5.57	7.9	0.2	1.55	3.0

*) Los mínimos diarios, medias y máximos están promediados para todo el periodo del análisis

Gráficos 2 y 3 muestran el número de opciones con precios disponibles en cada observación. El número mínimo de activos (incluyendo los dos activos libres de riesgo) ha sido igual a 4, y el máximo número de activos disponibles ha sido 32, lo que supone alrededor del 13% del número total de posibles activos. Interesantemente, el mayor número de activos con precios ask o bid se detecta cuando el tiempo hasta el vencimiento es más largo. Nótese, finalmente, que el día 16 de noviembre el número de activos desciende dramáticamente, lo que se explica por el hecho de que en este día dejan de negociarse las opciones con vencimiento en diciembre de 2004.

Para dar una imágen de la evolución de los precios en el tiempo durante el periodo del análisis, los Gráficos 4 y 5 muestran los precios ask y bid de las tres opciones call y put más negociadas durante el periodo del estudio, respectivamente. Como se observa en los Gráficos, los precios son poco frecuentes incluso para los activos más negociados.

4.3 Metodología y Resultados

El objetivo del análisis empírico de este Capítulo es estudiar la existencia de activos y carteras dominadas en el mercado $NYMEX$ aplicando la metodología propuesta en el Capítulo 3 de esta Tesis y comprobar si es posible mejorar los precios de mercado de las opciones sobre los contratos de futuros sobre petróleo negociados en el mercado.

A continuación, resumimos brevemente la metodología que se emplea en el estudio empírico y presentamos los resultados obtenidos.

En primer lugar, agrupamos los activos disponibles según los vencimientos. En la muestra las opciones tienen dos vencimientos distintos: diciembre de 2004 y enero de 2005. En cada observación (momento en el que se observa el mercado) consideramos solamente los activos para los que por lo menos un precio no nulo (bid o ask) está disponible. También requerimos que en la observación considerada en el análisis por lo menos dos activos con precios no nulos estén disponibles.

Para poder calcular los futuros pagos de los instrumentos derivados definimos el conjunto de futuros estados de la naturaleza de tal manera que cada estado corresponde a uno de los posibles precios de ejercicio de las opciones disponibles en cada observación. Añadimos también dos eventos extremos y dos estados intermedios: uno debajo del precio de ejercicio más bajo en la muestra, un estado intermedio y dos estados por encima del precio de ejercicio más alto en la muestra. Estos estados corresponden a los pagos de contratos de futuros iguales a \$0, \$50, \$70 y \$1000. Asumimos que los pagos de los activos que vencen en diciembre de 2004 se reinvierten al tipo de interés libre de riesgo hasta la última fecha del vencimiento de los activos en la muestra (enero de 2005). Por lo tanto, aunque los instrumentos derivados en la muestra tienen vencimientos distintos, nuestro modelo se puede considerar en un marco estático con único periodo, en el que t_0 es siempre el momento en el que se observa el mercado y la futura fecha T es la fecha del vencimiento de los contratos que vencen en enero de 2005. El número total de estados de la naturaleza en T es igual al número de precios de ejercicio de las opciones que vencen en diciembre de 2004 multiplicado por el número de precios de ejercicio de las opciones con vencimiento en enero de 2005 más cuatro estados adicionales.

Los pagos de las opciones call y put sobre los contratos de futuros subyacentes se calculan como las diferencias habituales entre los posibles precios de contratos de futuros (es decir, los precios de ejercicio correspondientes a cada estado de la naturaleza) y el precio de ejercicio de la opción. Aunque las opciones de petróleo negociadas en $NYMEX$ son de tipo americano, se puede asumir que tan solo se ejercerían en el vencimiento. Como el activo subyacente no paga ningún tipo de dividendos las opciones call no se ejercerían de forma anticipada. También, en el caso de las opciones put seria muy poco probable que se ejerciesen antes del vencimiento debido a los tipos de interés bastante bajos durante el periodo del análisis.

Como ya lo hemos comentado antes, nuestro estudio empírico se basa en los resultados de la Sección 4 del Capítulo 3 de esta Tesis. Es decir, para analizar la existencia de activos y carteras dominadas en el mercado, consideramos particiones del conjunto de activos disponibles en cada observación, y aplicando el Teorema 4 del Capítulo 3 estudiamos la existencia de FDE asociados a cada partición. Para poder detectar el grado de cumplimiento de las restricciones (3.11), (3.12) y (3.13), primero buscamos las carteras dominadas compuestas por un solo activo, luego, si es necesario, para evitar la existencia de activos dominados, modificamos sus precios y buscamos carteras dominadas más complejas compuestas por múltiples activos. Las restricciones (3.11), (3.12) y (3.13) de FDE se vuelven más estrictas cuando más crecen los conjuntos J_1 y J_2, lo que es consistente con el Lema 1 del Capítulo 3, que garantiza que si la suma de carteras auto-financiadas es eficiente, entonces todos los componentes son eficientes, aunque puede ser que la implicación conversa no se cumpla.

En la primera etapa de nuestro análisis, estudiamos la existencia de activos dominados en el mercado.

4.3.1 Activos Dominados

Como algunos de los activos considerados no disponen de precios bid o ask, primero, asignamos precios artificiales a estos activos (0 para los precios bid y 1000 para los precios ask). Luego, comprobamos la existencia de oportunidades de arbitraje durante el periodo analizado. Considerando los activos con ambos vencimientos, detectamos todas las observaciones para las que existen carteras con un pago no negativo y un precio negativo. Oportunidades de arbitraje han sido detectadas en una única ocasión en el intervalo entre las $2:00$ y $2:30$ de la tarde el día 5 de noviembre. Ejemplo 1 abajo describe la estrategia de arbitraje que se podía haber implementado.

Ejemplo 1. Estrategia de Arbitraje

El día 5 de noviembre al final de la sesión de negociación los siguientes datos del mercado estaban disponibles:

Activo	Vencimiento	Precio Strike	Ask	Bid
Call	Dic. 04	47	0.55	–
Call	Dic. 04	51	–	0.55
Call	Dic. 04	56	0.1	–

Consideremos la siguiente cartera:

Activo	Vencimiento	Precio Strike	posición
Call	Dic. 04	47	1.25
Call	Dic. 04	51	-2.25
Call	Dic. 04	56	1

Esta estrategia tiene el coste de $-.45$ dólares, pero su pago al vencimiento es no negativo para cada estado de la naturaleza según se muestra en el Gráfico 6. □

A continuación, para todas las observaciones libres de arbitraje determinamos las funciones del mínimo coste (π, véase Sección 2 del Capítulo 3) para todos los activos en la muestra. El precio sombra ask de un activo determinado es igual al mínimo coste necesario para super-replicar su pago y el precio sombra bid es igual al máximo beneficio posible de cualquier cartera dominada por el activo considerado. La mejora del precio es entonces igual a la diferencia entre el precio original del activo considerado y su precio sombra (mejorado).

Los resultados obtenidos en esta etapa (véase Tabla 3 abajo) muestran que la posibilidad de mejorar los precios de los instrumentos derivados negociados en el mercado ha estado con frecuencia presente durante el periodo del análisis. Ineficientes precios ask aparecieron en el mercado en el 46% e ineficientes precios bid en el 6% de todas las observaciones durante el periodo del estudio. Esto revela unas claras ineficiencias en los precios de los derivados de petróleo analizados, en particular, en el caso de los precios ask. En promedio, el 15.33% de los precios ask y el 12.57% de los precios bid podían haber sido mejorados. Además, la mejora en los precios parece ser bastante significativa: el 25.49% para los precios ask en promedio y el 10.73% para los precios bid. Si comparamos la mejora máxima en promedio, ésta podría haber sido de 32.38% para los precios ask y 12.89% para los precios bid. Para ilustrar las ineficiencias y las posibilidades de mejora en los precios, Ejemplo 2 abajo presenta un caso de ineficiencia que se ha detectado en el mercado durante el periodo del análisis y la posible mejora en el precio del instrumento derivado implicado en la estrategia de arbitraje.

TABLA 3. Activos Dominados (Resumen)	Ask	Bid
Observaciones con precios mejorados (al menos .1 cent)	46%	6%
Media fracción de activos con precios mejorados	15.33%	12.57%
Media mejora en promedio *)	25.49%	10.73%
Máxima mejora en promedio **)	32.38%	12.89%

*) **) Las mejoras medias y máximas para todos los activos con precios mejorados en cada observación han sido promediadas entre el número total de las observaciones en la muestra.

Ejemplo 2. Activo Dominado

El día 11 de noviembre a las 13 : 30, una opción call con precio de ejercicio de \$40 y vencimiento en diciembre de 2004 tuvo un precio bid de 35 céntimos. Una posición corta en esta opción podía super-replicarse mediante una posición larga en la opción put con precio strike de \$47, vencimiento en diciembre de 2004 y precio ask de 80 céntimos y 7 posiciones cortas en Letras de Tesoro ($T-$bills) con vencimiento en diciembre de 2004 y tipo de interés igual a 1.875%. El beneficio de la cartera super-replica era de \$6.2479, entonces el precio bid de la opción call podía haberse mejorado en \$5.8979. Los pagos de la posición corta en la call y de la cartera dominante se presentan en la parte superior del Gráfico 7. El FDE que valoraría la call de forma eficiente se muestra en la parte inferior del Gráfico 7. □

Una vez hemos identificado los activos dominados en el mercado, sustituimos sus precios originales por sus precios mejorados (precios sombra bid y ask) y continuamos nuestro análisis del mercado para ver si es posible seguir mejorando los precios disponibles considerando ahora las combinaciones de activos en lugar de activos solos.

4.3.2 Carteras Dominadas

En esta etapa buscamos estrategias dominadas considerando distintas combinaciones de instrumentos derivados disponibles en cada momento de observación del mercado durante todo el periodo del análisis. Consideramos las particiones del conjunto J de activos disponibles en cada momento de observación del mercado en tres subconjuntos disjuntos de activos J_1, J_2, J_3. Cada tal partición corresponde a una cartera formada por activos disponibles en este momento de observación del mercado. Como el número de activos en cada $J_i,\ i = 1, 2, 3$ puede variar entre 0 hasta el número máximo de activos disponibles en cada momento de observación, dividimos nuestro análisis en varios pasos. Para todos los activos disponibles en cada momento de observación del mercado, formamos particiones con dos, tres y cuatro activos en $\{J_1, J_2\}$ y buscamos el FDE asociado a la partición en cada caso.[4]

Primero, consideramos todas las posibles particiones del conjunto de activos en

[4]Limitamos el número máximo de activos en $\{J_1, J_2\}$ a cuatro debido a un coste computacional del análisis extremamente alto.

cada momento de observación del mercado tomando parejas de activos. Para cada pareja de activos $\{a, b\}$ podemos tener cuatro posibles particiones:

1) $\{\emptyset, \{a, b\}\}$ posición larga en activo a y b

2) $\{\{a, b\}, \emptyset\}$ posición corta en activo a y b

3) $\{\{a\}, \{b\}\}$ posición corta en activo a y larga en activo b

4) $\{\{b\}, \{a\}\}$ posición corta en activo b y larga en activo a

con el resto de los activos en el subconjunto J_3.

En cada momento de observación del mercado vamos a través de todas las posibles particiones con dos activos en $\{J_1, J_2\}$ y buscamos estrategias dominadas. No consideramos aquellas particiones en las que uno de los activos en J_2 originalmente no tenía un precio ask ni tampoco las particiones en las que uno de los activos en J_1 no tenía un precio bid. De forma análoga a la etapa con un solo activo, calculamos las funciones de mínimo coste de las combinaciones de dos activos y comprobamos si es posible mejorar sus precios. Como antes la mejora en el precio es la diferencia entre el coste original de la cartera y el coste de la cartera dominante. Igual que antes obtenemos el FDE que elimina la ineficiencia en los precios de los activos y calculamos los nuevos precios (mejorados). En la Tabla 4 abajo se resumen principales resultados de la existencia de carteras dominadas compuestas por dos activos.

TABLA 4. Carteras Dominadas con 2 Activos

Posiciones Largas en 2 Activos	
Observaciones con precio ask mejorado (al menos .1 cent)	9%
Media fracción de carteras con precio ask mejorado	1.19%
Media mejora de precios ask en promedio *)	1.99%
Máxima mejora de precios ask en promedio *)	2.22%
Posiciones Cortas en 2 Activos	
Observaciones con precio bid mejorado (al menos .1 cent)	8%
Media fracción de carteras con precio bid mejorado	2.76%
Media mejora de precios bid en promedio	4.90%
Máxima mejora de precios bid en promedio	5.89%
Una Posición Corta y una Larga	
Observaciones con precios mejorados (al menos .1 cent)	41%
Media fracción de carteras con precios mejorados	3%
Media mejora de precios en promedio	11.92%
Máxima mejora de precios en promedio	16.34%

*)Diferencias medias y máximas entre el coste de la cartera dominante y la dominada para todas las combinaciones dominadas con posiciones largas en 2 activos están divididas entre el número total de observaciones. Comentario análogo se aplica a otros dos tipos de carteras.

De manera análoga a la etapa anterior llevamos acabo nuestro análisis considerando todas las posibles particiones de los conjuntos de activos disponibles en cada momento de observación del mercado con tres y cuatro activos en $\{J_1, J_2\}$. Los resultados se presentan en Tabla 5 y Tabla 6 respectivamente.

TABLA 5. **Carteras Dominadas con 3 Activos**

Posiciones Largas en 3 Activos	
Observaciones con precio ask mejorado (al menos .1 cent)	6%
Media fracción de carteras con precio ask mejorado	2.42%
Media mejora de precios ask en promedio	1.63%
Máxima mejora de precios ask en promedio	2.17%
Posiciones Cortas en 3 Activos	
Observaciones con precio bid mejorado (al menos .1 cent)	8%
Media fracción de carteras con precio bid mejorado	8%
Media mejora de precios bid en promedio	2.84%
Máxima mejora de precios bid en promedio	5.64%

TABLA 5. Carteras Dominadas con 3 Activos (Cont.)

Una posición Corta y 2 Posiciones Largas	
Observaciones con precios mejorados (al menos .1 cent)	40%
Media fracción de carteras con precios mejorados	5.56%
Media mejora de precios en promedio	5.95%
Máxima mejora de precios en promedio	12.92%
Una posición Larga y 2 Posiciones Cortas	
Observaciones con precios mejorados (al menos .1 cent)	49%
Media fracción de carteras con precios mejorados	5.36%
Media mejora de precios en promedio	3.39%
Máxima mejora de precios en promedio	6.74%

TABLA 6. Carteras Dominadas con 4 Activos

Posiciones Largas en 4 Activos	
Observaciones con precio ask mejorado (al menos .1 cent)	5%
Media fracción de carteras con precio ask mejorado	2.33%
Media mejora de precios ask en promedio	0.75%
Máxima mejora de precios ask en promedio	1.13%
Posiciones Cortas en 4 Activos	
Observaciones con precio bid mejorado (al menos .1 cent)	9%
Media fracción de carteras con precio bid mejorado	1.57%
Media mejora de precios bid en promedio	1.85%
Máxima mejora de precios bid en promedio	4.73%
Una posición Corta y 3 Posiciones Largas	
Observaciones con precios mejorados (al menos .1 cent)	39%
Media fracción de carteras con precios mejorados	1.45%
Media mejora de precios en promedio	4.16%
Máxima mejora de precios en promedio	14.27%

TABLA 6. Carteras Dominadas con 4 Activos (Cont.)

Una posición Larga y 3 Posiciones Cortas	
Observaciones con precios mejorados (al menos .1 cent)	49%
Media fracción de carteras con precios mejorados	0.51%
Media mejora de precios en promedio	2.88%
Máxima mejora de precios en promedio	7.80%
2 Posiciones Largas y 2 Cortas	
Observaciones con precios mejorados (al menos .1 cent)	49%
Media fracción de carteras con precios mejorados	0.89%
Media mejora de precios en promedio	3.41%
Máxima mejora de precios en promedio	11.96%

Ejemplos $3-5$ abajo ilustran las posibles mejoras en precios de las estrategias dominadas que han sido posibles en el mercado durante el periodo del análisis.

Ejemplo 3. Estrategia Dominada con 2 Activos.

El día 11 de noviembre a las $11:30$ de la mañana, una opción call con vencimiento en diciembre y precio strike de 40 dólares podía venderse por 35 centavos. Sin embargo, el análisis de la etapa anterior sugiere que esta posición podía super-replicarse de forma sintética con un beneficio de 88.33 centavos, lo que tomamos como el precio bid artificial de la opción. Al mismo tiempo, una opción call con el mismo vencimiento y el strike de 51 dólares se podía comprar por 20 centavos. Vender la primera y comprar la segunda proporcionaría un beneficio de 68.33 centavos. Al mismo tiempo los siguientes precios estaban disponibles:

Activo	Vencimiento	Precio Strike	Ask	Bid
Call	Dic. 04	50	0.30	0.25
Call	Dic. 04	53	0.06	–

El beneficio de la cartera de dos activos podía entonces haberse mejorado hasta 69.67 centavos sin ningún riesgo adicional tomando las siguientes posiciones:

Activo	Vencimiento	Precio Strike	posición
Call	Dic. 04	40	-0.0062
Call	Dic. 04	50	-3.6397
Call	Dic. 04	53	3.6460

Gráfico 8 (parte superior) ilustra la función de pago de la cartera original en diciembre (línea gruesa) junto con la función de pago de la correspondiente cartera dominante (línea fina). El FDE proporciona un nuevo precio sombra ask para la opción call con el strike 51 dólares igual a 18.67 centavos. La parte inferior del Gráfico muestra el FDE que elimina la ineficiencia, multiplicado por la probabilidad de cada estado.□

Ejemplo 4. Estrategia Dominada con 3 Activos

El día 15 de noviembre a las 11 : 30 de la mañana, una opción put con vencimiento en diciembre y el precio strike de 46 dólares, se podía comprar por 8 centavos. Al mismo tiempo, había dos opciones put con precios strike iguales a 45.5 y 46.5 dólares que se podían vender por 2 y 10 centavos, respectivamente. Comprar la primera opción y vender las otras proporcionaría un beneficio de 4 centavos. Un inversor que buscara una estrategia dominante podría vender 1/2 unidades de la opción put con el strike de 45.5 dólares y la misma cantidad de la put con el strike de 46.5 dólares. Esta estrategia proporciona un beneficio de 6 centavos. La parte superior del Gráfico 9 muestra la función de pago de la cartera original (línea gruesa) junto con la función de pago de la cartera dominante (línea fina). Observe que en este ejemplo no existe una cartera ineficiente si los activos se toman dos por dos. La parte inferior del Gráfico 9 ilustra el FDE que elimina la ineficiencia, multiplicado por la probabilidad de cada estado. Utilizando este vector de precios de estado obtenemos el precio eficiente para la opción con el precio strike de 46 dólares igual a 6 centavos. □

Ejemplo 5. Estrategia Dominada con 4 Activos.

El día 15 de noviembre disponíamos de los siguientes datos de mercado:

Activo	Vencimiento	Precio Strike	Ask *)	Bid
Put	Dic. 04	37	0.0086047*	–
Put	Dic. 04	38	0.0088372*	–
Put	Dic. 04	39	0.0090698*	–
Put	Dic. 04	40.5	0.0094186*	–
Put	Dic. 04	43	0.01	–
Put	Dic. 04	45.5	0.068333*	0.02
Put	Dic. 04	46	0.08	0.05
Put	Dic. 04	46.5	0.58	0.1

*)Precios marcados con * no son precios originales de los activos sino el mínimo coste (máximo beneficio) de compra (venta) de las carteras que dominan estos activos.

Consideremos tomar dos posiciones largas en las opciones put con precios de ejercicio de 40.5 y 46 dólares, y dos posiciones cortas en las opciones put con precios de ejercicio de 45.5 y 46.5 puts. Esta estrategia proporciona el beneficio de:

$$0.02 + 0.1 - 0.0094186 - 0.08 = 0.0305814$$

Consideremos ahora la siguiente estrategia:

Activo	Vencimiento	Precio Strike	Posición
Put	Dic. 04	37	0.012607
Put	Dic. 04	38	0.013359
Put	Dic. 04	39	0.015285
Put	Dic. 04	40.5	0.024807
Put	Dic. 04	43	0.88198
Put	Dic. 04	45.5	-0.5
Put	Dic. 04	46	0
Put	Dic. 04	46.5	-0.5

Su beneficio total es de 0.050581 dólares, 2 centavos más, y su pago domina el pago de la estrategia original como se puede ver en el Gráfico 10. □

Los resultados de nuestro estudio revelan que las carteras dominadas compuestas por varios activos han estado frecuentemente presentes en el mercado durante el periodo del análisis. Esto muestra que los precios de los activos aunque eficientes si uno considera los activos por separado pueden ser ineficientes cuando se combinan distintos activos derivados formando carteras y estudian las posibilidades de dominancia. Para carteras que consisten solo en posiciones largas en dos, tres o cuatro activos los precios podían haber sido mejorados respectivamente en 9, 6 y 5 momentos cuando observamos el mercado durante el periodo del análisis. Si consideramos las carteras con solo posiciones cortas en dos, tres y cuatro activos, la posibilidad de mejora de precios ha sido detectada al menos 8 veces. Además, en términos medios, esta mejora parece ser más alta en el caso de carteras solo con posiciones largas tanto cuando comparamos media fracción de carteras con precios mejorados como tamaño medio de la mejora. La dominancia más frecuente de carteras compuestas por varios activos ha sido detectada en el caso de estrategias que consistían en ambos tipos de posiciones: largas y cortas. Dependiendo del número de activos algún tipo de carteras dominadas estaba disponible en el caso de entre 39 y 49 del total de 100 momentos de observación del mercado. También, tanto el tamaño medio de la mejora en el precio como la fracción media de carteras para las que tal mejora ha sido posible parece ser más significativa comparado con las carteras con solo posiciones largas o solo posiciones cortas. Estos resultados muestran que mayores mejoras de precios y reducciones de horquillas de precios son posibles cuando se consideran combinaciones de activos disponibles en el mercado.

4.3.3 Muestras Alternativas

Para verificar la robustez de los resultados obtenidos hemos decidido analizar dos muestras adicionales.

Como los precios bid-ask obtenidos del parqué pueden estar sujetos a posibles errores, en nuestra segunda muestra también analizamos precios de origen alternativo. En particular, un broker autorizado de $NYMEX$ ha registrado para nosotros los precios de seis opciones sobre el contrato de futuros con vencimiento en mayo de 2005: tres opciones call con precios de ejercicio igual a \$50, \$56.50 y \$60 y tres opciones put con los mismos precios strike. Los datos fueron recogidos al final de las siguientes sesiones de negociación: días 1, 7, 11 y 12 de abril.

Nuestro análisis muestra que los precios ask y bid podían haber sido mejorados respectivamente durante tres y cuatro de los días analizados. Las mejoras tanto en los precios ask como bid fueron por debajo de 1%. Las mejoras máximas fueron de 12.72% y 2.57%, respectivamente. Los resultados se resumen en Tabla 7. Sin embargo, una vez los precios originales han sido sustituidos por precios mejorados, no fue posible mejorar los precios de ninguna de las carteras que consistían en posiciones largas y/o cortas en dos o más activos.

TABLA 7. Activos Dominados (Segundo Periodo)	Ask	Bid
Observaciones con precios mejorados (al menos .1 cent)	75%	100%
Media fracción de activos con precios mejorados	16.66%	16.51%
Media mejora de precios en promedio	2.87%	0.78%
Máxima mejora de precios en promedio	4.70%	0.97%

Nuestra última muestra se semeja bastante a la primera y consiste en precios disponibles los días 11, 14 y 20 de julio de 2005, suministrados por Reuters. Hemos analizado en total nueve conjuntos sincronizados de datos en cada fecha. Igualmente como en el análisis anterior hemos utilizado los datos correspondientes al activo libre de riesgo y opciones call y put sin considerar los precios spot o precios futuros del subyacente. Precios del día 11 y 14 de julio corresponden a las opciones con vencimiento en agosto y septiembre de 2005, mientras que las opciones disponibles el día 20 de julio vencían en septiembre.

Tablas 8 y 9 abajo resumen los resultados empíricos y, como se puede observar, no presentan diferencias significativas con respecto a otros periodos analizados.

TABLA 8. **Activos Dominados (Tercer Periodo)**	Ask	Bid
Observaciones con precios mejorados (al menos .1 cent)	62.96%	14.81%
Media fracción de activos con precios mejorados	13.92%	15.82%
Media mejora de precios en promedio	22.22%	54.17%
Máxima mejora de precios en promedio	26.16%	54.17%

TABLA 9. Carteras Dominadas (Tercer Periodo)

Carteras Dominadas con Dos Activos	
Posiciones Cortas en Ambos Activos	
Observaciones con precios bid mejorados (al menos .1 cent)	0
Posiciones Largas en Ambos Activos	
Observaciones con precios ask mejorados (al menos .1 cent)	0
Una posición Larga y una Corta	
Observaciones con precios mejorados (al menos .1 cent)	55.56%
Fracción media de carteras con precios mejorados	4.39%
Media mejora de precios en promedio	10.28%
Máxima mejora de precios en promedio	11.22%

TABLA 9. Carteras Dominadas (Tercer Periodo) (Cont.)

Carteras Dominadas con Tres Activos	
Posiciones Cortas en Tres Activos	
Observaciones con precios bid mejorados (al menos .1 cent)	0
Posiciones Largas en Tres Activos	
Observaciones con precios ask mejorados (al menos .1 cent)	0
Una posición Larga y Dos Cortas	
Observaciones con precios mejorados (al menos .1 cent)	55.56%
Fracción media de carteras con precios mejorados	9.09%
Media mejora de precios en promedio	1.15%
Máxima mejora de precios en promedio	1.47%
Una posición Corta y Dos Largas	
Observaciones con precios mejorados (al menos .1 cent)	55.56%
Fracción media de carteras con precios mejorados	8.97%
Media mejora de precios en promedio	5.07%
Máxima mejora de precios en promedio	10.40%

TABLA 9. Carteras Dominadas (Tercer Periodo) (Cont.)

Carteras Dominadas con Cuatro Activos	
Posiciones Cortas en Cuatro Activos	
Observaciones con precios bid mejorados (al menos .1 cent)	0
Posiciones Largas en Cuatro Activos	
Observaciones con precios ask mejorados (al menos .1 cent)	0
Una posición Larga y Tres Cortas	
Observaciones con precios mejorados (al menos .1 cent)	59.26%
Fracción media de carteras con precios mejorados	13.75%
Media mejora de precios en promedio	3.31%
Máxima mejora de precios en promedio	11.60%

TABLA 9. Carteras Dominadas (Tercer Periodo)

Carteras Dominadas con Cuatro Activos (Cont.)	
Una posición Corta y Tres Largas	
Observaciones con precios mejorados (al menos .1 cent)	59.26%
Fracción media de carteras con precios mejorados	17.21%
Media mejora de precios en promedio	3.76%
Máxima mejora de precios en promedio	14.65%
Dos Posiciones Cortas y Dos Largas	
Observaciones con precios mejorados (al menos .1 cent)	59.26%
Fracción media de carteras con precios mejorados	13.41%
Media mejora de precios en promedio	3.97%
Máxima mejora de precios en promedio	13.86%

4.4 Conclusiones

En este Capítulo hemos aplicado los resultados teóricos del Capítulo 3 de la Tesis para estudiar la existencia de ineficiencias en el mercado de derivados ligados al petróleo $NYMEX$. Los resultados de este análisis empírico demuestran la utilidad del enfoque de FDE para analizar la existencia de carteras dominadas y valorar las carteras en mercados con fricciones, como en este caso es el mercado de derivados sobre petróleo. Los FDE para mercados imperfectos establecen una conexión entre los pagos y precios ya que proporcionan un proceso teórico de precios que está situado debajo del proceso real de precios y al mismo tiempo permiten valorar carteras eficientes.

El análisis empírico se ha hecho con la mayor precisión ya que hemos utilizado los precios bid/ask perfectamente sincronizados y hemos descontado posibles fricciones. El estudio se ha llevado acabo dentro del marco estático y por lo tanto podemos garantizar la robustez de nuestras conclusiones independientemente de cualquier supuesto dinámico sobre el comportamiento de precios.

A pesar del nivel de generalización del análisis, nuestros resultados parecen revelar la existencia de claras y frecuentes ineficiencias en el mercado. Esto demuestra que los precios del mercado podrían mejorarse de forma significativa y las horquillas de precios podrían ser reducidas. A lo largo del Capítulo hemos proporcionado varios ejemplos específicos de estrategias que se podían haber implementado en el mercado durante el periodo del análisis junto con los resultados generales. Esta evidencia empírica parece ser una gran aportación de este trabajo por varias razones. En primer lugar, puede resultar útil proporcionar más evidencia sobre el nivel de eficiencia de mercados financieros no ligados a las equities. En segundo lugar, muchos brokers e inversores podrían estar interesados en estos resultados ya que suelen incorporar los derivados de petróleo para construir carteras óptimas y bien diversificadas. Además, la existencia de ineficiencias aporta a los brokers nuevos y prácticos métodos de valoración e inversión que pueden permitir mejorar el "performance" de las carteras de sus clientes.

Finalmente, la metodología utilizada en este estudio es lo suficientemente general para poder ser aplicada en cualquier mercado financiero, y por lo tanto puede permitir estudiar los mercados emergentes y posiblemente ilíquidos en los que los clásicos métodos de valoración no se pueden aplicar.

4.5 Apéndice. Gráficos.

Gráfico 1. Precios medios de contratos de futuros durante el periodo analizado

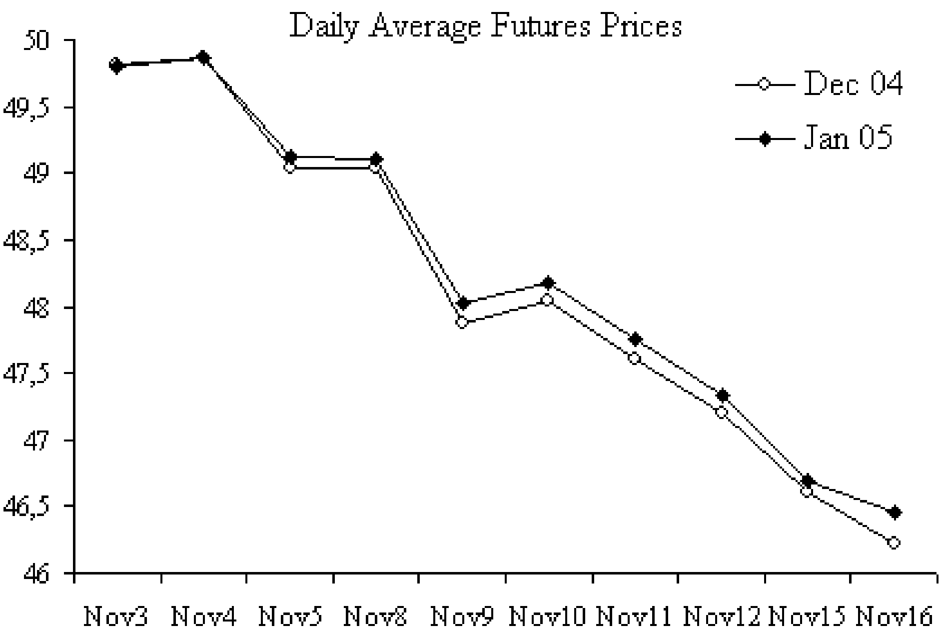
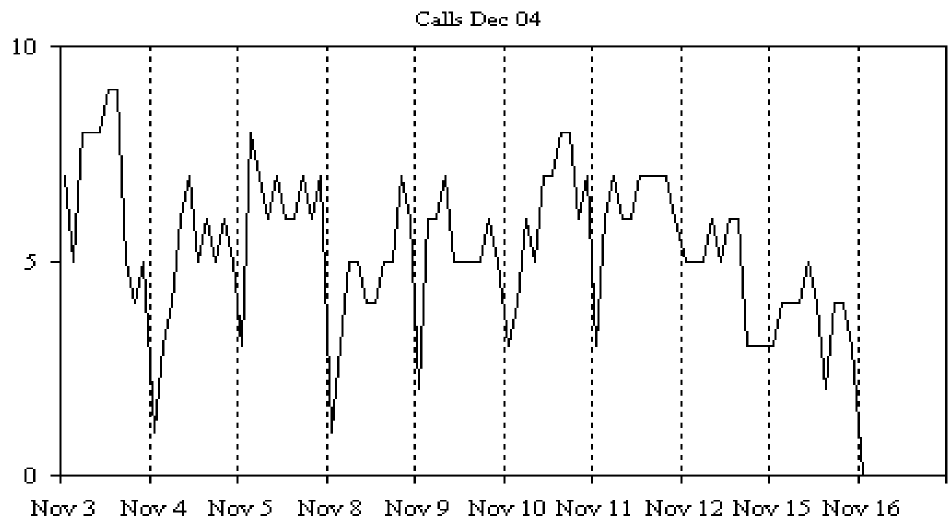


Gráfico 2. Número de opciones call y put, respectivamente, con vencimiento en diciembre de 2004 con precios (ask, bid o ambos) disponibles en cada momento de observación del mercado.



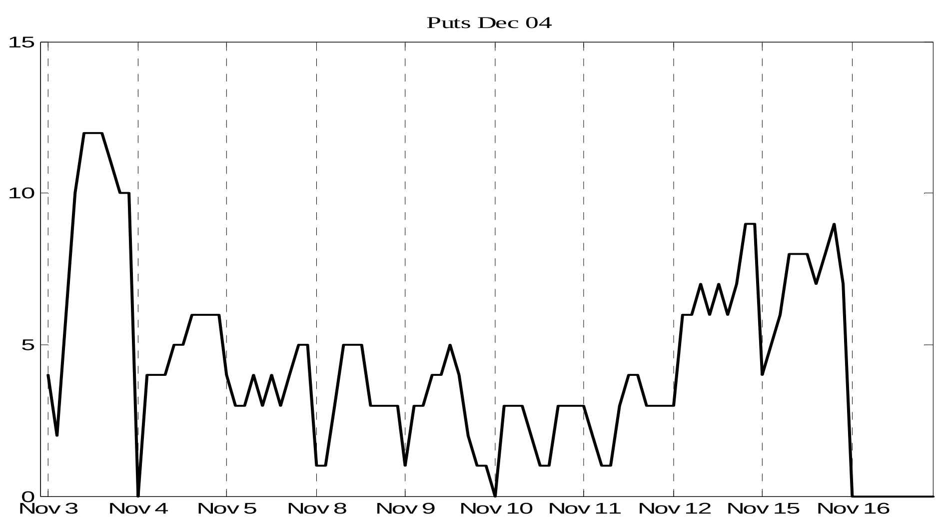
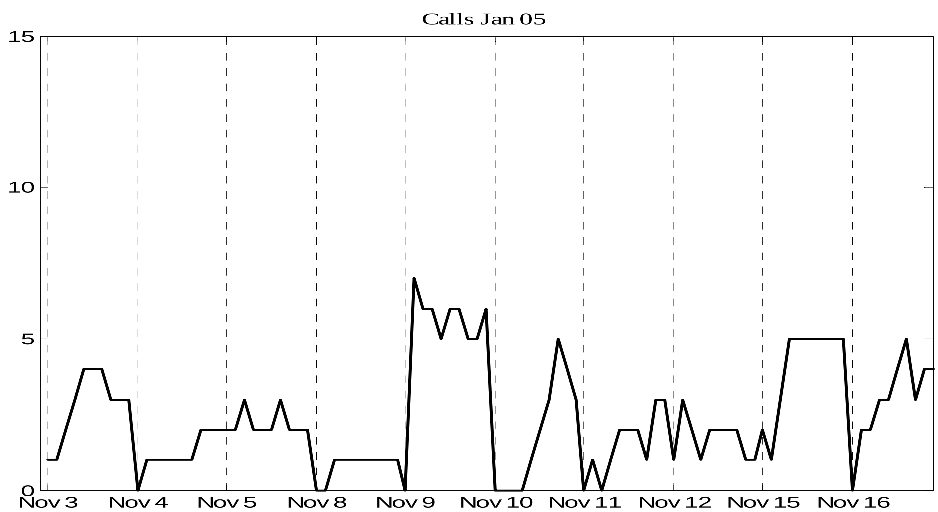


Gráfico 3. Número de opciones call y put, respectivamente, con vencimiento en enero de 2005 con precios (ask, bid o ambos) disponibles en cada momento de observación del mercado.



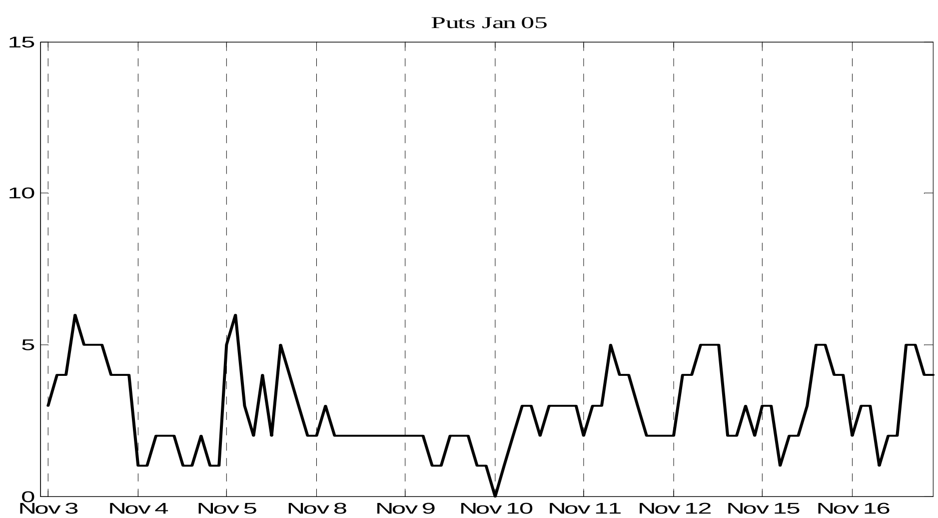


Gráfico 4. Precios ask y bid de las opciones call más cotizadas durante el periodo del análisis.

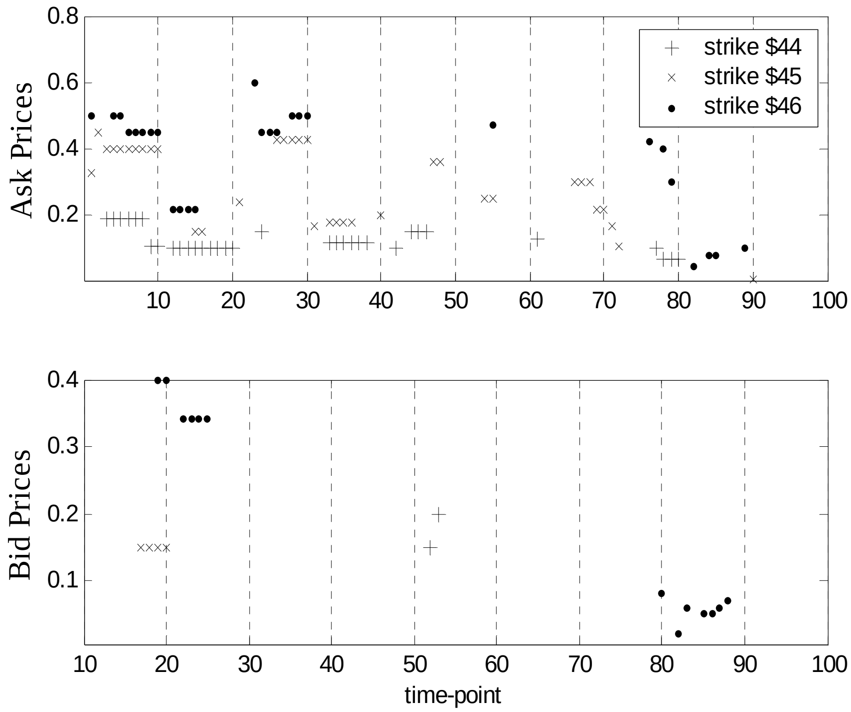


Gráfico 5. Precios ask y bid de las opciones put más cotizadas durante el periodo del análisis.

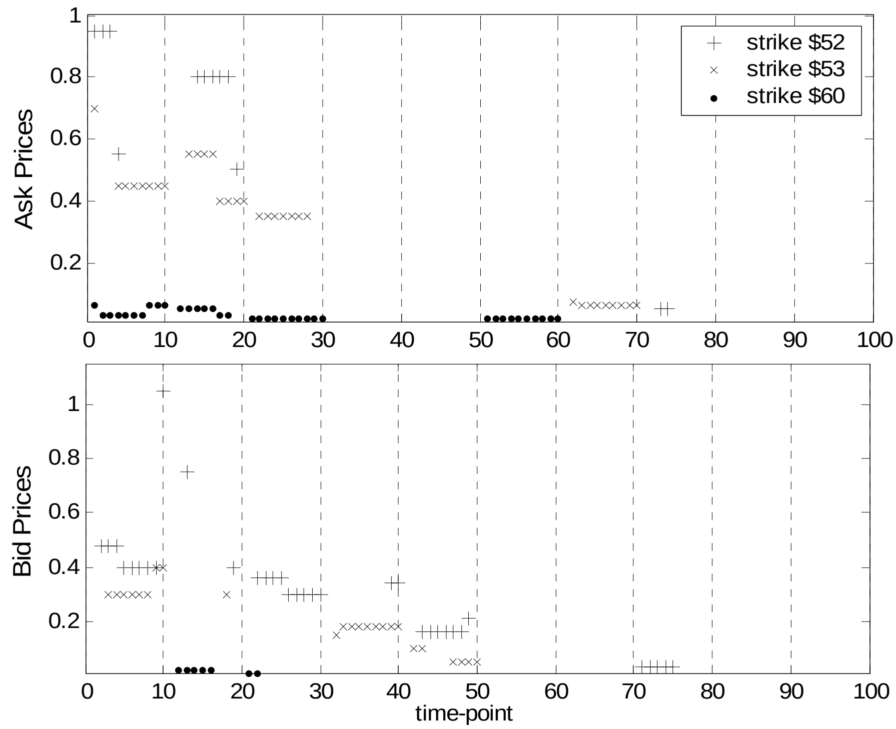


Gráfico 6. Ejemplo 1. El gráfico representa la función de pagos de una estrategia de arbitraje el día 5 de noviembre.

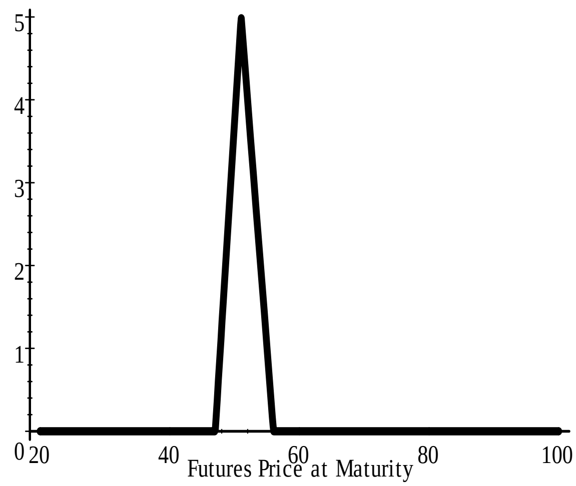
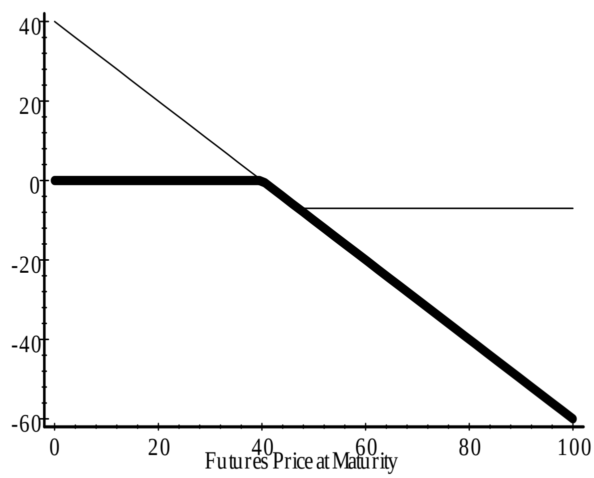


Gráfico 7. Ejemplo 2. La parte superior del gráfico presenta las funciones de pago del activo dominado (línea gruesa) y de la cartera dominante. En la parte inferior del gráfico se muestra el FDE multiplicado por la probabilidad de cada estado que eliminaría la ineficiencia.



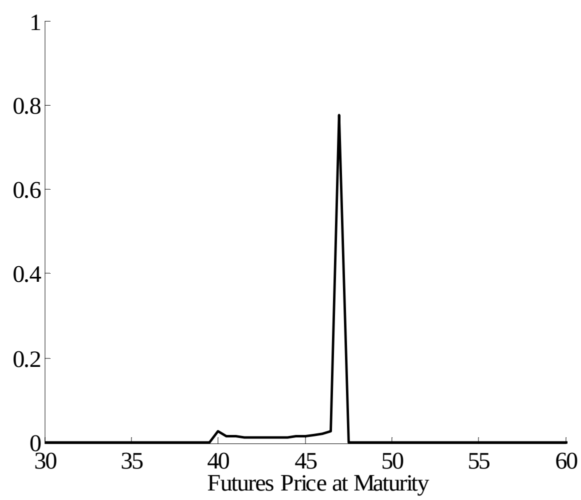
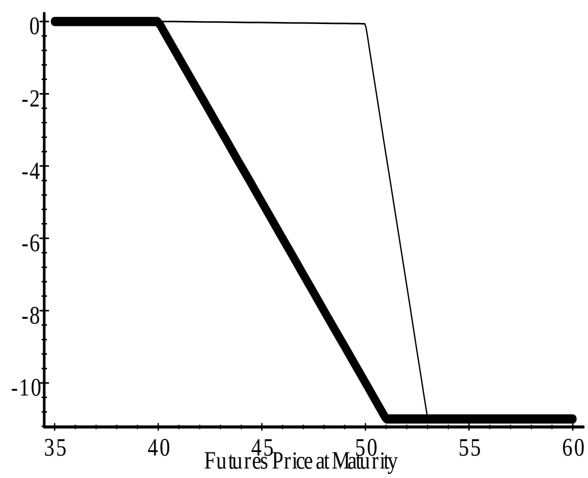


Gráfico 8. Ejemplo 3. La parte superior del gráfico presenta las funciones de pago de la cartera dominada (línea gruesa) y de la cartera dominante. En la parte inferior del gráfico se muestra el FDE multiplicado por la probabilidad de cada estado que eliminaría la ineficiencia.



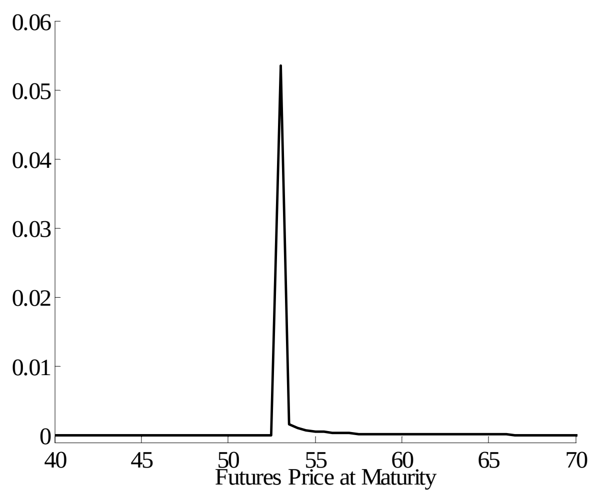
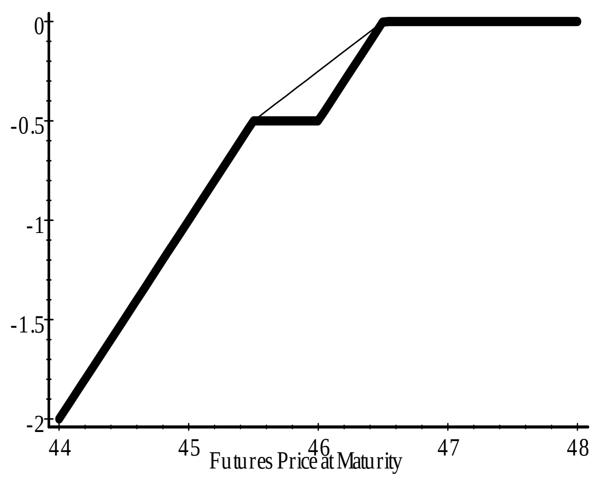


Gráfico 9. Ejemplo 4. La parte superior del gráfico presenta las funciones de pago de la cartera dominada (línea gruesa) y de la cartera dominante. En la parte inferior del gráfico se muestra el FDE multiplicado por la probabilidad de cada estado que eliminaría la ineficiencia.



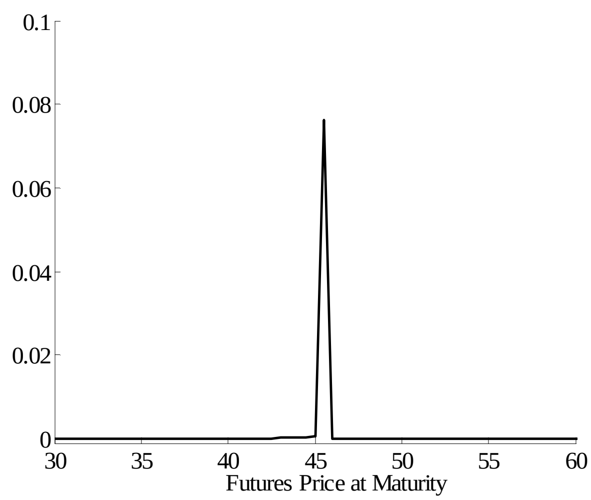
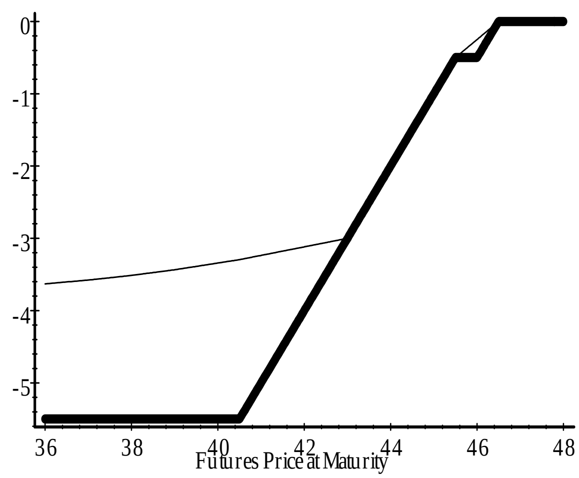
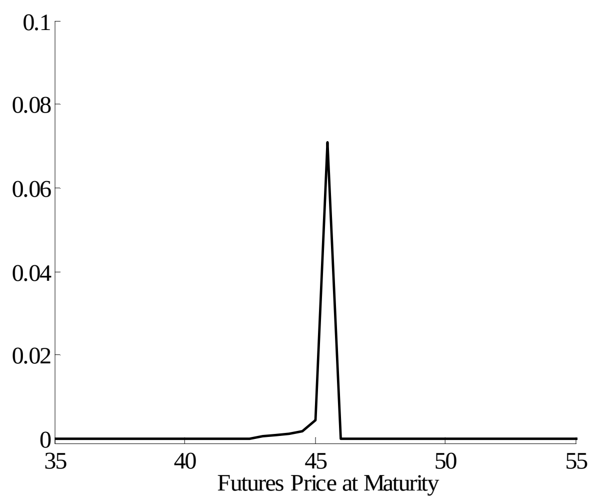


Gráfico 10. Ejemplo 5. La parte superior del gráfico presenta las funciones de pago de la cartera dominada (línea gruesa) y de la cartera dominante. En la parte inferior del gráfico se muestra el FDE multiplicado por la probabilidad de cada estado que eliminaría la ineficiencia.





Bibliografía

[1] Black, F. 1976. The Pricing of Commodity Contracts. *Journal of Financial Economics,* 3, 167-179.

[2] Clewlow, L. and C. Strickland 2000. *Energy Derivatives: Pricing and Risk Management.* Lacima Group.

[3] Constantinides, G.M., J.C. Jackwerth and S. Perrakis, 2004. Mispricing of $S\&P500$ Index Options. *Mimeo.*

[4] Energy Information Administration, U.S. Department of Energy, October 2002. Derivatives and Risk Management in the Petroleum, Natural Gas, and Electricity Industries.

[5] Gibson, R. and E.S. Schwartz, 1990. Stochastic Convenience Yield and the Pricing of Oil Contingent Claims. *The Journal of Finance,* 45, 3, 959-976.

[6] Schwartz, E. S., 1997. The Stochastic Behavior of Commodity Prices: Implications for Valuation and Hedging. *The Journal of Finance*, 52, 923-973.