

**UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID**

**Escuela Politécnica Superior - Leganés**

**INGENIERÍA DE TELECOMUNICACIÓN**

**Departamento de Tecnología Electrónica**



**PROYECTO FIN DE CARRERA**

**Estudio teórico de la dinámica no lineal en  
diodos láser acoplados lateralmente**

**AUTOR: HOMERO CANALES GUENANECHÉ**

**TUTOR: RUI LEMOS ALVARES DOS SANTOS**

Leganés, Enero de 2010



*A mis padres*  
*A Giovanna*  
*A mi familia*  
*A mis colegas*



# Resumen

En los últimos años la dinámica no lineal en láseres de semiconductor ha sido objeto de numerosos estudios. Aunque el diodo láser de por sí no puede mostrar un comportamiento caótico ya que su dinámica viene determinada por dos variables independientes, al añadir un tercer grado de libertad se posibilita la aparición de no linealidades. Esto puede ocurrir por diferentes mecanismos, como la modulación directa de la corriente, la inyección externa de luz o el acoplo lateral de los láseres de un array. En este proyecto se estudia esta última configuración, la cual ha sido propuesta con éxito para alcanzar velocidades de transmisión por encima del límite tradicional del ancho de banda de los láseres de semiconductor: la frecuencia de relajación de oscilación. Se han observado experimentalmente en estos dispositivos comportamientos no lineales y caóticos que no han sido clarificados a nivel teórico. A nivel experimental se verifica que la dinámica no lineal tiene su origen en la interacción entre la frecuencia de batido de los modos laterales del array y la frecuencia de relajación del diodo láser.

Analizamos en detalle un modelo habitual basado en ecuaciones de tasa en las que un factor de acoplo complejo representa la interacción entre las colas evanescentes de los modos laterales de los emisores. Sin embargo, este modelo no consigue explicar la dinámica no lineal observada, por lo que, para una mejor comprensión de las no linealidades, se elabora un sencillo modelo fenomenológico con el objeto de simular los efectos no lineales que pueden llevar al régimen caótico, los cuales se estudian mediante una serie de diagramas de bifurcación construidos sobre distintos parámetros.

## Palabras clave

Láser semiconductor, Arrays de láseres, Acoplo lateral, Dinámica no lineal, Caos



# Abstract

In recent years nonlinear dynamics in semiconductor lasers has been the subject of numerous studies. Although the diode laser can exhibit no chaotic behavior on his own because its dynamics are fully determined by two independent variables, the addition of a third degree of freedom enables the rising of nonlinearities. This can happen by means of different mechanisms, like direct current modulation, external optical injection or lateral coupling in a lasers array. In this thesis the latter configuration is studied, having been proposed successfully for reaching transmission speeds above the traditional bandwidth limitation in semiconductor lasers imposed by the relaxation oscillation frequency. Non linear and chaotic behaviors have been observed experimentally in these kind of devices, but have not been fully explained by theoretical studies. Experiments show that these non linear dynamics are related to the interaction between the lateral modes beating frequency of the array and the relaxation frequency of the diode laser.

We analyze in detail one usual model based on rate equations in which a complex coupling factor represents the interaction between the evanescent fields of the emitters lateral modes. However, this model fails to explain the observed nonlinear dynamics. Thus, to achieve a better understanding of these nonlinearities, a simpler phenomenological model is implemented, with the scope of simulating the nonlinear effects which can lead to chaotic regime. These are studied through a series of bifurcation diagrams where different parameters are varied.

## Keywords

Semiconductor laser, Laser arrays, Lateral coupling, Nonlinear dynamics, Chaos



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>V</b>
<b>Abstract</b>	<b>VII</b>
<b>Índice general</b>	<b>IX</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>XI</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>XIII</b>
<b>1. Introducción y objetivos</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.2. Objetivos . . . . .	3
1.3. Medios materiales . . . . .	3
1.4. Contenidos del proyecto . . . . .	4
<b>2. Conceptos básicos</b>	<b>7</b>
2.1. El diodo láser . . . . .	7
2.1.1. Orígenes . . . . .	7
2.1.2. El medio semiconductor . . . . .	9
2.1.3. Estructura y funcionamiento . . . . .	11
2.2. Caracterización del láser . . . . .	15
2.2.1. Ecuaciones de tasa . . . . .	15
2.2.2. Umbral de emisión . . . . .	18
2.2.3. Respuesta estática . . . . .	20
2.3. Dinámica del laser . . . . .	23
2.3.1. Régimen transitorio . . . . .	23

2.3.2.	Respuesta en modulación . . . . .	25
2.3.3.	El láser como sistema dinámico . . . . .	26
2.3.4.	Dinámica no lineal y caos . . . . .	27
2.4.	Acoplo lateral . . . . .	31
<b>3.</b>	<b>Modelo Winful/Wilson</b>	<b>35</b>
3.1.	Formulación . . . . .	35
3.2.	Estabilidad . . . . .	41
3.3.	Respuesta en frecuencia . . . . .	45
3.4.	Dinámica . . . . .	47
3.5.	Discusión . . . . .	50
<b>4.</b>	<b>Simulación y ruta al caos</b>	<b>55</b>
4.1.	Modelo simplificado . . . . .	55
4.2.	Formulación . . . . .	58
4.3.	Teoría de bifurcaciones . . . . .	60
4.4.	Dinámica no lineal . . . . .	61
4.5.	Aplicación a los LCDL . . . . .	69
<b>5.</b>	<b>Conclusiones y futuras líneas de trabajo</b>	<b>73</b>
5.1.	Conclusiones . . . . .	73
5.2.	Futuras líneas de trabajo . . . . .	75
<b>A.</b>	<b>Código MATLAB</b>	<b>77</b>
A.1.	Modelo Wilson . . . . .	77
A.2.	Modelo simplificado . . . . .	91
<b>B.</b>	<b>Presupuesto</b>	<b>97</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>101</b>

# Índice de figuras

2.1. Equilibrio térmico e inversión de población . . . . .	9
2.2. Fenómenos de recombinación . . . . .	10
2.3. Estructura esquemática de una doble heterounión . . . . .	12
2.4. Ganancia y modos longitudinales . . . . .	15
2.5. Curva luz-corriente . . . . .	19
2.6. Población de portadores en función de la corriente de inyección . . . . .	20
2.7. Régimen transitorio al aplicar un escalón de corriente . . . . .	24
2.8. Respuesta en frecuencia . . . . .	26
2.9. Atractores en el espacio de fases . . . . .	27
2.10. Oscilaciones de relajación en el espacio de fases . . . . .	28
2.11. Órbita periódica . . . . .	29
2.12. Atractor extraño . . . . .	30
2.13. Espectro de señal caótica . . . . .	30
2.14. Estructura esquemática de dos emisores acoplados lateralmente . . . . .	31
2.15. SRFF de dos LCDL bajo diferentes regímenes de acoplo . . . . .	32
2.16. Modos de un array lateral de dos láseres . . . . .	33
2.17. Respuesta en frecuencia de dispositivo LCDL . . . . .	34
3.1. Modelo de 5 guías . . . . .	37
3.2. Frontera de estabilidad . . . . .	42
3.3. Influencia de la separación entre emisores en la estabilidad . . . . .	44
3.4. Influencia de la corriente en la estabilidad . . . . .	44
3.5. Influencia del factor $\alpha$ en la estabilidad . . . . .	45
3.6. Respuesta en frecuencia . . . . .	46
3.7. Comportamiento dinámico estable . . . . .	48

3.8. Dinámica estable con modulación . . . . .	49
3.9. Comportamiento dinámico sobre la frontera de estabilidad . . . . .	50
3.10. Comportamiento dinámico caótico . . . . .	50
3.11. Relación de frecuencias . . . . .	52
3.12. Relación doble . . . . .	52
3.13. Ruta al caos en LCDL observada experimentalmente . . . . .	53
4.1. Estructura esquemática de dos LCDL . . . . .	56
4.2. Interacción entre los campos emitidos . . . . .	56
4.3. Lateral mode locking . . . . .	57
4.4. Mapa de bifurcaciones variando el índice de modulación . . . . .	62
4.5. Mapa de bifurcaciones variando el índice de modulación (2) . . . . .	62
4.6. Periodo simple . . . . .	63
4.7. Periodo doble . . . . .	64
4.8. Periodo cuádruple . . . . .	64
4.9. Caos . . . . .	65
4.10. Mapa de bifurcaciones variando la corriente . . . . .	66
4.11. Ruta inversa variando la corriente . . . . .	66
4.12. Salto a periodo 6 . . . . .	67
4.13. Mapa de bifurcaciones variando la frecuencia de modulación . . . . .	68
4.14. Efecto de la relación de frecuencias . . . . .	68
4.15. Mapa de bifurcaciones con frecuencia de modulación fija . . . . .	69
4.16. Mapa de bifurcaciones con frecuencia de modulación fija (2) . . . . .	70
4.17. Saltos a otros atractores en el mapa de bifurcaciones . . . . .	70
4.18. Mapa de regímenes no lineales en LCDL . . . . .	71

# Índice de tablas

2.1. Valores típicos de los parámetros de un láser de InGaAsP/InP . . . . .	21
3.1. Parámetros del láser para el cálculo de estabilidad y dinámica . . . . .	43
4.1. Parámetros de simulación . . . . .	59



# Capítulo 1

## Introducción y objetivos

### 1.1. Motivación

La tecnología del láser semiconductor ha conocido un fuerte crecimiento desde su aparición hace casi cincuenta años. El diodo láser genera un haz de fotones coherente por el proceso de recombinación de los pares electrón-hueco, alimentado por una corriente de inyección. Una de las grandes ventajas de estos dispositivos, además de la facilidad de integración en circuitos optoelectrónicos, y de su bajo coste, es que la luz emitida se puede modular para transmitir información modulando directamente la corriente de inyección. Gracias a ello, los diodos láser se utilizan en multitud de campos como la escritura y lectura de discos compactos, la telemetría, y sobre todo las comunicaciones ópticas.

Es en éstas en las que resulta más crítica sin embargo la limitación del ancho de banda del diodo láser en modulación directa. Ésta es debida a la presencia de una frecuencia de resonancia en torno a los pocos gigahercios tras la cual la respuesta en frecuencia decae rápidamente. Para superar esta limitación, una de las soluciones investigadas ha sido la de utilizar arrays de láseres acoplados lateralmente (*LCDL*).

El acoplo lateral entre emisores láser, inicialmente ideado para aumentar la potencia óptica de salida<sup>1</sup>, ha sido objeto de numerosos estudios teóricos y experimentales, en los que se ha puesto de manifiesto que el enganche en fase (*phase-locking*) de los

emisores produce una segunda frecuencia de resonancia y permite la transmisión en pequeña señal a mayores frecuencias<sup>2,3</sup>. Desde un principio ha sido de fundamental importancia el estudio de la estabilidad de este tipo de dispositivos, ya que el acoplo lateral introduce un nuevo grado de libertad en las ecuaciones que gobiernan la dinámica del láser, posibilitando la aparición de comportamientos no lineales tales como oscilaciones subarmónicas que, bajo determinadas condiciones, pueden conducir al caos.

El láser semiconductor como sistema dinámico complejo gobernado por un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales se viene estudiando desde hace varios años. Aunque en principio su funcionamiento es plenamente descrito por dos cantidades independientes (el campo eléctrico y la densidad de portadores en la cavidad resonante), la introducción de un tercer grado de libertad, sea por inyección externa de luz, por modulación, o por la influencia de una cavidad externa, permite la aparición de inestabilidades potencialmente caóticas. Además, se ha demostrado que la aparición de las no linealidades se ve favorecida cuando el nuevo grado de libertad introduce una perturbación a una frecuencia próxima al doble de la frecuencia de resonancia del láser<sup>4</sup>. En el caso de la modulación en gran señal de la corriente de inyección, se ha predicho de forma teórica<sup>5</sup> y verificado experimentalmente<sup>6</sup> una ruta al caos por periodo doble a partir de cierto índice de modulación.

El caso del acoplo lateral ha sido inicialmente estudiado en la óptica de buscar un comportamiento estable del dispositivo, ya que éste se consideraba intrínsecamente inestable<sup>7</sup>. La investigación de posibles aplicaciones prácticas de un régimen de emisión caótico<sup>8</sup>, así como la posibilidad de utilizar estos dispositivos como paradigma para el propio estudio del comportamiento dinámico de osciladores acoplados<sup>9</sup> o en general de sistemas caóticos<sup>10</sup>, y la detección de funcionamiento tanto estable como no lineal y caótico en un mismo dispositivo<sup>11</sup>, han desplazado el interés hacia el comportamiento no lineal del acoplo lateral de diodos láser.

Se han desarrollado diferentes tipos de modelos de la dinámica de estos dispositivos<sup>12</sup>, siendo los de ecuaciones de tasa los más utilizados para acoplos débiles (es decir, con los emisores *no demasiado cercanos* el uno al otro) por su simplicidad y la posibilidad de utilizar las herramientas de la teoría de bifurcaciones. Se ha observado siempre, al igual que en otros tipos de láseres<sup>13</sup>, que el comportamiento caótico viene precedido por una secuencia de bifurcaciones de periodo doble, con la posible

aparición de regímenes de periodo triple<sup>5</sup>. Los primeros modelos, como el que analizaremos en este proyecto, no incluían o preveían necesariamente los resultados de estas últimas investigaciones.

## 1.2. Objetivos

Nos proponemos implementar y analizar uno de los modelos<sup>2</sup> más influyentes -que llamaremos *modelo Winful/Wilson*- para la caracterización del acoplo lateral entre dos emisores láser gemelos a la luz de los últimos hallazgos en este campo. Este modelo se estudiará aquí tal como se describe en la tesis doctoral de Geoffrey Wilson<sup>14</sup>.

Los principales objetivos de este proyecto serán pues el análisis de dicho modelo para esclarecer su funcionamiento y el contraste de sus resultados con aquellos arrojados por recientes investigaciones tanto a nivel teórico como experimental.

Además, se elaborará un modelo simplificado y actualizado de tipo fenomenológico con el que simular cualitativamente las no linealidades y la ruta al caos en un dispositivo formado por láseres semiconductores acoplados lateralmente (LCDL).

El proyecto supondrá además una introducción al estudio de los sistemas dinámicos complejos, de las ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales y del caos, así como naturalmente del funcionamiento básicos de los láseres de semiconductor.

## 1.3. Medios materiales

El proyecto se basa principalmente en la transcripción de los programas de simulación del modelo de Wilson, del código original en FORTRAN a unas funciones para MATLAB, y su posterior simulación con dicha herramienta. De las simulaciones del segundo modelo, implementado igualmente en MATLAB, se extraen principalmente mapas de bifurcaciones.

Se trata así pues de una labor de simulación para la que no se requieren nuevos experimentos en laboratorio.

## 1.4. Contenidos del proyecto

Este estudio se organiza en cinco capítulos:

### ■ **Capítulo 1: Introducción**

En este primer capítulo se introduce el campo de estudio y se presentan brevemente las motivaciones y los objetivos del proyecto, así como los medios empleados para llevarlo a cabo.

### ■ **Capítulo 2: Conceptos básicos**

El segundo capítulo establece los conceptos teóricos necesarios acerca del diodo láser, su historia, su estructura y su funcionamiento. Se hace especial hincapié en el comportamiento dinámico tanto lineal como no lineal y se ofrece así mismo una introducción teórica al estudio de los sistemas complejos, la dinámica no lineal y el caos determinístico. Se presentan igualmente los arrays de diodos láser acoplados lateralmente, que serán el tipo de dispositivo estudiado en el resto del proyecto.

### ■ **Capítulo 3: Modelo Winful/Wilson**

El tercer capítulo expone la base teórica del modelo de Winful/Wilson y una versión resumida de su desarrollo, así como los resultados obtenidos de su implementación, para terminar con una valoración del mismo en base a los objetivos del proyecto y al actual estado del arte.

### ■ **Capítulo 4: Modelo simplificado**

En el cuarto capítulo se presenta un modelo simplificado de tipo fenomenológico así como los resultados obtenidos de su simulación. También se introduce aquí la teoría de bifurcaciones y los diagramas resultantes de su aplicación a la simulación del modelo. Éstos permiten observar la secuencia de oscilaciones subarmónicas que conducen del funcionamiento lineal estable al caos.

### ■ **Capítulo 5: Conclusiones**

Finalmente, en el quinto capítulo se exponen las conclusiones del proyecto y se abren futuras líneas de trabajo.

- **Anexo A: Código MATLAB**

En este primer apéndice se adjunta el código de las funciones utilizadas tanto en la simulación del modelo Winful/Wilson (la transcripción en MATLAB del código original de Wilson et al. en FORTRAN) como en la simulación del nuevo modelo simplificado, desarrollado directamente en MATLAB. La mayoría de las figuras del proyecto se obtienen de la ejecución de estas funciones.

- **Anexo B: Presupuesto**

Este segundo apéndice da cuenta de una estimación de los costes asociados a la ejecución del proyecto.



# Capítulo 2

## Conceptos básicos

### 2.1. El diodo láser

#### 2.1.1. Orígenes

El efecto de emisión estimulada, por el que la llegada de un fotón provoca la caída de un electrón a un nivel de energía inferior y la consiguiente emisión de otro fotón de misma frecuencia, fue descubierto por Albert Einstein en 1917. Sin embargo no fue hasta los años 1950 cuando empezaron a aparecer las primeras aplicaciones de este efecto. En 1953 el equipo de Charles Hard Townes crea el primer amplificador de microondas por emisión estimulada de radiación (MASER por sus siglas en inglés). Los primeros láseres de hecho se conocerían como "máseres ópticos", hasta la acuñación del término LASER ("Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation") por Gordon Gould en 1957, al que fue reconocida la patente del primer láser después de tres décadas de batallas legales. En principio el nombre designaba el principio de funcionamiento, aunque se utilizó rápidamente para describir también el dispositivo físico<sup>15</sup>. La base teórica del funcionamiento de máseres y láseres fue desarrollada por Arthur Schawlow, Charles Hard Townes, Nikolay Basov y Alexander Prokhorov en la década de 1950, obteniendo los tres últimos el premio Nobel de física en 1964.

El primer dispositivo operativo fue un láser de rubí construido por Theodore Maiman en 1960 en el Hughes Research Laboratories, al cual siguió el mismo año el

primer láser de gas (helio-neón). Al momento de su invención el láser se veía como una solución esperando un problema, ya que no tenía aplicaciones inmediatas pero sus propiedades (derivadas de la gran coherencia obtenida en la luz emitida) le auguraban un gran futuro. Las principales de éstas eran su excelente directividad, su muy estrecho ancho de banda de emisión y la posibilidad de emitir tanto en continua como en forma de pulsos ultracortos<sup>15</sup>.

La aparición del láser semiconductor tiene su origen en la sugerencia por parte de Basov en 1961 de que la emisión estimulada de radiación podría ocurrir en medios semiconductores mediante la recombinación de los pares electrón-hueco inyectados a través de una unión p-n. Los primeros dispositivos basados en este efecto fueron fabricados en 1962 por varios laboratorios de forma independiente. Sin embargo, el progreso tecnológico fue lento al principio, por una parte debido a la necesidad de fabricar materiales semiconductores compuestos, ya que se necesitaba un medio semiconductor de gap directo, por lo que no valía el simple silicio; y por otra también por los problemas ligados a las altas corrientes de umbral, que requerían una temperatura de funcionamiento muy baja<sup>1</sup>.

La fabricación de las primeras estructuras de heterounión (propuestas en 1963 por Herbert Kroemer) en 1969 resolvería muchos de estos problemas proporcionando la posibilidad de operar a temperatura ambiente. En estos dispositivos se reemplazaba la simple unión p-n por múltiples capas de diferente composición<sup>1</sup>.

La importancia y variedad de las aplicaciones de los láseres de semiconductor han facilitado los recursos para su desarrollo: son utilizados en comunicaciones ópticas, memorias ópticas, impresoras y fotocopiadoras, además de para el bombeo de láseres de estado sólido. De hecho, su uso en comunicaciones ópticas, motivado por la facilidad para modular directamente la salida del láser modulando la corriente de inyección, ha llevado al desarrollo de láseres operando en las ventanas de  $1,3\mu m$  y  $1,5\mu m$ , en las que, respectivamente, las pérdidas y la dispersión de la velocidad de grupo en la fibra óptica son mínimas<sup>16</sup>. El gran éxito alcanzado por el láser semiconductor se debe a la posibilidad de su construcción en serie y a la facilidad de integración con los circuitos electrónicos integrados, dando lugar de esta forma a los circuitos optoelectrónicos integrados<sup>17</sup>.

Es además el único tipo de emisor láser en el cual se puede modular la señal óptica de salida tanto en amplitud como en frecuencia simplemente modulando la corriente

de inyección del dispositivo<sup>13</sup>. El hecho de utilizar la misma señal para fijar el punto de trabajo (nivel de continua) y para la modulación (pequeña señal) simplifica además notablemente los circuitos con respecto a los que requieren una modulación externa.<sup>18</sup>

## 2.1.2. El medio semiconductor

En un medio semiconductor en equilibrio térmico la banda en la que los estados electrónicos se encuentran ocupados se denomina banda de valencia y aquella de nivel de energía inmediatamente superior constituye la banda de conducción (figura 2.1a). Entre ambas se encuentra el llamado nivel de Fermi  $E_f$  o potencial químico, que se sitúa en la banda prohibida o *de gap*. En los medios de gap directo, además, el mínimo energético  $E_c$  de la banda de conducción y el máximo  $E_v$  de la banda de valencia coinciden en número de onda<sup>13</sup>. El salto de energía entre ambas bandas es la energía de gap  $E_{gap} = E_c - E_v$  y tanto los electrones de la banda de conducción como los huecos (estados no ocupados) de la banda de valencia constituyen los portadores de carga (negativa para los electrones, positiva para los huecos). Este estado de equilibrio se ve alterado en presencia de una corriente eléctrica, produciendo lo que se conoce como inversión de población o temperatura negativa<sup>1</sup>. En esta situación anómala tenemos estados electrónicos ocupados en la banda de conducción y huecos en la de valencia (figura 2.1b).

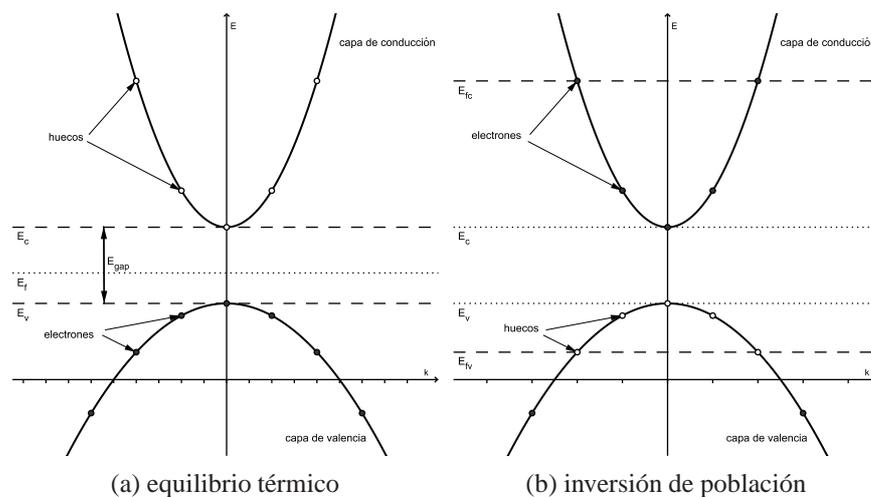


Figura 2.1: Equilibrio térmico e inversión de población

Para cada una de las poblaciones se puede definir un pseudonivel de Fermi ( $E_{fc}$  y  $E_{fv}$  de la figura 2.1b) siempre que el tiempo de dispersión de portadores sea inferior al tiempo de equilibrio entre bandas, es decir, siempre que la inversión de población sea sostenida. Para ello, el voltaje aplicado para conseguir la inversión de población debe ser  $V_p = \frac{E_{fc} - E_{fv}}{q}$  donde  $q$  es la carga del electrón. Las probabilidades numéricas de los diferentes estados electrónicos se pueden calcular mediante la distribución de Fermi-Dirac<sup>17</sup>.

En situación de inversión de población, se registran tres fenómenos de interacción entre los portadores y la radiación electromagnética: emisión espontánea, absorción, y emisión estimulada. En el primer caso un electrón de la banda de conducción pasa a ocupar un hueco de la banda de valencia y la pérdida de energía se traduce en la liberación de un fotón de frecuencia  $\nu = \frac{E_c - E_v}{h}$  donde  $h$  es la constante de Planck y  $E_c$  y  $E_v$  los niveles de energía del electrón respectivamente antes y después de la transición (figura 2.2a). La absorción corresponde al proceso en el que la presencia de un fotón de energía  $E = E_c - E_v$  en el medio permite a un electrón de la banda de valencia pasar a la banda de conducción (figura 2.2b). En el tercer caso, un fotón presente en el medio provoca una transición de la banda de conducción a la banda de valencia, con la consiguiente emisión de otro fotón con la misma dirección, fase y frecuencia que el primer fotón (figura 2.2c). Este proceso de emisión estimulada, cuyo descubrimiento se debe a Albert Einstein, constituye la base del funcionamiento del láser.

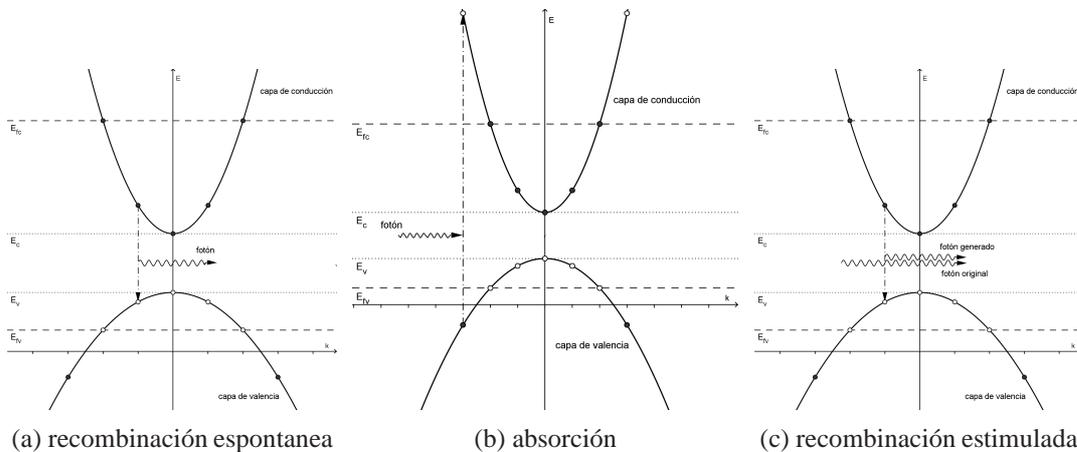


Figura 2.2: Fenómenos de recombinación

El rango de frecuencias de los fotones implicados en los fenómenos de emisión estimulada y absorción está acotado por la energía de gap por una parte, y por la diferencia entre los pseudo niveles de Fermi por otro, como se puede apreciar en la figura 2.2. Esta es la condición de Bernard-Durafourg<sup>13</sup>, y se formula como  $E_{gap} < h\nu < E_{fc} - E_{fv}$ .

Los procesos de relajación por los que el medio tiende a volver al equilibrio térmico, ya sean radiativos, como la recombinación espontánea, o no radiativos, como la recombinación Auger (en la que la energía liberada por un electrón en su transición de la banda de conducción a la de valencia es absorbida por otro electrón) se suelen agrupar como el tiempo de vida de portadores

$$\tau_N = -\frac{N}{dN/dt} \quad (2.1)$$

donde  $N$  es el número de portadores en la cavidad. También se puede definir el tiempo de vida de los portadores como el intervalo de tiempo que tarda la inversión de población en reducirse de  $N$  a  $N/e$ , siendo  $e$  la base neperiana<sup>13</sup>.

### 2.1.3. Estructura y funcionamiento

Un láser es un oscilador regenerativo bombeado externamente<sup>19</sup>. Está formado por un medio de ganancia (amplificador) situado dentro de una cavidad óptica (resonador) al que se aporta energía externamente por bombeo óptico o eléctrico. En el caso del láser semiconductor se utiliza una unión p-n polarizada en directa. Los portadores de carga inyectados en la estrecha capa activa proporcionan la ganancia y no hay necesidad de una cavidad externa ya que el propio eje longitudinal de la zona activa forma un resonador de Fabry-Perot que proporciona la realimentación. El bombeo puede ser óptico, o, más generalmente en el caso de diodos láser, por corriente eléctrica. En un diodo láser la zona activa es por tanto simultáneamente el medio activo y la cavidad resonante.

Los primeros láseres de semiconductor constaban de una simple unión p-n del mismo material, es decir una homounión, sin embargo, las bajas temperaturas y altas corrientes requeridos por este tipo de estructura la hacían poco práctica. Con la propuesta de la doble heterounión en 1963 por Herbert Kroemer, estos problemas fueron en gran medida solucionados y los diodos láser pudieron convertirse en los dispositivos baratos y eficientes que son hoy en día. La estructura en doble heterounión está formada

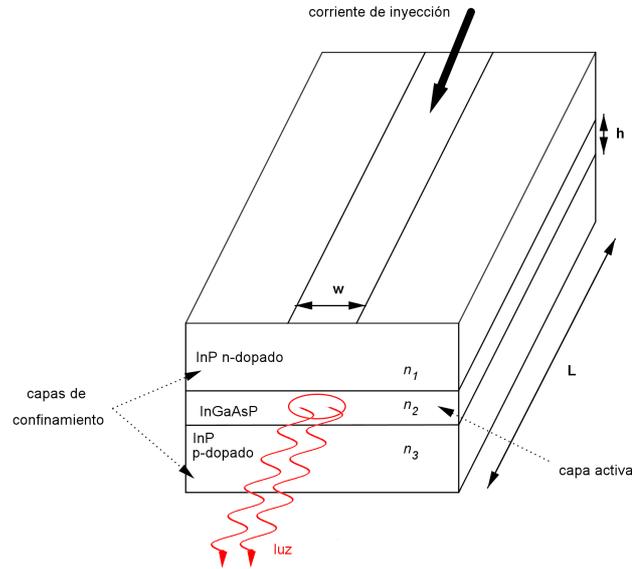


Figura 2.3: Estructura esquemática de una doble heterounión

por una fina capa del medio activo, y dos capas de confinamiento, generalmente de un mismo material con dopaje opuesto.

El medio activo posee un índice de refracción mayor que las capas de confinamiento y una energía de gap menor<sup>13</sup>. En la figura 2.3, tendríamos que  $n_2 > n_1$  y  $n_2 > n_3$ . De esta forma se confina en la región activa tanto la radiación electromagnética (al comportarse la capa activa como una guía dieléctrica por el salto de índice), como los portadores de carga (debido a la barrera de potencial). Los parámetros de red de ambos materiales deben ser lo suficientemente parecidos como para permitir la construcción de esta estructura. Dos combinaciones típicas son la de  $Ga_{1-x}Al_xAs/GaAs/Ga_{1-x}Al_xAs$  para una emisión en torno a  $800nm$  y la de  $InP/Ga_{1-x}In_xAs_{1-y}P_y/InP$  para emisiones en torno a  $1,3\mu m$ <sup>17</sup>. En ambos casos la fracción molar  $x$  se utiliza para ajustar la longitud de onda de emisión y el índice de refracción del material.

Los modos de emisión son las soluciones de la ecuación de onda (derivada de las ecuaciones de Maxwell<sup>19</sup>) que cumplen las condiciones de contorno. Se pueden descomponer éstos en modos longitudinales, transversales y laterales teniendo en cuenta por separado dichas condiciones en cada dimensión cartesiana. En la dimensión transversal las capas de confinamiento crean una guía dieléctrica, con lo que los modos

posibles serán TE o TM. Reduciendo suficientemente el espesor de la capa activa (habitualmente en torno a los  $0,1\mu m - 0,2\mu m$ ) se consigue fácilmente transmitir sólo el modo fundamental. En la dimensión longitudinal la capa activa se encuentra delimitada por sendas interfaces semiconductor-aire que actúan como espejos enfrentados. De este modo el medio activo constituye también una cavidad resonante de Fabry-Perot, cuya longitud determina los modos longitudinales a los que es permitido oscilar. En cuanto a la dimensión lateral, existen varias posibilidades de diseño, principalmente en guía de ganancia (en la que el confinamiento óptico deriva del perfil no uniforme de la ganancia) o en guía de índice. En esta última la región activa se encuentra confinada por materiales de distinto índice de refracción también en la dirección lateral, lo cual permite asegurar más fácilmente la emisión de un único modo lateral, controlando el ancho de la guía-onda.

Las pérdidas en el interior del resonador se pueden separar en pérdidas internas debidas al material y en las que se producen en los espejos de la cavidad. Las primeras se agrupan en un factor que represente colectivamente la absorción de portadores libres y la dispersión en las heterouniones:

$$\alpha_{int} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 c \mu}, \quad (2.2)$$

donde  $\sigma$  es la conductividad del medio,  $\epsilon_0$  la permitividad del vacío,  $c$  la velocidad de la luz en el vacío, y  $\mu$  el índice de refracción del medio. Las pérdidas debidas a las reflectividades finitas de los espejos del resonador se obtienen a partir de la solución de onda plana\* de la ecuación de onda. Para mantener la oscilación en la cavidad la onda plana debe tener los mismos valores de amplitud y de fase después de una vuelta completa al resonador, dando lugar a las condiciones de ganancia y de fase.

La condición de ganancia permite expresar las pérdidas en los espejos como

$$\alpha_m = \frac{1}{2L} \ln \left( \frac{1}{R_1 R_2} \right) \quad (2.3)$$

donde  $L$  es la longitud de la cavidad y  $R_{1,2}$  las reflectividades de los espejos.

Las pérdidas totales se suelen agrupar en una constante llamada tiempo de vida del fotón, que se expresa como

$$\tau_p = \frac{1}{v_g (\alpha_{int} + \alpha_m)} \quad (2.4)$$

---

\* Aunque los modos presentes en el resonador no son ondas planas, esta aproximación es suficiente para obtener las condiciones de ganancia y fase<sup>19</sup>.

donde  $v_g = c/\mu_g$  es la velocidad de grupo y  $\mu_g$  el índice de refracción de grupo (ver ecuación 2.8).

En el umbral, la ganancia debe ser tal que compense las pérdidas totales<sup>1</sup>, es decir que

$$\Gamma \cdot g_{th} = \alpha_{int} + \alpha_m = \frac{1}{v_g \tau_p} \quad (2.5)$$

donde  $\Gamma$  describe la porción de la energía del modo que se encuentra dentro de la zona activa (y por tanto que puede contribuir a la emisión) y se conoce como factor de confinamiento. En el caso de las guías de índice tanto el modo transversal como el lateral ocupan un volumen mayor que la zona activa, por lo que el factor de confinamiento es el producto de los factores de confinamiento transversal y lateral, y representa la relación entre los volúmenes ocupados por fotones y portadores de carga.

La condición de fase establece que las frecuencias que pueden oscilar en la cavidad vienen determinadas por

$$\nu_m = m \cdot \frac{c}{2\mu L} \quad (2.6)$$

donde  $m$  es un número entero\* que corresponde al modo  $m$ -ésimo.

Debido a la alta concentración de portadores en la región activa, el índice de refracción  $\mu$  cambia con la corriente aplicada, con lo que la separación entre modos longitudinales se puede escribir como

$$\Delta\nu = \frac{c}{2\mu_g L} \quad (2.7)$$

donde

$$\mu_g = \mu + \nu (\partial\mu/\partial\nu) \quad (2.8)$$

es el índice de refracción de grupo. De este modo, por ejemplo, con una cavidad de longitud  $L = 250\mu m$  e índice de refracción de grupo  $\mu_g = 4$  obtendríamos una separación entre los modos longitudinales de  $\Delta\nu = 150GHz$ .

En términos de longitud de onda, la separación entre modos será

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{c} \Delta\nu. \quad (2.9)$$

Tal como se muestra en la figura 2.4 si el ensanchamiento de la ganancia es homogéneo sólo se emitirán los modos longitudinales que alcancen el umbral para compensar las pérdidas, como establece la ecuación 2.5. Sin embargo, en la fase transitoria

\*al ser la condición de fase una ecuación trigonométrica admite soluciones periódicas

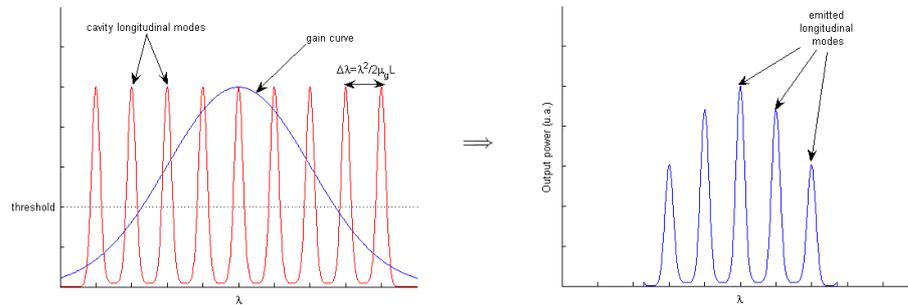


Figura 2.4: Ganancia y modos longitudinales (escala arbitraria)

de encendido del láser, así como en algunos regímenes de modulación, el ensanchamiento no es homogéneo. Para seguir teniendo un único modo longitudinal en esos casos es necesario acudir a láseres de cavidad acoplada o de realimentación distribuida (*distributed feedback* o *DFB*).

## 2.2. Caracterización del láser

El funcionamiento del láser se puede modelar de distintas maneras, según la forma empleada para obtener soluciones aproximadas de la ecuación de onda. Se pueden obtener precisos pero complicados modelos aplicando la teoría semiclásica<sup>20</sup>, es decir, considerando para el material un modelo cuántico de dos niveles como el descrito en la sección 2.1.2 pero conservando la descripción clásica del campo electromagnético siguiendo las ecuaciones de Maxwell. Un enfoque más sencillo es el de establecer de forma fenomenológica las variaciones de las cantidades que determinan la dinámica del láser mediante un sistema de ecuaciones diferenciales. Éstas se conocen como ecuaciones de tasa.

### 2.2.1. Ecuaciones de tasa

Las ecuaciones de tasa representan las tasas de evolución temporal del número de fotones y del número de portadores, permitiendo visualizar las interacciones entre am-

bas cantidades. Es el método más habitual para establecer la relación entre las características deseadas en un diodo láser (umbral de corriente bajo, emisión en banda estrecha y respuesta rápida<sup>15</sup>) y los parámetros de diseño del mismo, y además permite obtener una buena aproximación, al menos cualitativa, del comportamiento dinámico del láser.

El número de fotones\* es una cantidad adimensional proporcional a la intensidad óptica tal que<sup>19</sup>

$$P = \frac{\epsilon_0 \bar{\mu} \mu_g}{2h\omega_0} \int_V |\mathcal{E}|^2 dV \quad (2.10)$$

donde  $\mathcal{E}$  es la amplitud del campo eléctrico,  $V = L \cdot w \cdot h$  el volumen de la capa activa,  $\bar{\mu}$  es el índice efectivo de refracción del modo emitido y  $h \cdot \omega_0$  la energía de un fotón.

En cuanto a los portadores, son los pares electrón-hueco, siendo el tiempo de vida  $\tau_n$ , definido en la ecuación 2.1, el tiempo medio que éstos tardan en recombinar.

Las ecuaciones de tasa se basan en la descomposición modal de la emisión, por lo que para cada modo longitudinal (asumiendo un único modo transversal y lateral) tendremos un sistema de ecuaciones distinto. Por simplicidad asumiremos un funcionamiento monomodo y prescindiremos del subíndice correspondiente al modo longitudinal. También asumiremos que el perfil de ganancia es homogéneo en la zona activa, y obviaremos el fenómeno de la difusión de portadores fuera de la zona activa. Estas aproximaciones son de uso habitual en el cálculo de las ecuaciones de tasa<sup>19</sup>.

Tal como hemos visto anteriormente, la aplicación de una corriente eléctrica produce un aporte de pares electrón-hueco a la inversión de población en la zona activa perturbando el equilibrio térmico. De esta forma se provocan varios fenómenos de recombinación radiativa (estimulada o espontánea) y no radiativa. El número de portadores aumenta pues con la corriente de inyección y disminuye debido a dichos procesos de recombinación; a la vez que el número de fotones en el medio se ve incrementado de forma coherente amplificando el modo de emisión de la radiación óptica, y se pierden fotones a través de los espejos o por dispersión en el medio.

La ecuación de tasa de los fotones queda pues

$$\frac{dP}{dt} = v_g GP - \frac{P}{\tau_p} + \beta \frac{N}{\tau_N}. \quad (2.11)$$

---

\*Nótese que el uso de esta convención no implica ninguna asunción respecto a la naturaleza particular u ondulatoria de la luz<sup>19</sup>.

El primer término de la parte derecha corresponde a la emisión estimulada, en la que se suele asumir una variación lineal de la ganancia con el número de portadores, con lo cual

$$G = g_0 \cdot \frac{N - N_{trasp}}{V}, \quad (2.12)$$

siendo  $g_0$  el coeficiente lineal de ganancia y  $N_{trasp}$  el nivel de portadores de transparencia: aquel en el que la ganancia es cero. La velocidad de grupo  $v_g$  permite convertir la ganancia espacial en ganancia temporal<sup>21</sup>. Las pérdidas en el medio y en los espejos aparecen reflejadas en el segundo término a través del tiempo de vida del fotón  $\tau_p$  definido en la ecuación 2.4. El último término representa la emisión espontánea, siendo el factor  $\beta$  la proporción de fotones emitidos espontáneamente que se incorporan al modo de emisión (no son todos, ya que la recombinación espontánea produce fotones con propiedades de emisión aleatorias).

La ecuación de tasa de los portadores se expresa como

$$\frac{dN}{dt} = \frac{I}{q} - v_g GP - \frac{N}{\tau_N}, \quad (2.13)$$

donde  $I$  es la corriente de inyección y  $q$  la carga del electrón. Los tres términos de la parte derecha de la ecuación dan cuenta respectivamente de los portadores aportados por el bombeo de corriente y de aquellos perdidos por recombinación estimulada y recombinación espontánea.

Al ser diferentes los volúmenes ocupados por portadores y fotones conviene corregir la ecuación 2.11 mediante el factor de confinamiento  $\Gamma$  introducido en la ecuación 2.5, de tal forma que las dos ecuaciones de tasa sean relativas al volumen de la zona activa. Además, fenómenos como la depleción espectral de portadores (*spectral hole burning*) y la variación longitudinal de la densidad de portadores (producida por la onda estacionaria que se forma en la cavidad) provocan un ensanchamiento no homogéneo de la ganancia<sup>13</sup> que obliga a corregirla mediante el factor de compresión de ganancia  $\varepsilon$  quedando

$$G = \frac{g_0 (N - N_{trasp}) / V}{1 + \varepsilon P}. \quad (2.14)$$

De esta forma, por ejemplo, al alcanzar una cantidad de fotones emitidos  $P = 1/\varepsilon$  la saturación de ganancia reduciría ésta a la mitad.

Con estas correcciones obtenemos las ecuaciones de tasa

$$\frac{dP}{dt} = \Gamma v_g \frac{g_0 (N - N_{trasp}) / V}{1 + \varepsilon P} P - \frac{P}{\tau_p} + \Gamma \beta \frac{N}{\tau_N} \quad (2.15)$$

y

$$\frac{dN}{dt} = \frac{I}{q} - v_g \frac{g_0 (N - N_{trasp}) / V}{1 + \varepsilon P} P - \frac{N}{\tau_N}. \quad (2.16)$$

Las ecuaciones 2.15 y 2.16 forman un sistema determinista de ecuaciones diferenciales cuya integración numérica permite simular el comportamiento dinámico del láser.

Por otra parte, los cambios en la ganancia provocan un cambio en el índice de refracción del medio que desplaza las frecuencias de los modos longitudinales respecto a su valor de umbral, y, además, se produce un acoplo entre la amplitud y la fase del campo, por lo que se debe añadir una tercera ecuación de tasa de la fase para completar el modelo<sup>19</sup> :

$$\frac{d\phi}{dt} = -(\omega - \omega_{th}) + \frac{1}{2} \alpha (\Gamma v_g G - 1 / \tau_p). \quad (2.17)$$

Sin embargo, esta ecuación de tasa de la fase no influye en las otras dos, y por lo tanto se puede ignorar a la hora de analizar las variaciones temporales de las cantidades de fotones y portadores.

El factor  $\alpha$  de la ecuación 2.17 se conoce como factor de ensanchamiento de línea, o factor de antigüa. Se define como el cociente entre las partes real e imaginaria de la susceptibilidad compleja del medio, y es proporcional al ratio entre el incremento del índice de refracción y el incremento de la ganancia debidos a la inyección de portadores<sup>8</sup> :

$$\alpha = -2 \frac{\omega_0}{c} \cdot \frac{\partial \mu / \partial n}{\partial g / \partial n}. \quad (2.18)$$

Su valor se sitúa generalmente entre 3 y 10 en los láseres de semiconductor, siendo responsable del efecto de *frequency chirping* cuando el láser es modulado<sup>19</sup> .

### 2.2.2. Umbral de emisión

En la ecuación 2.5 hemos adelantado la existencia de un umbral de ganancia pasado el cual ésta supera las pérdidas y se empieza a producir emisión estimulada. Este cambio cualitativo, comparable a las transiciones de fase de sistemas termodinámicos,

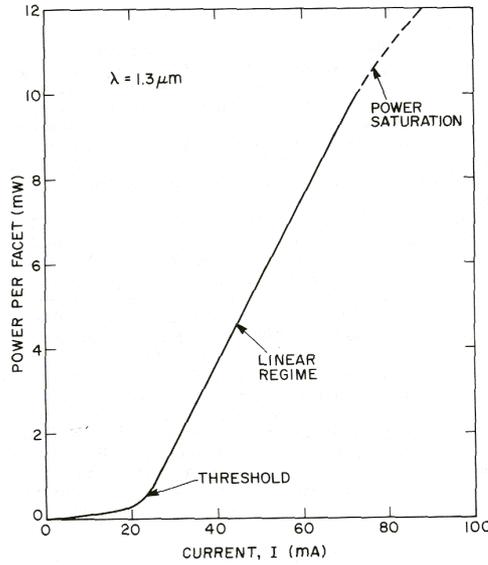


Figura 2.5: Curva luz-corriente esquemática para un láser de guía-índice InGaAsP<sup>19</sup>

se aprecia claramente en la curva característica luz-corriente que se suele proporcionar para los diodos láser, y de la cual reproducimos un ejemplo en la figura 2.5. La pendiente de esta curva es proporcional a la eficiencia cuántica externa, que es la proporción de los portadores inyectados que producen fotones emitidos por el láser hacia el exterior.

Del valor de la ganancia de umbral de la ecuación 2.5 se deduce el nivel de portadores alcanzado cuando se produce la transición láser:

$$N_{th} = N_{trasp} + \frac{g_{th}}{g_0} = N_{trasp} + \frac{1}{\Gamma v_g g_0 \tau_p} \quad (2.19)$$

siendo  $N_{trasp}$  el nivel de transparencia necesario para producir la inversión de población, y  $g_0$  el coeficiente lineal de ganancia. La aproximación lineal de la ganancia que se muestra en la figura 2.5 es válida por encima del umbral ya que la población permanece en un nivel cercano a  $N_{th}$ , tal como se observa en la figura 2.6.

La corriente necesaria para alcanzar esta población de portadores en la cavidad se obtiene fácilmente de la ecuación 2.16 si anulamos el término correspondiente a la emisión estimulada y buscamos el punto de equilibrio, de tal forma que la corriente de umbral resulta

$$I_{th} = \frac{q}{\tau_N} N_{th}. \quad (2.20)$$

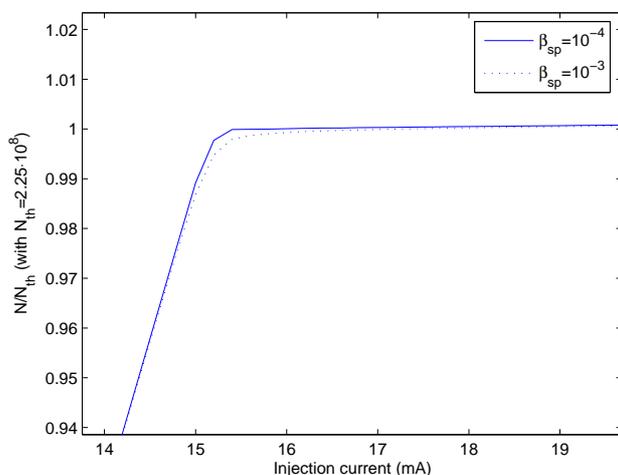


Figura 2.6: Población de portadores en función de la corriente de inyección para dos valores de la emisión espontánea

En realidad esta corriente algo mayor ya que hemos omitido las pérdidas debidas a que parte de la corriente (*leakage current*) no fluye hacia la zona activa.

Para dar una idea del orden de magnitud de las ecuaciones que hemos descrito, en la tabla 2.1 se resumen algunos valores típicos de los parámetros de un láser de InGaAsP/InP<sup>19</sup>.

### 2.2.3. Respuesta estática

El láser es un sistema disipativo, con lo cual la evolución temporal de las variables no diverge a infinito y tiende a alcanzar estados de equilibrio. En el caso de una corriente de inyección continua, la respuesta, después del transitorio, es estacionaria y es habitual simplificar dichas ecuaciones para obtener el punto de equilibrio o punto de trabajo del láser caracterizado por una densidad de portadores  $N_0$  y una densidad de fotones  $P_0$ . Estos valores se obtienen anulando las derivadas de los términos de la izquierda en las ecuaciones 2.15 y 2.16, aplicando ciertas simplificaciones según la zona de funcionamiento.

Tabla 2.1: Valores típicos de los parámetros de un láser de InGaAsP/InP

Parámetro	Símbolo	Valor
Longitud de onda de emisión	$\lambda_0$	$1,3\mu m$
Pérdidas en los espejos	$\alpha_m$	$45cm^{-1}$
Pérdidas internas	$\alpha_{int}$	$40cm^{-1}$
Tiempo de vida del fotón	$\tau_p$	$1,5ps$
Tiempo de vida del portador	$\tau_s$	$2,4ns$
Factor de confinamiento	$\Gamma$	0,6
Índice de refracción efectivo	$\bar{\mu}$	3,4
Índice de refracción de grupo efectivo	$\mu_g$	4
Longitud de la cavidad	$L$	$300\mu m$
Espesor de la zona activa	$h$	$0,2\mu m$
Ancho de la zona activa	$w$	$3\mu m$
Factor de emisión espontánea	$\beta$	$5 \cdot 10^{-5}$
Factor de compresión de ganancia	$\epsilon$	$1,7 \cdot 10^{-23}$
Factor de ensanchamiento de línea	$\alpha$	5
Población de portadores de transparencia	$N_{trasp}$	$1,5 \cdot 10^8$
Población de portadores de umbral	$N_{th}$	$3 \cdot 10^8$
Corriente de umbral	$I_{th}$	$20mA$

Como se observaba en la figura 2.5, el láser presenta dos modos de funcionamiento claramente diferenciados en función de la corriente de inyección, siendo la frontera entre ellos la corriente de umbral  $I_{th}$  definida en la ecuación 2.20.

Por debajo de este valor de corriente, no existe emisión estimulada y la recombinación espontánea es responsable de la luz emitida. Esto equivale a decir que el láser se comporta como un diodo emisor de luz (*Light Emitting Diode* o *LED*) y la densidad de

portadores y fotones vienen dadas por<sup>13</sup>

$$N_0 = \tau_N \frac{I}{q} \quad (2.21)$$

y

$$P_0 = \Gamma \beta \frac{\tau_p}{\tau_N} N_0. \quad (2.22)$$

En cambio, cuando la corriente alcanza o supera el nivel de umbral entramos en un régimen en el que domina la emisión estimulada, pudiéndose considerar, para simplificar, que  $\beta \approx 0$ , quedando<sup>13</sup>

$$P_0 = \frac{\Gamma \tau_p}{q} (I - I_{th}) \quad (2.23)$$

y

$$N_0 = N_{th} + \frac{\varepsilon P_0}{\Gamma v_g g_0 \tau_p} \quad (2.24)$$

Se puede decir que de la misma forma que el nivel de transparencia es el nivel de inversión que debe alcanzar la densidad de portadores para que la recombinación estimulada compense a la absorción, el nivel de umbral es el nivel para el cual la cavidad resonante es transparente, es decir que la ganancia compensa todas las pérdidas<sup>19</sup>. Tanto por debajo como por encima de umbral los niveles de portadores y fotones presentan una dependencia lineal con la corriente, cambiando solamente en cada caso la pendiente de la recta obtenida.

En cuanto a la potencia óptica, cantidad que se representa en la habitual curva característica luz-corriente, como la de la figura 2.5, viene dada por<sup>13</sup>

$$P_{opt} = h\nu \frac{v_g \alpha_m}{2} \cdot \frac{P_0}{\Gamma} \quad (2.25)$$

donde  $h\nu$  es la energía de un fotón a la frecuencia de emisión y  $v_g \alpha_m$  la tasa de emisión de fotones a través de los dos espejos. Esta última se divide por dos, si asumimos que ambos espejos son idénticos, para obtener la emisión por el espejo de salida.

El punto de trabajo del láser se suele definir a través de un índice de polarización del tipo<sup>13</sup>  $p = \frac{I}{I_{th}}$ .

## 2.3. Dinámica del laser

Las ecuaciones de tasa forman un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias. Este tipo de sistemas, la mayoría de los que describen fenómenos reales, no tienen casi nunca solución analítica, y cuando la tienen es demasiado compleja para ser ilustrada cualitativamente. Por ello se recurre a soluciones linealizadas localmente por series de Taylor<sup>22</sup>. Las ecuaciones de tasa requieren pues para su análisis la linealización alrededor de sus puntos de equilibrio.

La linealización del sistema es válida asumiendo que la densidad de portadores no varía significativamente respecto de su valor de equilibrio  $N_{th}$ , es decir que la inyección de corriente debe ser superior a la corriente de umbral. Por otra parte la aproximación lineal del tiempo de vida de portadores no perjudica cualitativamente al comportamiento del sistema<sup>13</sup>.

### 2.3.1. Régimen transitorio

El régimen transitorio es el proceso que lleva el sistema de un punto de equilibrio a otro, y se verifica en este caso cuando se aplica al láser un escalón de corriente. Las densidades de fotones y de portadores exhiben entonces oscilaciones de relajación amortiguadas hasta alcanzar su nuevo valor de equilibrio, como se ilustra en la figura 2.7. El láser se comporta entonces como un filtro paso bajo de segundo orden, determinado totalmente por su frecuencia propia  $\omega_r$  y su factor de amortiguamiento  $\zeta$ . Una expresión simplificada, pero razonablemente correcta por encima de umbral de la frecuencia propia es<sup>19</sup>:

$$\omega_r = \sqrt{\frac{\Gamma v_g g_0}{qV} (I - I_{th})}. \quad (2.26)$$

En realidad el máximo de la función de transferencia no se verifica en la frecuencia propia sino en  $\omega_{max} = \omega_r \sqrt{1 - \zeta}$ . En cuanto al factor de amortiguamiento, su valor se relaciona con la emisión espontánea cuando la corriente es menor que la de umbral, mientras que se encuentra dominado por la compresión de ganancia cuando la corriente es mayor. En cualquier caso su valor suele ser tal que generalmente el sistema se

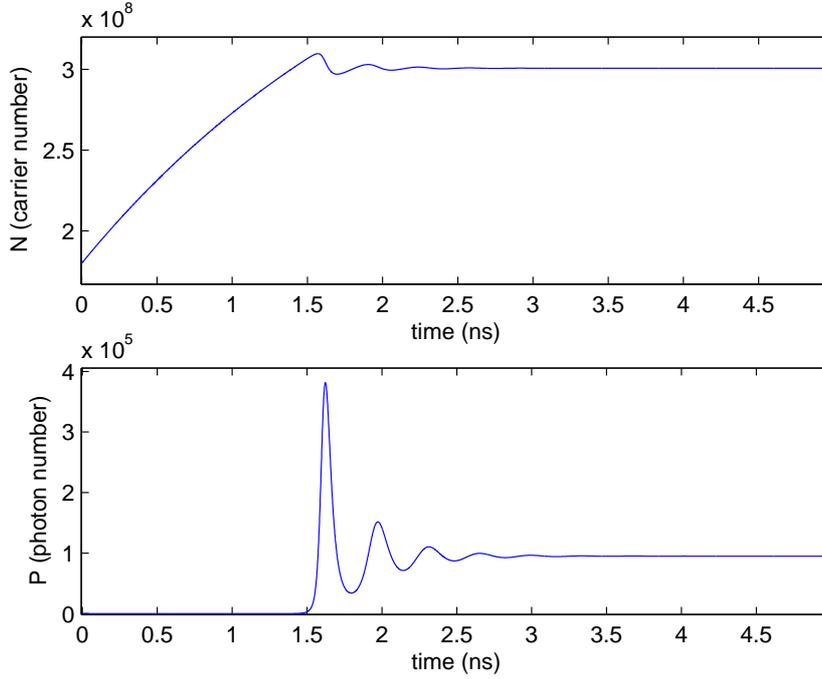


Figura 2.7: Régimen transitorio al aplicar un escalón de corriente

encuentra subamortiguado. La expresión completa resulta<sup>13</sup>

$$\zeta = -\frac{1}{2\omega_r} \left( \frac{1}{\tau_n} + \frac{g_0 P_0}{1 + \varepsilon P_0} + \varepsilon \frac{P_0}{\tau_p} + \beta \frac{\Gamma g_0 (N_0 - N_{trasp})}{\tau_n P_0 (1 + \varepsilon P_0)} \right). \quad (2.27)$$

Otro aspecto reseñable de la figura 2.7 es que transcurre un tiempo, del orden del nanosegundo, desde que se aplica el escalón de corriente al dispositivo hasta que éste empieza a emitir fotones. Este retardo de encendido (*turn-on delay time*) está relacionado con el tiempo de vida de portadores  $\tau_n$  ya que hasta que no se alcanza el nivel de población de umbral  $N_{th}$  no se empieza a producir emisión estimulada, con lo cual el láser no emite. Despreciando la contribución de la recombinación Auger a este tiempo de retardo y considerando un escalón de corriente de 0 a I, el tiempo de retardo queda<sup>19</sup>

$$t_d \approx \tau_n \frac{I_{th}}{I} \quad (2.28)$$

Así, al principio el nivel de portadores aumenta exponencialmente hasta alcanzar su nivel de umbral, y a partir de ese momento empieza la emisión de fotones y las dos cantidades oscilan hasta sus respectivos valores de equilibrio.

### 2.3.2. Respuesta en modulación

Una de las principales ventajas del diodo láser es la posibilidad de modular la salida de éste mediante la modulación directa de la corriente de inyección. En este caso se introduce una tercera variable, el tiempo, en las ecuaciones de tasa, ya que la corriente deja de ser constante. El sistema se vuelve por lo tanto no-autónomo, al depender del tiempo, y la variable que introduce la dependencia temporal se denomina término de perturbación. Aun así en el caso de una modulación en pequeña señal, el funcionamiento puede seguir aproximándose por linealización, aunque en gran señal pueden aparecer no linealidades, y, para valores concretos de la modulación se puede tender a un régimen caótico.

Modulando la corriente en amplitud con valores bajos de modulación, es decir, en pequeña señal, obtenemos una respuesta también senoidal, de misma frecuencia, y cuya amplitud y fase dependen de la frecuencia de la modulación aplicada. De esta forma se llega a un estado de equilibrio en el que las densidades de fotones y portadores presentan una variación senoidal. El comportamiento lineal es posible siempre y cuando la modulación sea lo suficientemente pequeña como para no acercar el nivel de corriente a la corriente de umbral  $I_{th}$ , manteniendo por tanto el nivel de portadores. La frecuencia de la modulación debe ser además inferior a la frecuencia propia del sistema, ya que ésta limita el ancho de banda del dispositivo. En la figura 2.8 se representa la función de transferencia dada por<sup>13</sup>

$$H(\omega) = \frac{\omega_r^2}{-\omega^2 + 2j\zeta\omega_r\omega + \omega_r^2} \quad (2.29)$$

y se puede apreciar cómo a la resonancia que ocurre a la frecuencia propia  $\omega_r$  sigue una rápida caída.

En cambio, si modulamos en gran señal, el nivel de corriente puede caer por debajo del umbral, de tal forma que en los semiperiodos negativos de la corriente se extingue la inversión de población, que debe recrearse en los semiperiodos positivos. Esto da lugar a múltiples periodos de relajación por cada periodo de la corriente. En esta situación la respuesta del láser deja de ser lineal, es decir que una variación senoidal en la entrada no se corresponde con una respuesta senoidal, y son necesarias para su análisis otras herramientas matemáticas.

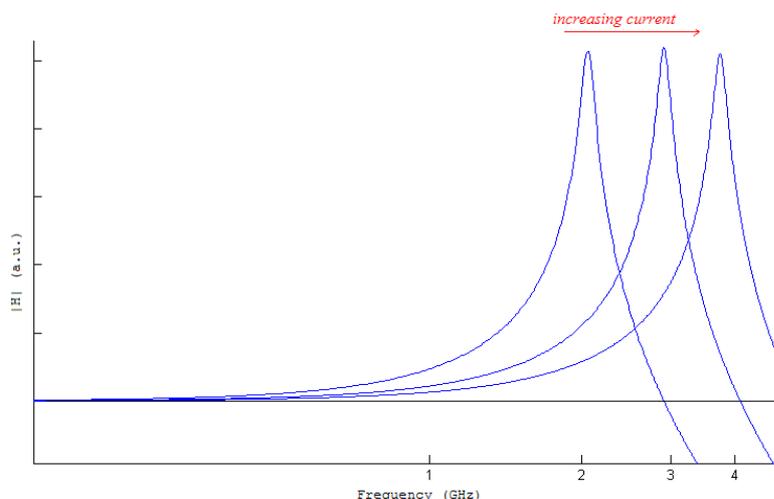


Figura 2.8: Respuesta en frecuencia del láser para distintos valores de la corriente

### 2.3.3. El láser como sistema dinámico

Tal como hemos visto, el láser semiconductor constituye un sistema dinámico cuyo estado en cualquier instante se puede caracterizar totalmente por dos cantidades: la amplitud del campo eléctrico y la densidad de portadores en la cavidad resonante\*. De esta forma, el espacio de fases, es decir el espacio que definen las variables independientes del sistema, es bidimensional y se puede representar el estado del dispositivo en un instante dado como un punto en un plano. El recorrido seguido por el estado del dispositivo a lo largo del tiempo se denomina flujo del sistema o trayectoria en el espacio de fases<sup>22</sup>, y se puede representar sobre dicho plano. Cuando el sistema es disipativo, como en el caso de las ecuaciones de tasa, las variables no crecen indefinidamente y tienden a un estado de equilibrio. La evolución temporal de la trayectoria desde las condiciones iniciales hacia el estado de equilibrio constituye el transitorio.

Cuando las trayectorias de puntos cercanos tienden hacia estos estados de equilibrio, éstos se conocen como atractores. Existen diferentes tipos de atractores<sup>23</sup>. Los puntos de equilibrio se caracterizan por constituir soluciones independientes del tiempo, es

\*En los láseres de clase B, como son los de semiconductor, la constante de tiempo de la polarización es mucho menor que los demás tiempos del sistema por lo que la ecuación diferencial de la polarización se elimina adiabáticamente y sólo quedan dos variables independientes<sup>8</sup>. Esto no sucede en otros tipos de láseres, como por ejemplo los de Helio-Neón, de clase C.

decir, las variables del sistema permanecen fijas después del transitorio. Cuando el sistema alcanza un régimen periódico, la trayectoria forma una órbita periódica en el espacio de fases, y el atractor correspondiente se conoce como ciclo-límite. En la figura 2.9 se representan estos dos tipos fundamentales de atractores. Las flechas rojas escenifican el hecho de que las trayectorias que arrancan de puntos cercanos tienden hacia el atractor.

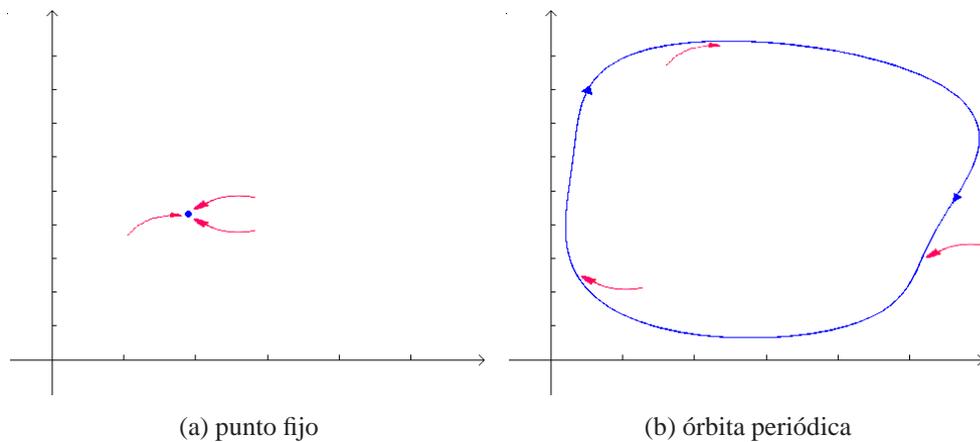


Figura 2.9: Atractores en el espacio de fases

A modo de ejemplo, en la figura 2.10 se puede observar la trayectoria que corresponde al transitorio cuya evolución temporal se mostraba en la figura 2.7. Las oscilaciones en torno al punto de equilibrio producen una trayectoria en forma de espiral que se aproxima poco a poco al atractor.

#### 2.3.4. Dinámica no lineal y caos

La no linealidad de las ecuaciones de tasa es debida a la presencia de productos de las dos variables independientes, ya que la ganancia depende de la densidad de portadores en la cavidad. Al ser no lineales las ecuaciones, no se pueden encontrar soluciones elementales y combinarlas por el principio de superposición, como ocurre en los sistemas lineales. En el caso no lineal, el conocimiento de una solución puede no dar ninguna pista sobre las demás soluciones. En muchos casos es posible de todas formas linealizar localmente el sistema en el entorno de un punto de equilibrio, como hemos

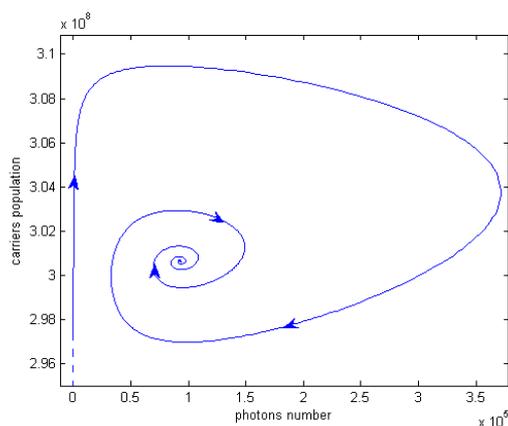


Figura 2.10: Oscilaciones de relajación en el espacio de fases

visto en el caso de la modulación en pequeña señal. Pero en determinadas condiciones esta aproximación deja de ser válida y aparecen no linealidades en las soluciones.

Un efecto no lineal bastante común es la aparición de subarmónicos de la señal de entrada en la de salida. En estos casos el periodo de la solución es un múltiplo entero  $K \cdot T_{in}$  del periodo de la perturbación  $T_{in}$  de forma que esta solución  $K$ -periódica se denomina subarmónico de orden  $K$ . En el caso de la modulación de corriente en gran señal, como se ha apuntado en la sección 2.3.2, al caer la corriente por debajo de umbral se producen procesos de relajación<sup>13</sup> que, bajo ciertas condiciones de modulación, provocan una respuesta que es un subarmónico de la moduladora<sup>18</sup>.

Es particularmente interesante el fenómeno de doblamiento del periodo (subarmónico de orden 2), ya que suele indicar la presencia de una conocida ruta al caos por doblamientos sucesivos del periodo, y suele producirse cuando la frecuencia de la perturbación es cercana al doble de la frecuencia propia del sistema<sup>4</sup>. En estos casos, si la solución es estable, tiende a una órbita periódica que puede dar varias vueltas sobre sí misma, como la de la figura 2.11.

La enorme complejidad de la dinámica de sistemas no lineales se ha empezado a comprender solo recientemente<sup>10</sup>. En particular, las soluciones caóticas han despertado un gran interés por la universalidad de ciertas propiedades que se observan en una gran variedad de sistemas físicos. Las soluciones caóticas solo pueden darse en sistemas de orden 3 o más, por el teorema de Bendixson-Poincaré<sup>24</sup>, lo cual excluye la posibilidad de caos en un diodo láser aislado, ya que queda definido por dos variables

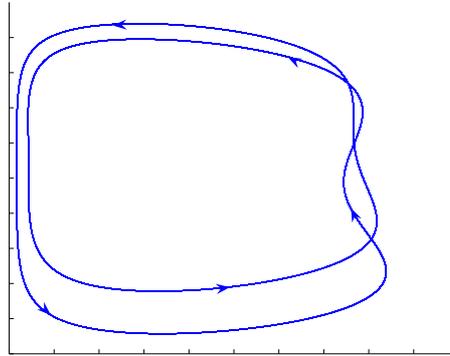


Figura 2.11: Órbita periódica (periodo 4)

independientes. Sin embargo, en cuanto se introduce una tercera variable, ya sea el tiempo al modular la corriente, o una perturbación externa por acoplo con otro láser o por inyección óptica, el láser se vuelve potencialmente caótico.

Las soluciones caóticas, aunque no hay acuerdo sobre una definición rigurosa del término, presentan siempre una serie de características que las identifican como tales:

- la solución es aperiódica pero se encuentra confinada en una región delimitada del espacio de fases sin que se produzca una tendencia a infinito de ninguna de las variables del sistema; en el espacio de fases se observa un atractor extraño como el famoso atractor de Lorentz, o el de la figura 2.12\*,
- el sistema presenta una gran sensibilidad respecto de las condiciones iniciales (*Sensibility to Initial Conditions*), amplificando de forma exponencial pequeñas variaciones en éstas, de tal forma que trayectorias cercanas divergen rápidamente (es el famoso *efecto mariposa* que hace imposibles las previsiones meteorológicas con más de una semana de antelación),
- el espectro de la solución presenta un incremento de la amplitud en una amplia banda de frecuencias, con algunos picos correspondientes a frecuencias dominantes, y se asemeja a una respuesta ruidosa a pesar de que el sistema es total-

---

\*Nótese que tanto el atractor extraño de la figura 2.12 como las órbitas periódicas de las figuras 2.9b y 2.11 se han obtenido mediante la simulación del modelo descrito en el capítulo 4.

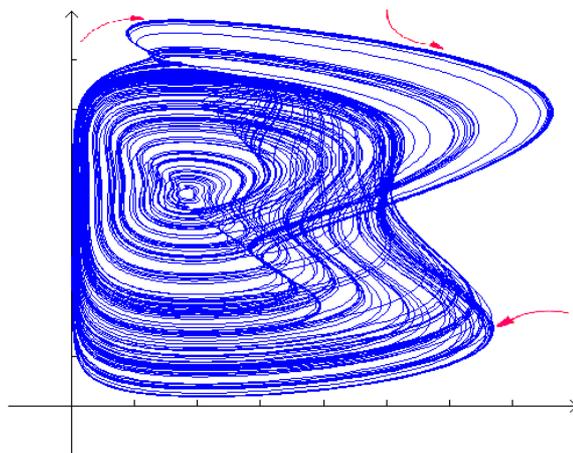


Figura 2.12: Atractor extraño

mente determinista; en la figura 2.13 se muestra un ejemplo de espectro caótico obtenido del modelo del capítulo 4.

Existen diferentes tipos de transiciones al caos<sup>25,26</sup>, aunque una de las primeras en descubrirse, y quizá la más conocida, es la de bifurcaciones de periodo doble. Esta ruta al caos, conocida como secuencia de Feigenbaum, es la que se ha observado en láseres modulados en corriente en gran señal<sup>18</sup>, así como en láseres acoplados lateralmente.<sup>11</sup> Para analizar estos fenómenos es necesario recurrir a la teoría de bifurcaciones, que se explicará en el capítulo 4.

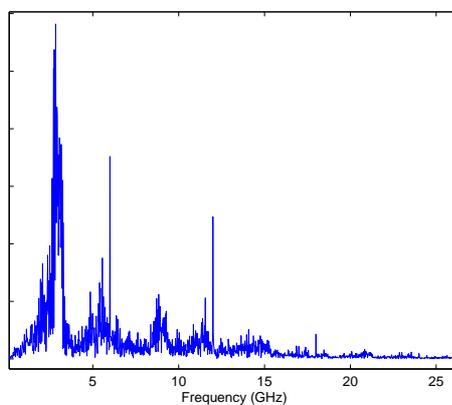


Figura 2.13: Espectro de señal caótica

## 2.4. Acoplo lateral

Dado que una de las grandes ventajas de los láseres semiconductores es la facilidad para modular la señal directamente a través de la corriente de inyección, una de las características deseadas en estos dispositivos es la posibilidad de modular a frecuencias lo más altas posibles, con aplicaciones evidentes en comunicaciones ópticas de alta velocidad. Un diodo láser monomodo ve limitada sin embargo la frecuencia máxima de modulación por su frecuencia intrínseca de relajación, que suele ser de unos pocos gigahercios. El uso de la separación entre modos longitudinales no es viable ya que ésta suele ser del orden de los 150 GHz, una frecuencia difícilmente alcanzable por los circuitos electrónicos de entrada. Otra solución ha sido la de usar *arrays* de diodos láser acoplados<sup>1</sup>, conocidos como *Laterally Coupled Diode Lasers* o *LCDL*.

Los láseres se colocan alineados lateralmente, eléctricamente aislados, de forma que se produce un acoplo entre las colas evanescentes de los campos de cada emisor en la dimensión lateral<sup>2</sup>, así como una difusión de portadores<sup>3</sup> que propicia la interacción entre las guías. El caso más simple, el de dos emisores gemelos lado a lado, es representativo de arrays mayores<sup>27</sup>, a la vez que susceptible de interesantes aplicaciones *per se*, y es el que estudiaremos en este proyecto. Una estructura muy esquemática de este dispositivo<sup>3</sup> se muestra en la figura 2.14, en la que se debe cumplir  $n_{act} > n_2 > n_3$  para delimitar las guía-ondas.

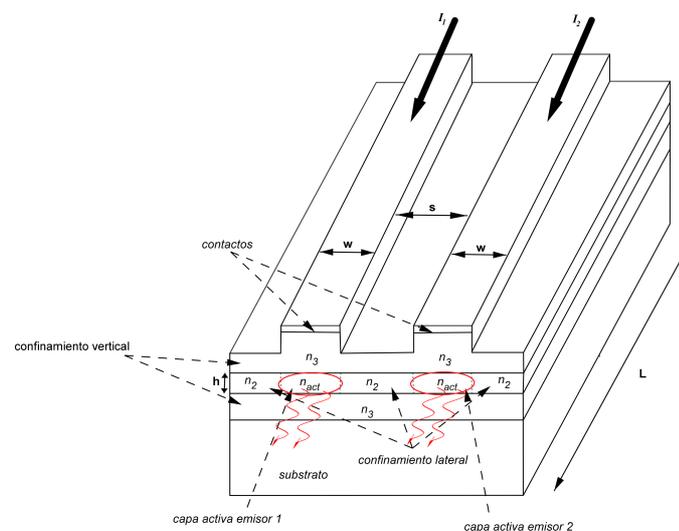


Figura 2.14: Estructura esquemática de dos emisores acoplados lateralmente

Bajo ciertas condiciones los modos laterales de ambos emisores se enganchan en fase (se dice que están en *phase-locking*) y el comportamiento conjunto del array se puede descomponer en modos ortogonales: uno en el que ambos emisores están en fase y otro en el que emiten en contrafase. Además, cuando se observan estos dos modos a la vez, se encuentran a su vez enganchados en fase (en *lateral-mode-locking*). Este caso es el más interesante, y es también el único en el que se han observado no linealidades en las soluciones<sup>28</sup>. El modo en contrafase tiene una frecuencia de oscilación mayor que el modo en fase, dando lugar a un batido entre los dos emisores cuya frecuencia puede llegar a ser del orden de los 20GHz, es decir, muy por encima del límite establecido, en el caso de un único emisor, por la frecuencia de relajación<sup>3</sup>.

En la figura 2.15 se muestra el espectro de campo lejano de un dispositivo LCDL obtenido experimentalmente, pudiéndose apreciar tres tipos de regímenes distintos. En el primero (figura 2.15a) no hay relación de fase entre los emisores y cada uno emite independientemente. En el segundo (figura 2.15b) ambos emisores están en *phase-locking* y se observa el modo en contrafase del array. Finalmente, en el tercer caso (figura 2.15c) se observan tanto el modo en contrafase como el modo en fase, característica del régimen de *lateral-mode-locking*. El modo en contrafase se caracteriza por un lóbulo doble con emisión cero a  $0^\circ$  en campo lejano, mientras que en el modo en fase aparece un lóbulo de emisión en el centro de las guías. En las tres figuras se muestran tres modos longitudinales, separados por más de 80GHz.

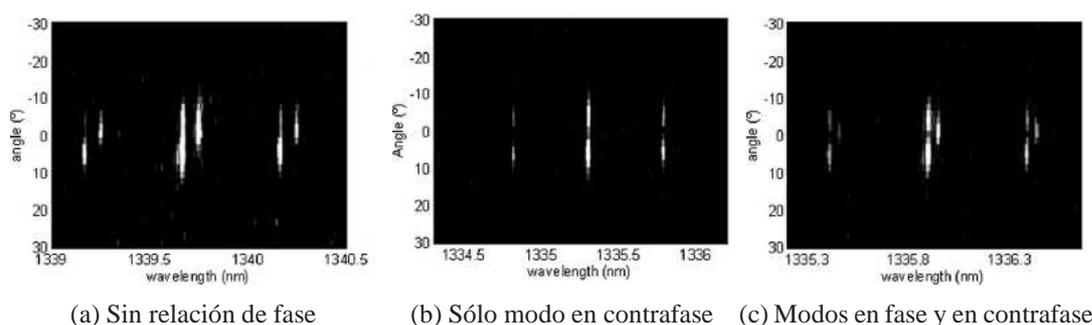


Figura 2.15: SRFF de dos LCDL bajo diferentes regímenes de acoplo<sup>28</sup>

Estas características de emisión evidencian que hay acoplo entre las dos guías y que además los campos emitidos por ambas están en *lateral-mode-locking*<sup>28</sup>. Los dos supermodos forman una base que permite describir la emisión del dispositivo completo<sup>28</sup> y se muestran esquemáticamente en la figura 2.16.

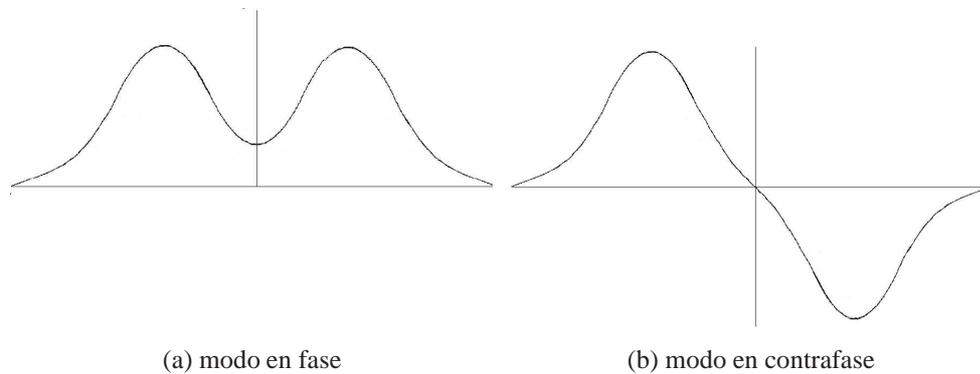


Figura 2.16: Modos de un array lateral de dos láseres

De esta forma, aparece una segunda frecuencia de resonancia<sup>29</sup>, correspondiente al batido entre los modos, que aumenta el ancho de banda útil del dispositivo y permite transmitir datos en banda estrecha por encima de la frecuencia de relajación<sup>30</sup> gracias al uso de esquemas de modulación especiales<sup>3</sup>. La respuesta en frecuencia de un dispositivo formado por dos emisores lado a lado se muestra en la figura 2.17, en la que se observa una primera resonancia a la frecuencia de relajación de los emisores individuales y una segunda resonancia producida por el acoplo. De esta forma aumenta el ancho de banda útil para la transmisión de datos.

En determinadas condiciones el acoplo entre los dos emisores en phase-locking, que introduce una nueva variable en las ecuaciones de tasa, provoca la aparición de regímenes no lineales y de caos. Estudios matemáticos<sup>4</sup> han recalcado que las no linealidades aparecen preferentemente cuando la perturbación (en este caso el batido de modos producido por el acoplo) tiene una frecuencia aproximadamente doble de la frecuencia de relajación. En particular, se ha verificado<sup>11</sup> una ruta al caos por periodos dobles, siendo próxima a 2 dicha relación de frecuencias.

En función de la fuerza del acoplo, que depende de diversos factores como la proximidad de los emisores entre sí o los saltos de índice de refracción entre las diferentes capas, se han desarrollado distintos modelos para entender el comportamiento dinámico de este tipo de estructuras<sup>12</sup>. En el caso de acoplos fuertes, se ha considerado los dos emisores como un único dispositivo, calculando directamente las soluciones de la ecuación de onda por medio de la teoría semiclásica. Para acoplos más débiles, se ha preferido por simplicidad modelar separadamente los emisores incluyendo en las ecuaciones de tasa de cada uno un factor de acoplo que represente la influencia del

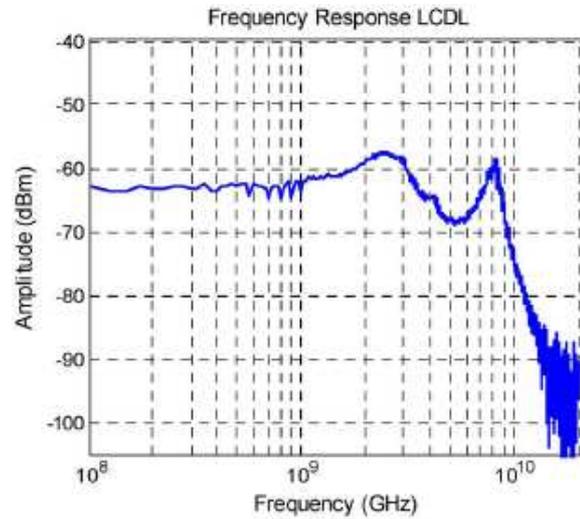


Figura 2.17: Respuesta en frecuencia de dispositivo LCDL

otro emisor. Este tipo de modelos ha permitido obtener buenas aproximaciones del comportamiento dinámico del acoplo y de su estabilidad en dispositivos *gain-guided* o *quasi-index-guided*. Estudiaremos en el capítulo siguiente uno de los primeros modelos de este tipo, comparándolo con los últimos resultados teóricos y experimentales, en particular en cuanto al comportamiento no lineal y la ruta al caos.

# Capítulo 3

## Modelo Winful/Wilson

Analizaremos en este capítulo un modelo de los que inicialmente se desarrollaron para caracterizar el dispositivo formado por dos LCDL mediante el uso de ecuaciones de tasa acopladas. Contrastaremos sus resultados con los últimos hallazgos experimentales en relación al factor de acoplo<sup>31</sup> y en especial a las condiciones de aparición de las no linealidades y la consiguiente ruta al caos<sup>11</sup>.

### 3.1. Formulación

El modelo propuesto por Winful et al.<sup>2</sup> y estudiado en detalle en la tesis doctoral de Geoffrey Wilson<sup>14</sup> introduce el acoplo lateral entre los emisores de un array incorporando en las ecuaciones de tasa de cada emisor el efecto del acoplo lateral con el otro emisor mediante un coeficiente de acoplo complejo  $\eta$ . El dispositivo básico modelado es por tanto aquel formado por dos emisores colocados lado a lado, y su análisis permite comprender en un modo simple los comportamientos dinámicos de arrays mayores.

A partir de una distancia entre emisores de aproximadamente dos veces el ancho de un emisor el acoplo puede considerarse débil, es decir, que la radiación emitida por el dispositivo se aproxima como una combinación lineal de los modos de cada emisor. De esta forma, asegurándose de un funcionamiento monomodo de cada emisor, obtenemos dos modos laterales de emisión para el array: uno simétrico (modo *en fase*) y otro

antisimétrico respecto del plano de simetría lateral (modo *en contrafase*), tal como se ilustra en la figura 2.16. Estos dos supermodos tienen en general frecuencias de oscilación diferentes, que aumentan con la curvatura lateral del perfil de ganancia<sup>14</sup>, así como umbrales de emisión diferentes.

Existen varias formulaciones para las constantes complejas que caracterizan este acoplo<sup>2,3,32</sup>:  $k$ ,  $c$  y  $\eta$ . Estudiaremos en esta sección esta última formulación, ya que es la empleada en el modelo que nos proponemos analizar. Si se prefiere utilizar la notación  $k_{r,i}$  basta dividir  $\eta_{R,I}$  por el tiempo de vida de fotón  $\tau_p$ , como se deduce al comparar las ecuaciones de tasa formuladas usando cada una de estas constantes<sup>2,3</sup>. Dado que en dispositivos de guía de índice los campos evanescentes tienen caída exponencial en las capas de confinamiento, este coeficiente complejo de acoplo verá a su vez reducido exponencialmente su valor con el aumento de la distancia entre emisores<sup>32</sup>.

La parte real de dicha constante,  $\eta_R$ , es proporcional a la frecuencia de batido  $f_{bat} = |f_- - f_+|$  entre los dos modos mencionados, siendo  $f_+$  y  $f_-$  las frecuencias de oscilación respectivas del modo en fase y del modo en contrafase, verificándose además que  $f_+ < f_-$ , es decir que el modo en contrafase tiene una frecuencia de oscilación mayor<sup>32</sup>. Estos dos modos son ortogonales y forman una base del espacio de soluciones, con lo que se puede asumir que cualquier modo de funcionamiento se puede expresar como una combinación de ambos. En cuanto a la parte imaginaria de la constante de acoplo,  $\eta_I$ , se relaciona con el perfil espacial de ganancia de los modos.

Utilizaremos para el estudio del dispositivo de emisores gemelos el modelo llamado de 5 guías. En esta aproximación se considera solamente la dimensión lateral, ya que el acoplo se produce en los modos laterales. Asumimos además un funcionamiento transversal monomodo y, por simplicidad y sin pérdida de generalidad, consideramos únicamente un modo longitudinal, que es extrapolable a los demás modos longitudinales. El modelo, que se muestra en la figura 3.1, asume también un confinamiento por guía de índice, es decir un salto de índice\* brusco entre la zona activa y las capas de confinamiento.

Resolviendo las condiciones de contorno se obtienen los factores de propagación en las capas activas  $\gamma_{\pm}$  y los factores de caída en las capas de confinamiento  $\kappa_{\pm}$  corres-

---

\* utilizaremos a partir de ahora la notación  $\mu$  para los índices de refracción, para evitar confusiones con la densidad de portadores  $n$

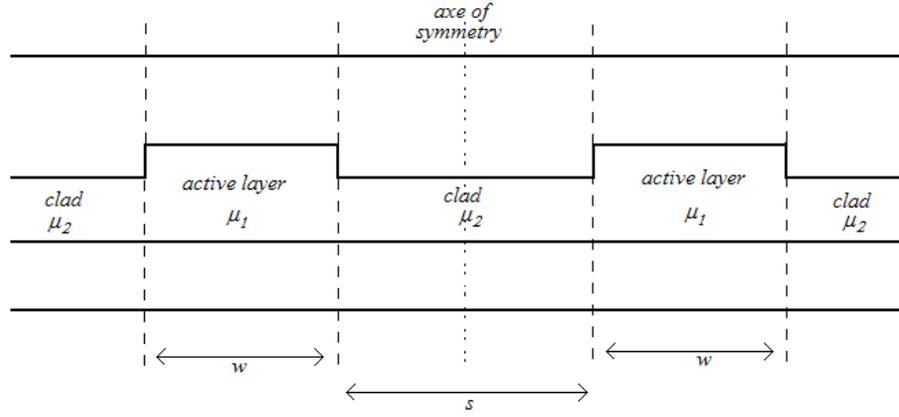


Figura 3.1: Modelo de 5 guías

pendientes a cada modo del array tales que cumplen

$$\tan(\kappa_+ w) = \kappa_+ \gamma_+ \frac{1 + \tanh\left(\frac{\gamma_+(s-w)}{2}\right)}{\kappa_+^2 - \gamma_+^2 \tanh\left(\frac{\gamma_+(s-w)}{2}\right)} \quad (3.1)$$

y

$$\tan(\kappa_- w) = \kappa_- \gamma_- \frac{1 + \tanh\left(\frac{\gamma_-(s-w)}{2}\right)}{-\gamma_-^2 + \kappa_-^2 \tanh\left(\frac{\gamma_-(s-w)}{2}\right)} \quad (3.2)$$

donde  $s$  es la separación entre los dos emisores y  $w$  el ancho de cada uno de ellos.

Estos factores se relacionan a su vez definiendo el ancho normalizado de la guía

$$W^2 \equiv (\kappa_{\pm} w)^2 + (\gamma_{\pm} w)^2 = \left(\frac{\omega_0}{c} w\right)^2 (\mu_1^2 - \mu_2^2) \quad (3.3)$$

tal que  $W \leq \pi$  es condición suficiente para la existencia de un único modo lateral<sup>19</sup>.

Las frecuencias intrínsecas de cada modo se obtienen de

$$\omega_{\pm} = \frac{c}{\mu_1} \sqrt{K^2 + \kappa_{\pm}^2} \quad (3.4)$$

donde  $K$  agrupa los factores de propagación longitudinal y transversal. Su valor se despeja de la ecuación 3.4 aplicada al caso de un único emisor, obteniendo el valor de  $\kappa_0$  como solución de 3.1 o de 3.2 en el caso límite  $s \rightarrow \infty$ , y teniendo en cuenta que  $\omega_0 = 2\pi c/\lambda_0$ .

Una vez obtenidas las frecuencias de oscilación  $\omega_+$  y  $\omega_-$  de los modos en fase y en contrafase a partir de la ecuación 3.4 se deduce la parte real del factor de acoplo como

$$\eta_R = \frac{\tau_p}{2} (\omega_- - \omega_+). \quad (3.5)$$

$\eta_R$  es siempre positivo, ya que el caso contrario, en el que el modo en contrafase emitiría con longitud de onda mayor que el modo en fase, no ha sido observado experimentalmente<sup>2</sup>.  $\eta_R$  es por tanto proporcional a la frecuencia de batido entre los modos del array, la cual es responsable de la segunda resonancia que se observa en estos dispositivos, y que permite modular por encima de la frecuencia de relajación<sup>29</sup>.

La obtención de la parte imaginaria precisa del conocimiento de los perfiles laterales de ganancia. Para ello se resuelve numéricamente el sistema de integrales de contorno<sup>14</sup> afín de obtener los factores de confinamiento laterales correspondientes a cada modo, que resultan:

$$\Gamma_+ = \left[ 1 + \frac{\left( \sqrt{\gamma_+} t_+ \sin(\kappa_+ w) + \frac{\kappa_+}{\sqrt{\gamma_+}} \cos(\kappa_+ w) \right)^2 + \frac{\kappa_+^2}{\gamma_+} \left( t_+ + \frac{\frac{1}{2} \gamma_+ (s-w)}{\cosh^2(\frac{1}{2} \gamma_+ (s-w))} \right)}{2\gamma_+ t_+ \sin^2(\kappa_+ w) + \frac{1}{2} \left( \kappa_+ - \frac{\gamma_+^2}{\kappa_+} t_+^2 \right) \sin(2\kappa_+ w) + w(\kappa_+^2 + \gamma_+^2 t_+^2)} \right]^{-1} \quad (3.6)$$

y

$$\Gamma_- = \left[ 1 + \frac{\left( \sqrt{\gamma_-} \sin(\kappa_- w) + \frac{\kappa_-}{\sqrt{\gamma_-}} t_- \cos(\kappa_- w) \right)^2 + \frac{\kappa_-^2}{\gamma_-} \left( t_- - \frac{\frac{1}{2} \gamma_- (s-w)}{\cosh^2(\frac{1}{2} \gamma_- (s-w))} \right)}{2\gamma_- t_- \sin^2(\kappa_- w) + \frac{1}{2} \left( \kappa_- t_-^2 - \frac{\gamma_-^2}{\kappa_-} \right) \sin(2\kappa_- w) + w(\gamma_-^2 + \kappa_-^2 t_-^2)} \right]^{-1}, \quad (3.7)$$

donde  $t_{\pm} = \tanh\left(\frac{1}{2}\gamma_{\pm}(s-w)\right)$ .

Además el factor de confinamiento de un emisor aislado resulta

$$\Gamma_0 = \frac{\sin^2\left(\frac{\kappa_0 w}{2}\right) + \frac{\gamma_0 w}{2}}{1 + \frac{\gamma_0 w}{2}}. \quad (3.8)$$

Nótese que la expresión, mucho más sencilla,

$$\Gamma_0 \approx \frac{W^2}{2 + W^2} \quad (3.9)$$

proporciona una aproximación con un error inferior al 1.5 %<sup>19</sup>.

Finalmente,

$$\eta_I = \frac{1}{2} \left( \frac{\Gamma_- - \Gamma_+}{\Gamma_0} \right). \quad (3.10)$$

Esta formulación de la parte imaginaria de la constante de acoplo es la que se deduce de la implementación reproducida en los apéndices de la tesis de Wilson<sup>14</sup>, y es por tanto la que utilizamos aquí, a pesar de que en el texto se define  $\eta_I$  como introducido *ad hoc* (sic) y se da el valor asintótico

$$\eta'_I = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\Gamma_0}{\Gamma_{\pm}} \right), \quad (3.11)$$

donde  $\Gamma_{\pm}$  es el factor de confinamiento del modo dominante, es decir, el de umbral de emisión más bajo. Las ecuaciones 3.10 y 3.11 no son equivalentes y se obtienen con ellas valores diferentes para  $\eta_I$ , lo cual introduce cierta confusión en el modelo.

Tal como se aprecia en las ecuaciones 3.1, 3.2, 3.6 y 3.7, el principal factor de diseño del array es la relación entre la separación entre emisores y el ancho de éstos, determinando en buena medida el valor del factor de acoplo  $\eta$ . Las ecuaciones de tasa de ambos emisores se pueden combinar mediante este factor para obtener las cinco ecuaciones que gobiernan el comportamiento dinámico del array: tasas de número de portadores y número de fotones en cada emisor y diferencia de fase  $\theta$  entre ambos. Ésta, al contrario de lo que ocurre en el caso del emisor aislado, es ahora una parte integrante de la dinámica del dispositivo.

Para formular estas ecuaciones despreciamos las contribuciones de la emisión espontánea y de la compresión de ganancia y se obtienen de forma sencilla las ecuaciones de tasa<sup>3</sup>:

$$\frac{dP_1}{dt} = \Gamma g_0 (N_1 - N_{th}) P_1 - 2\sqrt{P_1 P_2} \frac{\eta_R}{\tau_p} \sin(\theta) - 2\sqrt{P_1 P_2} \frac{\eta_I}{\tau_p} \cos(\theta) \quad (3.12)$$

$$\frac{dP_2}{dt} = \Gamma g_0 (N_2 - N_{th}) P_2 + 2\sqrt{P_1 P_2} \frac{\eta_R}{\tau_p} \sin(\theta) - 2\sqrt{P_1 P_2} \frac{\eta_I}{\tau_p} \cos(\theta) \quad (3.13)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\alpha \Gamma g_0}{2} (N_2 - N_1) + \frac{\eta_R}{\tau_p} \left( \sqrt{\frac{P_1}{P_2}} - \sqrt{\frac{P_2}{P_1}} \right) \cos(\theta) + \frac{\eta_I}{\tau_p} \left( \sqrt{\frac{P_1}{P_2}} - \sqrt{\frac{P_2}{P_1}} \right) \sin(\theta) \quad (3.14)$$

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{I_1}{q} - \frac{N_1}{\tau_s} - \left( \frac{1}{\tau_p} + \Gamma g_0 (N_1 - N_{th}) \right) P_1 \quad (3.15)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \frac{I_2}{q} - \frac{N_2}{\tau_s} - \left( \frac{1}{\tau_p} + \Gamma g_0 (N_2 - N_{th}) \right) P_2 \quad (3.16)$$

Sin embargo, para continuar con el análisis de su modelo adoptaremos las normalizaciones efectuadas por Wilson<sup>14</sup> sobre la amplitud del campo óptico  $X$ , la ganancia  $Z$  y la corriente de inyección  $p$  de tal forma que éstas quedan:

$$X = \sqrt{\frac{\tau_p}{2} \Gamma g_0 P} \quad (3.17)$$

$$Z = \frac{\tau_p}{2} \Gamma g_0 (N - N_{th}) \quad (3.18)$$

$$p = \frac{\tau_p}{2} \Gamma g_0 N_{th} \left( \frac{J}{J_{th}} - 1 \right) \quad (3.19)$$

donde  $J$  es la densidad de corriente en el volumen del emisor, con lo cual  $I = J \cdot V$ , ya que consideramos un modelo de guías de índice. Esta normalización persigue un doble objetivo: por una parte eliminar las dimensiones de las variables y parámetros utilizados y por otra reducirlas a escala unidad para facilitar el cálculo numérico<sup>13</sup>.

Así pues la amplitud del campo y la ganancia normalizadas reemplazan a las poblaciones de fotones y portadores quedando las ecuaciones de tasa 3.12 a 3.16 como:

$$\frac{d}{dt} X_1 = \frac{1}{\tau_p} [Z_1 X_1 - \eta_R X_2 \sin\theta - \eta_I X_2 \cos\theta] \quad (3.20)$$

$$\frac{d}{dt} X_2 = \frac{1}{\tau_p} [Z_2 X_2 + \eta_R X_1 \sin\theta - \eta_I X_1 \cos\theta] \quad (3.21)$$

$$\frac{d}{dt} \theta = \frac{1}{\tau_p} \left[ -\alpha (Z_2 - Z_1) + \eta_R \left( \frac{X_1}{X_2} - \frac{X_2}{X_1} \right) \cos\theta + \eta_I \left( \frac{X_1}{X_2} + \frac{X_2}{X_1} \right) \sin\theta \right] \quad (3.22)$$

$$\frac{d}{dt} Z_1 = \frac{1}{\tau_N} [p_1 - Z_1 - (1 + 2Z_1) X_1^2] \quad (3.23)$$

$$\frac{d}{dt} Z_2 = \frac{1}{\tau_N} [p_2 - Z_2 - (1 + 2Z_2) X_2^2] \quad (3.24)$$

donde  $\alpha$  es el factor de ensanchamiento de línea, cuyo valor influye de forma evidente en la ecuación de fase, pudiendo un valor alto amplificar las inestabilidades al multiplicar el desfase entre los emisores. Se puede apreciar además cómo las ecuaciones de tasa de la ganancia (es decir de los portadores) van referidas a una escala de tiempos más lenta según un factor  $T = \frac{\tau_N}{\tau_p}$  del orden de  $10^3$ . Esta divergencia de escala de tiempos entre las tasas de portadores y fotones es la que da lugar a las oscilaciones de relajación iniciales<sup>13</sup>.

El modelo era difícil de verificar experimentalmente al momento de su formulación, por lo que es más conceptual que fenomenológico. La consideración de  $\eta_I$  como un

parámetro libre induce al estudio de la estabilidad del sistema en todo el plano complejo de la constante de acoplo, lo cual lleva a la asunción errónea de que el sistema es intrínsecamente propenso a las inestabilidades y al caos<sup>7</sup>. Esto puede ser cierto o no según los parámetros del dispositivo, pero el valor de  $\eta$  obtenido queda fijado en la etapa de diseño, aunque parámetros como la corriente de inyección o el factor de ensanchamiento de línea influyen en la estabilidad. Es decir que un mismo dispositivo puede presentar diferentes regímenes de comportamiento dinámico.

Por otra parte la asunción de que uno de los dos modos del array domina la emisión ya que el otro desaparece en  $t \rightarrow \infty$  debido a su ganancia negativa<sup>14</sup> se ve contradecida por resultados experimentales<sup>31</sup> donde ambos modos coexisten. En cualquier caso se detallan en la siguiente sección el estudio de la estabilidad del modelo Winful y las principales conclusiones que de él se extraen.

## 3.2. Estabilidad

Si bien no es posible alcanzar un comportamiento caótico en un láser semiconductor simple, dado que su funcionamiento es determinado por sólo dos variables independientes (el campo eléctrico y la densidad de portadores), la introducción de un tercer grado de libertad por acoplo lateral posibilita la aparición de no linealidades y caos. De ahí la importancia del estudio de la estabilidad de este tipo de dispositivos.

Antes que nada conviene apuntar que existen diferentes tipos de estabilidad<sup>24</sup>. Un punto de equilibrio puede ser estable en el sentido de Lyapunov si para pequeñas variaciones de los parámetros la trayectoria permanece cercana al punto de equilibrio; o puede ser cuasi-asintóticamente estable si tras una pequeña variación de los parámetros la trayectoria tiende a volver, cuando  $t \rightarrow \infty$ , al punto de equilibrio. Si se cumplen las dos condiciones el punto de equilibrio es asintóticamente estable.

También se habla, aunque no la trataremos aquí, de estabilidad estructural cuando el punto de equilibrio se mantiene frente a pequeñas variaciones de las ecuaciones, que son habituales en el modelado de sistemas físicos, ya que los parámetros medidos que dan forma a las ecuaciones nunca pueden ser exactos.

Las soluciones de equilibrio de las ecuaciones 3.20 a 3.24 se obtienen anulando las derivadas temporales, resultando:

$$\theta_0 = 0 \text{ ó } \theta_0 = \pi, \quad (3.25)$$

$$Z_0 = \eta_I \cos(\theta_0), \quad (3.26)$$

$$X_0 = \sqrt{\frac{p - \eta_I \cos(\theta_0)}{1 + 2\eta_I \cos(\theta_0)}}. \quad (3.27)$$

Las dos posibles fases corresponden a los modos en fase y en contrafase respectivamente. Las curvas de estabilidad en el plano complejo del factor de acoplo se obtienen linealizando el sistema de ecuaciones de tasa alrededor de los dos puntos de equilibrio para pequeñas variaciones. Las condiciones para la estabilidad de los puntos de equilibrio se obtienen aplicando el criterio de Hurwitz a los polinomios característicos de las soluciones al sistema de ecuaciones de tasa, tal como se detalla en el apéndice C de la tesis de Wilson<sup>14</sup>. Las regiones de estabilidad obtenidas para  $p = 0,5$  y  $\alpha = 5$  se representan en la figura 3.2. Ésta se divide en dos semiplanos según el signo de  $\eta_I$ , siendo la línea de unión entre ellos el eje  $\eta_I = \pm 10^{-5}$  que se considera a efectos prácticos como  $\eta_I \approx 0$ .

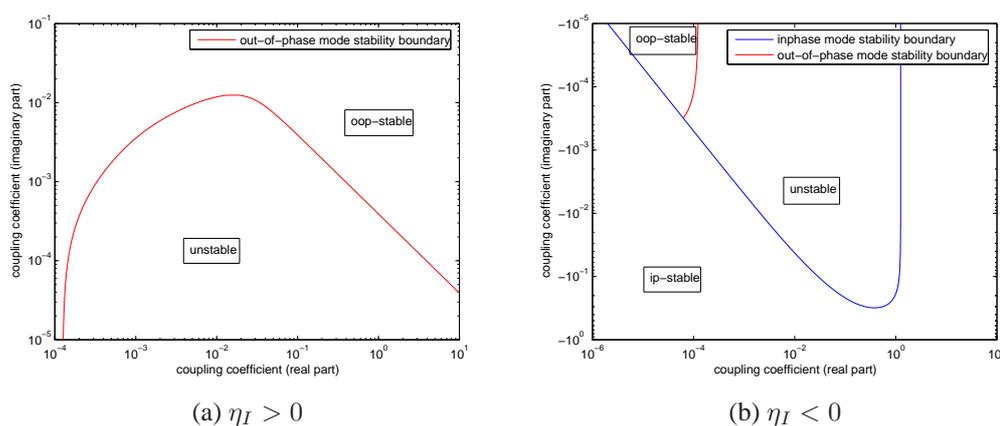


Figura 3.2: Frontera de estabilidad en el plano complejo de  $\eta$

En el semiplano de las  $\eta_I$  positivas (figura 3.2a), la región por encima de la curva de estabilidad contiene los puntos de acoplo en los que el modo en contrafase es linealmente estable, y por la tanto la solución tiende hacia el punto de equilibrio en el

que  $\theta_0 = 0$ ,  $Z_0 = \eta_I$  y  $X_0 = \sqrt{\frac{p-\eta_I}{1+2\eta_I}}$ . La región por debajo de la curva es linealmente inestable. Así mismo, en el semiplano negativo (figura 3.2b), la región por debajo de la curva de estabilidad contiene los puntos de acoplo para los que el modo en fase es linealmente estable. La solución en esta zona tiende al atractor caracterizado por  $\theta_0 = \pi$ ,  $Z_0 = -\eta_I$  y  $X_0 = \sqrt{\frac{p+\eta_I}{1-2\eta_I}}$ . Existe también una pequeña región del semiplano negativo en la que el modo en contrafase es estable, aunque nunca lo son ambos a la vez. La región por encima de ambas curvas es inestable, uniéndose con la región inestable del otro semiplano.

La representación gráfica de estas curvas de estabilidad no debería sin embargo hacernos pensar que cualquier punto del plano complejo es posible para  $\eta$ . En realidad, el ajuste de los parámetros de diseño permite moverse sólo en una zona reducida. Utilizando los valores de la tabla 3.1, vemos cómo el aumento de la separación entre emisores arrastra el factor de acoplo hacia la zona inestable (figura 3.3).

Tabla 3.1: Parámetros del láser para el cálculo de estabilidad y dinámica

Parámetro	Símbolo	Valor
Tiempo de vida del fotón	$\tau_p$	1,5ps
Tiempo de vida del portador	$\tau_s$	2,4ns
Ancho de emisor	$w$	3 $\mu m$
Corriente normalizada	$p$	0,64
Índice de refracción de las capas activas	$\mu_{act}$	3,4
Índice de refracción de las capas de confinamiento	$\mu_{clad}$	3,397
Longitud de onda de emisión	$\lambda_0$	1,3 $\mu m$
Factor de ensanchamiento de línea	$\alpha$	7,5

Por otra parte la variación de la corriente de entrada (manteniéndola siempre idéntica para ambos emisores) desplaza la curva de estabilidad pudiendo cambiar de esta forma el comportamiento del dispositivo. En la figura 3.4 se representan las curvas de estabilidad para corrientes desde  $p = 0,2$  hasta  $p = 1,8$  respecto al punto fijo de acoplo correspondiente a una separación de 6 $\mu m$ .

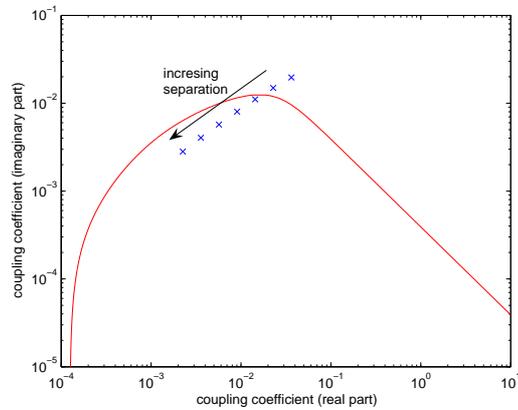


Figura 3.3: Punto de acoplo variando la separación entre emisores de  $6\mu m$  a  $12\mu m$

Siendo un punto de acoplo cercano a esta frontera de estabilidad, el aumento de la corriente provoca su entrada en la zona inestable, originando un comportamiento posiblemente caótico. La corriente de inyección aplicada a cada emisor debería por tanto considerarse como parte integrante del factor de acoplo<sup>3</sup> y no como un parámetro externo, para delimitar correctamente las zonas de estabilidad. Un efecto similar tiene el factor de ensanchamiento de línea  $\alpha$ , ya que su incremento desplaza la curva de estabilidad acercando el punto de acoplo a la zona de caos. Se muestra el efecto de la variación de 1 a 10 de dicho factor para una corriente de  $p = 0,5$  y una separación de  $6\mu m$  en la figura 3.5.

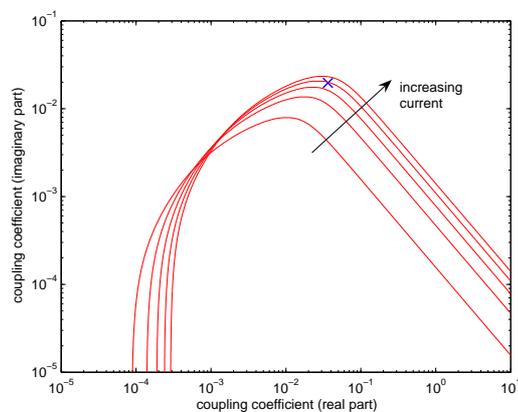


Figura 3.4: Curvas de estabilidad para corrientes entre  $p = 0,2$  y  $p = 1,8$

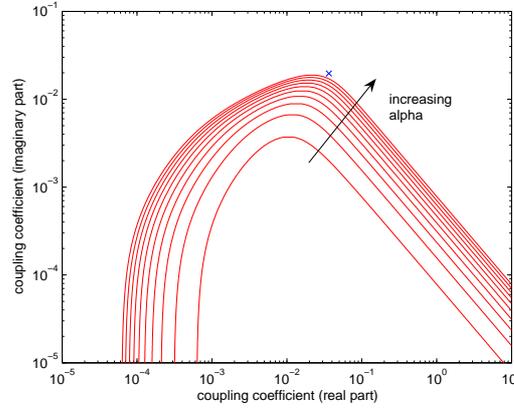


Figura 3.5: Curvas de estabilidad para  $\alpha = 1 \cdots 10$

Se observa pues que son posibles en un mismo dispositivo regímenes tanto estables como caóticos, variando simplemente la corriente de inyección. Sin embargo, para un dispositivo con unas ciertas características sólo podremos movernos en una determinada zona del plano complejo de  $\eta$ , y en direcciones constantes, lo cual sugeriría la conveniencia de adaptar la constante de acoplo para que sus componentes real e imaginaria se correspondan con las direcciones de los posibles movimientos mencionados.

### 3.3. Respuesta en frecuencia

El estudio de estabilidad realizado sigue siendo válido para una modulación en pequeña señal de la corriente, ya que las órbitas periódicas resultantes se muestran estables alrededor de los puntos de equilibrio del sistema linealizado. Los posibles regímenes de modulación senoidal del array se representan mediante dos modos: uno en el que se modulan ambos emisores en fase; y otro en contrafase (no confundir estos modos de modulación con los modos en fase y contrafase del array).

En el primer caso la función de transferencia queda:

$$H_{ip}(\Omega) = \frac{2X_0^2}{-T\Omega^2 + i(1 + 2X_0^2)\Omega + 2X_0^2(1 + 2Z_0)} \quad (3.28)$$

donde  $X_0$  y  $Z_0$  son la potencia óptica y la ganancia normalizadas en el punto de equilibrio, y  $T = \tau_N/\tau_p$ . Los autores del modelo recalcan que la desaparición del factor de

acoplo de esta función de transferencia indica que la modulación de los dos emisores en fase el uno con el otro no estimula la transferencia de energía entre ellos y por tanto se ve limitada por la frecuencia propia de cada uno de ellos.

En cuanto a la modulación en contrafase, se obtiene la función de transferencia

$$H_{oop}(\Omega) = \frac{2X_0^2 \left(1 + \frac{2i\alpha\eta_R \cos(\theta_0)}{\Omega'}\right)}{-T\Omega'^2 + iA\Omega' + B - i\frac{C}{\Omega'}} \quad (3.29)$$

donde

$$\Omega' = \Omega + 2iZ_0, \quad (3.30)$$

$$A = 2TZ_0 + 1 + 2X_0^2, \quad (3.31)$$

$$B = 4T\eta_R^2 + 2X_0^2(1 + 2Z_0) \quad (3.32)$$

y

$$C = 4\eta_R^2(2TZ_0 + 1 + 2X_0^2) - 4\alpha\eta_R X_0^2(1 + 2Z_0) \cos(\theta_0). \quad (3.33)$$

En este caso sí aparece el factor de acoplo, relacionando la respuesta con la frecuencia de batido entre los modos del array, y permitiendo ampliar el ancho de banda útil para la modulación de la emisión. La respuesta en frecuencia obtenida se representa en la figura 3.6, en la que se observan las dos resonancias sucesivas, coincidiendo con lo observado experimentalmente<sup>11</sup> (ver figura 2.17 de la sección 2.4).

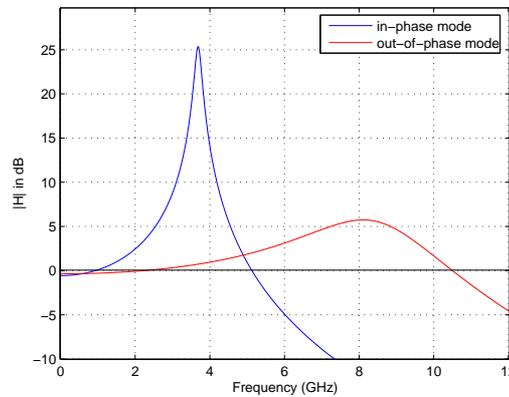


Figura 3.6: Respuesta en frecuencia de la modulación en pequeña señal

La resonancia del modo en fase se corresponde exactamente con la frecuencia de relajación del emisor aislado

$$\omega_{relax} = \frac{1}{\tau_p} \sqrt{\frac{2p}{T}}. \quad (3.34)$$

La del modo en contrafase, en cambio, depende tanto de la corriente como del factor de acoplo y tiene su máximo en

$$\omega_{res} = \frac{2\eta_R}{\tau_p} + \frac{p}{2\tau_s\eta_R} \quad (3.35)$$

La segunda frecuencia de resonancia aumenta según nos acercamos a la frontera de estabilidad (por ejemplo aumentando la corriente de un mismo dispositivo) hasta que alcanza un valor límite<sup>14</sup>

$$f_{inst} = \frac{4}{\pi\tau_p^2} \left( \eta_R^2 + \eta_I^2 + \frac{\eta_I}{T} + \frac{\eta_I + \frac{1}{2}X_0^2}{T} \right) \quad (3.36)$$

a partir del cual el sistema se vuelve inestable y la respuesta linealizada de la ecuación 3.29 deja de ser válida. Esta frecuencia de auto-oscilación aumenta cuanto más cercanos se encuentren entre sí los emisores, como queda de manifiesto en el análisis espacio-temporal del dispositivo<sup>3</sup>. La dinámica del dispositivo en las diferentes regiones del plano de estabilidad se analiza en la sección siguiente.

### 3.4. Dinámica

El comportamiento dinámico del modelo se obtiene integrando numéricamente el sistema formado por las cinco ecuaciones de tasa 3.20 a 3.24. Mediante el uso de fórmulas de diferenciación numérica hacia atrás (*Backward Differentiation Formulas* o *BDF*) de orden variable obtenemos la solución del sistema correspondiente a las condiciones de contorno aplicadas. Utilizamos estas fórmulas, también conocidas como método de Gear, por ser el problema rígido (*stiff*)<sup>\*</sup>, además de porque son las que usa Wilson en su implementación. En todas las simulaciones aplicaremos la misma

<sup>\*</sup>un sistema de ecuaciones diferenciales se considera, cualitativamente, rígido cuando el paso máximo de un algoritmo de integración numérica habitual, como la fórmula de Runge-Kutta, es demasiado pequeño, lo cual obliga a utilizar otro tipo de métodos<sup>33</sup>

corriente a ambos emisores, ya que en el caso de corrientes diferentes la integración numérica es mucho más complicada y lenta y no se han apreciado diferencias cualitativas en los resultados.

Las soluciones al sistema se buscan partiendo de un estado inicial en el que ambos emisores se encuentran en fase, con una ganancia

$$Z_0 = \frac{1 + \beta z_0 - \sqrt{1 + \beta^2 z_0 (z_0 - 2) + 4\beta z_0}}{2(1 - \beta)} \quad (3.37)$$

y una potencia óptica

$$X_0^2 = p - z_0(1 + \beta) + \beta z_0 \quad (3.38)$$

donde  $\beta = 1,6 \cdot 10^{-4}$  es el factor de emisión espontánea,  $z_0 = 0,939$  son las pérdidas normalizadas de la cavidad en reposo, y  $X_0$ ,  $Z_0$  y  $p$  corresponden a las definiciones 3.17, 3.18 y 3.19. Se añade también a la hora de integrar un factor  $+\beta(Z + z_0)/(2X)$  a las ecuaciones de tasa 3.20 y 3.21 para incluir el efecto de la recombinación espontánea.

A continuación procederemos a mostrar la dinámica obtenida para un punto de acoplo caracterizado por  $\eta \approx 0,0205 + 0,0263i$  obtenido para una separación de  $7\mu\text{m}$  y el resto de parámetros con los valores de la tabla 3.1 (salvo la corriente). Se muestran así tres regímenes distintos obtenidos cambiando solo los valores de la corriente:  $p = 1$ ,  $p = 1,5$  y  $p = 2$ .

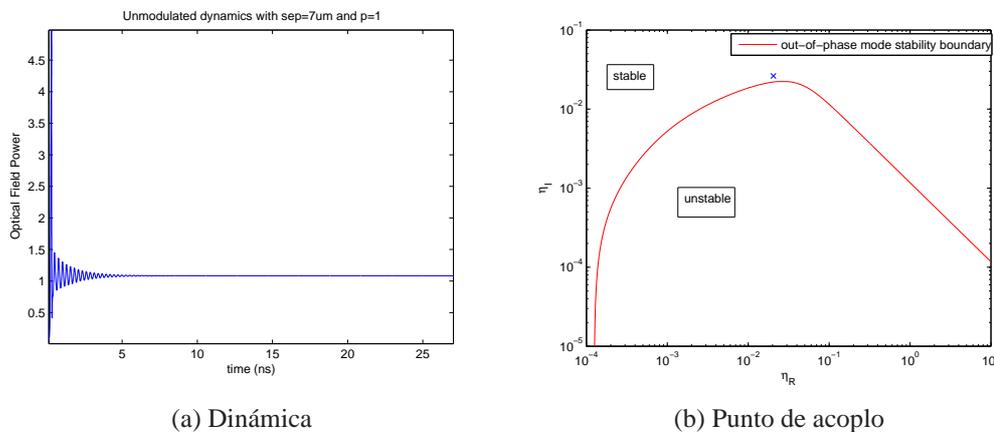


Figura 3.7: Comportamiento dinámico estable

Con  $p = 1$  el punto de acoplo se encuentra en la zona estable y ambos emisores emiten idénticamente en continua (tras las oscilaciones iniciales de relajación), sin que parezcan influir el uno en el otro. Se muestran la dinámica y el correspondiente punto de acoplo en la figura 3.7.

El nivel emitido es aquel predicho por la ecuación 3.27. Si además modulamos en pequeña señal observamos que ambos emisores están enganchados en contrafase (figura 3.8) y la respuesta en frecuencia se corresponde con la que se mostraba en la figura 3.6.

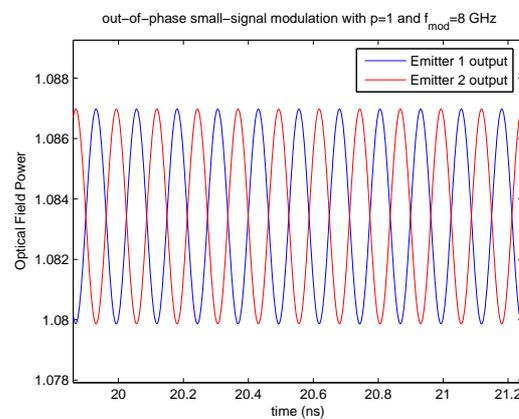


Figura 3.8: Dinámica estable con modulación (régimen permanente)

El sistema permanece estable según aumentamos la corriente, hasta que la frontera de estabilidad, con  $p = 1,45$ , se acerca lo suficiente al punto de acoplo como para que la respuesta empiece a oscilar con una frecuencia de batido entre emisores\* que corresponde con la segunda resonancia de la respuesta en frecuencia y viene dada por la fórmula 3.36.

Esta oscilación de inestabilidad incipiente es amortiguada al principio, pero aumentando la corriente disminuye su amortiguamiento, hasta llegar al límite con  $p = 1,555$ , donde el sistema se encuentra en un estado oscilatorio aparentemente estacionario. Estas oscilaciones se muestran en la figura 3.9.

---

\*distinta de aquella calculada en la sección 3.1, que era la frecuencia de batido entre los dos modos del array

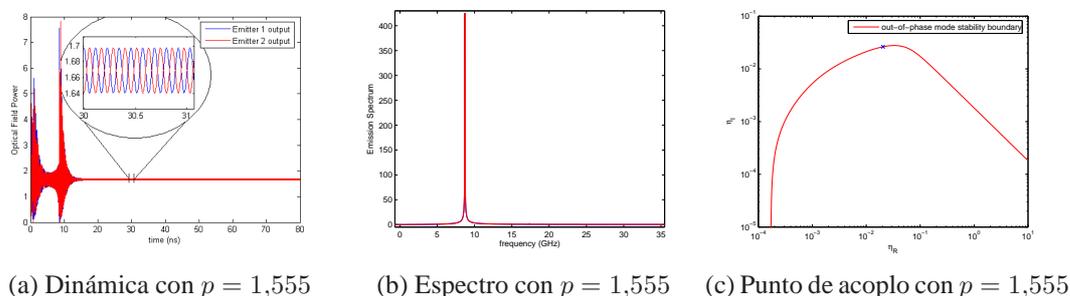


Figura 3.9: Comportamiento dinámico sobre la frontera de estabilidad

El sistema a partir de este punto se vuelve no hiperbólico, ya que aumentando ligeramente la corriente a partir de esta frontera la respuesta se vuelve inestable, y presenta una dinámica de tipo caótico, con una evolución temporal aperiódica, pero acotada, y un espectro de tipo ruidoso de banda ancha con picos en las frecuencias dominantes, como se observa en la figura 3.10.

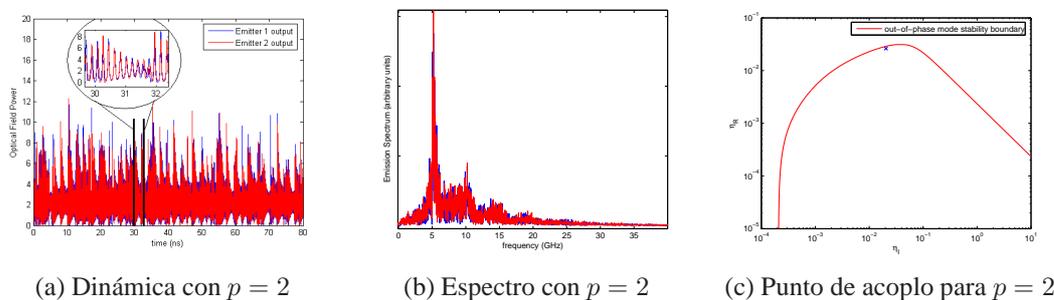


Figura 3.10: Comportamiento dinámico caótico

### 3.5. Discusión

Quizá el aspecto más reseñable de este modelo sea el empleo de las ecuaciones de tasa con la inclusión del factor de acoplo complejo, relacionado con la frecuencia de batido y las ganancias relativas de los modos del array. Estos modos sólo existen si los emisores se encuentran enganchados en fase<sup>28</sup> (en phase-locking), con lo cual el

modelo no puede predecir nada cuando se pierde el enganche en fase entre emisores. Este tipo de modelo, basado en ecuaciones diferenciales ordinarias de orden bajo ha sido ampliamente utilizado ya que es mucho más sencillo que otros modelos electromagnéticos, aunque son evidentes sus limitaciones.

El modelo se declara válido sólo para acoplos débiles<sup>12</sup>, y además sólo en la zona lineal. Cuando la aproximación lineal es correcta, en la zona estable, la respuesta en modulación se corresponde cualitativamente con los resultados experimentales, como podemos observar comparando las figuras 3.6 y 2.17. También es útil para averiguar hasta dónde es válido el modelo lineal, ya que se describe una frontera de estabilidad, más allá de la cual la dinámica se vuelve errática\*.

Sin embargo el modelo se contradice en cierto modo a sí mismo al afirmar que estos dispositivos son intrínsecamente caóticos<sup>7</sup> ya que hemos podido observar como en un mismo dispositivo son posibles regímenes tanto estables como inestables en función de la corriente aplicada. En efecto, en los mapas 3.7b, 3.9c y 3.10c el factor de acoplo es el mismo, siendo la frontera de estabilidad la que se desplaza por efecto del aumento de la corriente. Esta frontera indica simplemente que a partir de ese punto el sistema se vuelve no hiperbólico y la aproximación lineal deja de ser válida. Se pierde el locking entre los emisores y puede haber caos, aunque el modelo en realidad no se pronuncia sobre ello.

Por otra parte la asociación de la pérdida del locking con la pérdida de la estabilidad se ve contradecida por los resultados de laboratorio<sup>28</sup> en los que las no linealidades aparecen precisamente en lateral-mode-locking. La parte imaginaria  $\eta_I$  del factor de acoplo se presenta además como un parámetro libre del diseño, cuando en realidad sólo un valor concreto satisface las condiciones de contorno<sup>12</sup>, y además es posible determinarlo experimentalmente<sup>31</sup>.

La aparición de no linealidades, como comentábamos en la sección 2.4, se ve favorecida cuando la frecuencia de la perturbación (en este caso el batido de modos producido por el acoplo) se aproxima al doble de la frecuencia de relajación del emisor. Es llamativo pues que en este modelo la relación entre las dos frecuencias de resonancia, definida en la figura 3.11, no parezca tener ninguna relación con la dinámica de la solución.

---

\*Los autores del modelo<sup>14</sup> utilizan este calificativo para evitar pronunciarse sobre la caoticidad de la respuesta.

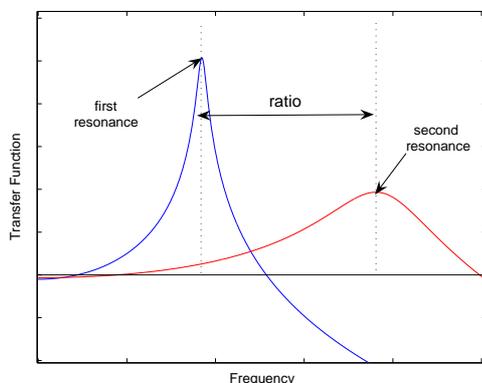
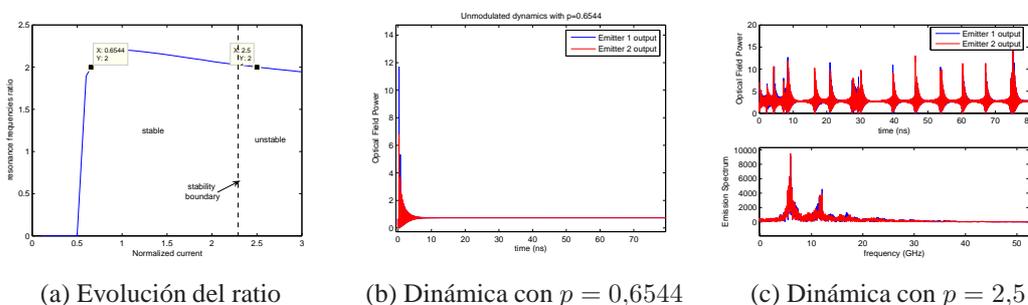


Figura 3.11: Definición de la relación de frecuencias

Según los parámetros del dispositivo, este ratio puede alcanzar el valor 2 (que debería provocar una excitación paramétrica del sistema y la aparición de no linealidades) bien en la zona estable, bien en la frontera o bien en la zona inestable, sin que ello parezca cambiar lo más mínimo el comportamiento dinámico resultante. En la figura 3.12a se muestra la evolución de dicha razón de frecuencias con el aumento de la corriente para una separación de  $6\mu\text{m}$  entre los emisores. En este caso el valor 2 se alcanza dos veces: la primera con una corriente  $p = 0,6544$  que sitúa el punto de acoplo en la zona estable y la segunda con una corriente  $p = 2,5$ , pasada la frontera de estabilidad. Se observa en el primer caso la esperada dinámica lineal (figura 3.12b) mientras que en el segundo caso aparece una dinámica *errática* (figura 3.12c) como cabría esperar.



(a) Evolución del ratio

(b) Dinámica con  $p = 0,6544$

(c) Dinámica con  $p = 2,5$

Figura 3.12: Relación doble para una separación de  $6\mu\text{m}$

No se observa ninguna influencia de esta relación tampoco cuando el ratio doble se alcanza justo en la frontera de estabilidad. El comportamiento en ese caso es similar al de la figura 3.9.

En este modelo es imposible observar no linealidades tales como las oscilaciones subarmónicas, ya que al alcanzar el límite de estabilidad lineal aparecen saltos en la fase, característicos de un acoplo fuerte, que vuelven inestable la respuesta. A partir de ahí el dispositivo debería analizarse en su conjunto y ya no por medio del acoplo evanescente entre los emisores<sup>3</sup>. La ruta al caos por periodos dobles sí se observa experimentalmente<sup>11</sup>: en la figura 3.13 se muestra la evolución de periodo simple a periodo doble, cuádruple y finalmente al caos en el espectro del ruido de intensidad relativa (*RIN*) de un dispositivo LCDL cuando se varían las corrientes de inyección.

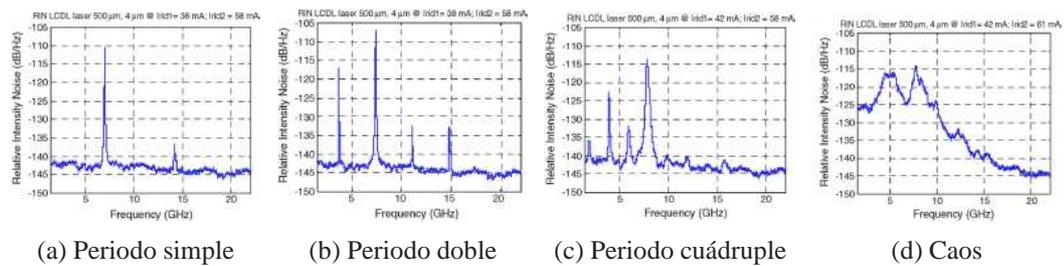


Figura 3.13: Ruta al caos en LCDL observada experimentalmente

En la primera de estas respuestas en frecuencia aparece un pico de resonancia a la frecuencia de batido entre los modos laterales, que es de unos  $7GHz$ , así como en el primer armónico a  $14GHz$ . Esta es la respuesta lineal, el periodo simple. Aumentando la corriente aparece la primera no linealidad: un subarmónico a frecuencia mitad de la separación entre modos, es decir un doblamiento del periodo. Según continúa subiendo la corriente se observan periodos cuádruples y finalmente un espectro de banda ancha correspondiente a un régimen caótico. En este experimento se varía sólo la corriente de un emisor, pero el efecto sería similar incrementando las dos. Esta transición de régimen lineal a caótico a través de doblamientos del periodo no se observa sin embargo en el modelo Winful/Wilson, en el que la ruptura de la linealidad es brusca, como se ha visto en el apartado anterior.

La no inclusión de ciertos fenómenos como la difusión de portadores<sup>34</sup> y la introducción *ad hoc* de un factor de acoplo que no incluye las variaciones espaciales<sup>3</sup> ni

cumple las condiciones de contorno del dispositivo<sup>12</sup> podrían explicar la ausencia de la ruta al caos que se espera en un modelo de este tipo de dispositivos.

Modelos más complicados basados en la teoría semiclásica de láseres acoplados<sup>9</sup> han sido elaborados con el fin de obtener resultados más acordes con la solución de la ecuación de onda y las condiciones de contorno<sup>12</sup>, aunque tampoco explican ciertas observaciones experimentales, como el hecho de que los dos modos del array emitan al mismo tiempo, sin que predomine uno sobre el otro<sup>31</sup>, lo cual contradice la explicación de las inestabilidades como resultantes de la competencia entre los supermodos<sup>28</sup>. El modelo Winful/Wilson es válido pues para el comportamiento lineal y estable de este tipo de dispositivos, resultando acertadas sus predicciones sobre modulación a una frecuencia mayor que la de relajación<sup>2</sup>, pero no permiten estudiar las no linealidades, ya que sólo se advierte una pérdida de estabilidad lineal en ciertas condiciones, sin más información sobre el comportamiento no lineal.

Por ello utilizaremos en el capítulo siguiente un modelo fenomenológico simplificado, en el que introduciremos el acoplo en régimen de lateral-mode-locking como una modulación del campo óptico. Ello nos permitirá simular cualitativamente la dinámica de un dispositivo LCDL con el objetivo de profundizar sobre el modo en el que se dan los fenómenos no lineales observados experimentalmente, en particular la aparición de periodos dobles.

# Capítulo 4

## Simulación y ruta al caos

### 4.1. Modelo simplificado

En un array de dos LCDL, cuya estructura esquemática repetimos en la figura 4.1 por claridad de exposición, el acoplo de las colas evanescentes de los modos laterales produce una oscilación de la energía de un emisor a otro. Como hemos comentado anteriormente, en régimen de lateral-mode-locking, los modos del array se enganchan en fase<sup>28</sup>, de tal forma que se puede caracterizar el efecto del acoplo por una frecuencia de batido entre éstos y una «fuerza» del acoplo. Se puede por tanto, de forma fenomenológica y haciendo uso de la aproximación de envolvente lenta\*, considerar la emisión de cada uno de los emisores como modulada por el acoplo con el otro, reduciendo de esta forma los grados de libertad del sistema de cinco a tres<sup>4</sup>.

Se analiza pues por separado la emisión de cada láser, teniendo en cuenta la influencia del otro. Para ello incorporamos en la ecuación de tasa 2.15 del número de fotones una modulación de éste con un índice de modulación relacionado con la fuerza del acoplo y una frecuencia que corresponde a la frecuencia de batido, es decir, a la segunda resonancia del array. Estos dos parámetros se justifican por la observación de un

---

\* *Slowly Varying Envelope Approximation*: se considera que la envolvente de la onda emitida varía lentamente, tanto temporal como espacialmente, respecto al periodo y la longitud de onda ópticos; esta aproximación es de uso común en el estudio de láseres<sup>19</sup>

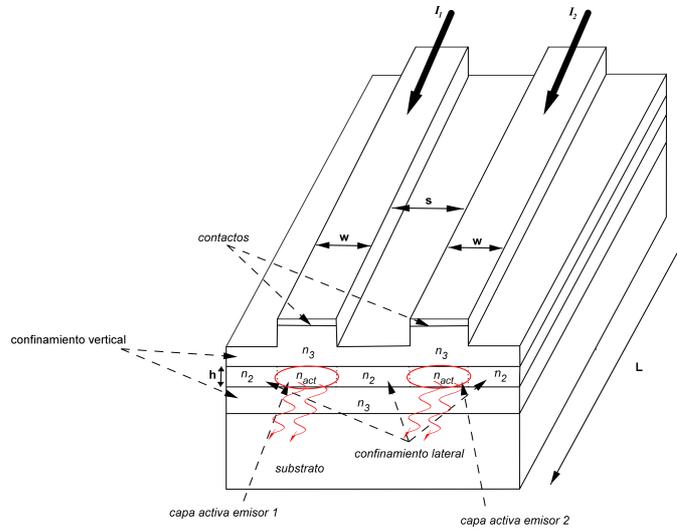
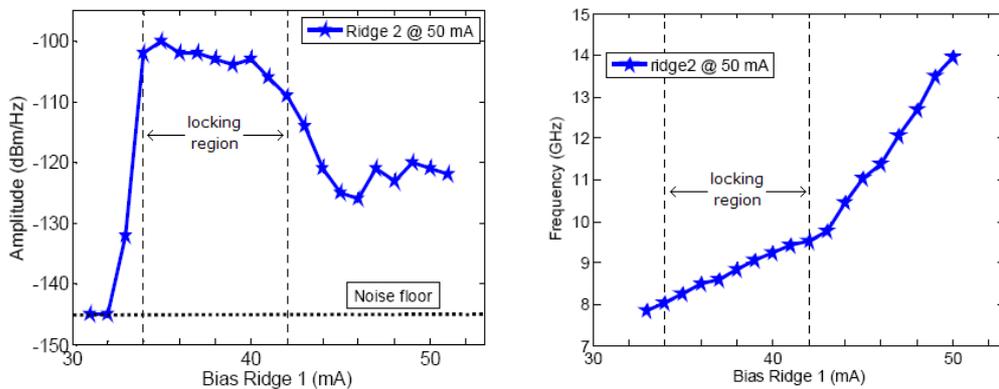


Figura 4.1: Estructura esquemática de dos LCDL

régimen de lateral-mode-locking en el que la relación de fase entre los modos laterales es fija.

En la figura 4.2 se muestra cómo la amplitud de la interacción entre los modos permanece prácticamente constante en la zona de locking, a la vez que la frecuencia de esta interacción varía en un margen de aproximadamente un gigahercio, pudiéndose considerar constante también.



(a) Variación de la amplitud RIN de la interacción

(b) Frecuencia de la interacción

Figura 4.2: Amplitud y frecuencia de la interacción entre los campos emitidos<sup>35</sup>

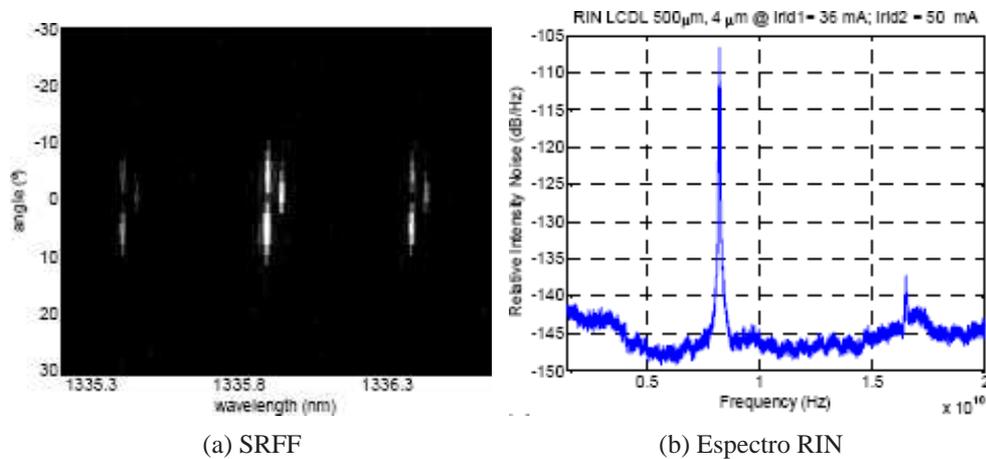


Figura 4.3: Modos en lateral-mode-locking<sup>35</sup>

La frecuencia del acoplo que incorporaremos en las ecuaciones de tasa se corresponde con la resonancia observada en régimen de locking, es decir la diferencia de frecuencia entre los modos en fase y contrafase que emiten a la vez. En la figura 4.3 se observa la existencia de estos dos modos y el pico de resonancia correspondiente a la frecuencia de batido entre ambos.

Siendo el objeto de este modelo la simulación del comportamiento no lineal de este tipo de dispositivos, consideraremos una modulación del campo óptico a frecuencia doble de la de relajación, de tal forma que se produzca una excitación paramétrica que favorezca la aparición de una ruta al caos por periodo doble.

Esta relación de frecuencias de dos a uno ha sido observada experimentalmente cuando los modos están en lateral-mode-locking<sup>11,28</sup>, asimilando este comportamiento no lineal a aquel observado en láseres con una inyección externa a frecuencia doble de la de relajación<sup>4</sup>. De hecho esta relación de dos a uno entre las dos frecuencias de resonancia se intenta evitar cuando el objetivo es un comportamiento estable<sup>6</sup>; en nuestro caso el propósito es justo el contrario, por lo que favoreceremos la aparición de no linealidades fijando esta relación doble de frecuencias.

## 4.2. Formulación

El modelo utilizado se basa en las ecuaciones de tasa 2.15 y 2.16 del láser semiconductor añadiendo una modulación en el campo óptico a la frecuencia de resonancia del acoplo  $\omega_c$  con un índice  $A$  que representa la magnitud de dicho acoplo. Estos dos parámetros representan la interacción entre los modos laterales del *phase-locked array* observada en la figura 4.2.

De esta forma la ecuación de tasa de los fotones resulta:

$$\frac{dP}{dt} = \left( \Gamma v_g G(N, P) - \frac{1}{\tau_p} \right) \cdot P' + \Gamma \beta \frac{N}{\tau_N} \quad (4.1)$$

donde  $\Gamma$  es el factor de confinamiento,  $v_g$  la velocidad de grupo,  $\beta$  el factor de emisión espontánea,  $\tau_N$  y  $\tau_p$  los tiempos de vida de portadores y fotones. Todos estos factores se definen en el capítulo 2.  $P'$  representa el número de fotones alterado por la modulación que simboliza el acoplo, y que parametrizamos como

$$P' = (1 + A \cdot \cos(\omega_c t)) \cdot P. \quad (4.2)$$

La ecuación de la tasa de portadores permanece inalterada:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{I}{q} - v_g G(N, P) \cdot P - \frac{N}{\tau_N}. \quad (4.3)$$

En ambas ecuaciones la ganancia  $G(N, P)$  queda definida como

$$G(N, P) = \frac{g_0 \cdot (N - N_{trasp}) / V}{1 + \varepsilon P}, \quad (4.4)$$

siendo  $g_0$  el factor de ganancia lineal,  $N_{trasp}$  la población de portadores en transparencia y  $\varepsilon$  el factor de compresión de ganancia.

Las simulaciones de este modelo simplificado serán efectuadas con los parámetros de la tabla 4.1, cambiando simplemente el índice de modulación (que incluiría la influencia tanto de la separación entre emisores como de los índices de refracción y del factor de ensanchamiento de línea), la frecuencia del acoplo, o la corriente de inyección. Este último caso implica un cambio en la frecuencia intrínseca de relajación

$$f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\Gamma v_g g_0}{qV} (I - I_{th})} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{I - I_{th}}{\tau_p \tau_N I_{th} - q \tau_p N_{trasp}}}, \quad (4.5)$$

Tabla 4.1: Parámetros de simulación

Parámetro	Símbolo	Valor
Tiempo de vida del fotón	$\tau_p$	1,5ps
Tiempo de vida del portador	$\tau_s$	2,4ns
Carga del electrón	$q$	$1,60217646 \cdot 10^{-19}C$
Factor de confinamiento	$\Gamma$	0,69
Índice de refracción de grupo efectivo	$\mu_g$	4
Longitud de Fabry-Perot	$L$	300 $\mu m$
Profundidad de emisor	$h$	0,2 $\mu m$
Ancho de emisor	$w$	3 $\mu m$
Volumen del emisor	$V$	$L \cdot w \cdot h$
Factor de emisión espontánea	$\beta$	$5 \cdot 10^{-5}$
Corriente de umbral	$I_{th}$	20mA
Densidad de portadores de transparencia	$n_{trasp}$	$10^{24}m^{-3}$
Factor de compresión de ganancia	$\epsilon$	$1,7 \cdot 10^{-23}$

y con ello también de la frecuencia de batido si se quiere mantener la relación doble.

Por ejemplo, una corriente  $I = 25mA$  conllevaría una frecuencia de relajación de oscilación  $f_r \approx 2,1GHz$  con lo que una frecuencia de batido entre los modos laterales de  $f_c \approx 4,2GHz$  provocaría una excitación paramétrica que favorecería la aparición de no linealidades.

Tomamos como condiciones iniciales de simulación el estado de transparencia, con ganancia neta y densidad de fotones nulas y densidad de portadores en su valor de transparencia que aparece en la tabla 4.1. Lógicamente, en ausencia de modulación, con  $A = 0$ , aparecen las esperadas curvas de relajación de la figura 2.7 que conducen al régimen estacionario descrito por las ecuaciones 2.23 y 2.24.

El método de integración numérica utilizado es en este caso una implementación<sup>36</sup> PECE (*predictor-corrector*) de los métodos de Adams-Bashforth-Moulton, ya que el

problema en este caso no es rígido<sup>33</sup> pero sí computacionalmente muy pesado de resolver. Por ello resultan más eficientes las fórmulas de órdenes altos y paso múltiple. En ellas se utiliza no sólo la última muestra para predecir la siguiente, sino que el algoritmo tiene memoria y utiliza varias muestras anteriores para generar la siguiente. Aun así la simulación de este tipo de sistemas de ecuaciones diferenciales es muy costosa y lenta.

Con valores no nulos del índice de modulación, es decir, simulando el efecto del acoplo lateral entre los dos emisores, el sistema se vuelve dinámico, ya que introducimos un tercer grado de libertad: el tiempo. De esta forma, se vuelve posible la aparición, bajo ciertas condiciones de modulación, de no linealidades. Éstas se analizan mediante la elaboración de diagramas de bifurcación, tal como se explica en la sección siguiente.

### 4.3. Teoría de bifurcaciones

Recordemos que en un sistema dinámico, la evolución del estado del sistema en el espacio de fases se denomina flujo. La teoría de bifurcaciones describe cómo cambian las propiedades topológicas de un flujo al variar uno o más parámetros<sup>24</sup>. Se habla de una bifurcación cuando la naturaleza cualitativa del flujo cambia. Para ello es necesaria la propiedad de no hiperbolicidad, ya que un pequeño cambio en un parámetro provoca un cambio radical en el tipo de respuesta.

Los diagramas de bifurcación son una de las herramientas más utilizadas en el análisis de sistemas no lineales. Existen diferentes tipos de bifurcaciones (locales, globales, de punto-silla, de Hopf<sup>37</sup>), aunque en nuestro caso buscaremos sólo las bifurcaciones locales.

Como se ha visto en la sección 2.3.2 en el caso de una modulación de la corriente de inyección del emisor láser, cuando la frecuencia de modulación es un múltiplo entero de la frecuencia propia del sistema, en el sistema se producen efectos de excitación paramétrica y éste exhibe una gran variedad de regímenes de comportamiento no lineal. Los diferentes regímenes por los que atraviesa el sistema a medida que se varía la amplitud de la modulación se analizan mediante diagramas de bifurcación, en los cuales el índice de modulación constituye el parámetro de bifurcación<sup>5,13</sup>. De forma

análoga podemos analizar el comportamiento dinámico de nuestro modelo mediante un diagrama en el que el parámetro de bifurcación sería el índice de modulación de la densidad de fotones, fijando la corriente; o la corriente de inyección, fijando el índice de modulación.

En el caso de la modulación en gran señal de la corriente, y en particular cuando ésta se efectúa a frecuencia doble de la de relajación<sup>13</sup>, se ha observado<sup>6</sup> una ruta al caos por bifurcaciones de periodo doble, al igual que en el caso de arrays LCDL.<sup>11</sup> Esta ruta se conoce como secuencia de Feigenbaum y consiste en doblamientos sucesivos del periodo (2, 4, 8, ... ,caos), seguidos del proceso inverso (caos, ... ,periodo 8, periodo 4, periodo 2, periodo simple), según aumenta el parámetro de bifurcación. Es una de las transiciones más comunes al caos (aunque no la única<sup>25,26</sup>), en particular en sistemas láser<sup>5</sup>.

Cuando la solución esperada constituye un subarmónico de la perturbación -la modulación- del sistema el diagrama de bifurcación se obtiene utilizando la técnica estroboscópica, que consiste en muestrear la señal de salida en instantes de tiempo múltiplos enteros del periodo de la perturbación. Geométricamente esta técnica es equivalente a situar la hipersuperficie de la aplicación de Poincaré (o plano de Poincaré<sup>37</sup>) en una fase determinada de la perturbación del sistema<sup>13</sup>. Si la evolución temporal es periódica y del mismo periodo que la modulación, todas las muestras son idénticas y la solución periódica se puede representar mediante un único punto. Si la periodicidad de la respuesta es un subarmónico de la perturbación (cuyo periodo es  $M \cdot T_m$ ), entonces las muestras del estado se repiten secuencialmente cada  $M$  valores. De esta forma un periodo doble aparece en el diagrama representado por dos puntos, un periodo cuádruple por cuatro puntos, etc. Finalmente, un régimen caótico, al ser aperiódico, aparece en el diagrama con un punto distinto para cada muestra de la señal (idealmente infinitos).

## 4.4. Dinámica no lineal

Las simulaciones de las ecuaciones 4.1 y 4.3 muestreadas por medio de la técnica estroboscópica descrita en la sección 4.3 nos permiten obtener una serie de diagramas de bifurcación que ilustran la dinámica de este modelo. De los tres principales parámetros del modelo (índice de modulación, frecuencia de acoplo y corriente de inyección)

fijaremos en cada caso dos y utilizaremos el tercero como parámetro de bifurcación. De esta forma se obtienen en cierto modo cortes en cada dirección de lo que sería un diagrama de bifurcación en cuatro dimensiones. La cantidad medida siempre es la densidad de fotones, normalizada en cada diagrama a su valor más alto, como es habitual en este tipo de diagramas. Se obtendrían diagramas similares para las densidades de portadores, ya que la dinámica de ambas cantidades se encuentra estrechamente relacionada.

Manteniendo fija la corriente a unos valores de  $22mA$ ,  $30mA$  y  $40mA$  respectivamente y con una frecuencia de acoplo al doble de la frecuencia de relajación, obtenemos los tres mapas de las figuras 4.4 y 4.5.

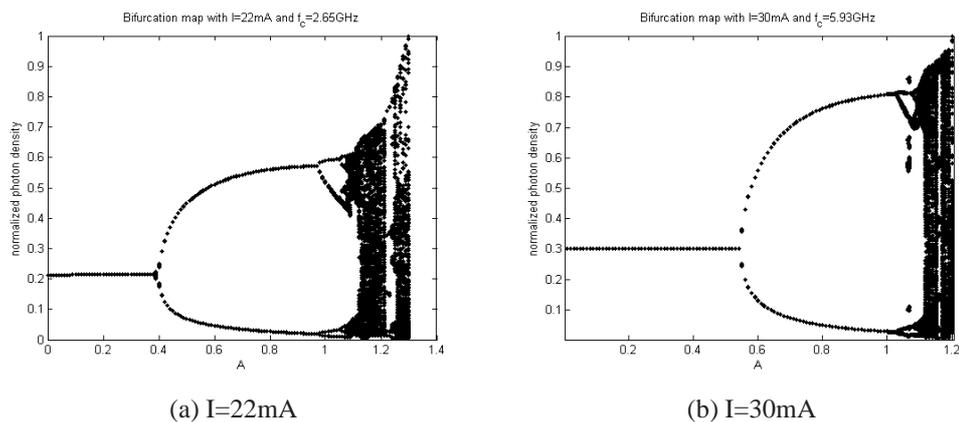


Figura 4.4: Mapa de bifurcaciones variando el índice de modulación

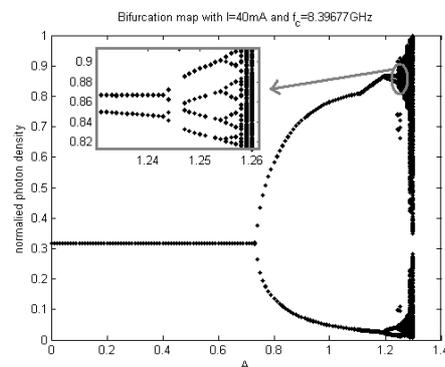


Figura 4.5: Mapa de bifurcaciones con  $I = 40mA$

En estos diagramas se aprecia claramente una ruta al caos por periodos dobles, detallada en particular para los periodos 4 a 16 en la ampliación de la figura 4.5. Al principio (con índices bajos) la señal emitida tiene el mismo periodo que la modulación aplicada, con lo cual viene representada en el diagrama por un único punto, ya que se muestrea a ese mismo periodo. Este muestreo se representa en la figura 4.6a. Además, en toda esta zona de periodo simple la densidad de fotones permanece al mismo nivel ya que la modulación es en pequeña señal y el nivel de corriente continua es el mismo.

Este periodo simple se muestra temporal y espectralmente en la figura 4.6. El nivel de portadores se encuentra en este caso siempre por encima de umbral, y la amplitud de la oscilación es muy pequeña (figura 4.6b), asegurando un funcionamiento lineal del dispositivo. La señal de interés es aquella alcanzada en régimen estacionario, con lo que no se tiene en cuenta el periodo transitorio inicial.

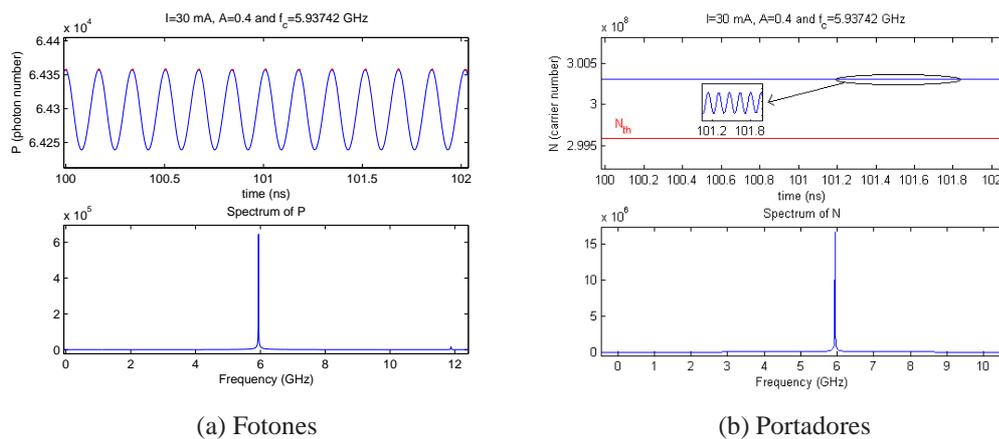


Figura 4.6: Periodo simple

Al llegar al primer punto de bifurcación, cuya posición se desplaza hacia índices mayores según aumenta la corriente (figura 4.4), el periodo de la señal emitida dobla, con lo cual aparecen dos puntos diferentes, ya que al muestrear con el periodo de la modulación, una muestra se cogerá cerca del máximo de la señal, y otra cerca del mínimo, tal como se observa en la figura 4.7a. Este comportamiento no lineal resulta<sup>13</sup> de que la oscilación es ahora lo suficientemente grande como para que el nivel de portadores descienda en los semiperiodos negativos de la señal por debajo del umbral de emisión estimulada (figura 4.7b). Cuando la inversión de población no alcanza su nivel

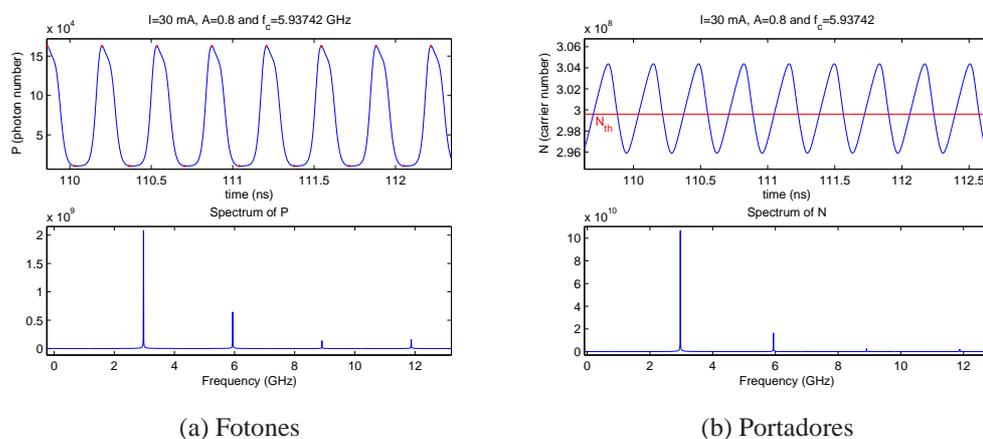


Figura 4.7: Periodo doble

de umbral la emisión está formada únicamente por la emisión espontánea. Al cruzar de nuevo el umbral, el número de fotones emitidos experimenta una subida brusca. De esta forma la amplitud de la oscilación aumenta considerablemente, provocando tras la bifurcación la separación de las dos ramas que se observaba en las figuras 4.4 y 4.5.

Tras el primer doblamiento del periodo, al aumentar el índice de modulación, se produce una segunda bifurcación, simultáneamente en las dos ramas de periodo doble del diagrama. Se vuelve así a doblar el periodo, llegando a un periodo cuádruple. La evolución temporal y espectral de los fotones en régimen de periodo 4 se representa en la figura 4.8. En este caso se pueden apreciar unas pequeñas oscilaciones de relajación

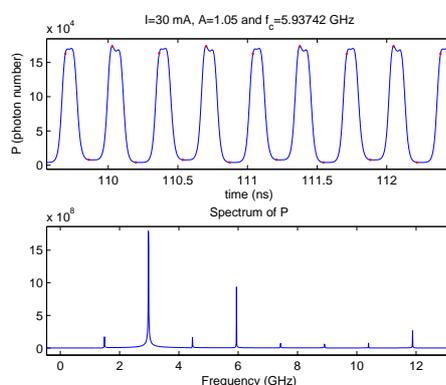


Figura 4.8: Periodo cuádruple

en los semiperiodos positivos que siguen al rápido aumento de la emisión.

Después del periodo 4 se suceden casi indistinguiblemente periodos 8, 16, etc. hasta llegar a un régimen caótico, en el que desaparece cualquier periodo aparente. Éste se caracteriza en el diagrama por una nube de puntos. Se observa en la figura 4.9 la aperiodicidad temporal y el característico espectro caótico, de tipo ruidoso a pesar de ser el sistema determinístico, con valores altos en una banda ancha y con picos a las frecuencias dominantes: la de la perturbación y su primer armónico así como la de relajación (que es a su vez subarmónico de la primera).

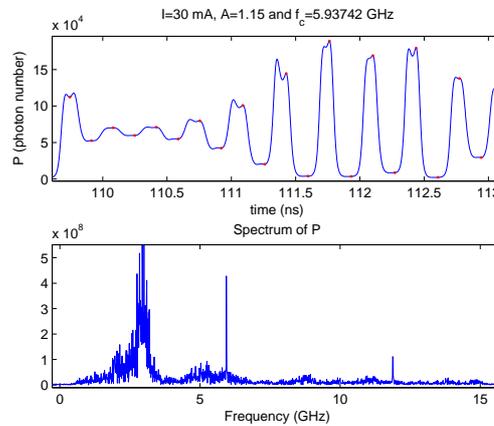


Figura 4.9: Caos

Si en vez de variar el índice de modulación para una corriente fija hacemos constante el índice de modulación y variamos la corriente, manteniendo la frecuencia del acoplo tal que exista la relación doble de frecuencias, podemos obtener diferentes tipos de diagramas. En el caso de un índice de modulación lo suficientemente bajo como para no llegar a la primera bifurcación en ningún caso, el comportamiento sería absolutamente lineal. Si el índice  $A$  elegido es tal que el máximo régimen no lineal que puede producirse es un periodo doble, obtendremos un diagrama como el de la figura 4.10a. Tras la primera bifurcación las ramas se abren y se vuelven a cerrar hasta una bifurcación inversa con la que se vuelve al régimen lineal.

Si en cambio el índice de modulación fijado es suficiente para provocar un régimen caótico a ciertas corrientes, tendremos un diagrama como el de la figura 4.10b. En él se aprecia una secuencia de Feigenbaum similar a las de la figura 4.4 con periodo simple, doble, cuádruple, ..., y caos.

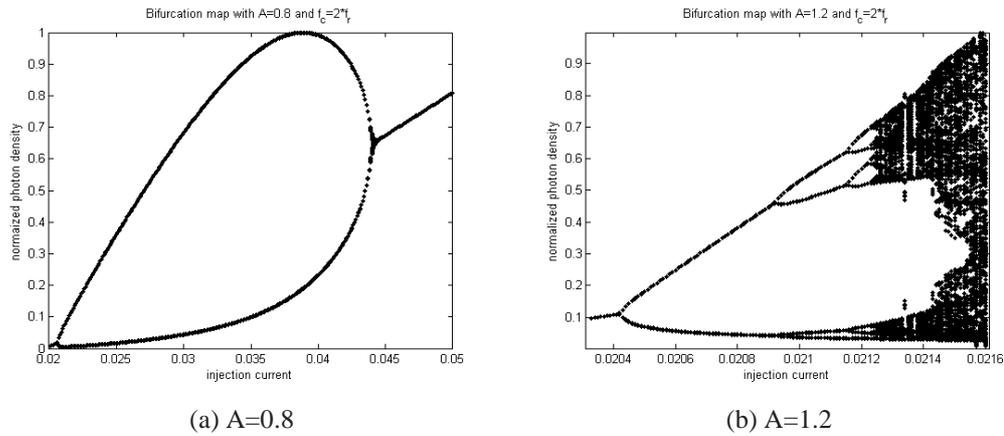


Figura 4.10: Mapa de bifurcaciones variando la corriente

En todos los casos esta ruta al caos es seguida por una ruta inversa (caos, ..., periodo cuádruple, periodo doble, periodo simple), aunque para llegar a ella la simulación se debe prolongar considerablemente, al ser el régimen caótico muy exigente para los algoritmos de integración numérica. Un ejemplo de este proceso inverso se puede ver en la figura 4.11, siendo necesaria la escala logarítmica para abarcar el diagrama entero.

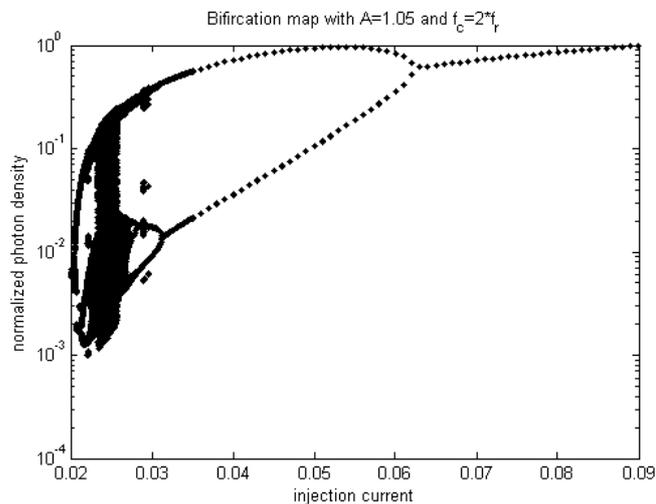


Figura 4.11: Ruta inversa variando la corriente

En algunos intervalos de los diagramas, como ocurre en el ejemplo de la figura 4.10b en torno a los  $21,34mA$ , el diagrama parece saltar a otra solución durante un breve intervalo de valores del parámetro de bifurcación. Es el caso del mapa 4.4b en el que

el salto que tiene lugar en torno a  $A = 1,065$  se representa más en detalle en la figura 4.12a. Aquí el diagrama salta de un periodo 4 a un periodo 6, para después bifurcar a un periodo 12 antes de volver al periodo 4. La dinámica del periodo séxtuple se muestra en la figura 4.12b. Estos saltos no son artefactos del algoritmo de integración

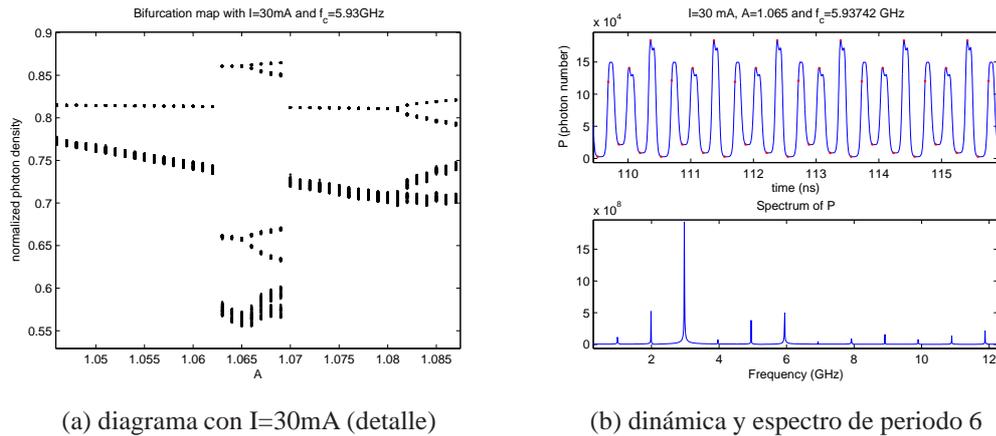


Figura 4.12: Salto a periodo 6

ya que no desaparecen al cambiar éste, o sus parámetros (tolerancia, paso, orden), y podrían estar relacionados con los saltos a soluciones de periodo triple detectados en modulación directa de la corriente de inyección<sup>5</sup>.

Fijando tanto el índice de modulación como la corriente de inyección (y con ella la frecuencia de relajación) y variando la frecuencia de la modulación obtenemos un tercer tipo de diagramas de los cuales se dan dos ejemplos en la figura 4.13.

Se puede observar como el rango de frecuencias que dan lugar a las no linealidades no está, como cabría esperar, centrado en la frecuencia que correspondería al doble de la frecuencia de relajación de la ecuación 4.5, cuyo valor sería en la figura 4.13a  $f_c = 4,194GHz$  y en la figura 4.13b  $f_c = 5,931GHz$ . En ambos casos esta franja caótica se encuentra algo desplazada, lo cual indica que la frecuencia intrínseca es en realidad diferente de la que hemos calculado con la ecuación 4.5. En efecto, no hemos tenido en cuenta la perturbación incluida en la ecuación de tasa de los fotones, la cual altera la frecuencia propia, que se obtendría realizando un análisis en pequeña señal de las ecuaciones 4.1 y 4.3.

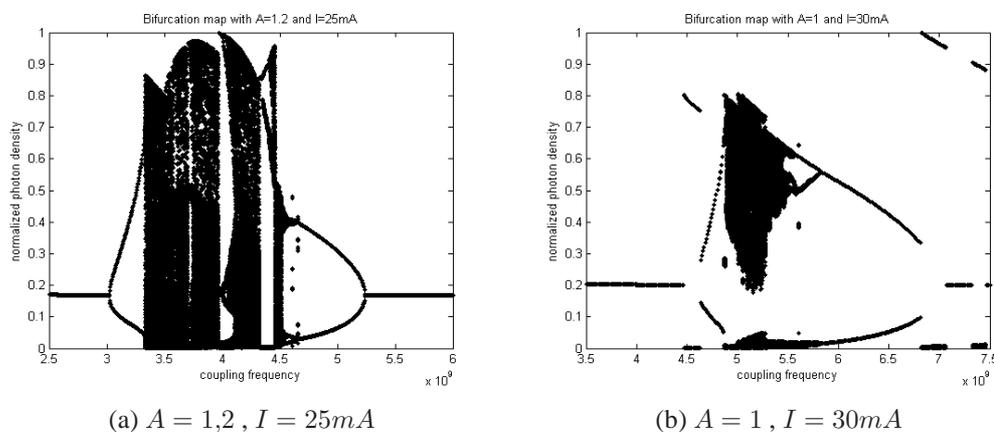


Figura 4.13: Mapa de bifurcaciones variando la frecuencia de modulación

De hecho, se puede apreciar igualmente esta desviación de la frecuencia de relajación respecto del valor calculado comparando los diagramas 4.14a y 4.14b en los que la aparición del régimen caótico se ve favorecida por una frecuencia de modulación inferior (en este caso 1.9 veces) al doble de la frecuencia calculada de relajación respecto al doble exacto. Este cambio en la frecuencia de relajación de los emisores

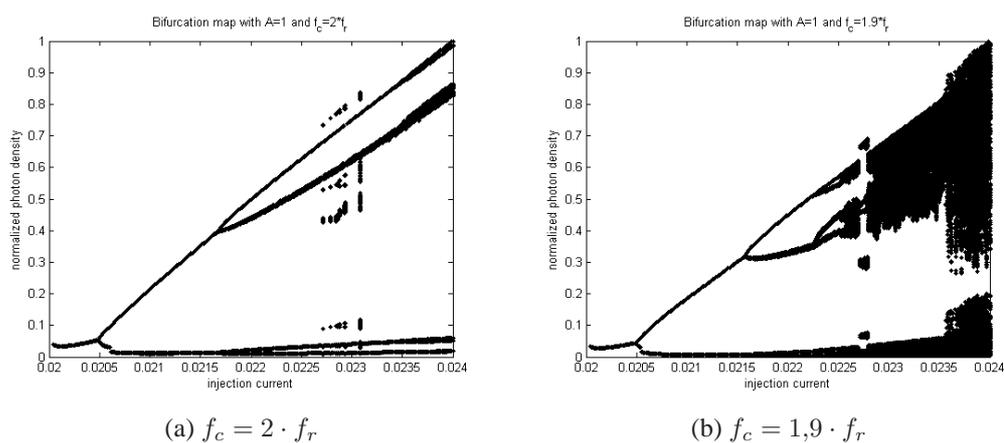


Figura 4.14: Efecto de la relación de frecuencias

acoplados respecto a la que caracterizaría un emisor aislado es además coherente con las observaciones experimentales<sup>31</sup> en las que esta desviación se cuantifica en términos del factor de acoplo, lo cual refuerza las bases fenomenológicas del modelo empleado.

## 4.5. Aplicación a los LCDL

En el caso práctico de un dispositivo LCDL como el de la figura 4.1, el único de estos parámetros que es controlable externamente es la corriente de inyección, ya que la configuración geométrica no se puede cambiar. Por ello fijamos la frecuencia de la modulación, así como el índice de modulación, que simbolizan el acoplo. El tipo de ruta al caos es, como era de esperar, el mismo que en los casos teóricos presentados en la sección anterior, con sucesivos doblamientos del periodo, cuya secuencia es interrumpida a veces con saltos a otros atractores.

En primer lugar, al igual que cuando adaptábamos la frecuencia al doble de la frecuencia de relajación calculada, se puede observar comparando las figuras 4.15a y 4.15b que si el índice de modulación (la fuerza del acoplo) es demasiado bajo no se llega al caos.

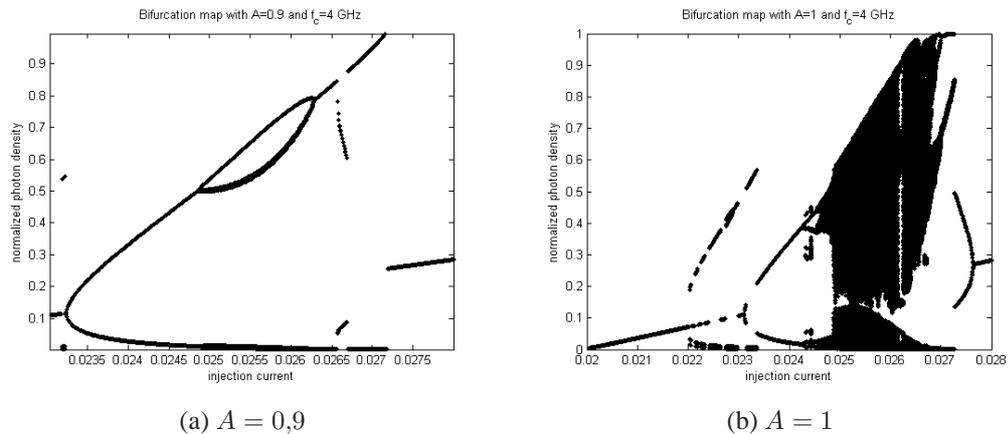


Figura 4.15: Mapa de bifurcaciones fijando  $f_c = 4GHz$

Por otra parte, el aumento de la frecuencia del acoplo provoca un desplazamiento del mapa de bifurcaciones hacia la derecha (corrientes más altas), lo cual se explica por el aumento consiguiente de la frecuencia de relajación, y por tanto de la corriente necesaria para alcanzar la relación de frecuencias más propensa a las no linealidades. Esto se puede apreciar comparando los mapas de las figuras 4.16a y 4.16b, en los que se mantiene un índice de modulación  $A = 1,1$  y la frecuencia de acoplo toma los valores  $f_c = 5GHz$  y  $f_c = 6GHz$  respectivamente.

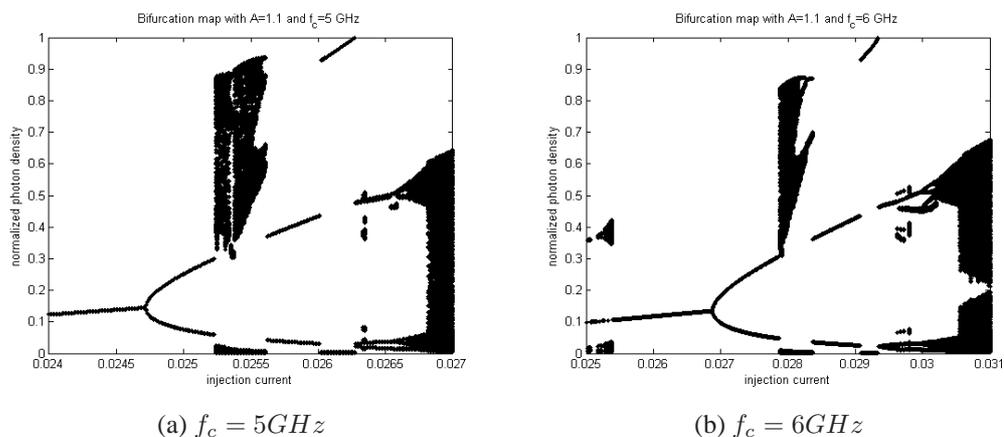


Figura 4.16: Mapa de bifurcaciones con  $A = 1,1$  para dos frecuencias fijas diferentes

En los dos mapas de las figuras 4.16a y 4.16b se observa cómo entorno a los  $25,4mA$  y  $28,1mA$  respectivamente hay un salto a otro atractor caótico, así como un salto a un periodo triple entorno a los  $26,2mA$  y  $29,2mA$  respectivamente. Estos saltos se vuelven más dramáticos a medida que aumenta el índice de modulación, recordando a los saltos de fase del modelo Winful/Wilson en la zona inestable, cuando el acoplo era demasiado fuerte. Esto se pone de manifiesto en el diagrama de la figura 4.17, en el que el aumento del índice de modulación a  $A = 1,2$  hace el diagrama mucho más complejo que el que se mostraba en la figura 4.16a, si bien en una escala parecida.

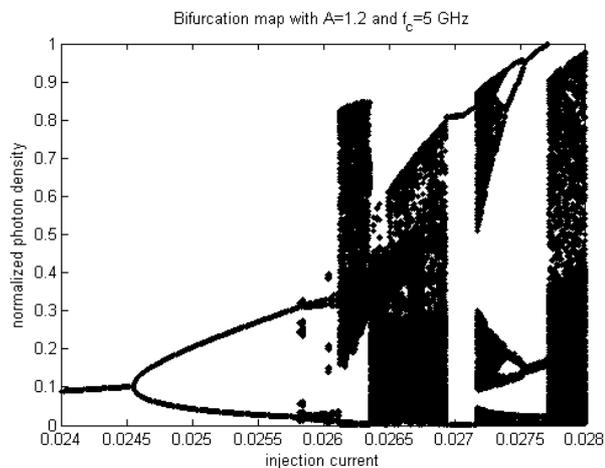


Figura 4.17: Saltos a otros atractores en el mapa de bifurcaciones

Estos mapas, obtenidos a partir del modelo fenomenológico, se corresponden con la dinámica observada en los experimentos<sup>11</sup>, en los que se identifican regímenes de periodo doble y cuádruple así como caóticos, cuya distribución según las condiciones de polarización se representa en el mapa de la figura 4.18. Así, un diagrama de bifur-

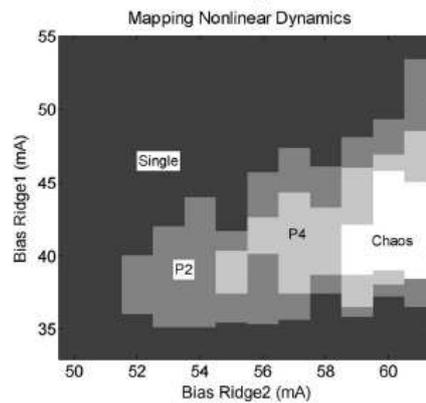


Figura 4.18: Mapa de regímenes no-lineales en LCDL<sup>11</sup>

cación como el de la figura 4.15b correspondería pues a un corte en este mapa que pasara por el periodo simple, el periodo doble, cuádruple y finalmente el caos. Por el contrario, un diagrama como el de la figura 4.15a equivaldría a un corte vertical que sólo permitiera la secuencia periodo simple  $\rightarrow$  periodo doble  $\rightarrow$  periodo cuádruple  $\rightarrow$  periodo doble  $\rightarrow$  periodo simple, sin pasar por el régimen caótico, al no ser suficiente para ello la fuerza del acoplo.

En realidad, como se mostraba en la figura 4.2b, la frecuencia de batido entre los modos laterales del array no es constante en el intervalo de locking, aunque varía poco, por lo que no se debería considerar  $f_c$  como fija y los mapas de bifurcaciones reales tenderían más a parecerse al de la figura 4.10b, en el que la frecuencia de modulación seguía manteniendo una relación constante respecto a la de relajación, que al diagrama de la figura 4.17.

El modelo fenomenológico confirma por tanto la ruta al caos por periodo doble, y, aunque de forma cualitativa y con muchas aproximaciones, coincide con los resultados experimentales que algunos desarrollos teóricos mucho más complejos<sup>12</sup> no permitían explicar. Además, la observación de saltos a otros atractores y de la ruptura de la secuencia por periodos triples se corresponde con lo observado en otros fenómenos caóticos en láseres de semiconductor<sup>6</sup>.



# Capítulo 5

## Conclusiones y futuras líneas de trabajo

### 5.1. Conclusiones

Este proyecto fin de carrera comenzaba con una introducción teórica a los fundamentos del láser semiconductor. Tras revisar su origen histórico, los conceptos básicos sobre el medio semiconductor y la estructura y los principios de funcionamiento del diodo láser, se procedió a la caracterización matemática del láser. Para ello se ha empleado un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias conocido como ecuaciones de tasa, que permite de forma sencilla establecer el umbral de emisión del láser, sus curvas características, su respuesta en frecuencia así como su funcionamiento estático y dinámico.

El estudio de la dinámica del láser ha servido así mismo como introducción a los sistemas dinámicos complejos y en particular a los sistemas no lineales. El concepto de caos determinístico ha sido igualmente introducido como un campo de conocimiento clave para el entendimiento de la dinámica del láser, como lo es de otros muchos sistemas físicos. Se han presentado también los dispositivos de arrays de diodos láser acoplados lateralmente como solución a la limitación en la banda de transmisión presentada por los diodos láser, pero también como problema de cara a su estabilidad y funcionamiento no lineal, potencialmente caótico. Hemos visto cómo se puede superar

el límite de la frecuencia de relajación del láser para transmisión de datos aprovechando el acoplo en lateral-mode-locking en un array LCDL.

Se ha analizado a continuación un modelo clásico para acoplos débiles como es el modelo Winful/Wilson. Tras presentar rápidamente su planteamiento teórico y sus principales resultados se ha constatado su acertada previsión del uso del modo en contrafase del array LCDL para modular la corriente por encima de la frecuencia de relajación, hecho que se ha verificado experimentalmente. Sin embargo también han sido puestas de manifiesto algunas lagunas en el tratamiento de los límites del funcionamiento lineal y de la aparición de las no linealidades en estos dispositivos bajo determinadas condiciones. En particular, la ausencia en las simulaciones de este modelo de los periodos dobles y cuádruples observados en los experimentos ha motivado la elaboración de otro modelo más sencillo, de tipo fenomenológico, específicamente diseñado para el estudio de las no linealidades en este tipo de dispositivos.

De esta forma, el modelo fenomenológico, tras una rápida justificación de sus premisas, ha permitido simular diversos comportamientos no lineales detectados en la dinámica de los arrays LCDL. El uso de los diagramas de bifurcación, cuya teoría ha sido brevemente presentada, ha permitido, variando sucesivamente los diversos parámetros del sistema (índice y frecuencia de acoplo, corriente de inyección), la visualización de las conocidas rutas al caos por doblamientos sucesivos del periodo. Además de estas secuencias de Feigenbaum, se han detectado fenómenos como los saltos a diferentes atractores o la aparición de periodos triples cuya interpretación no ha podido sino ser esbozada, quedando su explicación rigurosa para trabajos futuros. La aplicación del modelo simplificado ha permitido pues una mejor comprensión de las no linealidades observadas en los experimentos, uno de cuyos principales desencadenantes resulta ser la relación entre la frecuencia de relajación y la frecuencia de la interacción entre los modos laterales del array en locking.

El análisis detallado y la simulación de estos dos modelos, en el marco de las líneas de investigación del grupo de optoelectrónica y tecnología láser, ha ejercido además para mí de puerta de entrada al ámbito de los sistemas complejos no lineales. Este apasionante campo de conocimiento, transversal a muchas disciplinas ingenierísticas y científicas por la omnipresencia de los sistemas caóticos en la naturaleza, se encuentra escasamente abordado en la carrera que con este proyecto finalizo. El propio concepto de no linealidad suele aparecer con fuertes connotaciones negativas: surge cuando los sistemas dejan de funcionar. De hecho, en el primer modelo abordado en este proyecto

así ocurría. A pesar de su dificultad inherente, el estudio de la dinámica no lineal y del sorprendentemente universal fenómeno del caos determinístico han resultado por ello enormemente interesantes y enriquecedores.

## 5.2. Futuras líneas de trabajo

Como principal línea de trabajo futuro queda abierta la elaboración de un modelo que permita explicar las observaciones experimentales en cuanto a la dinámica no lineal de arrays LCDL de una forma más rigurosa, tomando como base los modelos teóricos de la literatura e incorporando las ideas extraídas del modelo fenomenológico del presente proyecto. La investigación del caos en láseres de semiconductor es útil no sólo para un mejor entendimiento de la propia dinámica caótica, aún imperfectamente comprendida, sino también con visos a aplicaciones prácticas basadas en la emisión de señales caóticas.

Éstas tienen su fundamento principal en la técnica de sincronización caótica<sup>38</sup> que permite sincronizar un receptor a una señal caótica emitida por un transmisor remoto. Sorprendentemente, aunque dos dispositivos nunca pueden mostrar de forma independiente la misma salida caótica por causa de la sensibilidad a las condiciones iniciales, la sincronización exacta es posible estableciendo una comunicación si los dos dispositivos son idénticos, e incluso con pequeñas diferencias en sus parámetros. De esta forma señales determinísticas pueden reemplazar y mejorar el papel de señales pseudo-aleatorias o pseudo-ruidosas por sus propiedades de ancho de banda e incorrelación.

Las comunicaciones caóticas encuentran así aplicación en campos como la encriptación analógica de datos<sup>8</sup>, la multiplexación por división en código (CDMA) y las comunicaciones de espectro ensanchado<sup>39</sup>, o los radares caóticos<sup>40</sup>. Con vistas a estas aplicaciones es particularmente interesante el estudio del caos en láseres de semiconductor ya que éstos son fundamentales en la transmisión de datos de alta velocidad y en banda ancha, al constituir las fuentes de la comunicación por fibra óptica. La sincronización remota de señales caóticas ha sido de hecho experimentada con varios tipos de láseres, entre ellos los diodos láser<sup>41</sup>, aunque queda aún por probar la fiabilidad y seguridad de estas técnicas<sup>8</sup>.

Sin embargo no se han utilizado hasta ahora a este propósito dispositivos como los arrays laterales descritos en este proyecto, que por sus posibilidades de transmisión a velocidad mayor que el habitual límite impuesto por la frecuencia de relajación podrían tener aplicaciones interesantes en el campo de las comunicaciones caóticas.

# Apéndice A

## Código MATLAB

### A.1. Modelo Wilson

#### A.1.1. Coeficientes de acoplo

```
% Coupling coefficients
%
% This function calculates the complex coupling constant for a given
% emitters separation.
%
% Parameters:
%   sep: The separation between emitters in micrometers
% Return values:
%   etaR: Real part of the coupling constant
%   etaI: Imaginary part of the coupling constant
%
% Note: the references starting with A are from the Agrawal book, the ones
% starting with W are from the Wilson thesis.
function [etaR,etaI]=coupl_coefs(sep)

global W;
global w;
global s;
format long;

%guides (effective) index of refraction
mu_act=3.4;
%lateral clads refraction index step
dmuL=3e-3;
%lateral clads index of refraction
mu_L=mu_act-dmuL;
%emission wavelength
lambda=1.3e-6;
%vacuum speed of light
c=3e8;
%emission angular frequency
w0=2*pi*c/lambda;
```

```

%guide length
L=300e-6;
%guide height
h=0.2e-6;
%guide width
w=3e-6;
%guides separation
sep=sep*1e-6;
%guides center-to-center separation
s=w+sep;
%photon lifetime
tau_p=1.5e-12;
%carrier lifetime
tau_s=2.4e-9;
%lifetimes ratio
T=tau_s/tau_p;

%maximum width for single lateral mode A2.5.45
w_lim=(lambda/2)/sqrt(mu_act^2-mu_L^2);
if w>w_lim
    sprintf('Warning: more than one lateral mode')
end

%normalized waveguide width A2.5.43, coherent with W4.5.16
W=2*pi*w*sqrt(mu_act^2-mu_L^2)/lambda;
%lateral confinement factor approximation A2.5.46
gamma_L=W^2/(2+W^2);

%kap0,kapp and kapn are the lateral propagation factors in the guiding layers
kap0=[];kapp=[];kapn=[];
%gam0,gamp and gamn are the lateral decay factors in the cladding layers
gam0=[];gamp=[];gamn=[];
%all of them normalized to w/2 (e.g. kap0=k0*w/2)
options = optimset('MaxFunEvals',10000,'MaxIter',1000,'TolFun',1e-20,'TolX',1e-20);

%We solve W4.5.21 to find kap0, then gam0 is given by W4.5.20
[kap0,resnorm,residual,exitflag] = lsqnonlin(@kap0_eq,pi/4,0,pi/2,options);
gam0=kap0*tan(kap0);
%We solve W4.5.17 to find kapp, then gamp is given by W4.5.16
[kapp,resnorm,residual,exitflag] = lsqnonlin(@kapp_eq,kap0,0,kap0,options);
gamp=sqrt((W/2)^2-kapp^2);
%We solve W4.5.18 to find kapn, then gamn is given by W4.5.16
[kapn,resnorm,residual,exitflag] = lsqnonlin(@kapn_eq
,2*kap0-kapp,kap0,2*kap0,options);
gamn=sqrt((W/2)^2-kapn^2);

%K factor encompasses vertical and longitudinal propagation factors
K=sqrt((w0*mu_act/c)^2-(2*kap0/w)^2);

%modal eigenfrequencies wp and wn from W4.5.19
wp=(c/mu_act)*sqrt(K^2+(2*kapp/w)^2);
fp=wp/(2*pi);
wn=(c/mu_act)*sqrt(K^2+(2*kapn/w)^2);
fn=wn/(2*pi);

%K should fulfill 4.5.4 also ... (why?)
if K<=(max([w0 wp wn])*mu_L/c)
    sprintf('Warning: more than two array modes')
end

% Exact confinement factor for the isolated stripe (from W4.5.27)
conf0=((sin(kap0))^2+gam0)/(1+gam0);

% Constants for even array mode.
Hp=kapp/cosh(gamp*(s/w-1));%W4.5.10

```

```

Cp=gamp*tanh(gamp*(s/w-1))*sin(kapp)+kapp*cos(kapp);%W4.5.11
Sp=gamp*tanh(gamp*(s/w-1))*cos(kapp)-kapp*sin(kapp);%W4.5.13
Dp=Cp*cos(kapp)+Sp*sin(kapp);%W4.5.15
% Calculate even array mode inner product W4.5.25
Ip(1)=Dp^2/gamp;
Ip(2)=Cp^2*(2+sin(2*kapp)/kapp);
Ip(3)=Sp^2*(2-sin(2*kapp)/kapp);
Ip(4)=Hp^2*((sinh(2*gamp*(s/w-1)))/(2*gamp)+(s/w-1));
Ipp=sum(Ip);

% Confinement factor for the even array mode (from W4.5.25)
confp=(Ip(2)+Ip(3))/Ipp;

% Constants for odd array mode.
Hn=kapn/cosh(gamn*(s/w-1));%W4.5.10
Cn=gamn*sin(kapn)+kapn*tanh(gamn*(s/w-1))*cos(kapn);%W4.5.12
Sn=gamn*cos(kapn)-kapn*tanh(gamn*(s/w-1))*sin(kapn);%W4.5.14
Dn=Cn*cos(kapn)+Sn*sin(kapn);%W4.5.15
% Calculate odd array mode inner product W4.5.25
In(1)=Dn^2/gamn;
In(2)=Cn^2*(2+sin(2*kapn)/kapn);
In(3)=Sn^2*(2-sin(2*kapn)/kapn);
In(4)=Hn^2*((sinh(2*gamn*(s/w-1)))/(2*gamn)-(s/w-1));
Inn=sum(In);

% Confinement factor for the odd array mode (from W4.5.25)
confn=(In(2)+In(3))/Inn;

%Coupling constant:
etaR=0.5*tau_p*(wn-wp);
etaI=0.5*(confn-confp)/conf0;

% lateral propagation factor of the isolated emitter
function F=kap0_eq(x)

global W;

kap0=x;
F=kap0-W*cos(kap0)/2;%from W4.5.21

% lateral propagation factor of the even (in-phase) array mode
function F=kapp_eq(x)

global W;
global w;
global s;

kapp=x;
gamp=sqrt((W/2)^2-kapp^2);%from W4.5.16
F=tan(2*kapp)-kapp*gamp*(1+tanh(gamp*(s/w-1)))/(kapp^2-
gamp^2*tanh(gamp*(s/w-1)));%from W4.5.17

% lateral propagation factor of the odd (out-of-phase) array mode
function F=kapn_eq(x)

global W;
global w;
global s;

```

```
kapn=x;  
gamn=sqrt((W/2)^2-kapn^2);%from W4.5.16  
F=tan(2*kapn)-kapn*gamn*(1+tanh(gamn*(s/w-1)))/  
(kapn^2*tanh(gamn*(s/w-1))-gamn^2);%from W4.5.18
```

## A.1.2. Curva de estabilidad

```

% Winful model linear stability
%
% This function finds and plots the stability boundaries and regions
% in the complex-eta plane.
%
% The twin-emitter laser is characterized by the parameters alpha
% (linewidth enhancement factor) and T (ratio carrier lifetime to photon
% lifetime)
%
% The operating point is given by the fixed normalized pumping p.
%
function stability(p,etaR,etaI,alpha)

format long;

%lifetimes ratio (tau_s/tau_p):
T=1600;

eta_I=sign(etaI)*logspace(0,-5,1000);

%Intersection cusp between in-phase and out-of-phase: given by the first
%Hurwitz condition (A1=0), from 4.4.31
HI=(1-sqrt(1+(2+4*p)/T))/4;
%This I don't understand:
if (HI < -p)
    HI=-p;
end

inphase=[];
outofphase=[];
outofphase_neg=[];
instfreqs=[];

%Loop over range of eta_I
for(k=1:length(eta_I))

    %in-phase mode: satisfies third Hurwitz condition (A3=0)    4.4.33
    if etaI<0
        theta=0;
        %Optical power:
        X2=(p-eta_I(k)*cos(theta))/(1+2*eta_I(k)*cos(theta));    %4.4.22
        %Coefficients of quadratic equation in eta_R: A*eta_R^2+B*eta_R+C=0
        A=(8*X2+4)/T;
        B=-4*alpha*(2*eta_I(k)+cos(theta))*X2/T;
        C=-(4*eta_I(k)*cos(theta)*X2-4*eta_I(k)^2)/T;
        %Solve the quadratic equation:
        eta_R=roots([A B C]);
        for m=1:2
            if isreal(eta_R(m)) && eta_R(m)>1e-8 && eta_R(m)<10
                inphase=[inphase (eta_R(m)+i*eta_I(k))];
            end
        end
    end

    %out-of-phase mode: satisfies second Hurwitz condition (A1*A2-A3=0)    4.4.34
    if etaI>0
        theta=pi;
        %Optical power:
        X2=(p-eta_I(k)*cos(theta))/(1+2*eta_I(k)*cos(theta));%4.4.22
        %Coefficients of quadratic equation in eta_R: A*eta_R^2+B*eta_R+C=0
        A=-16*eta_I(k)*cos(theta);
        B=4*alpha*(2*eta_I(k)+cos(theta))*X2/T;

```

```

C=-((8*eta_I(k)*cos(theta)-4)*X2^2+(4*T*eta_I(k)*cos(theta)
-24*T*eta_I(k)^2+12*eta_I(k)*cos(theta)-2)*X2
+16*T^2*eta_I(k)^3*cos(theta)-16*T*eta_I(k)^2
+4*eta_I(k)*cos(theta))/T^2;
%Solve the quadratic equation:
eta_R=roots([A B C]);
for m=1:2
    if isreal(eta_R(m)) && eta_R(m)>1e-8 && eta_R(m)<10
        outofphase=[outofphase (eta_R(m)+i*eta_I(k))];
        %Angular frequency of incipient instability,
        normalized to photon lifetime:
        w=sqrt(4*eta_R(m)^2+4*eta_I(k)^2+4*eta_I(k)/T+(4*eta_I(k)+2)*X2/T);
        instfreqs=[instfreqs;w eta_R(m)];
    end
end
end

%out-of-phase mode with negative eta_I:
if etaI<0 && eta_I(k)>= HI
    theta=0;%for optical power calculation
    %Optical power:
    X2=(p-eta_I(k)*cos(theta))/(1+2*eta_I(k)*cos(theta));%4.4.22
    theta=pi;%for second Hurwitz condition resolution
    %Coefficients of quadratic equation in eta_R: A*eta_R^2+B*eta_R+C=0
    A=-16*eta_I(k)*cos(theta);
    B=4*alpha*(2*eta_I(k)+cos(theta))*X2/T;
    C=-((8*eta_I(k)*cos(theta)-4)*X2^2+(4*T*eta_I(k)*cos(theta)
-24*T*eta_I(k)^2+12*eta_I(k)*cos(theta)-2)*X2
+16*T^2*eta_I(k)^3*cos(theta)-16*T*eta_I(k)^2
+4*eta_I(k)*cos(theta))/T^2;
%Solve the quadratic equation:
eta_R=roots([A B C]);
for m=1:2
    if isreal(eta_R(m)) && eta_R(m)>1e-8 && eta_R(m)<10
        outofphase_neg=[outofphase_neg (eta_R(m)+i*eta_I(k))];
        %Angular frequency of incipient instability,
        normalized to photon lifetime:
        w=sqrt(4*eta_R(m)^2+4*eta_I(k)^2+4*eta_I(k)/T+(4*eta_I(k)+2)*X2/T);
        instfreqs=[instfreqs;w eta_R(m)];
    end
end
end
end

if etaI<0
    %sort the inphase array in ascendent order
    [useless,ord]=sort(real(inphase),'ascend');
    inphase=inphase(ord);
    loglog(real(inphase),imag(inphase),'b');
    hold on;
    %sort the outofphase_neg array in ascendent order
    [useless,ord]=sort(real(outofphase_neg),'ascend');
    outofphase_neg=outofphase_neg(ord);
    loglog(real(outofphase_neg),imag(outofphase_neg),'r');
    % title('complex eta semi-plane with eta_I < 0');
    legend('inphase mode stability boundary','out-of-phase mode stability boundary');
    xlabel('coupling coefficient (real part)');
    ylabel('coupling coefficient (imaginary part)');
end

if etaI>0
    %sort the outofphase array in ascendent order
    [useless,ord]=sort(real(outofphase),'ascend');
    outofphase=outofphase(ord);
    loglog(real(outofphase),imag(outofphase),'r');

```

```
    hold on;
    % title('complex eta semi-plane with eta_I > 0');
    legend('out-of-phase mode stability boundary');
    xlabel('coupling coefficient (real part)');
    ylabel('coupling coefficient (imaginary part)');
end

loglog(etaR,etaI,'xb');
hold off;

%out-of-phase stability frontier frequencies:
% [useless,ord]=sort(instfreqs(:,2),'ascend');
% instfreqs=instfreqs(ord,:);
% figure,loglog(instfreqs(:,2),instfreqs(:,1));
% title('frequency of the onset of instability');
% xlabel('coupling coefficient (real part)');
% ylabel('angular frequency normalized to the photon lifetime');
```

### A.1.3. Dinámica

```

% Wilson model twin-emitter dynamics:
%
% This function calculates and plots the dynamics of the twin-emitter with
% or without current modulation.
%
% Parameters:
%   curr: Normalized current injected to both emitters
%   fm: Frequency of modulation (positive for in-phase modulation,
%       negative for out-of-phase or zero for no modulation)
%   etaR and etaI: Real and imaginary parts of the complex coupling
%                 constant, as returned by the 'coupl_coefs' function
%   lef: Linewidth enhancement factor (usually set to 7.5)
%   perm: set to '0' to obtain only the transient (first 20ns),
%         set to '1' for the permanent regime
% Return values:
%   f_relax: Relaxation frequency
%   f_inst: Frequency of incipient instability
%   f_res: Frequency of out-of-phase resonance (in linear regime)
%   f_peak: Dominant frequency of the output spectrum
%
function [f_relax,f_inst,f_res,f_peak]=dynamics(curr,fm,etaR,etaI,lef,perm)

global eta_R;
global eta_I;
global alpha;
global tau_s;
global tau_p;
global p;
global rhop;
global z0;
global pmod;
global fmod;

eta_R=etaR;
eta_I=etaI;
p=curr;
alpha=lef;
pmod=abs(sign(fm))*1e-3*p;%small signal modulation
fmod=fm;

% Carrier lifetime
tau_s=2.4e-9;
% Photon lifetime
tau_p=1.5e-12;
%Ratio
T=tau_s/tau_p;
%spontaneous emission factor
beta=1.6e-4;
%cold-cavity normalized loss
z0=0.939;

%initial conditions:
eql=0;
theta=eql*pi;
rhop=0.5*beta;
offset=1e-6;
aa=1-2*rhop;
bb=p*eql*eta_I+(1+2*z0)*rhop;
cc=p*eql*eta_I-z0*rhop;
Z0=(bb-sqrt(bb^2-4*aa*cc))/(2*aa);
X0=sqrt((p-Z0+2*(z0+Z0)*rhop)/(1+2*eql*eta_I));
theta0=pi*(eql+offset);

```

```

y0=[X0 X0 theta0 Z0 Z0];

%time interval: 80 ns
tspan=[0 80e-9];

%solver options:
options=odeset('MaxStep',1e-12,'RelTol',1e-12,'BDF','on',
'Jacobian',@jacobian,'stats','on');

%solver (backward differentiation formulas)
[t,Y] = ode15s(@diff_eq,tspan,y0,options);

y1=Y(:,1).^2;
y2=Y(:,2).^2;
y3=Y(:,3);
y4=Y(:,4);
y5=Y(:,5);

figure;
if perm==0
    aux1=find(t>20e-9);
    t1=t(1:aux1(1));
    y11=y1(1:aux1(1));
    y21=y2(1:aux1(1));
    subplot(211);
    plot(t1./1e-9,y11);
    hold on;
    plot(t1./1e-9,y21,'r');
    hold off;
else
    aux2=find(t<40e-9);
    aux3=find(t>41e-9);
    t2=t(aux2(end):end);
    y12=y1(aux2(end):end);
    y22=y2(aux2(end):end);
    subplot(211);
    plot(t./1e-9,y1);
    hold on;
    plot(t./1e-9,y2,'r');
    hold off;
end
legend('Emitter 1 output','Emitter 2 output');
xlabel('time (ns)');
ylabel('Optical Field Power');

if perm==0
    t_mean1=mean(diff(t1));
    t_eq1=0:t_mean1:t1(end);
    y1_int1 = interp1(t1,y11,t_eq1);
    y1_int1=y1_int1-mean(y1_int1);%remove DC
    %high-pass filter (uncomment if necessary)
    %b=fir1(100,.003,'high');
    %y1_int=filter(b,1,y1_int);
    fs1=1/t_mean1;%sampling freq
    f1=linspace(-fs1/2,fs1/2,length(t_eq1));%interpolation
    spectrum11=abs(fftshift(fft(y1_int1,length(f1))));
    [useless,ind_f_peak11]=max(spectrum11);
    f_peak11=abs(f1(ind_f_peak11))/1e9;
    subplot(212),plot(f1./1e9,spectrum11);
    hold on;
    y2_int1 = interp1(t1,y21,t_eq1);
    y2_int1=y2_int1-mean(y2_int1);%remove DC
    %high-pass filter (uncomment if necessary)
    %y2_int=filter(b,1,y2_int);
    spectrum21=abs(fftshift(fft(y2_int1,length(f1))));

```

```

[useless, ind_f_peak21]=max(spectrum21);
f_peak21=abs(f1(ind_f_peak21))/1e9;
plot(f1./1e9,spectrum21,'r');
hold off;
else
    t_mean2=mean(diff(t2));
    t_eq2=t2(1):t_mean2:t2(end);
    y1_int2 = interp1(t2,y12,t_eq2);
    y1_int2=y1_int2-mean(y1_int2);%remove DC
    %high-pass filter (uncomment if necessary)
    %b=fir1(100,.003,'high');
    %y1_int=filter(b,1,y1_int);
    fs2=1/t_mean2;%sampling freq
    f2=linspace(-fs2/2,fs2/2,length(t_eq2));%interpolation
    spectrum12=abs(fftshift(fft(y1_int2,length(f2))));
    [useless, ind_f_peak12]=max(spectrum12);
    f_peak12=abs(f2(ind_f_peak12))/1e9;
    subplot(212),plot(f2./1e9,spectrum12);
    hold on;
    y2_int2 = interp1(t2,y22,t_eq2);
    y2_int2=y2_int2-mean(y2_int2);%remove DC
    %high-pass filter (uncomment if necessary)
    %y2_int=filter(b,1,y2_int);
    spectrum22=abs(fftshift(fft(y2_int2,length(f2))));
    [useless, ind_f_peak22]=max(spectrum22);
    f_peak22=abs(f2(ind_f_peak22))/1e9;
    plot(f2./1e9,spectrum22,'r');
    hold off;
end
legend('X1','X2');
xlabel('frequency (GHz)');
ylabel('Emission Spectrum');

if sign(fmod)==0
    tit=sprintf('Unmodulated dynamics with p=%g',p);
else
    if sign(fmod)==1
        mode='in-phase';
    else
        mode='out-of-phase';
    end
    tit=sprintf('%s small-signal modulation with p=%g and
        f_{mod}=%g GHz',mode,p,abs(fm));
end
subplot(211),title(tit);

% Phase plot
% figure, plot(t/1e-9,y3/pi);
% title('phase difference between emitters');
% xlabel('time (ns)');
% ylabel('pi radians');

% Gain plot
% figure, plot(t/1e-9,y4);
% hold on;
% plot(t/1e-9,y5,'r');
% hold off;
% title('Emitters gain');
% xlabel('time (ns)');
% ylabel('normalized gain')

%frequency of incipient instability:
theta=pi*(1+sign(eta_I))/2;
X2=(p-eta_I*cos(theta))/(1+2*eta_I*cos(theta));
w=sqrt(4*eta_R^2+4*eta_I^2+4*eta_I/T+(4*eta_I+2)*X2/T);

```

```

f_inst=w/(tau_p*2*pi*1e9);

%resonance frequency in linear regime:
f_res=eta_R/(pi*tau_p*1e9)+p/(4*pi*tau_s*eta_R*1e9);

%relaxation frequency:
f_relax=sqrt(2*p/(tau_s*tau_p))/(2*pi*1e9);

%highest spike frequency:
if perm==1
    f_peak=max(f_peak12,f_peak22);
else
    f_peak=max(f_peak11,f_peak21);
end

%rate equations of the Wilson model
function f=diff_eq(t,y)

global eta_R;
global eta_I;
global alpha;
global tau_s;
global tau_p;
global p;
global rhop;
global z0;
global fmod;
global pmod;

f(1,1)=(y(4)*y(1)-eta_R*y(2)*sin(y(3))+rhop*(y(4)+z0)/y(1)
-eta_I*y(2)*cos(y(3)))/tau_p;
f(2,1)=(y(5)*y(2)+eta_R*y(1)*sin(y(3))+rhop*(y(5)+z0)/y(2)
-eta_I*y(1)*cos(y(3)))/tau_p;
f(3,1)=(-alpha*(y(5)-y(4))+eta_R*(y(1)/y(2)-y(2)/y(1))*cos(y(3))
+eta_I*(y(1)/y(2)+y(2)/y(1))*sin(y(3)))/tau_p;
f(4,1)=(p+pmod*cos(2*pi*abs(fmod)*t)-y(4)
-(1+2*y(4))*y(1)^2)/tau_s;
f(5,1)=(p+sign(fmod)*pmod*cos(2*pi*abs(fmod)*t)-y(5)
-(1+2*y(5))*y(2)^2)/tau_s;

%Jacobian matrix of the Wilson model
function f=jacobian(t,y)

global eta_R;
global eta_I;
global alpha;
global tau_s;
global tau_p;
global rhop;
global z0;

sn=sin(y(3));
cs=cos(y(3));

f(1,1)=(y(4)-rhop*(y(4)+z0)/y(1)^2)/tau_p;
f(1,2)=(-eta_R*sn-eta_I*cs)/tau_p;
f(1,3)=(-eta_R*y(2)*cs+eta_I*y(2)*sn)/tau_p;
f(1,4)=(y(1)+rhop/y(1))/tau_p;
f(1,5)=0;
f(2,1)=(eta_R*sn-eta_I*cs)/tau_p;
f(2,2)=(y(5)-rhop*(y(5)+z0)/y(2)^2)/tau_p;
f(2,3)=(eta_R*y(1)*cs+eta_I*y(1)*sn)/tau_p;

```

```
f(2,4)=0;
f(2,5)=(y(2)+rhop/y(2))/tau_p;
temp331=y(1)/y(2)-y(2)/y(1);
temp332=y(1)/y(2)+y(2)/y(1);
temp311=temp332/y(1);
temp312=temp331/y(1);
temp321=-temp332/y(2);
temp322=-temp331/y(2);
f(3,1)=(eta_R*cs*temp311+eta_I*sn*temp312)/tau_p;
f(3,2)=(eta_R*temp321*cs+eta_I*temp322*sn)/tau_p;
f(3,3)=(-eta_R*temp331*sn+eta_I*temp332*cs)/tau_p;
f(3,4)=alpha/tau_p;
f(3,5)=-alpha/tau_p;
f(4,1)=-2*(1+2*y(4))*y(1)/tau_s;
f(4,2)=0;
f(4,3)=0;
f(4,4)=-(1+2*y(1)^2)/tau_s;
f(4,5)=0;
f(5,1)=0;
f(5,2)=-2*(1+2*y(5))*y(2)/tau_s;
f(5,3)=0;
f(5,4)=0;
f(5,5)=-2*(1+2*y(2)^2)/tau_s;
```

### A.1.4. Respuesta en frecuencia

```

% Transfer function:
%
% This function calculates and plots the frequency response for the
% in-phase and out-of-phase small-signal modulation schemes. It marks also
% the relaxation frequency, the linear regime second resonance and the
% frequency of the onset of instability for reference.
%
% Parameters:
%   curr: the normalized continuous injection current for both emitters
%   etaR and etaI: Real and imaginary parts of the complex coupling
%   constant, as returned by the 'coupl_coefs' function
%   lef: the linewidth enhancement factor
% Returns:
%   ratio: the ratio between the second (out-of-phase mode) and first
%   (in-phase mode) resonances
%
function ratio=transfer(curr,etaR,etaI,lef)

global p;
global eta_I;
global eta_R;
global alpha;

eta_R=etaR;
eta_I=etaI;
alpha=lef;
p=curr;

Pmod=p*1e-3;
tau_p=1.5e-12;
tau_s=2.4e-9;
T=tau_s/tau_p;

theta0=0;
Z0=eta_I*cos(theta0);
X0=sqrt((p-Z0)/(1+2*Z0));

f=0:1e7:20e9;
omega=tau_p*2*pi*f;

%in-phase transfer function:
Xip=Pmod*X0./(-T*omega.^2+i*(1+2*X0^2)*omega+2*X0^2*(1+2*Z0));
Zip=Pmod*i*omega./(-T*omega.^2+i*(1+2*X0^2)*omega+2*X0^2*(1+2*Z0));
Hip=2*X0*Xip/Pmod;

%out-of-phase transfer function:
omega_prime=omega+2*i*Z0;
A=2*T*Z0+1+2*X0^2;
B=4*T*eta_R^2+2*X0^2*(1+2*Z0);
C=4*eta_R^2*(2*T*Z0+1+2*X0^2)-4*alpha*eta_R*X0^2*(1+2*Z0)*cos(theta0);
den=-T*omega_prime.^2+i*A*omega_prime+B-i*C./omega_prime;
Xoop=Pmod*X0*(1+2*i*alpha*eta_R*cos(theta0)./omega_prime)./den;
thetaoop=Pmod*2*(alpha-2*i*eta_R*cos(theta0)./omega_prime)./den;
Zoop=Pmod*i*(omega_prime-4*eta_R^2./omega_prime)./den;
Hoop=2*X0*Xoop/Pmod;

figure;
semilogx(f/1e9,20*log10(abs(Hip)));
hold on;
plot(f/1e9,20*log10(abs(Hoop)),'r');
hold off;
xlabel('Frequency (GHz)');

```

```
ylabel('|H| in dB');
title(sprintf('twin-emitter transfer functions with p=%d',p));
grid on;

f_inst=sqrt(4*eta_R^2+4*eta_I^2+4*eta_I/T+(4*eta_I+2)*X0^2/T)/(tau_p*2*pi*1e9);

f_res=eta_R/(pi*tau_p*1e9)+p/(4*pi*tau_s*eta_R*1e9);

[maxoop,index]=max(abs(Hoop));
f_oop=f(index)/1e9;

f_relax=sqrt(2*p/T)/(2*pi*tau_p*1e9);

[maxip,index]=max(abs(Hip));
f_ip=f(index)/1e9;

hold on;
stem(f_relax,20*log10(maxip),'b');
stem(f_res,20*log10(maxoop),'k');
stem(f_inst,20*log10(maxoop),'g');
hold off;
legend('in-phase','out-of-phase','f_{relax}','f_{res}','f_{inst}');

ratio=f_oop/f_ip;
```

## A.2. Modelo simplificado

### A.2.1. Dinámica

```

% Phenomenological simplified simulation model:
%
% This model simulates the coupling of the emitters through the inclusion
% of a modulation in the photon number rate equation.
%
% Parameters:
%   f_coupl: modulation (coupling) frequency or '0' for exact double ratio
%           or '1' for ratio=1.9
%   index: modulation index
%   current: injection current
%   print: flag to indicate if the time series is to be plotted ('print=1')
%          or if the output is to be used as input for the bifurcation map
%          ('print=0').
% Returns:
%   t: time series
%   P: photon number series
%   N: carrier number series
%   f_c: coupling frequency
%
function [t,P,N,f_c]=simulate(f_coupl,index,current,print)

format long;

global omega_coupl;
global gamma;
global vg;
global g0;
global V;
global Nth;
global Ps;
global G;
global A;
global tau_p;
global tau_s;
global I;
global q;
global n0;
global beta;
global B;
global gaincomp;

%modulation index
A=index;
%injection current
I=current;
%photon lifetime (sec)
tau_p=1.5e-12;
%carrier lifetime (sec)
tau_s=2.4e-9;
%electron charge (C)
q=1.60217646e-19;
%confinement factor
gamma=0.69;
%group effective index
mu_g=4;
%speed of light (m/s)
c=3e8;
%group velocity (m/s)

```

```

vg=c/mu_g;
%emitter volume (m^3)
V=(300e-6)*(3e-6)*(0.2e-6);
%spontaneous emission factor
beta=5e-5;
%threshold current (A)
Ith=20e-3;
%threshold carrier number
Nth=Ith*tau_s/q;
%carrier density at transparency (m^-3)
n0=1e24;
%linear gain constant (m^2)
g0=1/(gamma*vg*tau_p*(Nth/V-n0));
%relaxation frequency
omega_relax=sqrt(gamma*vg*g0*(I-Ith)/(q*V));
f_relax=omega_relax/(2*pi);
%gain compression factor
gaincomp=1.7e-23;
%coupling frequency
if f_coupl==1
    omega_coupl=1.9*omega_relax;
    f_coupl=1.9*f_relax;
else if f_coupl==0
    omega_coupl=2*omega_relax;
    f_coupl=2*f_relax;
else
    omega_coupl=2*pi*f_coupl;
end
end
%initial conditions: transparency
G=0;
y0=[0 n0*V];

%time span
tf=200e-9;
tspan=[0 tf];

%steady-state values:
% P0=gamma*tau_p*(I-Ith)/q
% N0=Nth+gaincomp*P0/(gamma*g0*vg*tau_p)

%variable order Adams-Bashforth-Moulton PECE solver (quickest)
options=odeset('RelTol',1e-12);
[t,Y] = ode113(@rate_eqs,tspan,y0,options);

if print
    figure,subplot(211),plot(t./1e-9,Y(:,1));
    half=round(length(t)/2);
    p=Y(half:end,1);
    thalf=t(half:end);
    [c,i_max]=max(p(1:round(length(thalf)/10)));
    ts=thalf(i_max);
    i=i_max;
    pointsP=[];
    T=1/f_coupl;
    while ts < thalf(end)
        pointsP=[pointsP; thalf(i) p(i)];
        ts=ts+T;
        aux=find(thalf>ts);
        if length(aux)
            i=aux(1);
        else
            break;
        end
    end
end
end

```

```

hold on; plot(pointsP(:,1)./1e-9,pointsP(:,2),'r');hold off;
title(sprintf('I=%g mA, A=%g and f_c=%g GHz',I*1e3,A,f_coupl/1e9));
xlabel('time (ns)');
ylabel('P (photon number)');

t_mean=mean(diff(t));
entero=length(Y(:,1));
mitad=round(entero/2);
t_eq=t(mitad):t_mean:t(end);

y1_int = interp1(t(mitad:end),Y(mitad:end,1),t_eq);
y1_int=y1_int-mean(y1_int);%remove DC
%high-pass filter (uncomment if necessary)
%b=fir1(100,.003,'high');
%y1_int=filter(b,1,y1_int);
fs=1/t_mean;%sampling freq
f=linspace(-fs/2,fs/2,length(t_eq));%interpolation
spectrum1=abs(fftshift(fft(y1_int,length(f))));
subplot(212);
sp=spectrum1;
f_sp=f./1e9;
if fs>12*f_coupl
    f_short=f(round(length(f)*( .5-6*f_coupl/fs))):
        round(length(f)*( .5+6*f_coupl/fs)));
    spectrum_short=spectrum1(round(length(f)*( .5-6*f_coupl/fs)):
        round(length(f)*( .5+6*f_coupl/fs)));
    plot(f_short./1e9,spectrum_short);
    sp=spectrum_short;
    f_sp=f_short./1e9;
else
    plot(f./1e9,spectrum1);
end

title(sprintf('Spectrum of P'));
xlabel('Frequency (GHz)');

figure,subplot(211),plot(t./1e-9,Y(:,2));
hold on;subplot(211);
plot(t./1e-9,Nth*ones(1,length(t)),'r');hold off;%threshold line
title(sprintf('I=%g mA, A=%g and f_c=%g',I*1e3,A,f_coupl/1e9));
xlabel('time (ns)');
ylabel('N (carrier number)');
y2_int = interp1(t(mitad:end),Y(mitad:end,2),t_eq);
y2_int=y2_int-mean(y2_int);%remove DC
%high-pass filter (uncomment if necessary)
%y2_int=filter(b,1,y2_int);
spectrum2=abs(fftshift(fft(y2_int,length(f))));
subplot(212);
if fs>12*f_coupl
    spectrum_short2=spectrum2(round(length(f)*( .5-6*f_coupl/fs)):
        round(length(f)*( .5+6*f_coupl/fs)));
    plot(f_short./1e9,spectrum_short2);
else
    plot(f./1e9,spectrum2);
end
title(sprintf('Spectrum of N'));
xlabel('Frequency (GHz)');
end

%Returned series:
P=Y(:,1);
N=Y(:,2);
f_c=f_coupl;

```

```
%Phenomenological model rate equations
function f=rate_eqs(t,y)

global omega_coupl;
global gamma;
global vg;
global g0;
global V;
global Nth;
global Pth;
global G;
global A;
global tau_p;
global tau_s;
global I;
global q;
global n0;
global beta;
global B;
global gaincomp;

%photon number
P=y(1);
%carrier number
N=y(2);

%Gain
G=gamma*vg*g0*(N/V-n0)/(1+gaincomp*P/V);

%dP/dt
f(1,1)=(G-1/tau_p)*P*(1+A*cos(omega_coupl*t))+gamma*beta*N/tau_s;
%dN/dt
f(2,1)=I/q-N/tau_s-G*P/gamma;
```

## A.2.2. Mapa de bifurcaciones

```

% Bifurcation map
%
% This function calculates and plots the bifurcation map. The bifurcation
% parameter can be either the modulation index or the injection current or
% the coupling frequency (whichever is passed as a vector, the other being
% then a scalar).
%
% Parameters:
%   A: The coupling modulation indices (vector or scalar)
%   fc: The coupling modulation frequency in GHz
%   I: The injection currents (vector or scalar)
% Returned matrix:
%   points: The points of the bifurcation map
function points=bifurcate(A,fc,I)

points=[];
%phase_points=[];
max_p=0;
%bifurcation parameter iteration (one of the three):
for j=1:length(A)
for k=1:length(I)
for f=1:length(fc)
[t,p,n,f_c]=simulate(fc(f),A(j),I(k),0);
T=1/(f_c);
half=round(length(t)/2);
p=p(half:end);
n=n(half:end);
t=t(half:end);
[c,i]=max(p(1:round(length(t)/10)));
ts=t(i);
%stroboscopic sampling:
while ts < t(end)
    if length(A)>1
        points=[points; A(j) p(i)];
    else if length(I)>1
        points=[points; I(k) p(i)];
    else if length(fc)>1
        points=[points; fc(f) p(i)];
    end
    end
    end
    ts=ts+T;
    aux=find(t>ts);
    if length(aux)
        i=aux(1);
    else
        break;
    end
end
end
end

%now plot the map:
max_p=max(points(:,2));
figure,plot(points(:,1),points(:,2)./max_p,'.k');
ylabel('normalized photon density');
if length(A)>1
    xlabel('modulation index');
    title(sprintf('Bifurcation map with I=%g and f_c=%g GHz',I,f_c/1e9));
end
if length(I)>1

```

```
    xlabel('injection current');
    title(sprintf('Bifurcation map with A=%g and f_c=%g GHz',A,f_c/1e9));
end
if length(fc)>1
    xlabel('f_c');
    title(sprintf('Bifurcation map with A=%g and I=%g',A,I));
end
```

# Apéndice B

## Presupuesto

Siendo el presente estudio, aunque teórico y de finalidad eminentemente académica, un proyecto de ingeniería, se adjunta en este apartado el presupuesto asociado. Éste tiene en cuenta principalmente los costes de recursos humanos, así como de manera simbólica los costes materiales.

### B.1. Fases del proyecto

El tiempo empleado en la elaboración del proyecto se puede dividir en las siguientes tareas:

- estudio previo de la teoría de láseres de semiconductor y de acoplos laterales,
- implementación en MATLAB del modelo de Wilson, mediante la transcripción de los listados adjuntos a su tesis y la codificación de las formulaciones teóricas,
- simulación del modelo Wilson y análisis de los resultados obtenidos, en particular comparándolos con los últimos resultados experimentales,
- diseño e implementación en MATLAB del modelo fenomenológico,
- profundización del estudio de los conceptos teóricos relacionados con la dinámica no lineal de sistemas complejos, la teoría de bifurcaciones y el caos,
- simulación del modelo simplificado y análisis de los diagramas de bifurcación,
- redacción del presente documento.

Este estudio ha sido realizado a lo largo de aproximadamente un año y medio, aunque de forma intermitente. Considerando una jornada laboral de 8 horas al día y 22 días laborables al mes, podemos establecer la duración efectiva equivalente en unos 6 meses. Una estimación de la división de este tiempo entre las diferentes tareas del proyecto se muestra en la tabla B.1.

Tabla B.1: Tareas del proyecto

Tarea	Horas de trabajo
Estudio teoría de láseres	90
Implementación código Wilson	110
Análisis modelo Wilson	160
Implementación modelo fenomenológico	70
Estudio sistemas dinámicos no lineales	150
Simulación diagramas de bifurcaciones	220
Redacción de la memoria	250
<b>Total</b>	<b>1.050</b>

## B.2. Coste de personal

Consideramos que todo el trabajo ha sido realizado por un ingeniero de telecomunicaciones cuyo salario bruto, incluyendo las cotizaciones al régimen general de la seguridad social a cargo de la empresa, se puede aproximar en unos 50 €/hora.

De esta forma el coste de la suma de las horas de trabajo detalladas en la tabla B.1 se muestra en la tabla B.2.

Tabla B.2: Coste de personal

Tiempo total de trabajo	1.050 horas
Coste ingeniero	50 €/hora
<b>Coste de personal sin I.V.A.</b>	<b>52.500 €</b>

### B.3. Coste de material

El proyecto se ha realizado íntegramente en un ordenador personal con MATLAB como único software propietario. Tanto el ordenador como la licencia de dicho programa se pueden considerar ya amortizados al momento de iniciar el proyecto, con lo que los únicos costes de material asignables al proyecto serían aquellos debidos a material fungible y reprografía, que podemos estimar en unos 300 euros.

### B.4. Coste total

El coste total del proyecto, teniendo en cuenta las consideraciones anteriormente descritas, se muestra en la tabla B.3.

Tabla B.3: Coste total

Coste de personal	52.500 €
Coste de material	300 €
<b>Base imponible</b>	<b>55.500 €</b>
I.V.A. (16 %)	8.880 €
<b>Coste total</b>	<b>64.380 €</b>

El coste total del proyecto es por tanto de **sesenta y cuatro mil trescientos ochenta euros**.

Nótese que si se tratara de un proyecto con fines comerciales, en el precio cargado al cliente habría que añadir a esta cantidad un porcentaje de riesgo así como los beneficios para la empresa.



# Bibliografía

- [1] W. W. Chow, S. W. Koch, and M. Sargent III, *Semiconductor-Laser Physics*. Springer, 1994.
- [2] G. A. Wilson, R. K. DeFreez, and H. G. Winful, “Modulation of phased-array semiconductor lasers at K-band frequencies,” *IEEE Journal of quantum electronics*, vol. 27, no. 6, 1991.
- [3] H. Lamela, M. Leonés, G. Carpintero, C. Simmendinger, and O. Hess, “Analysis of the dynamic behavior and short-pulse modulation scheme for laterally coupled diode lasers,” *IEEE Journal on selected topics in quantum electronics*, vol. 7, no. 2, 2001.
- [4] A. Gavrielides, T. Erneux, V. Kovanis, P. Alsing, and T. Simpson, “Subharmonic transition in an optically injected semiconductor laser: theory and experiments,” *Quantum Semiclass. Opt.*, vol. 9, pp. 575–585, 1997.
- [5] H. Lamela and G. Carpintero, “Truncation of the feigenbaum sequence in directly modulated semiconductor lasers,” *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 34, no. 3, 1998.
- [6] H.-F. Liu and W. F. Ngai, “Nonlinear dynamics of a directly modulated  $1,55\mu\text{m}$  InGaAsP distributed feedback semiconductor laser,” *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 29, no. 6, 1993.
- [7] H. Winful and S. Wang, “Stability of phase locking in coupled semiconductor laser arrays,” *Applied Physics Letters*, vol. 53, no. 20, 1988.
- [8] J. Ohtsubo, *Semiconductor Lasers. Stability, Instability and Chaos*. Springer-Verlag, 2005.
- [9] W. J. Fader, “Theory of two coupled lasers,” *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 21, no. 11, 1985.
- [10] J. Gleick, *Chaos. Making a New Science*. Vintage, 1987.

- [11] R. Santos and H. Lamela, “Experimental observation of chaotic dynamics in two coupled diode lasers through lateral mode locking,” *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 45, no. 11, 2009.
- [12] H. Erzgräber, S. Wieczorek, and B. Krauskopf, “Dynamics of two laterally coupled semiconductor lasers: strong- and weak-coupling theory,” *Physical review E*, vol. 78, no. 066201, 2008.
- [13] G. Carpintero del Barrio, *Dinámica No Lineal de Diodos Láser: Estudio de la Influencia del Ruido*. PhD thesis, Universidad Carlos III de Madrid, Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Automática, 1999.
- [14] G. A. Wilson, *Picosecond Dynamics of Twin-Emitter Coherent Semiconductor Laser Arrays*. PhD thesis, Oregon Graduate Institute of Science and Technology, 1992.
- [15] R. Paschotta, *Encyclopedia of Laser Physics and Technology*. Wiley VCH, 2008.
- [16] W. W. Chow and S. W. Koch, *Semiconductor-Laser Fundamentals: Physics of the Gain Materials*. Springer, 2nd ed., 1999.
- [17] A. Yariv, *Quantum Electronics*. Wiley, 3rd ed., 1989.
- [18] M. Ahmed and A. El-Lafi, “Large-signal analysis of analog intensity modulation of semiconductor lasers,” *Optics and Laser Technology*, vol. 40, pp. 809–819, 2008.
- [19] G. P. Agrawal and N. K. Dutta, *Semiconductor Lasers*. Van Nostrand Reinhold, 2nd ed., 2000.
- [20] M. Sargent III, M. O. Scully, and W. E. Lamb Jr., *Laser Physics*, ch. 8. Addison-Wesley, 1974.
- [21] M. C. España Boquera, *Comunicaciones Ópticas. Conceptos Esenciales y Resolución de Ejercicios*. Ediciones Díaz de Santos, 2005.
- [22] C. M. Bender and S. A. Orszag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. McGraw-Hill, 1978.
- [23] A. B. Çambel, *Applied Chaos Theory: A Paradigm for Complexity*. Academic Press, 1993.
- [24] P. Glendinning, *Stability, Instability and Chaos: An Introduction to the Theory of Nonlinear Differential Equations*. Cambridge University Press, 1994.
- [25] E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems*, ch. 8. Cambridge University Press, 1993.
- [26] P. G. Drazin, *Nonlinear Systems*, ch. 8. Cambridge University Press, 1992.

- [27] J. Katz, E. Kapon, S. Margalit, and A. Yariv, "Rate equations analysis of phase-locked semiconductor laser arrays under steady state conditions," *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 20, no. 8, 1984.
- [28] H. Lamela and R. Santos, "Experimental analysis of the locking and nonlinear regimes in lateral coupled diode lasers," *Optics Letters*, vol. 34, no. 21, 2009.
- [29] P. Acedo, H. Lamela, B. Roycroft, G. Carpintero, and R. Santos, "High bandwidth small signal modulation response of two laterally mode-locked diode lasers," *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 14, no. 8, 2002.
- [30] P. Acedo, H. Lamela, G. Villaseca, R. Santos, J. P. Vilcot, and M. Pessa, "64-Mb/s data transmission beyond the relaxation oscillation frequency using monolithically integrated two laterally coupled diode lasers," *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 18, no. 6, 2006.
- [31] G. Carpintero, R. Santos, and H. Lamela, "Experimental evidence of coupling effects in a twin-ridge laser," *Optics Letters*, vol. 34, no. 8, 2009.
- [32] J. K. Butler, D. E. Ackley, and M. Ettenberg, "Coupled-mode analysis of gain and wavelength oscillation characteristics of diode laser phased arrays," *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 21, no. 5, 1985.
- [33] P. Deuflhard and F. Borneman, *Scientific Computing with Ordinary Differential Equations*. Springer, 1994.
- [34] L. Rahman and H. G. Winful, "Nonlinear dynamics of semiconductor laser arrays: a mean field model," *IEEE Journal Of Quantum Electronics*, vol. 30, no. 6, 1994.
- [35] H. Lamela and R. Santos, "Experimental analysis of locking and unlocking regimes in laterally coupled diode lasers." Aceptado para publicación en el JQE, 2010.
- [36] L. F. Shampine and M. W. Reichelt, "The MATLAB ODE suite," tech. rep., The MathWorks, Inc., 1997.
- [37] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Spinger-Verlag, 1983.
- [38] T. Carroll and L. Pecora, eds., *Nonlinear Dynamics in Circuits*. World Scientific Publishing, 1995.
- [39] N. Lorenzo González, *Influencia del Ruido Gaussiano Correlacionado en la Sincronización de Sistemas Caóticos*. PhD thesis, Universidad de Santiago de Compostela, Facultad de Física, 2000.

- [40] F.-Y. Lin and J.-M. Liu, "Chaotic radar using nonlinear laser dynamics," *IEEE Journal Of Quantum Electronics*, vol. 40, no. 6, 2004.
- [41] L. Rahman, G. Li, and F. Tian, "Remote synchronization of high-frequency chaotic signals in semiconductor lasers for secure communications," *Optics Communications*, vol. 138, pp. 91–94, 1997.