

UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID  
ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR

INGENIERÍA INDUSTRIAL  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA



ANÁLISIS DE VIBRACIONES EN UNA  
REDUCTORA INDUSTRIAL

Autor: Pedro Carrión Abengózar

Tutores: Cristina Castejón Sisamón

Juan Carlos García Prada

Leganés, diciembre de 2009



## INDICE GENERAL

1	Introducción.....	7
1.1	Objetivo.....	8
2	Reductora de velocidad.....	9
2.1	Historia <sup>[2]</sup> .....	9
2.2	Tipos de engranajes.....	13
2.2.1	Ejes paralelos.....	13
2.2.2	Ejes perpendiculares.....	13
2.3	Engranajes cilíndricos de dientes helicoidales.....	13
2.4	Engranajes cónicos.....	14
2.5	Reductor de velocidad.....	15
2.5.1	Características de las reductoras.....	16
2.5.2	Reductor ortogonal.....	17
2.6	Datos técnicos del Reductor de velocidad.....	17
3	Modelado con CAD.....	21
3.1	Solid Edge.....	21
3.2	Creación de las piezas.....	23
3.2.1	Eje Piñón Cónico y Engranaje 1.....	25
3.2.2	Eje 1 y Engranaje 2.....	27
3.2.3	Eje 2 y Engranaje3.....	30
3.2.4	Eje 3.....	31
3.2.5	Rodamientos.....	32
3.2.6	Carcasas y tapas.....	41
3.3	Montaje.....	45
4	Análisis con FEM.....	51

4.1	Método de elementos finitos. ....	51
4.2	Modos normales de vibración <sup>[1]</sup> .....	51
4.2.1	Vibraciones longitudinales sobre una cuerda. ....	52
4.2.2	Vibraciones longitudinales de una barra.....	53
4.2.3	Modos normales de un sistema tridimensional.....	56
4.3	FEMAP.  .....	57
4.3.1	Windows nativo.....	58
4.3.2	CAD independiente.....	59
4.3.3	SOLVER independiente.....	59
4.4	NX NASTRAN.  .....	60
4.5	Pre-Proceso del modelo.....	63
4.5.1	Importación de la geometría. ....	63
4.5.2	Definición de las propiedades del material. ....	64
4.5.3	Definición de las propiedades de los elementos.....	65
4.5.4	Aplicación de las cargas y restricciones. ....	66
4.5.5	Creación de la malla. ....	67
4.6	Correr el análisis. ....	68
4.7	Post-Proceso.....	69
4.8	Resultados. ....	69
4.8.1	Carcasa. ....	70
4.8.2	Eje 3. ....	71
4.8.3	Eje 2. ....	73
4.8.4	Eje 1. ....	75
4.8.5	Eje Piñón Cónico. ....	76
4.8.6	Conjunto. ....	78
5	Conclusiones.....	81

6 Bibliografía..... 85



## 1 Introducción.

Se podría decir que los motores son el corazón de la industria. Pero ese corazón tiene diferentes ritmos y funciona a distintas velocidades, dependiendo del uso que se le quiera dar. Por eso las reductoras de velocidad son indispensables en todas las industrias, desde los que producen cemento hasta los laboratorios de medicamentos requieren en sus máquinas de estos mecanismos.

Las reductoras son diseñadas a base de engranajes, formados por dos ruedas dentadas con geometrías especiales de acuerdo con su tamaño y relación de transmisión, dando lugar a lo que se conoce como tren de engranajes.

Sin la correcta fabricación de las reductoras, las máquinas pueden presentar fallos y deficiencias en su funcionamiento. La presencia de ruidos es un aspecto que depende de estos mecanismos, de ahí la importancia del control de calidad.

La modelación computacional de los problemas que entorpecen el funcionamiento de las actividades industriales, es en nuestros días una herramienta cuya utilización esta en generoso crecimiento. Esto se debe a lo ventajoso que es para las empresas, desde un punto de vista económico, realizar modelos para predecir comportamientos de estructuras sin necesidad de comenzar el proceso de producción. Por ello, fundamentalmente, la Mecánica Computacional es una parte intrínseca de la vida diaria en los países industrializados y uno de los factores que ha facilitado el elevado nivel de vida en los mismos. El principal interés de este Proyecto Fin de Carrera radica en mostrar cómo la Mecánica Computacional puede contribuir a la solución de un problema tecnológico complejo, como los que afectan normalmente a la industria.

## 1.1 Objetivo.

El presente Proyecto fue motivado por la necesidad de conocer los modos de vibración, es decir, realizar un análisis modal del diseño de una reductora industrial de la marca belga Hansen Transmission para predecir el comportamiento dinámico de la estructura con el fin de llevar a cabo un mantenimiento predictivo en función de las condiciones de trabajo a las que va a ser sometida dicha reductora.

Para el desarrollo de este estudio se ha recurrido a la herramienta de CAD en tres dimensiones “*Solid Edge*” a fin de introducir el modelo en la computadora, a partir de aquí, para el análisis modal, se utilizó el software “*Femap*” cuyo funcionamiento se basa en el Método de Elementos Finitos y Post-proceso.

## 2 Reductora de velocidad.

Previamente a entrar en materia, este capítulo trata de posicionarnos en lo que ha significado el uso de los engranajes y su evolución hasta nuestros días. Se expondrán los tipos de engranajes existentes, comentando aquellos que atañen directamente a nuestro Proyecto.

Por último, se explicara en qué consiste una reductora de velocidad centrándonos en las reductoras de tipo ortogonal.

### 2.1 Historia <sup>[2]</sup>.

Desde épocas muy remotas se han utilizado cuerdas y elementos fabricados en madera para solucionar los problemas de transporte, impulsión, elevación y movimiento. Nadie sabe a ciencia cierta dónde ni cuándo se inventaron los engranajes. La literatura de la antigua China, Grecia, Turquía y Damasco mencionan engranajes pero no aportan muchos detalles de los mismos.



**Ilustración 1: Mecanismo de Anticitera.**

El mecanismo de engranajes más antiguo de cuyos restos disponemos es el mecanismo de Anticitera<sup>[3]</sup>. Se trata de una calculadora astronómica datada entre el 150 y el 100 a. C. y compuesta por al menos 30 engranajes de bronce con dientes triangulares. Presenta características tecnológicas

avanzadas como por ejemplo trenes de engranajes epicicloidales que, hasta el descubrimiento de este mecanismo, se creían inventados en el siglo XIX. Por citas de Cicerón se sabe que el de Anticitera no fue un ejemplo aislado sino que existieron al menos otros dos mecanismos similares en esa época, contruidos por Arquímedes y por Posidonio. Por otro lado, a Arquímedes se le suele considerar uno de los inventores de los engranajes porque diseñó un tornillo sin fin.

En China también se han conservado ejemplos muy antiguos de máquinas con engranajes. Un ejemplo es el llamado "carro que apunta hacia el Sur" (120-250 d. C.), un ingenioso mecanismo que mantenía el brazo de una figura humana apuntando siempre hacia el Sur gracias al uso de engranajes diferenciales epicicloidales. Algo anteriores, de en torno a 50 d. C., son los engranajes helicoidales tallados en madera y hallados en una tumba real en la ciudad china de Shensi.

No está claro cómo se transmitió la tecnología de los engranajes en los siglos siguientes. Es posible que el conocimiento de la época del mecanismo de Anticitera sobreviviese y contribuyese al florecimiento de la ciencia y la tecnología en el mundo islámico de los siglos IX al XIII. Por ejemplo, un manuscrito andalusí del siglo XI menciona por vez primera el uso en relojes mecánicos tanto de engranajes epicíclicos como de engranajes segmentados. Los trabajos islámicos sobre astronomía y mecánica pueden haber sido la base que permitió que volvieran a fabricarse calculadoras astronómicas en la Edad Moderna. En los inicios del Renacimiento esta tecnología se utilizó en Europa para el desarrollo de sofisticados relojes, en la mayoría de los casos destinados a edificios públicos como catedrales.



**Ilustración 2: Engranaje helicoidal de Leonardo.**

Leonardo da Vinci, muerto en Francia en 1519, dejó numerosos dibujos y esquemas de algunos de los mecanismos utilizados hoy diariamente, incluido varios tipos de engranajes de tipo helicoidal.

Los primeros datos que existen sobre la transmisión de rotación con velocidad angular uniforme por medio de engranajes, corresponden al año 1674, cuando el famoso astrónomo danés Olaf Roemer (1644-1710) propuso la forma o perfil del diente en epicicloide.

Robert Willis (1800-1875), considerado uno de los primeros ingenieros mecánicos, fue el que obtuvo la primera aplicación práctica de la epicicloide al emplearla en la construcción de una serie de engranajes intercambiables. De la misma manera, de los primeros matemáticos fue la idea del empleo de la evolvente de círculo en el perfil del diente, pero también se deben a Willis las realizaciones prácticas. A Willis se le debe la creación del odontógrafo, aparato que sirve para el trazado simplificado del perfil del diente de evolvente.

Es muy posible que fuera el francés Phillippe de Lahire el primero en concebir el diente de perfil en evolvente en 1695, muy poco tiempo después de que Roemer concibiera el epicicloidal.

La primera aplicación práctica del diente en evolvente fue debida al suizo Leonhard Euler (1707). En 1856, Christian Schiele descubrió el sistema de fresado de engranajes rectos por medio de la fresa madre, pero el

procedimiento no se llevaría a la práctica hasta 1887, a base de la patente Grant.



**Ilustración 3: Transmisión antigua**

En 1874, el norteamericano William Gleason inventó la primera fresadora de engranajes cónicos y gracias a la acción de sus hijos, especialmente su hija Kate Gleason (1865-1933), convirtió a su empresa Gleason Works, radicada en Rochester (Nueva York, EEUU) en una de los fabricantes de máquinas herramientas más importantes del mundo.

En 1897, el inventor alemán Robert Hermann Pfauter (1885-1914), inventó y patentó una máquina universal de dentar engranajes rectos y helicoidales por fresa madre. A raíz de este invento y otros muchos inventos y aplicaciones que realizó sobre el mecanizado de engranajes, fundó la empresa Pfauter Company que, con el paso del tiempo, se ha convertido en una multinacional que fabrica de todo tipo de máquinas-herramientas.

En 1906, el ingeniero y empresario alemán Friedrich Wilhelm Lorenz (1842-1924) se especializó en crear maquinaria y equipos de mecanizado de engranajes y en 1906 fabricó una talladora de engranajes capaz de mecanizar los dientes de una rueda de 6 m de diámetro, módulo 100 y una longitud del dentado de 1,5 m.

A finales del siglo XIX, coincidiendo con la época dorada del desarrollo de los engranajes, el inventor y fundador de la empresa Fellows Gear Shaper Company, Edwin R. Fellows (1846-1945), inventó un método revolucionario

para mecanizar tornillos sin fin glóbcicos tales como los que se montaban en las cajas de dirección de los vehículos antes de que fuesen hidráulicas.

En 1905, M. Chambon, de Lyon (Francia), fue el creador de la máquina para el dentado de engranajes cónicos por procedimiento de fresa madre. Aproximadamente por esas fechas André Citroën inventó los engranajes helicoidales dobles.

## **2.2 Tipos de engranajes.**

La principal clasificación de los engranajes se efectúa según la disposición de sus ejes de rotación y según los tipos de dentado. Según estos criterios existen los siguientes tipos de engranajes:

### **2.2.1 Ejes paralelos.**

- Cilíndricos de dientes rectos.
- Cilíndricos de dientes helicoidales.
- Doble helicoidales.

### **2.2.2 Ejes perpendiculares.**

- Helicoidales cruzados.
- Cónicos de dientes rectos.
- Cónicos de dientes helicoidales.
- Cónicos hipoides.
- De rueda y tornillo sin fin.

## **2.3 Engranajes cilíndricos de dientes helicoidales.**

Los engranajes cilíndricos de dentado helicoidal están caracterizados por su dentado oblicuo con relación al eje de rotación. En estos engranajes el movimiento se transmite de modo igual que en los cilíndricos de dentado recto, pero con mayores ventajas. Los ejes de los engranajes helicoidales pueden ser

paralelos o cruzarse, generalmente a  $90^\circ$ . Para eliminar el empuje axial el dentado puede hacerse doble helicoidal.

Los engranajes helicoidales tienen la ventaja que transmiten más potencia que los rectos, y también pueden transmitir más velocidad, son más silenciosos y más duraderos; además, pueden transmitir el movimiento de ejes que se corten. De sus inconvenientes se puede decir que se desgastan más que los rectos, son más caros de fabricar y necesitan generalmente más engrase que los rectos.

Lo más característico de un engranaje cilíndrico helicoidal es la hélice que forma, siendo considerada la hélice como el avance de una vuelta completa del diámetro primitivo del engranaje. De esta hélice deriva el ángulo  $\beta$  que forma el dentado con el eje axial. Este ángulo tiene que ser igual para las dos ruedas que engranan pero de orientación contraria, o sea: uno a derechas y el otro a izquierda. Su valor se establece a priori de acuerdo con la velocidad que tenga la transmisión, los datos orientativos de este ángulo son los siguientes:

Velocidad lenta:  $\beta = 5^\circ - 10^\circ$

Velocidad normal:  $\beta = 15^\circ - 25^\circ$

Velocidad elevada:  $\beta = 30^\circ$

Las relaciones de transmisión que se aconsejan son más o menos parecidas a las de los engranajes rectos.

## 2.4 Engranajes cónicos.

Se fabrican a partir de un tronco de cono, formándose los dientes por fresado de su superficie exterior. Estos dientes pueden ser rectos, helicoidales o curvos. Esta familia de engranajes soluciona la transmisión entre ejes que se cortan y que se cruzan. Los datos de cálculos de estos engranajes están en prontuarios específicos de mecanizado.

Los engranajes cónicos de dientes rectos efectúan la transmisión de movimiento de ejes que se cortan en un mismo plano, generalmente en ángulo recto, por medio de superficies cónicas dentadas. Los dientes convergen en el punto de intersección de los ejes. Son utilizados para efectuar reducción de velocidad con ejes en  $90^\circ$ . Estos engranajes generan más ruido que los engranajes cónicos helicoidales. Se utilizan en transmisiones antiguas y lentas. En la actualidad se usan muy poco.

Los engranajes cónicos helicoidales se utilizan para reducir la velocidad en un eje de  $90^\circ$ . La diferencia con el cónico recto es que posee una mayor superficie de contacto. Es de un funcionamiento relativamente silencioso. Además pueden transmitir el movimiento de ejes que se corten. Los datos constructivos de estos engranajes se encuentran en prontuarios técnicos de mecanizado. Se mecanizan en fresadoras especiales.

## **2.5 Reductoros de velocidad.**

El problema básico de las máquinas es reducir la alta velocidad de los motores a una velocidad utilizable por los equipos de las máquinas. Además de reducir se deben contemplar las posiciones de los ejes de entrada y salida y la potencia mecánica a transmitir.

Para potencias bajas se utilizan moto-reductores que son equipos formados por un motor eléctrico y un conjunto reductor integrado.

Para potencias mayores se utilizan equipos reductores separados del motor. Las reductoros consisten en pares de engranajes con gran diferencia de diámetros, de esta forma el engrane de menor diámetro debe dar muchas vueltas para que el de diámetro mayor de una vuelta, de esta forma se reduce la velocidad de giro. Para obtener grandes reducciones se repite este proceso colocando varios pares de engranes conectados uno a continuación del otro.

El reductor básico está formado por mecanismo de tornillo sin fin y corona. En este tipo de mecanismo el efecto del rozamiento en los flancos del diente hace que estos engranajes tengan los rendimientos más bajos de todas

las transmisiones; dicho rendimiento se sitúa entre un 40 y un 90% aproximadamente, dependiendo de las características del reductor y del trabajo al que está sometido. Factores que elevan el rendimiento:

- Ángulos de avance elevados en el tornillo.
- Rozamiento bajo (buena lubricación) del equipo.
- Potencia transmitida elevada.
- Relación de transmisión baja (factor más determinante).

Existen otras disposiciones para los engranajes en los reductores de velocidad, estas se denominan conforme a la disposición del eje de salida (eje lento) en comparación con el eje de entrada (eje rápido). Así pues serían los llamados reductores de velocidad de engranajes coaxiales, paralelos, ortogonales y mixtos (paralelos + sin fin corona). En los trenes coaxiales, paralelos y ortogonales se considera un rendimiento aproximado del 97-98%, en los mixtos se estima entre un 70% y un 90% de rendimiento.

Además, existen los llamados reductores de velocidad de disposición epicicloidal, técnicamente son de ejes coaxiales y se distinguen por su formato compacto, alta capacidad de transmisión de par y su extrema sensibilidad a la temperatura.

Las cajas reductoras suelen fabricarse en fundición gris dotándola de retenes para que no salga el aceite del interior de la caja.

### 2.5.1 Características de las reductoras.

- Potencia, en Kw o en Hp, de entrada y de salida.
- Velocidad, en RPM, de entrada.
- Velocidad a la salida (RPM).
- Relación de transmisión.
- Factor de seguridad o de servicio (Fs).
- Par transmitido (Mn1- Eje rápido) (Mn2-Eje lento).

### 2.5.2 Reductor ortogonal.

La característica principal de los reductores de velocidad ortogonales radica en la disposición entre el eje de entrada (eje rápido) y el eje de salida (eje lento), formando un ángulo recto. En la siguiente ilustración se puede observar dicha disposición, asimismo observaremos los engranajes rectos de dientes helicoidales con un ángulo de presión de  $20^\circ$  como se corresponde a velocidades medias y el engranaje cónico helicoidal que se utiliza para reducir la velocidad en los ejes que forman  $90^\circ$ .



Ilustración 4: Reductor de velocidad ortogonal.

## 2.6 Datos técnicos del Reductor de velocidad.

El reductor de velocidad Hansen Power Plus RNG34S-BNN-23 que va a ser sometido a estudio en este Proyecto está compuesto por tres etapas de reducción con una relación de reducción total de  $i_T=23,68$  (relación de transmisión del engranaje cónico  $i_1=2$ ; relación de transmisión del primer engranaje recto  $i_2=3,2$ ; relación de transmisión del segundo engranaje recto  $i_3=3,7$ ), un rendimiento hipotético del  $\eta=0,94$  (debido a las tres etapas de engranajes) y un peso aproximado de 1500Kg (80 litros de aceite ISO VG-220 aprox.). La vida de los rodamientos se estima en más de 50.000 horas.

El equipo encargado de proporcionar movimiento a nuestro reductor de velocidad es un motor eléctrico trifásico con rotor en jaula de ardilla de cuatro polos. Las características de dicho motor se encuentran en la siguiente tabla, a continuación de las ilustraciones del motor eléctrico y el reductor de velocidad.



Ilustración 5: Reductor de velocidad (izquierda) y motor eléctrico (derecha).

Tabla 1: Características del motor eléctrico.

<b>Potencia (kW)</b>	90
<b>Velocidad (min<sup>-1</sup>)</b>	1480
<b>Rendimiento</b>	0,93
<b>Factor de potencia <math>\cos\phi</math></b>	0,83
<b>Factor de servicio</b>	1,55
<b>Peso (Kg)</b>	740

Por lo tanto las características de entrada y salida del reductor de velocidad cuando el motor está trabajando a plena carga son:

$$\left. \begin{array}{l} P_1 = P_{motor} \cdot \cos f = 75 [KW] \\ n_1 = 1480 [\text{min}^{-1}] \\ \eta_{reductora} = 0,94 \\ i_T = 23,68 = \frac{n_1}{n_2} \end{array} \right\} M_{motor} = \frac{P_{motor}}{n_1} = 483,91 [Nm] \left. \begin{array}{l} n_2 = 62,08 [\text{min}^{-1}] \\ P_2 = P_{motor} \cdot \eta = 70,5 [KW] \\ M_2 = \frac{P_{motor} \cdot \eta}{n_2} = 10844,5 [Nm] \end{array} \right\}$$

Con estos valores nos podemos hacer una idea de las considerables dimensiones que posee este reductor de velocidad industrial.

Para el estudio de los modos normales de vibración del reductor de velocidades nos va a hacer falta conocer las velocidades de giro de los distintos ejes, y a partir de estas velocidades angulares calcular sus frecuencias. Dichos cálculos se muestran a continuación:

$$\begin{array}{l} \omega = 2\pi f \\ n_{\text{eje piñón cónico}} = n_1 = 153,93 \text{ rad/s} \Rightarrow f_{\text{eje piñón cónico}} = 24,49 \text{ Hz} \\ n_{\text{eje1}} = \frac{n_1}{i_1} = 76,97 \text{ rad/s} \Rightarrow f_{\text{eje1}} = 12,25 \text{ Hz} \\ n_{\text{eje2}} = \frac{n_1}{i_1 \cdot i_2} = 24,05 \text{ rad/s} \Rightarrow f_{\text{eje2}} = 3,83 \text{ Hz} \\ n_{\text{eje3}} = \frac{n_1}{i_1 \cdot i_2 \cdot i_3} = n_2 = 6,5 \text{ rad/s} \Rightarrow f_{\text{eje3}} = 1,03 \text{ Hz} \end{array}$$



### 3 Modelado con CAD

Este bloque comienza con una breve descripción de la herramienta informática empleada, Solid Edge, donde se enumerarán sus principales características y sus ventajas frente a otras herramientas similares.

A continuación se expondrán todas las piezas creadas con dicho programa, explicadas paso a paso para que de esta forma pueda servir de guía para cualquier usuario que vaya a utilizar el mismo software. De la misma forma se llevará a cabo con el programa de elementos finitos en el próximo capítulo.

Por último, se procederá al ensamblaje del conjunto, para facilitar el entendimiento visual por parte del lector y la exportación del modelo al software de elementos finitos.

#### 3.1 Solid Edge.

Solid Edge<sup>[4]</sup> es líder en la industria de diseño de sistemas mecánicos con excepcionales herramientas para crear y gestionar prototipos digitales en 3D. Mediante un modelado de núcleo superior y procesos de flujos de trabajo, enfocándose hacia las necesidades de industrias específicas, gestión del diseño totalmente integrada, Solid Edge lleva a cabo proyectos libres de errores, con solución de diseño precisos. Las herramientas de modelado y ensamblaje de Solid Edge permiten a su equipo de ingenieros desarrollar fácilmente una amplia gama de productos, desde partes simples a ensamblajes que contiene miles de componentes. Los comandos personalizados y flujos de trabajo estructurados aceleran el diseño de las características comunes en industrias específicas y garantiza la precisión de ajuste y las funciones de las piezas en el diseño, el análisis y su modificación en el modelo de montaje. Con Solid Edge, sus productos siempre estarán bien montados a la primera.

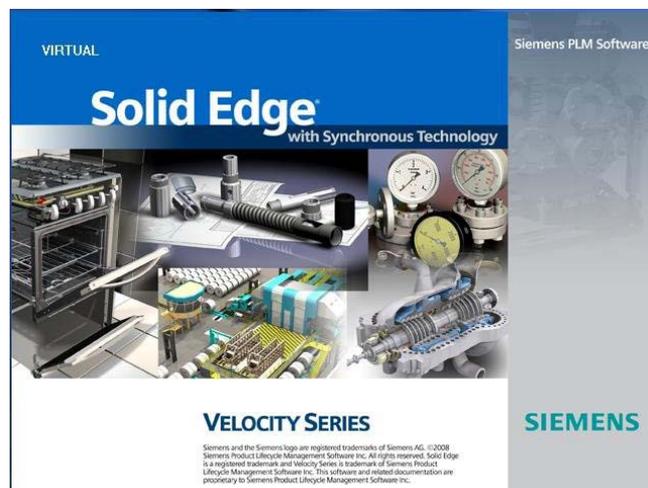
Solid Edge es el único sistema mecánico convencional que combina las capacidades de gestión de diseño con las herramientas de CAD que los

diseñadores utilizan cada día. Los usuarios de Solid Edge tienen una opción de escalabilidad de soluciones de gestión de datos de productos que manejan los diseños tan rápidamente como se crearon. Herramientas prácticas para la colaboración logrando ayudar a coordinar mejor las actividades del equipo de diseño y eliminar los errores que resultan de la falta de comunicación.

Tanto el producto como la complejidad del proceso es una preocupación creciente para las organizaciones de fabricación. Miles de empresas alrededor del mundo han llegado a depender de Solid Edge para combatir esta creciente complejidad.

Gracias a las ventajas de las soluciones modulares e integradas de Solid Edge, puedes beneficiarse de las innovaciones más funcionales de la industria de CAD, para terminar tus diseños con un producto libre de errores.

La versión utilizada para el desarrollo del proyecto es la ST, que cuenta con una tecnología de sincronismo que te ayuda a innovar más y realizar los procesos de diseño mucho más rápido.



**Ilustración 6: Solid Edge ST.**

El proceso de Synchronous Technology combina la velocidad y la flexibilidad del modelado directo con un control preciso de la dimensión Driven Design. Las relaciones paramétricas se pueden aplicar directamente a las características de sólido, sin tener que depender de geometría 2D de dibujo y las relaciones comunes de los parámetros se aplican de forma automática.

Este proceso de modelado se reivindica para asegurarse de que las actividades de diseño CAD hasta 100 veces más rápido.

A diferencia de otros sistemas de modelado directo, este no está basado en el típico historial dependiente, si no que ofrece la dimensionalización del modelado paramétrico impulsado por la geometría de la sincronización, permitiendo a los usuarios para aplicar los cambios imprevistos. La modelización de objetos mediante la interfaz de Acción de objetos, hace hincapié en una interfaz de usuario que proporcione la manipulación directa de los objetos (DMUI).

### **3.2 Creación de las piezas.**

A continuación se procederá a describir los pasos más importantes en la creación de las piezas más representativas a partir del plano del conjunto reductora que se adjunta en el anexo. En la siguiente imagen se expone un esquema descriptivo para un mejor seguimiento tanto de este capítulo como del Proyecto en sí, ya que contiene indicaciones con los nombres que van a ser asignados a cada una de las piezas que de aquí en adelante van a ser detalladas en este capítulo y sucesivos.

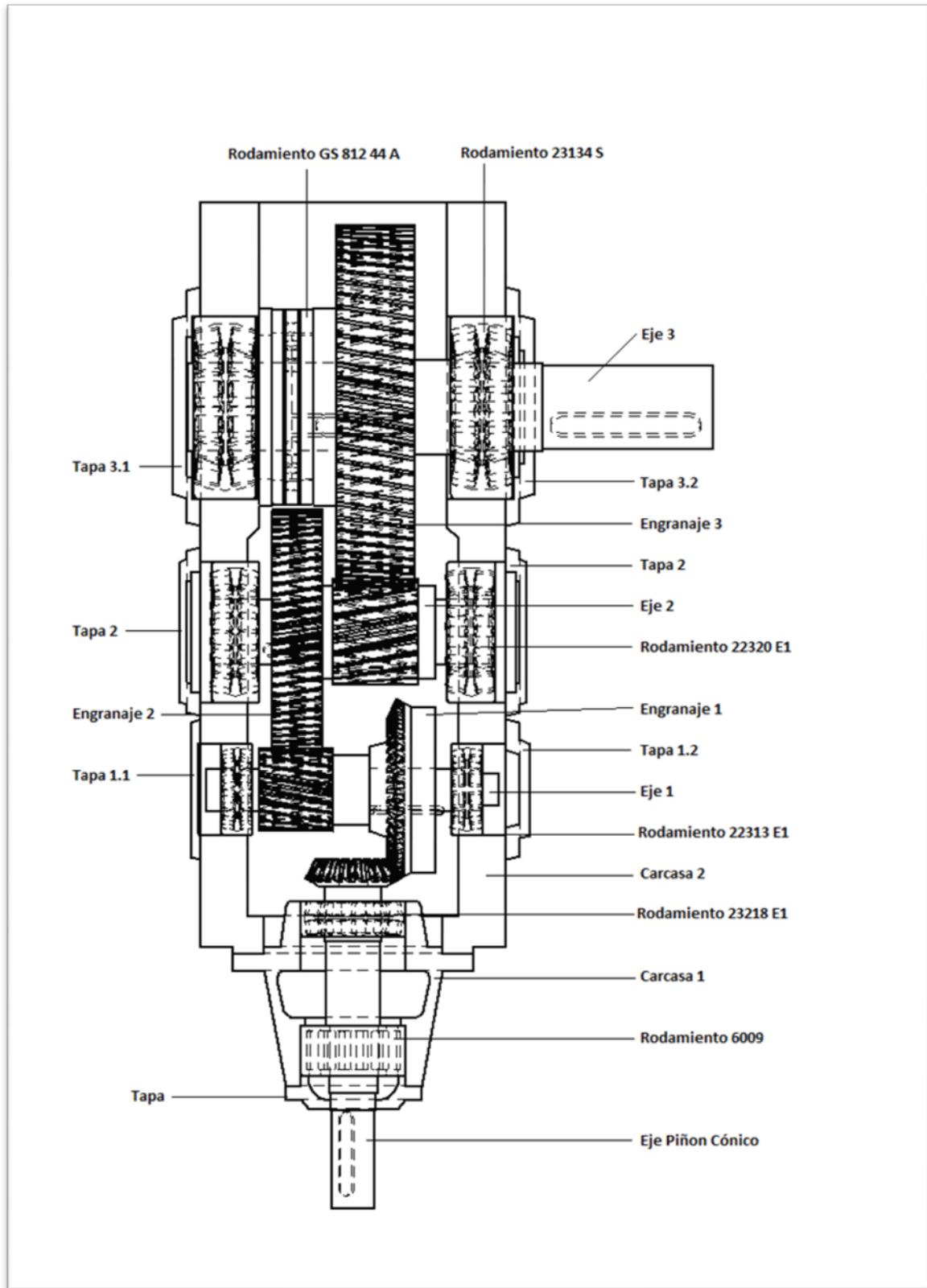


Ilustración 7: Esquema descriptivo.

### 3.2.1 Eje Piñón Cónico y Engranaje 1.

Para la creación del Piñón Cónico y del Engranaje se utilizó la herramienta Diseñador de Engranajes de Solid Edge, en especial para engranajes cónicos, la cual es muy práctica para generar engranajes conocidos su número de dientes, relación de transmisión, ángulo de presión, anchura de cara y muchos otros parámetros. Dicha herramienta se puede ver en la siguiente ilustración.

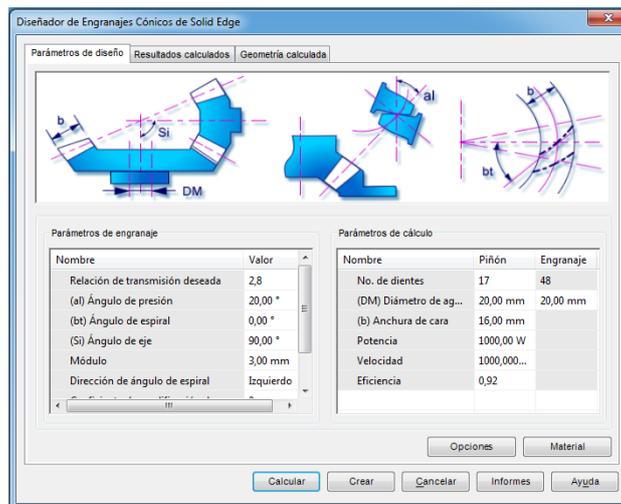


Ilustración 8: Diseñador de Engranajes Cónicos.

Los parámetros que se utilizaron para su creación son los que se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 2: Características del mecanismo Eje piñón Cónico y Engranaje 1.

Nombre	Valor
Relación de transmisión	2
Ángulo de presión	20°
Ángulo de eje	90°
Número de dientes del piñón	21

### 3.2.1.1 Eje piñón cónico.

Una vez creado el piñón cónico se le añadirá mediante una extrusión por revolución el eje tomando sus medidas desde el plano de diseño. Para finalizar, mediante una extrusión simple se añadirá la chaveta. Por lo tanto obtenemos como resultado final el Eje piñón cónico que se puede observar en la siguiente ilustración.

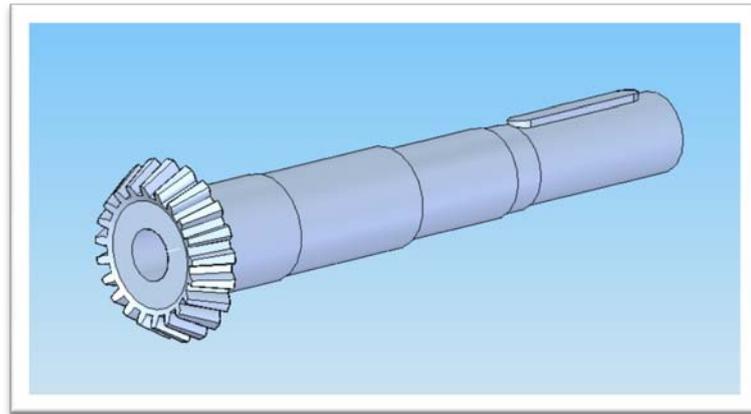


Ilustración 9: Eje Piñón Cónico.

### 3.2.1.2 Engranaje 1.

La corona dentada se genera simultáneamente al piñón cónico, únicamente se procede a adecuarla al eje en el que va a ir insertada. Mediante una serie de extrusiones y vaciados se genera el diámetro interior y la chavetera como se puede ver en la siguiente ilustración.

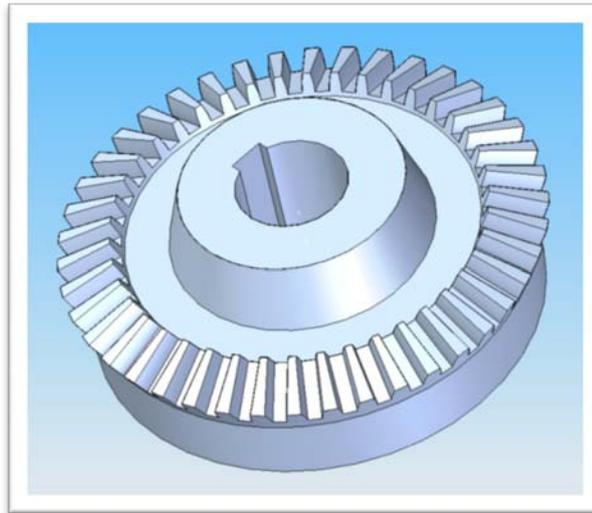


Ilustración 10: Engranaje 1.

### 3.2.2 Eje 1 y Engranaje 2.

Tal y como se realizó en el apartado anterior tanto el piñón contenido en el eje 1 como el Engranaje 2 se modelaron mediante la herramienta Diseñador de Engranajes de Solid Edge, pero en este caso se seleccionó el apartado para engranajes rectos mostrado en la ilustración posterior.

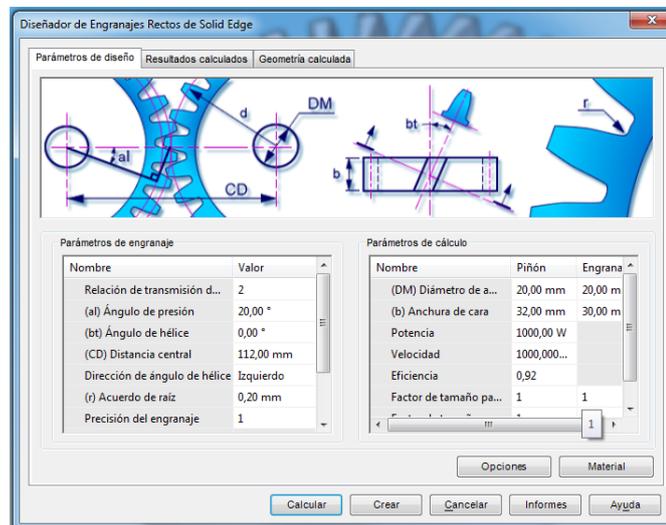


Ilustración 11: Diseñador de Engranajes Rectos.

En este caso los parámetros que se utilizaron para su creación fueron los que se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 3: Características del mecanismo Eje 1 y Engranaje 2.

Nombre	Valor
Relación de transmisión	3,2
Ángulo de presión	20°
Ángulo de hélice	20°
Distancia entra ejes	112mm
Anchura de cara de Piñón	52mm
Anchura de cara de Engranaje	30mm
Diámetro de agujero de montaje Engranaje	45mm

### 3.2.2.1 Eje 1.

Una vez creado el piñón helicoidal se le añadirá mediante una extrusión por revolución el eje tomando sus medidas desde el plano de diseño. Para finalizar, mediante una extrusión simple se añadirá la chaveta para el Engranaje 1. Por lo tanto obtenemos como resultado final el Eje 1 que se puede observar en la siguiente ilustración.

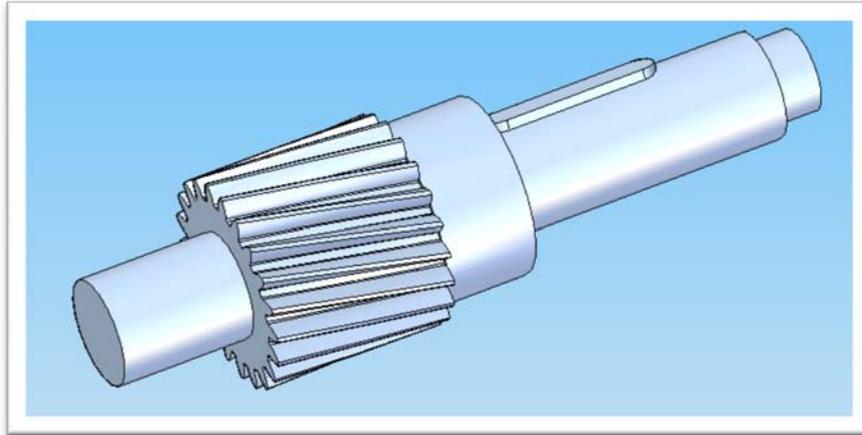


Ilustración 12: Eje 1

### 3.2.2.2 Engranaje 2.

El engranaje helicoidal se genera simultáneamente con el piñón helicoidal, únicamente se procede a adecuarlo al Eje 2 donde va a ir insertado. Mediante un vaciado se genera la chavetera como se puede ver en la siguiente ilustración.

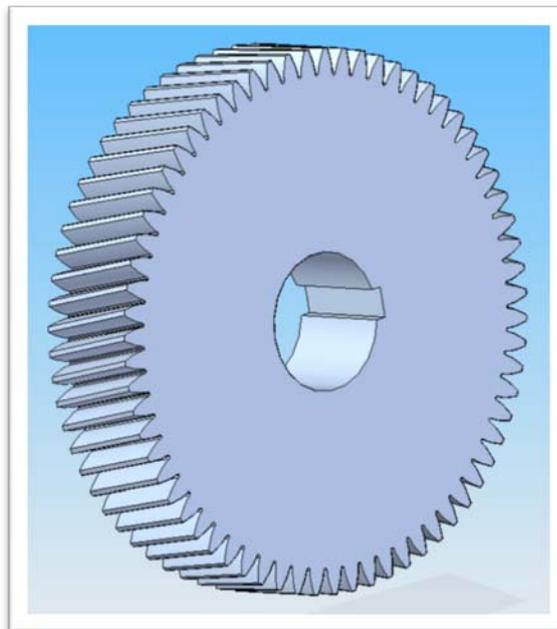


Ilustración 13: Engranaje 2.

### 3.2.3 Eje 2 y Engranaje3.

De la misma forma que se realizó en el apartado anterior, el piñón contenido en el eje 2 y el Engranaje 3 se modelaron mediante la herramienta Diseñador de Engranajes de Solid Edge para engranajes rectos. En cuyo proceso hicieron falta los parámetros que están presentados en la siguiente tabla.

Tabla 4: Características del mecanismo Eje 2 y Engranaje 3.

Nombre	Valor
Relación de transmisión	3,7
Ángulo de presión	20°
Ángulo de hélice	20°
Distancia entra ejes	160mm
Anchura de cara de Piñón	60mm
Anchura de cara de Engranaje	55mm
Diámetro de agujero de montaje Engranaje	62mm

#### 3.2.3.1 Eje 2.

Seguidamente a la creación del piñón helicoidal se añadirá a este, mediante una extrusión por revolución, el eje del que forma parte, cogiendo las medidas necesarias del plano de diseño. Con el propósito de montar sobre este eje el Engranaje 2, se procederá a realizar extrusión simple para añadir la chaveta para dicho engranaje. Por consiguiente, se muestra el resultado final del Eje 2 en la siguiente ilustración.

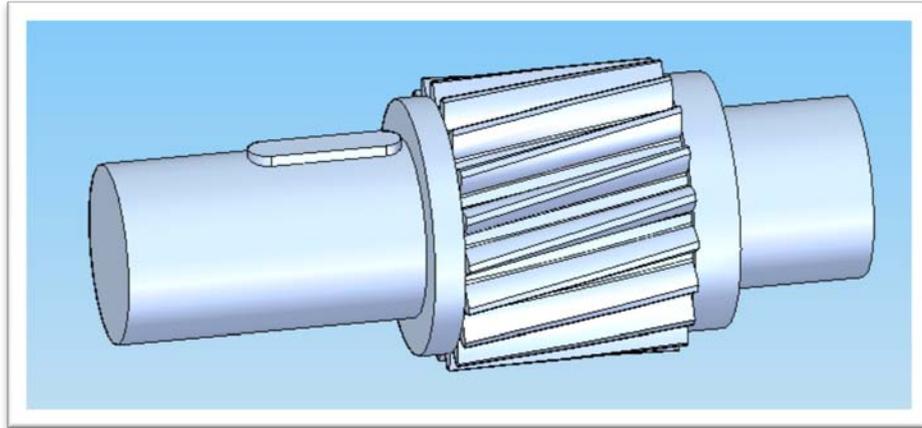


Ilustración 14: Eje 2.

### 3.2.3.2 Engranaje 3.

Este engranaje helicoidal se genera simultáneamente con el piñón helicoidal anteriormente descrito. Exclusivamente se procede a realizar la chaveta donde va a ir insertado el Eje 2, este paso se generará con vaciado como se puede ver en la siguiente ilustración.

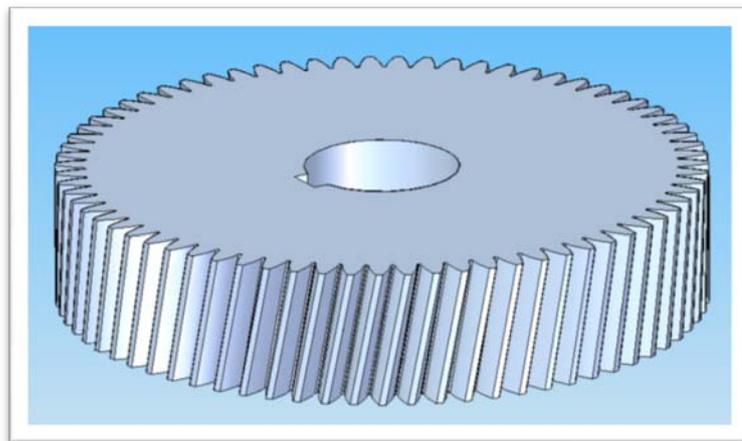


Ilustración 15: Engranaje 3.

### 3.2.4 Eje 3.

Para finalizar con todas las piezas referentes al mecanismo que conforma el reductor de velocidad, pasamos a describir los pasos necesarios para el modelado del Eje 3. Como dicho eje no incorpora ningún piñón, únicamente procederemos a realizar una extrusión por revolución con las

medidas oportunas sacadas del plano de diseño. Tanto la chavetera para el Engranaje 3 y el rodamiento GS 812 44 A como la chavetera para acoplar al eje conducido de salida y la máquina a la que queremos transmitir el movimiento, se realizaran con sendas extrusiones. El resultado se puede visualizar en la siguiente ilustración.

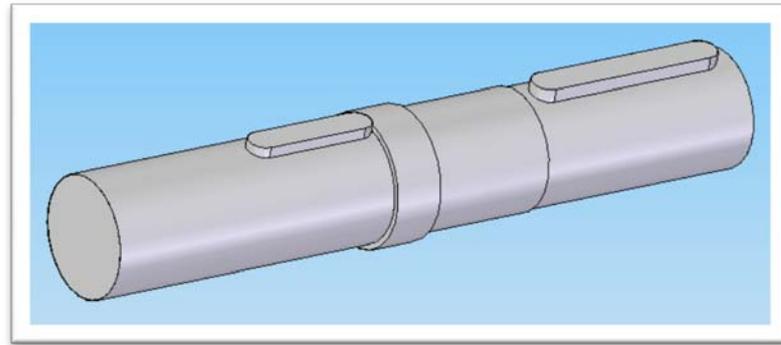


Ilustración 16: Eje 3.

### 3.2.5 Rodamientos.

Los rodamientos<sup>[6]</sup> que predominan en este tipo de reductoras de velocidad son los rodamientos de rodillos a rótulas, estos rodamientos son inherentemente autoalineables y muy robustos. Las dos hileras de rodillos hacen que los rodamientos puedan absorber cargas elevadas.

Aunque también encontramos un rodamiento axial de rodillos cilíndricos. Estos rodamientos son adecuados para disposiciones que tengan que soportar grandes cargas axiales. Además, son relativamente insensibles a las cargas de choque, son muy rígidos y requieren un espacio axial mínimo. Se suministran, como estándar, como rodamientos de simple efecto y sólo pueden soportar cargas axiales en un sentido.

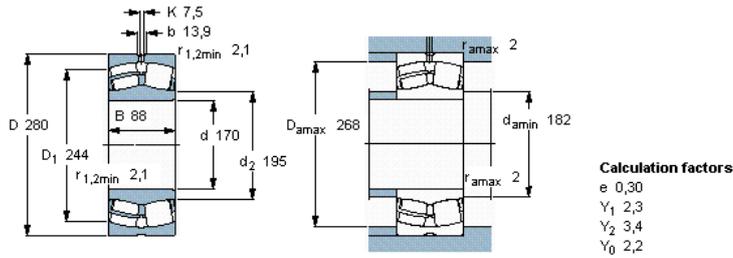
De los rodamientos que a continuación se va a proceder a describir, todos sus parámetros y geometrías han sido tomadas del catalogo on-line de rodamientos de la empresa suiza SKF. A continuación se ofrece una detallada guía de la construcción y montaje de cada uno de ellos.

Para todos ellos el procedimiento ha sido muy parecido, primero se modelaban la carcasa interior, a continuación la carcasa exterior y finalmente los rodillos. Para su ensamblaje se recurrió al modulo “Conjunto” del Solid Edge, gracias a herramientas como alineación de caras, alineación axial o tangente su acometido fue sencillo.

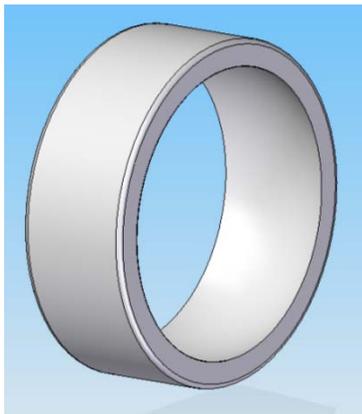
### 3.2.5.1 Rodamiento 23134 S.

Spherical roller bearings, cylindrical and tapered bore, cylindrical bore, unsealed											
Principal dimensions					Basic load ratings		Fatigue load limit	Speed ratings		Mass	Designation
					dynamic	static	$P_u$	Reference speed	Limiting speed		
$d$	$D$	$B$	$C$	$C_0$	kN		kN	r/min		kg	* - SKF Explorer bearing
mm	280	88	1040	1500			137	1800	2400	22,0	23134 CC/W33 *

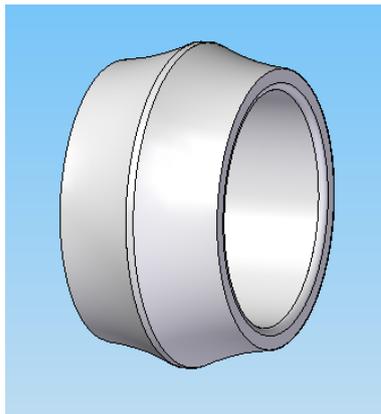
[Product information](#)      [Tolerances](#), see also text  
[Radial internal clearance, cylindrical bore, tapered bore, unsealed](#), see also text  
[Recommended fits](#)  
[Shaft and housing tolerances](#)



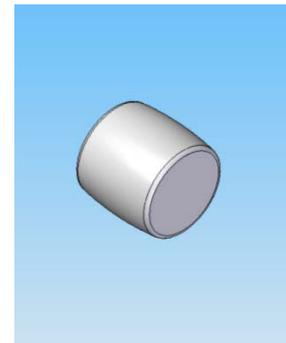
Carcasa exterior



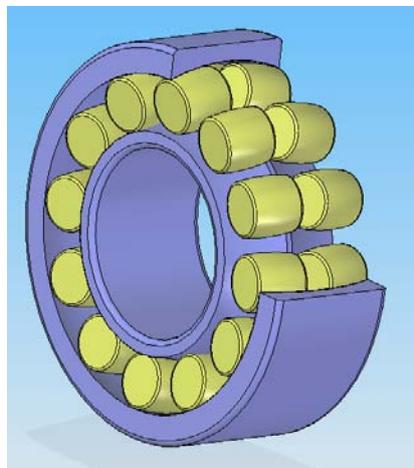
Carcasa interior



Rodillo



Montaje final del Rodamiento 23134 S



### 3.2.5.2 Rodamiento GS 812 44 A

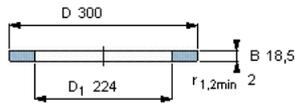
Los rodamientos axiales de rodillos cilíndricos tienen una forma y un diseño sencillo y se fabrican con una hilera y con dos hileras de rodillos cilíndricos. Los rodamientos de las series 811 y 812 se suelen utilizar principalmente cuando la capacidad de carga de los rodamientos axiales de bolas es inadecuada.

La superficie cilíndrica de los rodillos está ligeramente bombeada hacia sus extremos. Por tanto, el perfil del contacto prácticamente elimina las tensiones dañinas en los bordes. Los rodamientos son desarmables, por lo que los componentes individuales pueden montarse por separado.

**Arandelas del rodamiento - rodamientos axiales de agujas y de rodillos cilíndricos, arandelas del alojamiento, serie GS**

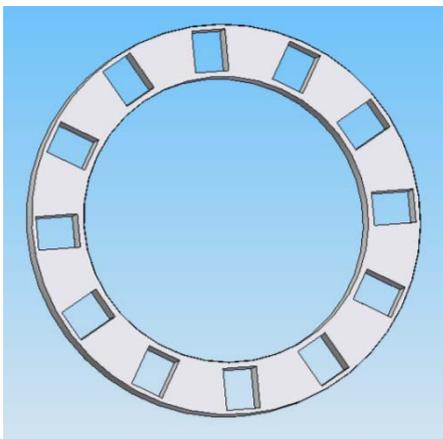
Tolerancias  
Ajustes recomendados  
Tolerancias del eje y del alojamiento

Dimensiones						Masa	Designación
d	D	B	d <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>	r <sub>1</sub> , r <sub>1,2</sub>	kg	-
mm							
220	300	18,5	-	224	2	4,71	GS 81244

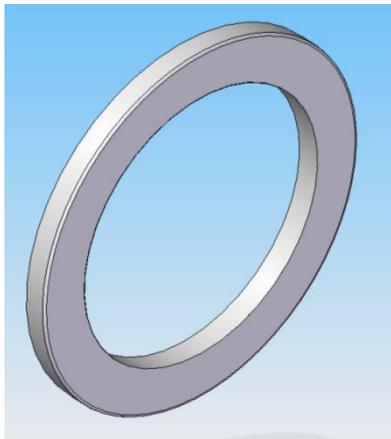


Arandela de alojamiento

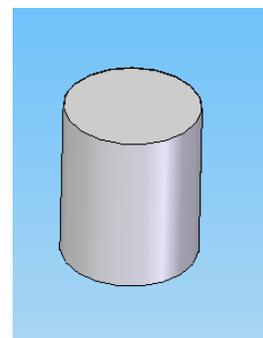
Arandela de alojamiento



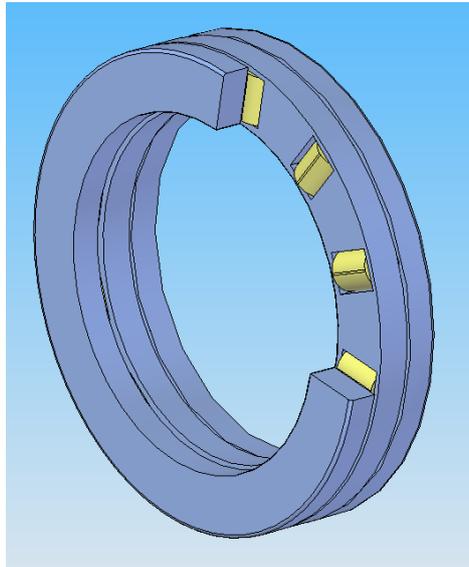
Carcasa interior



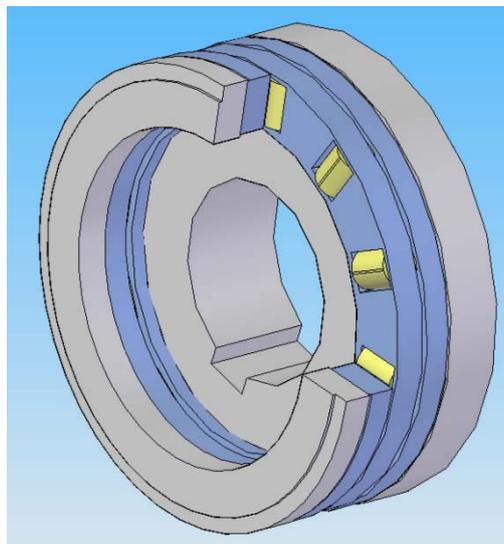
Rodillo



### Montaje del Rodamiento GS 81244



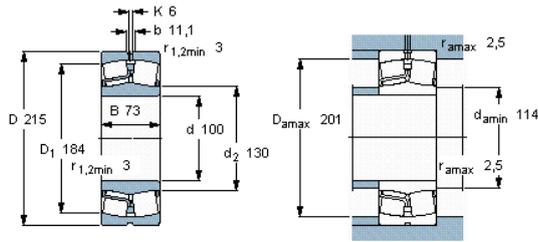
Montaje final añadiendo los soportes necesarios para su ajuste con el Eje 3 y la Carcasa 2



3.2.5.3 Rodamiento 22320 E1.

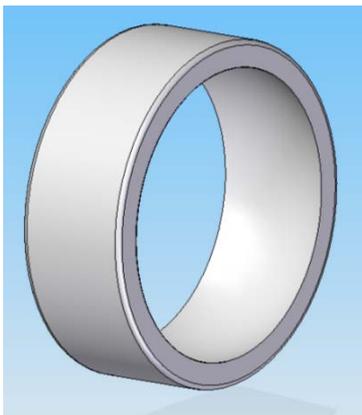
Principal dimensions		Basic load ratings		Fatigue load limit $P_U$ kN	Speed ratings		Mass kg	Designation
$d$ mm	$D$	dynamic	static		Reference speed r/min	Limiting speed		
100	215	815	950	88	2400	3000	13,5	22320 E*

**Spherical roller bearings, cylindrical and tapered bore, cylindrical bore, unsealed**  
 Product information  
 Tolerances, see also text  
 Radial internal clearance, cylindrical bore, tapered bore, unsealed, see also text  
 Recommended fits  
 Shaft and housing tolerances

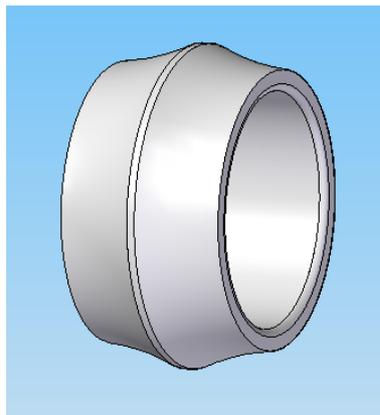


**Calculation factors**  
 $e$  0,33  
 $Y_1$  2  
 $Y_2$  3  
 $Y_0$  2

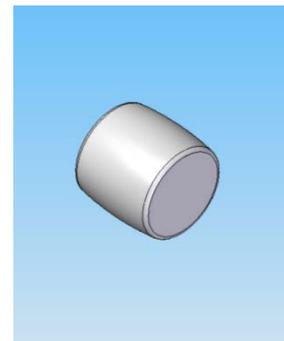
Carcasa exterior



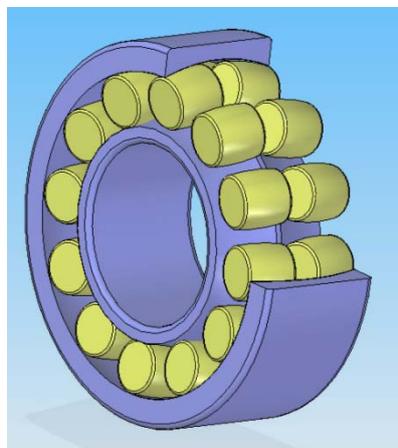
Carcasa interior



Rodillo



Montaje final del Rodamiento 22320 E1

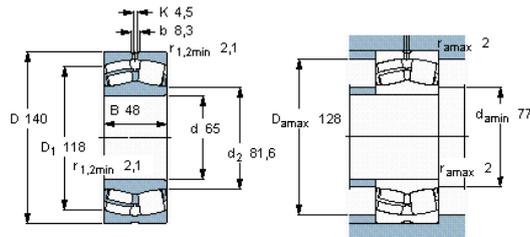


### 3.2.5.4 Rodamiento 22313 E1.

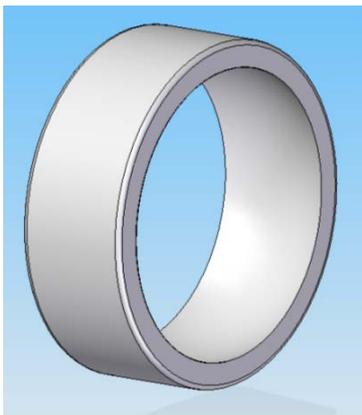
Principal dimensions					Basic load ratings		Fatigue load limit $P_u$ kN	Speed ratings		Mass kg	Designation
d	D	B	C	$C_0$	dynamic	static		Reference speed	Limiting speed		
65	140	48	340	360	38	3800	5000	3,75	22313 E*		

Product information

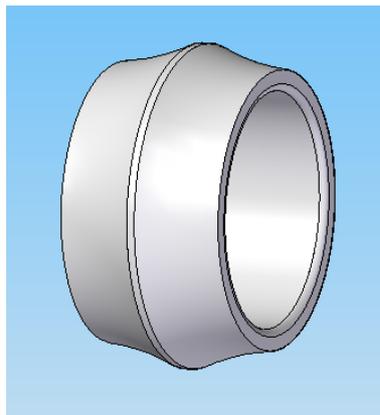
Tolerances, see also text  
 Radial internal clearance, cylindrical bore, tapered bore, unsealed, see also text  
 Recommended fits  
 Shaft and housing tolerances



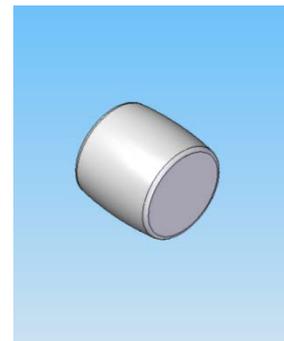
Carcasa exterior



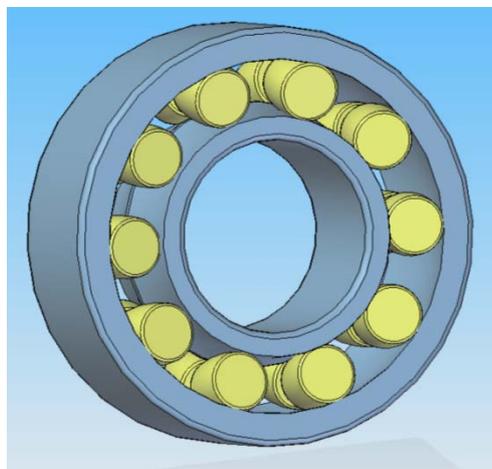
Carcasa interior



Rodillo



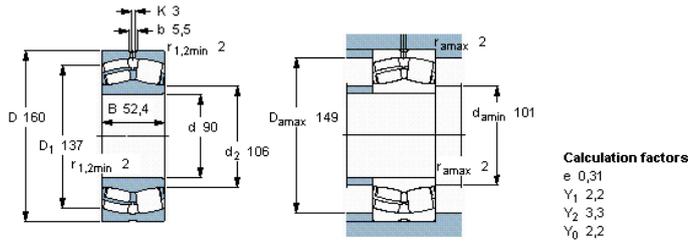
Montaje final del Rodamiento 22313 E1



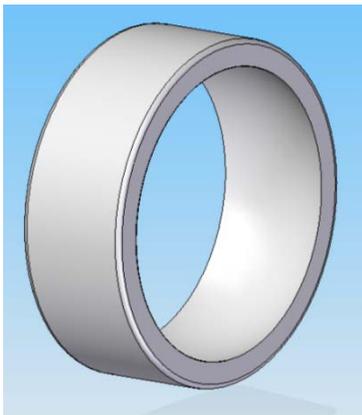
3.2.5.5 Rodamiento 23218.

**Spherical roller bearings, cylindrical and tapered bore, cylindrical bore, unsealed**  
 Product information Tolerances, see also text  
 Radial internal clearance, cylindrical bore, tapered bore, unsealed, see also text  
 Recommended fits  
 Shaft and housing tolerances

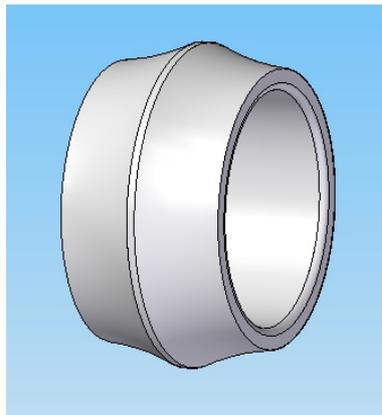
Principal dimensions			Basic load ratings		Fatigue load limit $P_U$ kN	Speed ratings		Mass kg	Designation
d	D	B	C	$C_0$		Reference speed	Limiting speed		
mm			kN			r/min			* - SKF Explorer bearing
90	160	52,4	355	440	48	2800	3800	4,65	23218 CC/W33 *



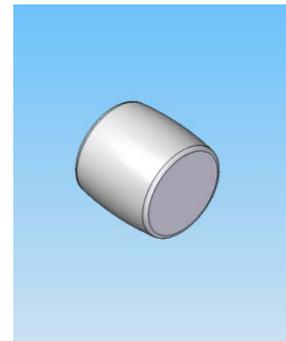
Carcasa exterior



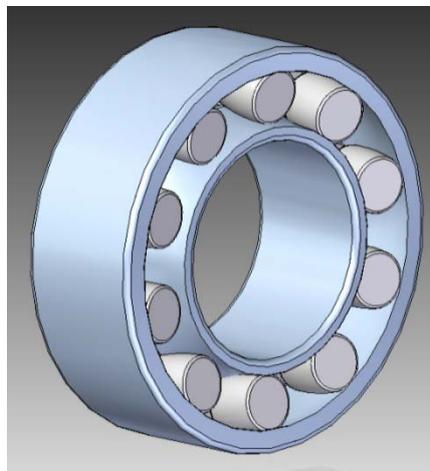
Carcasa interior



Rodillo



Montaje final del Rodamiento 23218



### 3.2.5.6 Rodamiento 6009.

Dentro del catalogo de rodamientos de SKF no se encontró ningún rodamiento que cumpliera las características geométricas del rodamiento 6009 del plano de diseño. El único rodamiento que se asemejaba a esas características, como se puede observar en la siguiente imagen, era aquel con número de serie BS2-2315, que coincidía en diámetro interior y en diámetro exterior, pero diferenciaban en anchura (B) donde este tenía  $B=64\text{mm}$  en escala real mientras el rodamiento 6009 del plano de diseño media  $B \approx 35\text{mm} \cdot \text{factor de escala} \approx 35\text{mm} \cdot 2,15 \approx 75\text{mm}$ . Por este motivo se realizara una simplificación del modelo introduciendo así un rodamiento de rodillos imaginario que cumpla dichos parámetros.

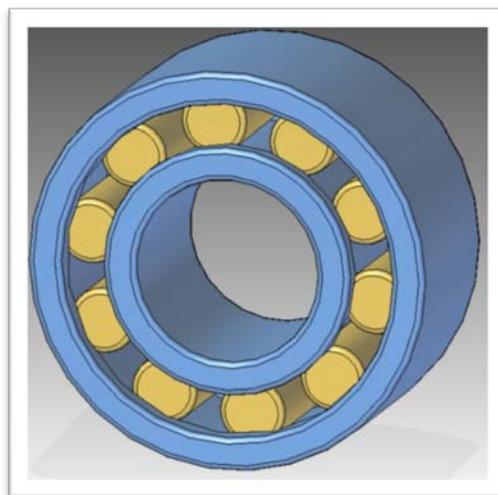
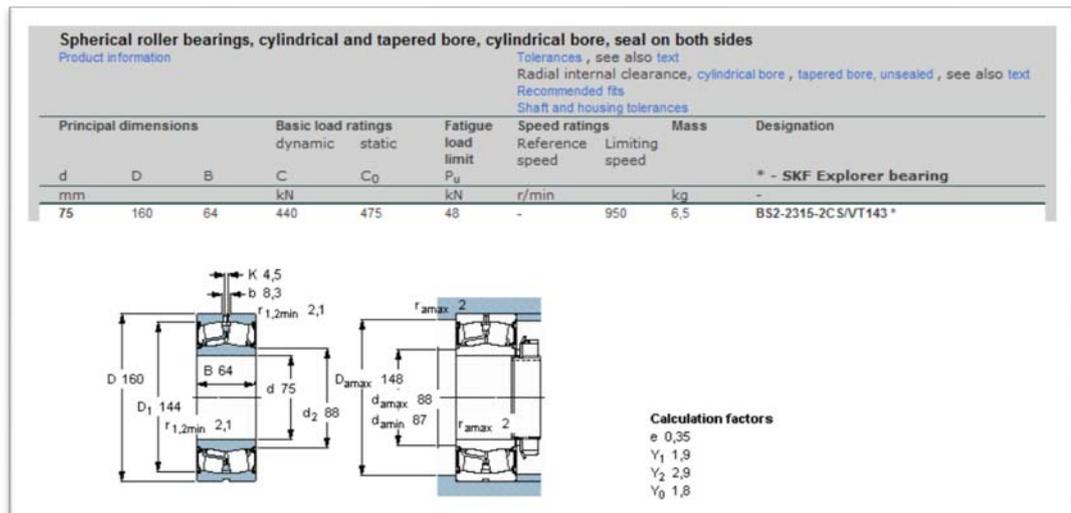


Ilustración 17: Rodamiento BS2-2315 (arriba), Rodamiento 6009 (abajo).

### 3.2.6 Carcasas y tapas.

La carcasa es el conjunto de piezas duras y resistentes, que dan soporte y protegen de la entrada de agua, polvo y toda contaminación posible a otras partes del propio equipo. Dado que encima de la carcasa se apoyan los cojinetes sobre los que giran los ejes que contienen los engranajes, esta pieza está sometida a grandes esfuerzos. De la rigidez de la carcasa, dependen las primeras pérdidas de eficacia del reductor de velocidad. Para garantizar esta rigidez, los nuevos diseños tienden a fabricarla de hierro fundido en una sola pieza.

Los engranajes, casquillos y rodamientos de los reductores están lubricados habitualmente por inmersión o impregnados en la grasa lubricante por lo que otra función principal es la de contener el aceite para la lubricación de los estos, y así conseguir su óptimo funcionamiento.

Las tapas tienen la función de facilitar el montaje y mantenimiento de los ejes, engranajes, rodamientos y casquillos que forman parte del interior del reductor de velocidad.

#### 3.2.6.1 Carcasa 1.

La carcasa 1 da soporte a los rodamientos sobre los que gira el eje del piñón cónico. Esta pieza fue modelada mediante una extrusión por revolución, las medidas de su geometría fueron tomadas directamente del plano de diseño. A continuación se observa la imagen seccionada para su mejor visualización.

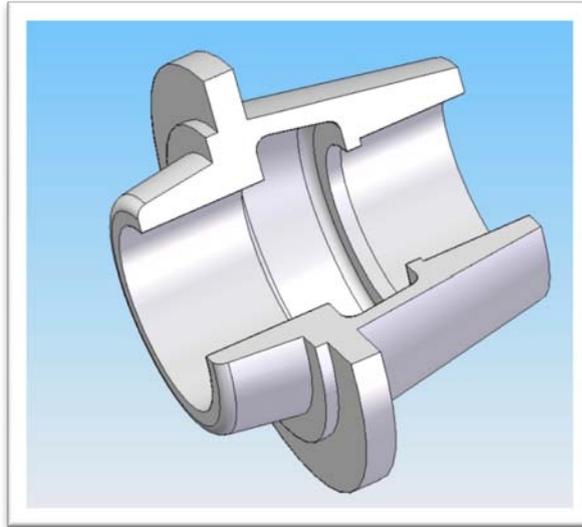
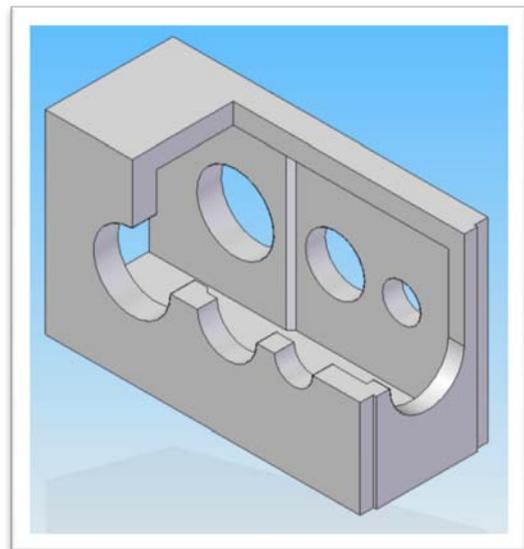
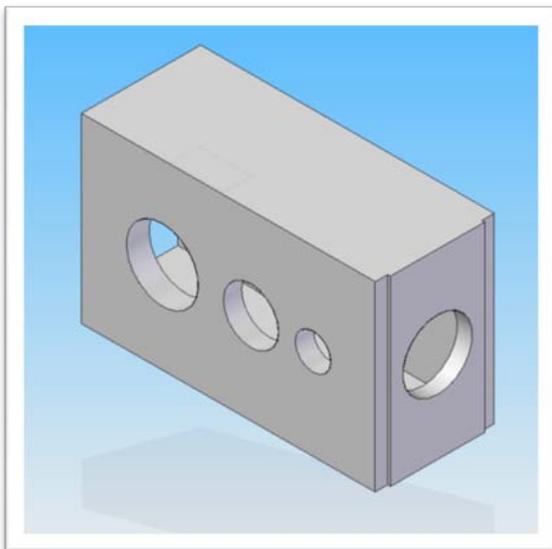


Ilustración 18: Carcasa 1.

### 3.2.6.2 Carcasa 2.

La carcasa 2, es la carcasa principal, da soporte a los rodamientos sobre los que giran los ejes 1, 2 y 3, y en ella están acopladas la carcasa 1 y las múltiples tapas de los respectivos ejes anteriormente nombrados.

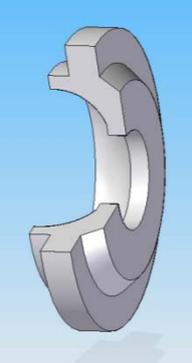
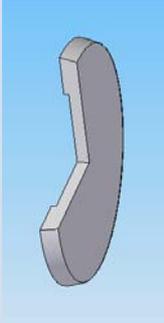
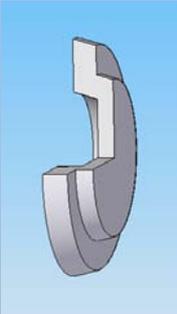
Para llevar a cabo su modelado se recurrió a extrusiones y vaciados. En la siguiente figura se puede observar tanto la pieza final como una sección de dicha pieza para su mejor visualización.



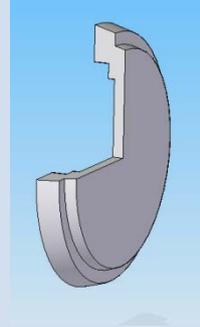
### 3.2.6.3 Tapas.

En la fase de modelado de las diferentes tapas, dado su geometría circular, únicamente se utilizó la herramienta de extrusión por revolución. En la siguiente tabla se muestra las diferentes tapas que forman parte del reductor de velocidad con una sección de 90°.

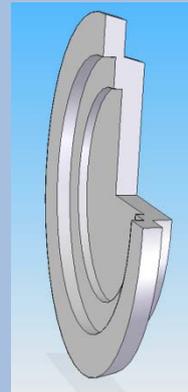
Tabla 5: Ilustraciones de las tapas que forman parte del reductor.

Nombre	Imagen
Tapa	
Tapa 1.1	
Tapa 1.2	

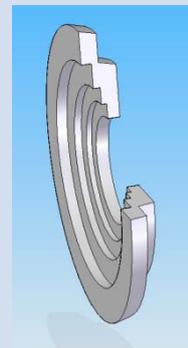
Tapa 2



Tapa 3.1



Tapa 3.2



### 3.3 Montaje.

Para realizar el ensamblaje se recurrió al apartado Conjunto dentro de Solid Edge. En este apartado se pueden agregar las piezas anteriormente creadas en el apartado Piezas de Solid Edge mediante la herramienta “Biblioteca de piezas”.

A continuación se describirán brevemente los pasos seguidos para el ensamblaje del conjunto reductor de velocidad.

En primer lugar, se agregaron los ejes 1 y 2, aplicando la herramienta “Relacionar-Paralelo” con una distancia entre ambos de 112mm, distancia que se introdujo como parámetro para generar el mecanismo formado por el engranaje 2 y el piñón del eje 1. Este mismo paso se utilizó para al introducir el eje 3, en este caso la distancia introducida fue 160mm respecto al eje 2 y 272mm (160mm+112mm) respecto al eje 1. De esta manera el conjunto quedó de la siguiente manera.

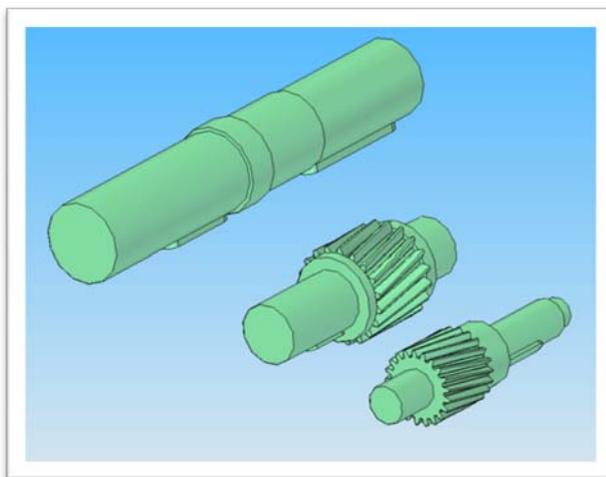
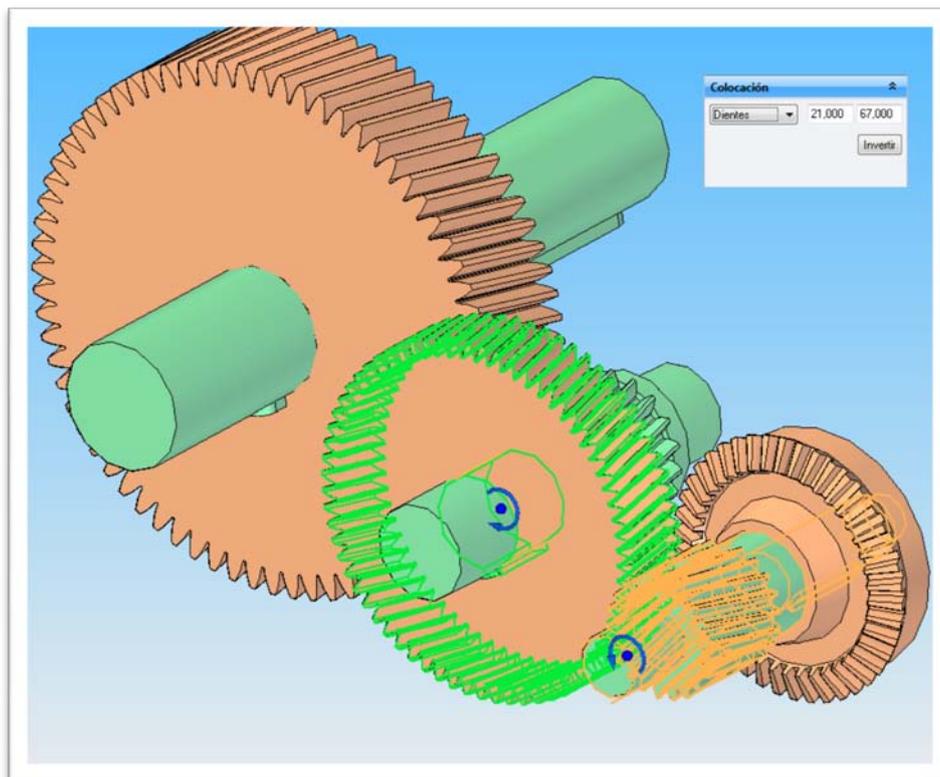


Ilustración 19: Conjunto Ejes 1, 2 y 3.

En segundo lugar, se procedió al ensamblaje de los engranajes correspondientes a cada uno de los ejes mencionados en el paso anterior. Para llevar a cabo dicha tarea se recurrió a las herramientas “Relacionar – Alineación axial” y “Relacionar – Alinear caras” respectivamente, la primera se utilizó para alinear los ejes. Una vez alineados únicamente se tendrían que ajustar las caras de las piezas mediante la segunda herramienta enumerada

para que la chaveta del eje coincidiera con el chavero del engranaje, dado que estos deben ser solidarios entre sí para evitar que se produzcan deslizamientos de una pieza sobre la otra. En la siguiente ilustración se puede contemplar el resultado.

Para que los dientes engranen correctamente se procede a utilizar la herramienta “Relacionar – Engranaje”, en dicha herramienta se introduce el número de dientes del engranaje y del piñón respectivamente para introducir así la interacción que los une. A modo de ejemplo, también se muestra la relación entre el Engranaje 2 y el Eje 1. Esto mismo es aplicable al otro mecanismo.



**Ilustración 20: Relación Eje - Engranaje.**

En tercer lugar, se agrega desde la biblioteca de piezas la Carcasa 2. Mediante la herramienta “Relacionar – Alineación axial” se alinean los ejes con las orificios circulares de la carcasa donde descansaran los rodamientos. De la misma manera se alinearán las tapas correspondientes a cada una de los orificios, aunque en este caso también es necesario el uso de la herramienta

“Relacionar – Alinear caras” para hacer coincidir las caras de las tapas y carcasa.

Para una mejor visualización del conjunto, la Carcasa 2 y las diferentes tapas como la Carcasa 1 más adelante, estarán seccionadas a la mitad. Por lo tal, el conjunto quedará de la siguiente forma.

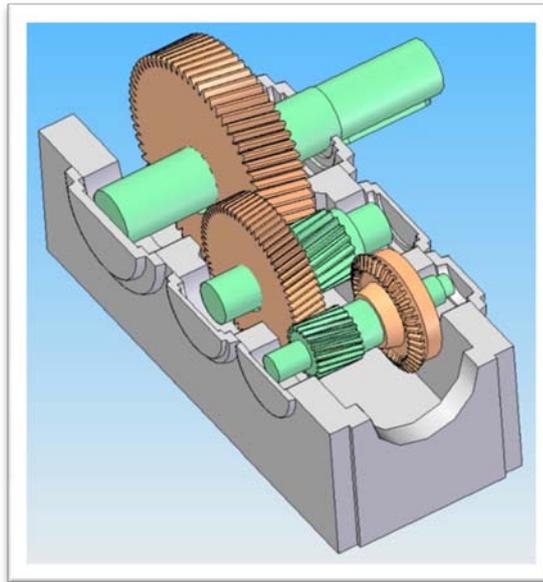
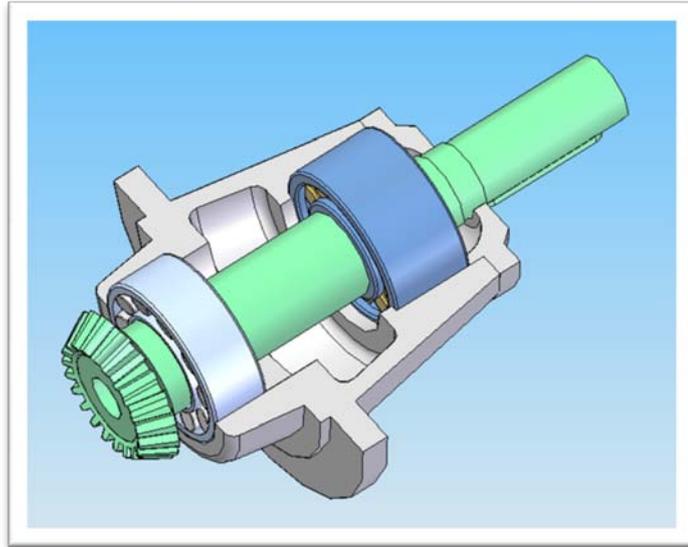


Ilustración 21

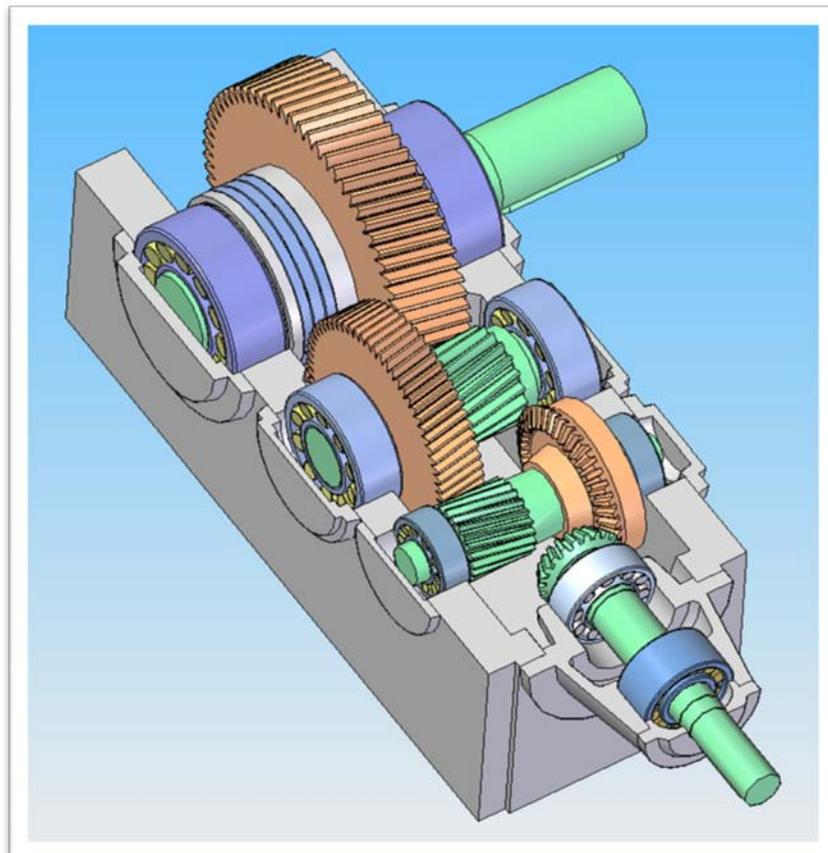
Por último, quedaría colocar los rodamientos. Para realizar esta operación se volverá a utilizar las herramientas anteriormente usadas, así pues alinearemos ejes y rodamientos axial y superficialmente.

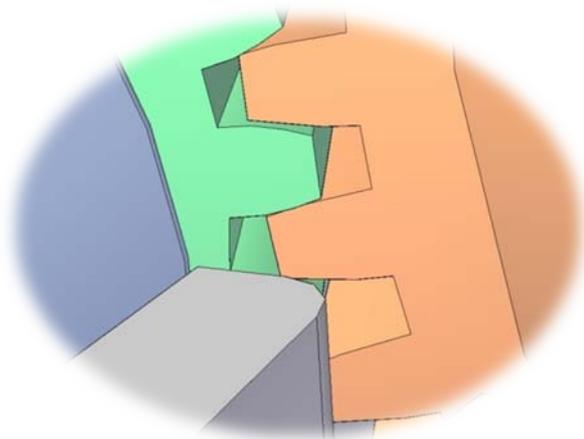
Estos mismos pasos serán seguidos para el montaje del subconjunto Carcasa 1 y Eje Piñón Cónico con los rodamientos correspondientes como se puede comprobar en la Ilustración 5: Plano descriptivo. de la página 24. De esta manera obtendremos el siguiente resultado a la espera de ensamblar este subconjunto con la carcasa principal.



**Ilustración 22: Subconjunto Carcasa 1.**

Finalmente, se alinearán las caras de ambas carcasas y se establecerá la interacción entre el piñón cónico y la corona dentada a fin que se produzca un engranaje fluido entre los respectivos dientes. En la siguiente ilustración podemos observar el resultado final del consunto ensamblado y el detalle del engranaje anteriormente mencionado.





**Ilustración 23: Ensamblado final del conjunto (arriba),  
Detalle del engranaje piñón cónico y corona dentada (abajo).**



## 4 Análisis con FEM

### 4.1 Método de elementos finitos.

El método de elementos finitos es un método de aproximación de problemas continuos, de tal forma que el continuo se divide en un número finito de elementos cuyo comportamiento se especifica mediante un número finito de parámetros asociados a ciertos puntos característicos denominados nodos. Estos nodos son los puntos de unión de cada elemento con su adyacente. La solución del sistema completo sigue las reglas de los problemas discretos. El sistema completo se forma por ensamblaje de elementos. Las incógnitas del problema dejan de ser funciones matemáticas y pasan a ser el valor de estas funciones en los nodos. El comportamiento en el interior de cada elemento queda definido a partir del comportamiento en los nodos mediante las adecuadas funciones de interpolación o funciones de forma.

El MEF, por tanto, se basa en transformar un cuerpo de naturaleza continua en un modelo discreto aproximado, esta transformación se llama discretización del modelo. El conocimiento de lo que sucede en el interior de este cuerpo aproximado, se obtiene mediante la interpolación de los valores conocidos en los nodos. Es por tanto una aproximación de los valores de una función a partir del conocimiento de un número determinado y finito de puntos.

### 4.2 Modos normales de vibración <sup>[1]</sup>.

Un modo normal de un sistema oscilatorio es la frecuencia a la cual la estructura deformable oscilará al ser perturbada. Los modos normales son también llamados frecuencias naturales o frecuencias resonantes. Para cada estructura existe un conjunto de estas frecuencias que es único.

A continuación se procederá a la obtención de la fórmula de las frecuencias de los modos normales de vibración de una cuerda cuyos extremos están fijos dado que nos va a servir de modelo para describir los modos de vibración de una barra con ambos extremos fijos. Finalmente nos

conformaremos con plantear la ecuación diferencial de movimiento para el caso de tres dimensiones.

#### 4.2.1 Vibraciones longitudinales sobre una cuerda.

La ecuación diferencial del movimiento ondulatorio utilizada para lo obtención de los modos normales de vibración de una cuerda es

$$v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

siendo  $v$  la velocidad de propagación de las ondas en la cuerda y  $\psi$  el desplazamiento transversal de un punto  $x$  de la cuerda en el instante  $t$ .

Estudiando una solución de la forma

$$\psi(x, t) = y(x) \cdot \sin(\omega t)$$

por lo tanto, cada punto de la cuerda vibra con una amplitud  $y(x)$  y con una frecuencia angular  $\omega$ . Convirtiéndose la ecuación diferencial en

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\omega^2}{v^2} y = 0$$

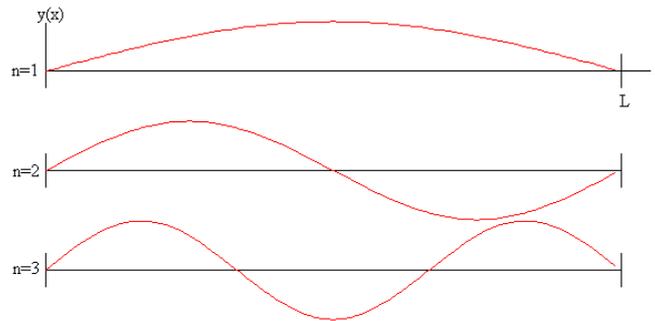
la solución de esta ecuación diferencial, similar al de un movimiento armónico simple, es  $y = A \sin(kx) + B \cos(kx)$  con  $k = \omega/v$  que es el número de onda.

Aplicando las siguientes condiciones de contorno, la cuerda esta fija por sus extremos  $x = 0$  y  $x = L$ . De la primera condición, tenemos que  $B = 0$ , y de la segunda  $\sin(kL) = 0$ , o bien  $kL = n\pi$ , con  $n = 1, 2, 3, \dots$  que nos da las distintas frecuencias de vibración de la cuerda

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{n}{2L} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

La amplitud de las oscilaciones de los puntos  $x$  de la cuerda en el modo normal  $n$  es

$$y_n(x) = A \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$



#### 4.2.2 Vibraciones longitudinales de una barra.

Para encontrar los modos normales de vibración de una barra elástica con ambos extremos fijos seguimos un procedimiento similar. La ecuación diferencial del movimiento de un elemento de la barra es

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + \frac{\rho A}{YI} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

siendo  $\psi$  el desplazamiento transversal de un punto  $x$  de la cuerda en el instante  $t$ ,  $\rho$  es la densidad de la barra,  $Y$  es el modulo de Young del material de la barra y  $I$  es el momento de inercia de la sección transversal de dicha barra.

Estudiando una solución de la forma

$$\psi(x, t) = y(x) \cdot \sin(\omega t)$$

cada punto de la cuerda vibra con una amplitud  $y(x)$  y con una frecuencia angular  $\omega$ . La ecuación diferencial se convierte en

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{\rho A}{YI} \omega^2 y = 0$$

Las raíces de la ecuación característica son

$$r^4 - q^4 = 0 \quad q = \left( \frac{\rho A}{YI} \omega^2 \right)^{1/4}$$

son dos raíces reales y dos imaginarias  $r = q, r = -q, r = iq, r = -iq$ .

La solución general es  $y(x) = C_1 e^{qx} + C_2 e^{-qx} + C_3 e^{iqx} + C_4 e^{-iqx}$  o de forma equivalente  $y = A_1 \sinh(qx) + A_2 \cosh(qx) + A_3 \sin(qx) + A_4 \cos(qx)$

La pendiente o derivada de  $y$  es,

$$\frac{dy}{dx} = q \left[ A_1 \cosh(qx) + A_2 \sinh(qx) + A_3 \cos(qx) - A_4 \sin(qx) \right]$$

Aplicando las siguientes condiciones de contorno:

- La barra está firmemente sujeta por sus extremos  $x = 0$  y la pendiente

en este punto es  $\frac{dx}{dy} = 0$ .

$$0 = A_2 + A_4$$

$$0 = A_1 + A_3$$

- La barra está firmemente sujeta por sus extremos  $y = 0$  y la pendiente

en este punto es  $\frac{dx}{dy} = 0$ .

$$0 = A_1 [\sinh(qL) - \sin(qL)] + A_2 [\cosh(qL) - \cos(qL)]$$

$$0 = A_1 [\cosh(qL) - \cos(qL)] + A_2 [\sinh(qL) + \sin(qL)]$$

Eliminando  $A_1$  y  $A_2$  obtenemos una ecuación trascendente en  $qL$

$$[\sinh(qL) - \sin(qL)] \cdot [\sinh(qL) + \sin(qL)] - [\cosh(qL) - \cos(qL)]^2 = 0$$

Las raíces  $r_n = q_n \cdot L$  de esta ecuación se calculan por el procedimiento numérico del punto medio, sus primeros cinco valores son:

$$r_n = 4.73, 7.85, 11.00, 14.14, 17.27$$

Conocido los valores posibles de  $q_n$  se calculan las frecuencias de vibración  $\omega_n = 2\pi f_n$ .

$$f_n = \frac{r_n^2}{2\pi} \frac{\sqrt{YI}}{\rho AL^4} = C_n \frac{\sqrt{YI}}{\rho AL^4}$$

Donde  $f_n$  es la frecuencia del modo normal  $n$  de vibración y  $C_n$  es un número que corresponde a este modo. Sus primeros valores son:

$$C_1 = 3.56, C_2 = 9.82, C_3 = 19.2, C_4 = 31.8, C_5 = 47.5, \text{ etc.}$$

El coeficiente  $C_n$  es independiente de las características de la barra y el segundo término, bajo la raíz, depende del material y de las dimensiones de la barra.

La amplitud de la vibración  $y(x)$  de los distintos puntos  $x$  de la barra en el modo normal de vibración  $n$  es:

$$y_n(x) = A \left\{ \left( \sinh(q_n x) - \sin(q_n x) \right) - \frac{\sinh(q_n L) - \sin(q_n L)}{\cosh(q_n L) - \cos(q_n L)} \left( \cosh(q_n x) - \cos(q_n x) \right) \right\}$$

El valor de la constante de proporcionalidad  $A$  es la escala vertical. Para que todos los modos de vibración estén dibujados a la misma escala, se calcula  $A$  por procedimientos numéricos, de modo que

$$\int_0^L y_n^2(x) dx = cte$$

### 4.2.3 Modos normales de un sistema tridimensional

Un trozo macizo de cualquier material tiene siempre cierto grado de elasticidad y, en consecuencia, tiene un espectro de modos normales de vibración. Esto será cierto incluso sí, como en el caso de las cuerdas y barras que acabamos de estudiar, imaginamos que sus límites se encuentran fijos. Por ejemplo, un material como la jalea que llene un completamente un recipiente más o menos rígido puede ponerse a vibrar de un modo complejo si al recipiente se le da un golpe repentino.

En el caso de sistemas monodimensionales y bidimensionales, hemos podido discutir y describir los modos característicos de la oscilación transversal de un modo bastante claro. Cuando pasamos a los sistemas tridimensionales ya no nos queda ninguna dirección de repuesto, como en el caso anterior, a lo largo de la cual podía verse que tenía lugar el desplazamiento. Por lo tanto nos conformaremos con señalar que se puede plantear para el caso de tres dimensiones una ecuación diferencial del movimiento que tiene una analogía estricta con las ecuaciones que hemos desarrollado previamente para una o dos dimensiones. La ecuación será de la forma

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

en donde  $v$  representa cierta velocidad característica, por ejemplo, la velocidad definida por el valor de  $\sqrt{K/\rho}$ , donde  $K$  es el módulo de compresibilidad adecuado. La magnitud escalar puede ser entonces el valor de la presión en una posición y tiempo dados. Al estudiar las vibraciones normales de una varilla o una columna de aire estábamos realmente utilizando una reducción monodimensional de esta ecuación. El modo en aquellos casos era ciertamente tridimensional pero decidimos limitar nuestra atención a las vibraciones que se podían describir en función de una coordenada de posición solamente.

Ahora nos damos cuenta que deben especificarse las condiciones límite para todas las superficies exteriores del sistema. Debido a la complejidad de estos cálculos nos vemos sometidos a la utilización de un programa de

simulación y análisis de elementos finitos, como es en nuestro caso FEMAP y NX NASTRAN.

### 4.3 FEMAP.

FEMAP<sup>[7]</sup> es la herramienta líder a nivel mundial en programas de ingeniería basados en el Método de Análisis por Elementos Finitos. FEMAP permite modelar y estudiar el comportamiento de piezas o complejos ensamblajes y realizar análisis estáticos lineales, pandeo, modal, post-dinámicos, no lineales, fluidos, transmisión de calor, optimización, etc. y conocer virtualmente el comportamiento del producto antes de su fabricación asegurando así mayor calidad, menores costes de desarrollo y una reducción importante del tiempo de lanzamiento del producto al mercado.

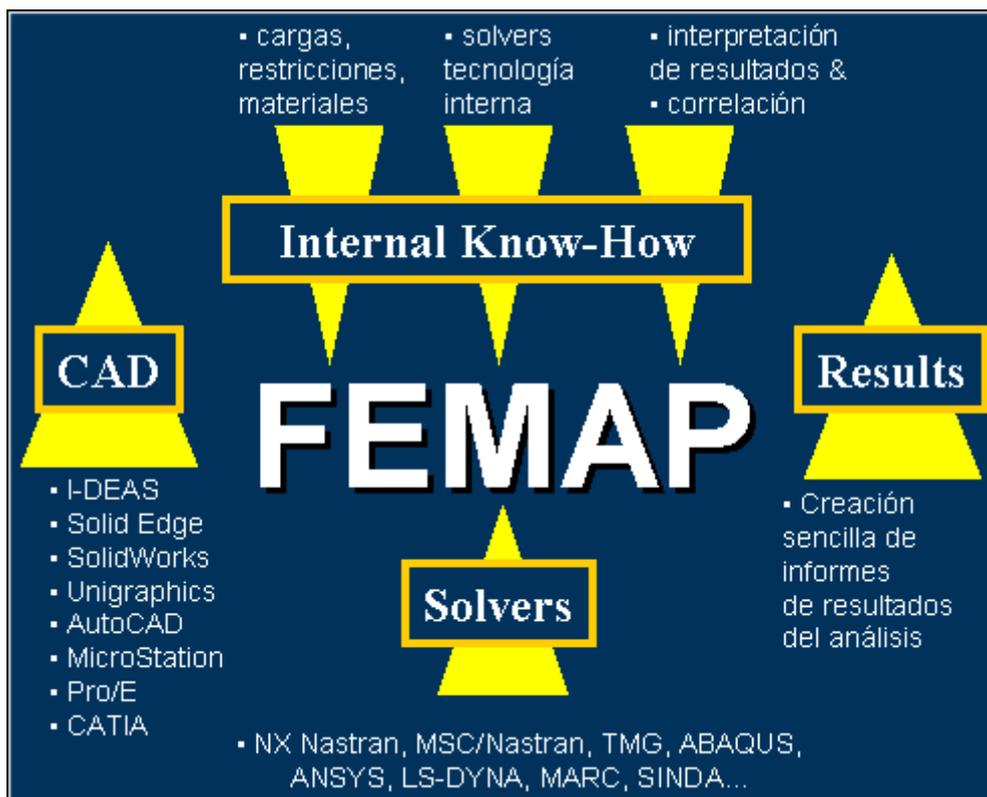


Ilustración 24: Estructura de FEMAP.

**FEMAP** (*Finite Element Modeling And Postprocessing*) fue creado en 1985 por la compañía Enterprise Software Products Inc. (ESP) como un programa Windows nativo, inicialmente solo como preprocesador para MSC/NASTRAN y MSC/PAL. En Septiembre de 1999 ESP fue adquirida por

SDRC, compañía que se fusionaría con EDS, y más tarde ésta con UGS en el año 2001. Desde entonces se han comercializado en todo el mundo más de 14.000 licencias de FEMAP, gozando de un excepcional prestigio y aceptación entre ingenieros.

FEMAP se incluye empaquetado por otras compañías dentro de aplicaciones tan conocidas como CDesign de Blue Ridge Numerics, MAYA TMG, SafeHULL de American Bureau of Shipping, Sinda/G de Network Analysis Inc., NE/Nastran Modeler de Noran Engineering Inc. y MSC/Nastran for Windows de MSC.Software.

En Febrero de 2005, UGS anuncia el lanzamiento de FEMAP V9.0 con un nuevo interface de usuario, integración con NX Nastran y capacidades avanzadas de análisis no lineal que le da un nuevo impulso al eterno pre&postprocesador FEMAP con más de 20 años de historia.

Como ejemplo de aceptación de FEMAP en la comunidad ingenieril, durante 1996 Boeing Huntsville estuvo evaluando FEMAP. En Enero de 1997 Boeing Huntsville seleccionó FEMAP como primera herramienta de modelado y análisis en PCs, conectado a servidores SGI donde corrían principalmente NASTRAN y ABAQUS. Actualmente Boeing Huntsville tiene más de 200 licencias de FEMAP trabajando en el desarrollo de la estación espacial.

#### **4.3.1 Windows nativo.**

FEMAP es un programa Windows nativo con un interface de usuario compatible con Microsoft Office, fácil de usar, que ofrece los siguientes beneficios para el usuario:

- Permite abrir múltiples modelos de análisis en la misma sesión de trabajo, y utilizar múltiples vistas dentro de cada modelo.
- Soporta operaciones de “copiar y pegar” entre diferentes modelos.
- Manipular entidades de nivel superior tales como cargas y restricciones dentro del árbol de operaciones del modelo.

- Revisar y editar datos del modelo de FEMAP a través del editor de entidades, así como copiar y pegar información entre aplicaciones Windows.
- Usar tablas de datos para ordenar, agrupar y editar datos del modelo.
- Seleccionar entidades Femap desde el nivel superior del interface de usuario.

#### 4.3.2 CAD independiente.

FEMAP ofrece una filosofía de sistema CAD neutro e independiente, capaz de comunicarse con los sistemas CAD 3D más importantes del mercado tales como Pro/Engineer, CATIA, Unigraphics NX, I-Deas y Solid Edge a través de ficheros nativos. Con Solid Edge la comunicación puede realizarse a través de ficheros Parasolid, permitiendo leer modelos geométricos tanto de piezas como ensamblajes. Incluye potentes herramientas para construir geometrías tales como líneas, arcos, superficies y sólidos utilizando los kernels geométricos 3D sólidos Parasolid y ACIS. Adicionalmente permite leer ficheros IGES y STEP, así como DXF 2D.

#### 4.3.3 SOLVER independiente.

FEMAP ofrece un alto nivel de soporte de los principales solvers de Elementos Finitos del mercado, incluyendo las versiones más populares de NX Nastran, MSC/Nastran, Abaqus, Ansys, Marc, LS-Dyna, Sinda, TMG, COSMOS/M, etc.

FEMAP permite pre&postprocesar resultados de análisis por elementos finitos realizados con los programas de EF más importantes del mercado de modelos estáticos lineales, modales, pandeo, transmisión de calor, análisis no lineales, análisis dinámicos avanzados, etc.

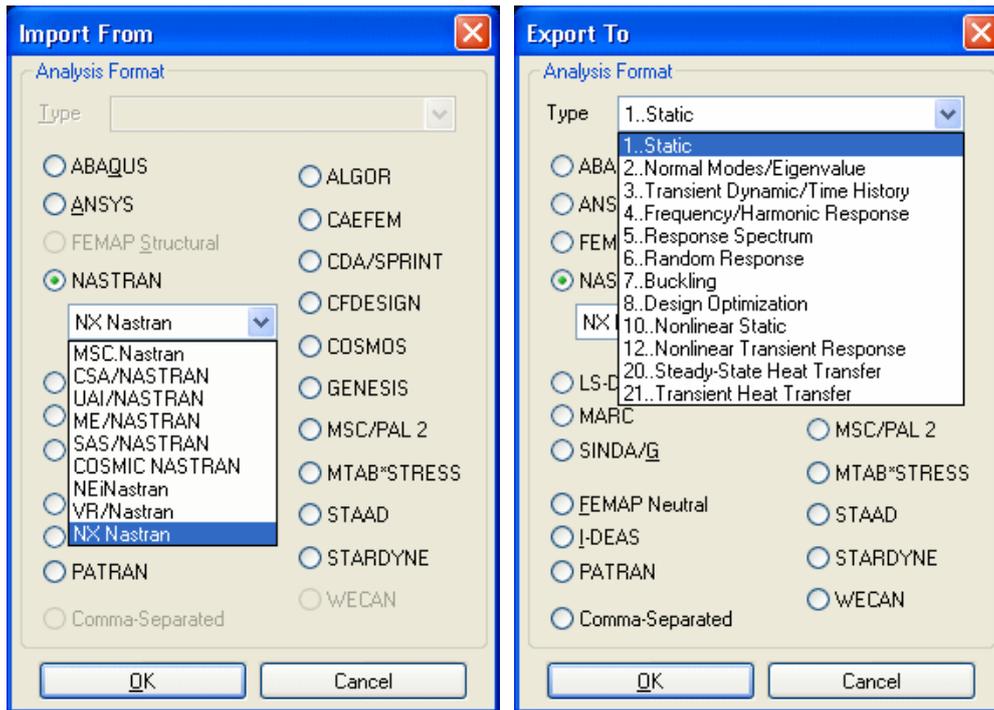


Ilustración 25: Programas de Análisis por Elementos Finitos soportados por FEMAP

#### 4.4 NX NASTRAN.

NX Nastran es un solver avanzado de simulación y análisis por elementos finitos adaptable a diferentes entornos de ingeniería, con independencia del tamaño de su compañía y del presupuesto de I+D que disponga.

Desde hace más de 30 años, Nastran es la herramienta de análisis y simulación por excelencia en la industria aeronáutica, aeroespacial, defensa, automoción, construcción de barcos, maquinaria pesada, bienes de equipo, medicina y productos de consumo, es decir, todo un estándar industrial en simulación e ingeniería asistida por ordenador (CAE) para el cálculo de tensiones, vibraciones, durabilidad, fatiga, ruido, acústica y aeroelasticidad.

NX Nastran está disponible en dos versiones principales: “NX Nastran Enterprise” como solver “stand-alone” con licencias flotantes para empresas de mayor envergadura que requieren una solución de análisis flexible, única, potente y rentable implementada sobre CPUs en red de tipo servidor (UNIX & LINUX de HP Itanium, Opteron, SGI, IBM y SUN) dando soporte a múltiples

usuarios y en diferentes lugares, y “NX Nastran Desktop” para entornos de ingeniería como Unigraphics NX Scenario, I-deas NX MasterFEM o FEMAP. Ambas versiones Enterprise y Desktop son la misma, sólo difieren en el mecanismo de licencia y el empaquetado.

**NASTRAN (NASA STRUCTURAL ANALYSIS PROGRAM)** nació en 1965 como un solver de análisis por elementos finitos financiado por el gobierno americano y desarrollado por la NASA para realizar cálculos estructurales en proyectos espaciales y aeronáuticos. La NASA buscaba crear una herramienta de simulación y análisis por elementos finitos capaz de llevar a cabo una amplia gama de análisis estructurales avanzados, y a la vez dotarla de posibilidades de personalización y ampliación en manos del sector comercial. Tras el desarrollo del código inicial, la NASA registró Nastran en 1976 como marca comercial en USA haciendo público el código fuente con el nombre COSMIC/NASTRAN para permitir su posterior desarrollo comercial por parte de la industria.

En 1971 MacNeal Schwendler Corp.(MSC) compra a la NASA los derechos de Nastran y lanza al mercado la primera versión de MSC/Nastran, continuando su desarrollo y suministro de licencias a usuarios comerciales y gubernamentales. MSC/Nastran se convierte en el “standard de facto” para muchas compañías. Otras empresas como UAI, CSAR, Noran Engineering, MI, etc. compran los derechos de Nastran y crean programas como UAI/Nastran y CSA/Nastran, etc., convirtiéndose en una alternativa de bajo precio a MSC/Nastran, que empieza a perder terreno ya que muchas compañías reemplazan MSC/Nastran por uno de estos productos. En 1999 MSC compra UAI/Nastran y CSA/Nastran, interrumpiendo su desarrollo tras la compra. Al desaparecer la competencia, MSC incrementa de forma considerable el precio de MSC/Nastran.

Como consecuencia de las quejas de la industria, la FTC (*Federal Trade Commission*) sanciona a MSC a compartir el código fuente, así como los derechos de distribución, documentación, materiales de formación, etc. y a mantener los formatos de ficheros de MSC.Nastran totalmente compatibles

durante 3 años. UGS PLM Solutions es seleccionado para licenciar NASTRAN y tras los acuerdos definitivos entre UGS PLM Solutions, la Comisión Federal de Comercio americana y MSC.Software, UGS PLM Solutions comienza a desarrollar, soportar y distribuir a nivel mundial su propia versión del software MSC.Nastran con el nombre NX Nastran. La competencia en Nastran se restablece, y UGS incluye NX Nastran en todas sus líneas de productos CAE de diseño conceptual, diseño de detalle y diseño final a través de I-deas, Unigraphics NX y FEMAP.

NX Nastran está basado en el mismo código fuente de MSC.Nastran v2001.9 (Septiembre-2003) fruto de más de 1000 años-hombre de inversión en I+D, y todos los formatos de ficheros de datos de entrada/salida son idénticos a los utilizados por MSC.Nastran.

Por lo tanto, **Femap con NX NASTRAN** es una suite que combina dos de los programas más populares y potentes del mundo de análisis estructural y térmico: las capacidades avanzadas de pre&postprocesado de FEMAP y los módulos de análisis por elementos finitos de NX Nastran.

Femap con NX NASTRAN integra NX Nastran en el entorno de FEMAP y soporta directamente gran parte de las capacidades de NX Nastran, tales como análisis estático lineal y no lineal, modal, pandeo, análisis dinámico transitorio, espectros de respuesta, análisis armónico y vibraciones aleatorias. Opcionalmente Femap con NX NASTRAN ofrece acceso a través de FEMAP a los módulos avanzados de análisis de NX Nastran tales como super-elementos, optimización y DMAP. NX Nastran for FEMAP ofrece también un amplio rango de posibilidades para definir y controlar directamente aspectos de la simulación con NX Nastran y posterior postprocesado de resultados.

Femap con NX NASTRAN incluye el pre&postprocesador FEMAP y los siguientes módulos de cálculo y análisis por elementos finitos de NX Nastran:

- Análisis estático lineal (SOL101).
- Frecuencias y modos de vibración (SOL103).
- Pandeo lineal (SOL105).

- Transferencia de calor (SOL153).
- Análisis no lineal básico (SOL106).
- Soldaduras punto-a-punto.
- Contacto 3D superficie-a-Superficie.
- Unión fija entre piezas (Glue Contact).
- Tornillos pretensados.

#### 4.5 Pre-Proceso del modelo.

En primer lugar, prepararemos la geometría del modelo y definiremos el material, definiremos las propiedades de los elementos, aplicaremos las cargas y restricciones, y finalmente mallaremos la geometría. Esta fase se llamará pre-procesamiento y será realizada con el programa FEMAP.

##### 4.5.1 Importación de la geometría.

Es de gran importancia seleccionar las unidades de longitud en las que vamos a trabajar, para ello recurrimos a la pestaña “File” dentro del menú principal de FEMAP y seleccionamos “Preferences”. Allí seleccionaremos como unidades de longitud “metros”.

Gracias al CAD independiente de FEMAP, como hemos comentado anteriormente, la fase de importación desde Solid Edge puede realizarse de forma sencilla, permitiendo leer modelos geométricos tanto de piezas como ensamblajes. Para llevar a cabo la importación, seleccionamos dentro del menú la pestaña File – Import, apareciendo así una ventana desde donde buscaremos la ubicación de nuestra pieza o conjunto. Una vez seleccionado el fichero, al abrirlo, aparece una ventana en la que se nos advierte si queremos mantener las unidades de importación, pero como ya habíamos seleccionado las unidades con las que queríamos trabajar contestamos “No”. A continuación se nos pide que seleccionemos si queremos usar la pieza simplificada o la pieza diseñada. En nuestro caso se utilizaron las piezas diseñadas.

Una forma para comprobar que las importaciones se realizaron correctamente es el empleo de una herramienta para medir la distancia entre puntos, esta se encuentra dentro de la pestaña Tools – Distance.

#### **4.5.2 Definición de las propiedades del material.**

El siguiente paso es definir el material. Para crear materiales en FEMAP, simplemente asignamos las características específicas del material (por ejemplo, Módulo de Young, Módulo de Poisson, densidad...) a un nombre determinado de material. Por ejemplo, Material #1 puede tener las características materiales del acero al carbón, y el Material #2 puede tener las características materiales del Aluminio 2024. Entonces como creamos nuestro propio modelo podemos especificar los elementos que serán acero al carbón y otros que serán aluminio. También se pueden definir materiales de forma manual introduciendo los valores numéricos de sus características o cargando y guardando el material desde una librería de materiales. Si introducimos nuestros propios valores, como es nuestro caso, tendremos que estar seguros que estamos introduciendo unidades consistentes, por ejemplo, si introducimos las dimensiones de la geometría en unidades del sistema internacional (metros), también deberíamos introducir las propiedades del material en unidades del sistema internacional.

En nuestro caso vamos a definir dos material introduciendo manualmente los valores. Los datos introducidos para ambos materiales están representados en la siguiente tabla. Para realizar este paso seleccionamos en el menú principal de FEMAP “Model” y elegimos “Material”, una vez dentro introducidos el nombre del material y los valores de sus propiedades en sus casillas correspondientes, pulsamos OK e introducimos de la misma forma los datos relativos al otro material.

Tabla 6: Propiedades de los materiales<sup>[8]</sup>.

Material	Propiedades	Valor
Acero	Módulo de Young (Pa)	210E09
	Módulo de Poisson	0.29
	Densidad ( $kg/m^3$ )	7833
Hierro, fundición gris	Módulo de Young (Pa)	66.19E09
	Módulo de Poisson	0.29
	Densidad ( $kg/m^3$ )	6920

#### 4.5.3 Definición de las propiedades de los elementos.

A continuación pasamos a definir las propiedades elementales que determinarán que tipo de elementos serán usados en la construcción de nuestro modelo. Completaremos este apartado de la misma forma que definimos los grupos de materiales. Los datos de propiedades definen unas propiedades geométricas del elemento (espesor, áreas, radios, etc.), una masa específica, y una inercia, también se selecciona el material para el elemento desde “Material Group” donde lo teníamos previamente definido. Existen varios tipos de propiedades diferentes a elegir desde: elementos lineales (barras y viga), elementos planos (membranas y laminares), y elementos sólidos de tres dimensiones. El tipo específico de elemento finito usado dependerá de la geometría de la estructura y de cómo debe ser idealizada. Por ejemplo, una barra es claramente tridimensional, sin embargo, puede ser idealizada como un estado bidimensional de tensiones (en este caso, bidimensional en el plano x-y)

Seguidamente vamos a modelar las piezas que componen nuestro reductor de velocidad, por lo tanto, haremos uso de elementos sólidos de tres dimensiones para poder calcular los modos normales de vibración de la estructura del reductor. Para llevar a cabo la definición de propiedades de los elementos vamos al menú principal de FEMAP y seleccionamos “Model” y elegimos “Property”. En la caja de dialogo de “Define Property” clicamos en el botón “Elem/Property Type...”, cuando aparece el nuevo cuadro seleccionamos “Solid” y verificamos que todos los otros ajustes se han modificado correctamente. En el cuadro de dialogo “Define Property - Solid” rellenamos los valores de ID y Título. Por último, seleccionamos uno de los materiales anteriormente creados en el desplegable de la casilla “Material”. Repetimos la misma operación para el otro material.

#### **4.5.4 Aplicación de las cargas y restricciones.**

El siguiente paso es aplicar las cargas y restricciones. En general ambas, las cargas y las restricciones, son aplicadas de la misma forma en FEMAP. Existen los mismos tipos de cargas y restricciones que pueden ser aplicadas cuando realizamos un análisis de elementos finito mediante cálculos a mano. Para aplicar una carga o una restricción a un modelo, primero debemos definir un “set” en el cual definiremos la carga o restricción. Esto te permitirá cambiar las cargas o restricciones del modelo fácil y rápidamente simplemente definiendo un nuevo set y aplicándolo en el análisis. Una vez que hayamos definido nuestro set de cargas y restricciones, podremos aplicar cada uno de ellos en una variedad de formas. En nuestro caso, aplicaremos las restricciones sobre superficies curvas (por ejemplo una superficie previamente definida sobre la geometría).

Desde el menú principal de FEMAP seleccionamos “Model”, después elegimos “Constraint” y “On Curve...”. Aparece el cuadro de dialogo “Create or Activate Constraint Set”. En Título escribiremos el tipo: Empotramiento. Seleccionamos OK. Cuando aparezca el cuadro de dialogo “Entity Selection – Enter Curve(s) to Select”, con el ratón, seleccionamos las superficies que se quieren empotrar y hacemos clic en el botón izquierdo. Al seleccionar OK se

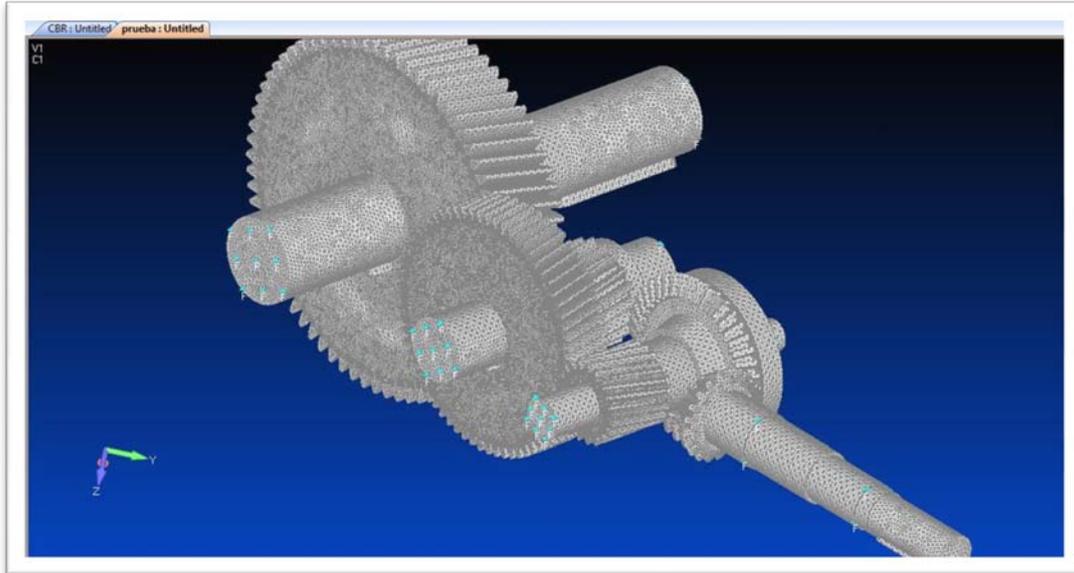
abre el cuadro de dialogo “Create Constraints on Geometry”. Si las entradas están por defecto (Preseleccionado Fixed), seleccionamos OK.

En este momento las restricciones han sido aplicadas. Un pequeño triángulo con la letra F debajo significa que la superficie esta empotrada.

#### 4.5.5 Creación de la malla.

Ahora que la forma del modelo ha sido creada, utilizaremos el comando “Mesh”. En la primera parte de este paso, dividiremos el sólido en los elementos que creamos apropiados según queramos una malla más o menos refinada. Para ello acudimos al menú principal de FEMAP y seleccionamos “Mesh”, después elegimos “Mesh Control” y “Size On Solid...”. Aparece un cuadro de dialogo, “Entity Selection – Select Solid(s) to Set Mesh Size”, y con el ratón seleccionamos las superficies que se quieren dividir y hacemos clic en el botón izquierdo. Seleccionamos OK, e introducimos el número de elementos que creamos oportuno para el tamaño de la malla.

Desde el menú principal de FEMAP seleccionamos “Mesh” y después elegimos “Geometry” y “Solids...”. Aparece un cuadro de dialogo, “Entity Selection – Select Solid to Mesh”, con el ratón seleccionamos el sólido del modelo y pulsamos OK. En este momento aparece el cuadro de dialogo “Automesh Solid”, en él seleccionamos una de las propiedades anteriormente creadas en el desplegable de la casilla “Property”. Seleccionamos OK. En una primera prueba de simulación compuesta por el conjunto de los ejes y los engranajes, nuestro modelo quedaría tal y como puede observarse en la siguiente ilustración.



**Ilustración 26: Mallado del conjunto.**

Llegado este momento, es bueno guardar nuestro trabajo. Seleccionamos “File” dentro del menú principal de FEMAP y entonces elegimos “Save AS...”. Introducimos el nombre del archivo, por ejemplo Prueba, navegamos en nuestro directorio de trabajo, y seleccionamos “Save”.

#### **4.6 Correr el análisis.**

El modelo generado por FEMAP puede ser exportado a cualquier “solver”, en nuestro caso, vamos a utilizar NX NASTRAN. El primer paso es seleccionar NX Nastran como el programa de análisis y especificar el tipo de análisis que se va a realizar, en nuestro caso, un análisis de frecuencias y modos de vibración.

Para ello seleccionamos, dentro del menú principal de FEMAP, “File” y después elegimos “Analyze...”. Cuando se abre el cuadro de dialogo “Analyce Set Manager” seleccionamos “New” para crear un nuevo set de análisis, aquí introducimos el nombre que queramos dar al análisis dentro de la casilla título, seleccionamos como programa de análisis NX Nastran (36.NX NASTRAN) y como tipo de análisis modos de vibración (2.Modal). Seleccionamos OK y a continuación “DONE”.

Para comenzar la etapa de análisis clicamos en “Analyze”. En este momento, la ventana de análisis de NASTRAN se abre automáticamente y comienza a correr. Se puede observar el estado del proceso de análisis en la ventana “Analysis Monitor” a la izquierda de la pantalla. Cuando Nastran ha terminado, aparecerá un mensaje en el que se lee “NX Nastran finished” seguido de la fecha. En el caso que se produzcan errores, podrás saber más de ellos dentro de “NE/Nastran Editor”.

#### **4.7 Post-Proceso.**

En esta sección, usaremos FEMAP para ver gráficamente los resultados del análisis. Daremos instrucciones a FEMAP para presentar las tensiones en un gráfico de contorno de colores de forma que las tensiones máximas y su ubicación sean rápidamente identificadas. Los colores de la gráfica de contorno mostrarán el nivel de tensión de cada localización en el modelo. La deformación de la pieza bajo los modos de vibración estará representada por la deformación del modelo de la imagen.

A continuación presentaremos los resultados correspondientes a los primeros diez modos normales de vibración. Desde el menú principal de FEMAP, seleccionamos “View” y después elegimos “Select...”. También podemos hacer uso de la tecla rápida F5. Aparecerá una ventana de dialogo “View Select”, donde podremos editar gráficas con las tensiones locales, determinar los nodos donde se producen las deformaciones máximas y mínimas, etc.... para cada uno de los diferentes modos de vibración.

#### **4.8 Resultados.**

En este apartado del capítulo 4, se expondrán los resultados obtenidos en las simulaciones de las diversas piezas que componen nuestro reductor de velocidad. Todos estos resultados se consiguieron siguiendo minuciosamente los pasos descritos en las etapas de pre-proceso, análisis y post-proceso anteriormente comentadas.

### 4.8.1 Carcasa.

Debido a su simpleza geométrica con respecto a otras piezas, la carcasa fue la primera pieza del reductor que sometimos al estudio de modos normales de vibración. La particularidad de esta pieza con relación a las demás es el material con la que ha sido fabricada, fundición gris. La restricción a la que fue sometida la carcasa, fijación de la superficie inferior, emula la sujeción a la bancada donde se apoya. Con todos estos datos de entrada, el programa proporcionó los datos de salida que se muestran en la tabla situada a continuación de la imagen de la deformación de la carcasa en la etapa de post-proceso.

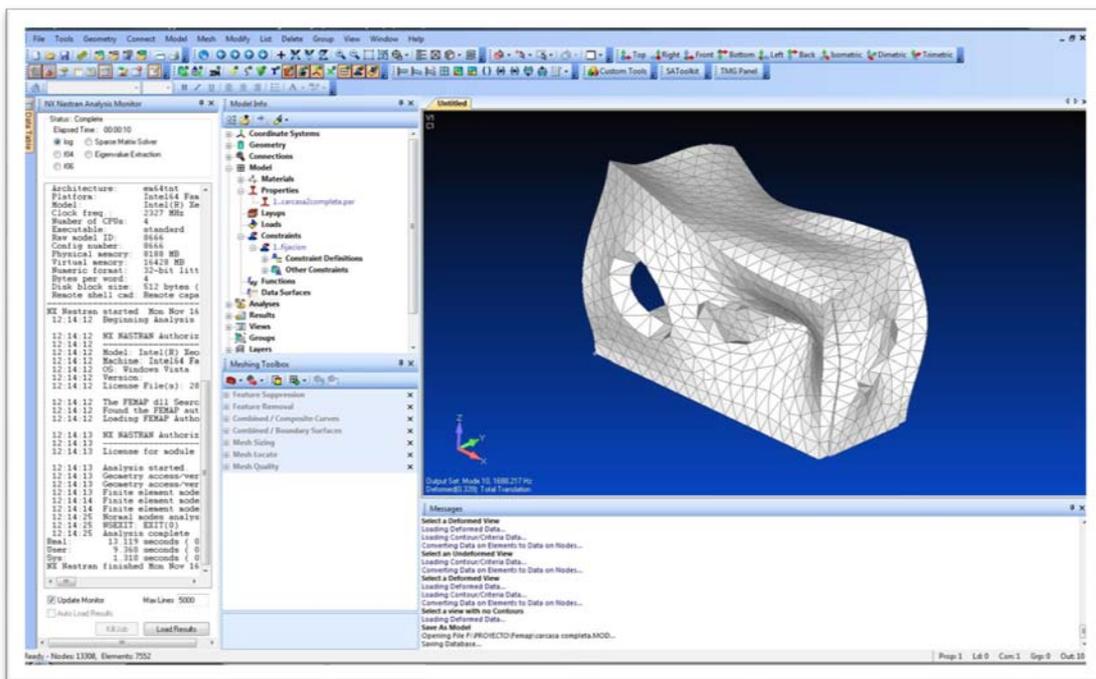


Ilustración 27: Análisis de la carcasa.

Tabla 7: Modos vibración Carcasa.

Modos de vibración (n)	Frecuencia de vibración
Modo 1	285,3538 Hz

<b>Modo 2</b>	615,6657 Hz
<b>Modo 3</b>	732,1493 Hz
<b>Modo 4</b>	1086,36 Hz
<b>Modo 5</b>	1275,695 Hz
<b>Modo 6</b>	1392,017 Hz
<b>Modo 7</b>	1483,768 Hz
<b>Modo 8</b>	1585,434 Hz
<b>Modo 9</b>	1683,748 Hz
<b>Modo 10</b>	1688,217 Hz

#### 4.8.2 Eje 3.

Debido a ser el único eje que no cuenta con piñón, fue el primero en someterse al estudio de modos normales de vibración. Esto se debió únicamente al hecho del tiempo que invertía en la simulación, ya que el número de nodos (en torno a diez mil) que conforma su maya era bastante inferior al de un eje que si contase con piñón (en torno a cien mil). A modo de información, la duración de esta simulación fueron escasos segundos, mientras que la simulación de los ejes que contaban con piñón se prolongaba más allá de los cuarenta minutos. Todos los ejes que forman parte del reductor de velocidad fueron mecanizados en acero, cuyas propiedades características las encontramos en la Tabla 5 de la página 65. Introduciendo estos datos de entrada, el programa proporcionó los siguientes datos mostrados en la Tabla 7

a continuación de la Ilustración 26 donde podemos observar la deformación virtual de la pieza bajo un modo n de vibración.

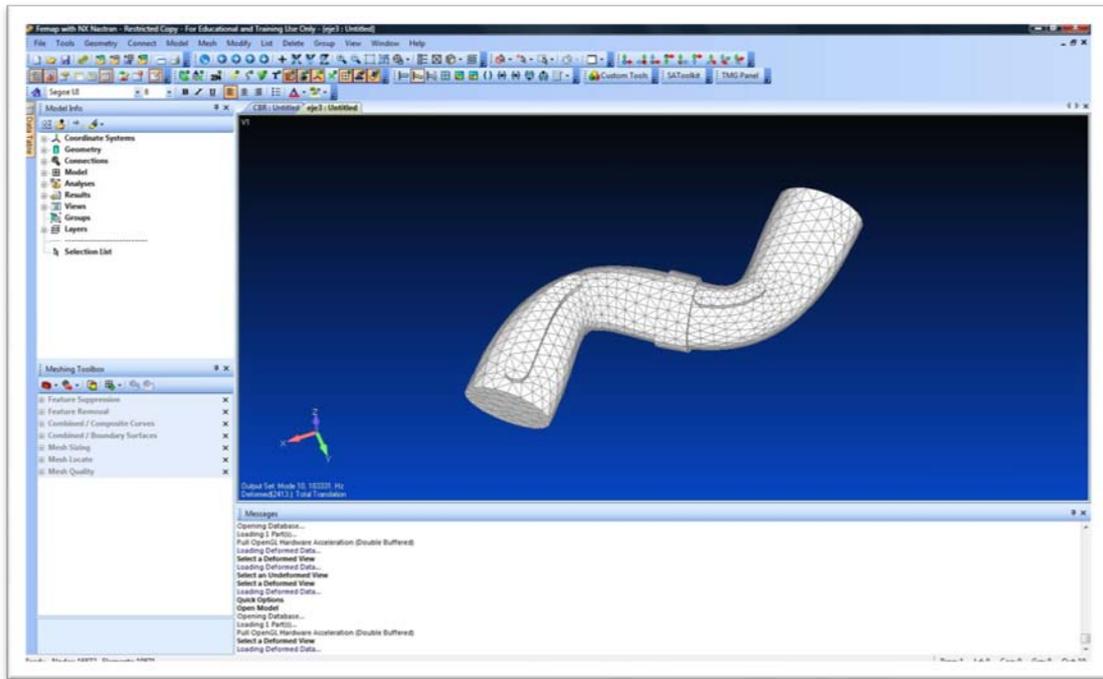


Ilustración 28: Análisis del Eje 3.

Tabla 8: Modos vibración Eje 3.

Modos de vibración (n)	Frecuencia de vibración
Modo 1	1751,619 Hz
Modo 2	1768,946 Hz
Modo 3	3961,806 Hz
Modo 4	4307,85 Hz
Modo 5	4377,215 Hz
Modo 6	6637,136 Hz

<b>Modo 7</b>	7548,242 Hz
<b>Modo 8</b>	7626,914 Hz
<b>Modo 9</b>	8425,28 Hz
<b>Modo 10</b>	11111,4 Hz

#### 4.8.3 Eje 2.

Como se ha señalado anteriormente, el eje cuenta con un piñón, que conlleva la existencia de determinados dientes con elevada complejidad geométrica dificultándonos así su mallado manual. Por este motivo recurrimos al mallado automático que genera un mayor número de nodos, que a pesar de ajustar el resultado con un menor error, nos aumenta el tiempo de simulación de forma exponencial. En el apartado de restricciones, estas se han colocado en la posición que ocuparían los rodamientos, para así simular la existencia de estos. Como resultado final, la representación gráfica del Eje 2 sometido a deformación por un modo n de vibración y los modos de vibración que aparecen reflejados en la Tabla 8.

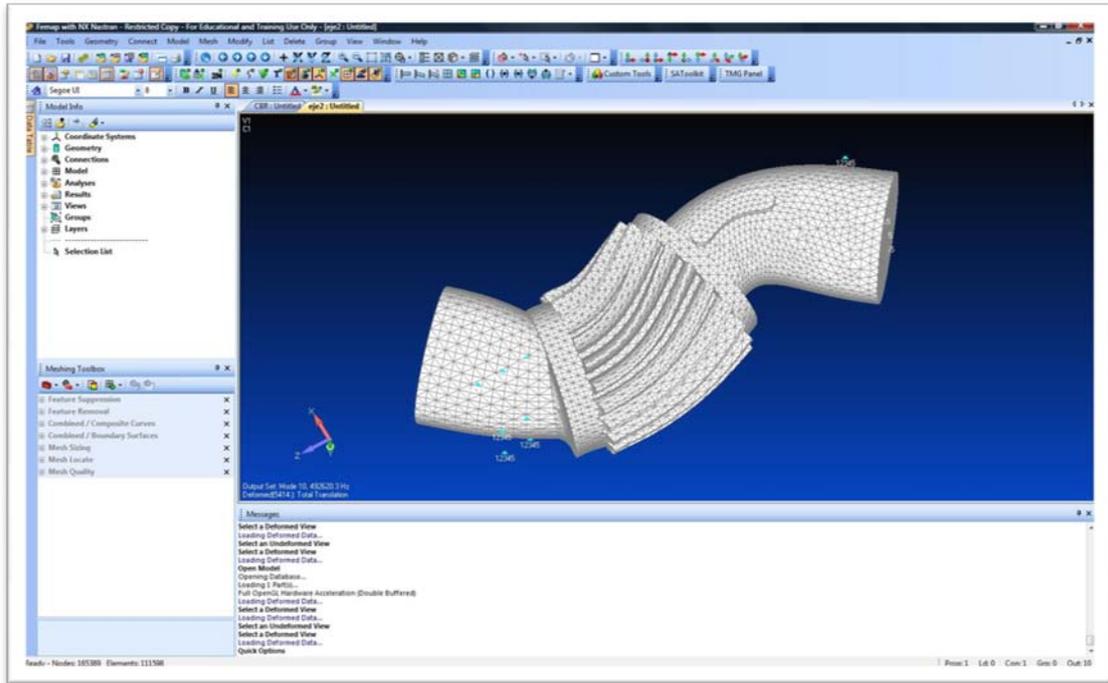


Ilustración 29: Análisis del Eje 2.

Tabla 9: Modos vibración Eje 2.

Modos de vibración (n)	Frecuencia de vibración
Modo 1	1858,318Hz
Modo 2	1881,371Hz
Modo 3	3401,595Hz
Modo 4	5202,911Hz
Modo 5	5259,764Hz
Modo 6	7098,524Hz
Modo 7	8926,491Hz

<b>Modo 8</b>	8993,457Hz
<b>Modo 9</b>	10334,832Hz
<b>Modo 10</b>	14242,338Hz

#### 4.8.4 Eje 1.

Debido al parecido geométrico de este eje con el eje analizado en el apartado anterior, procedemos a realizar los mismos pasos sobre la pieza. Por lo tanto, se hará uso del mallado automático a un que conlleve un mayor tiempo dedicado al cálculo y se fijaran las restricciones pertinentes sobre las superficies donde se encontrarían los rodamientos. Sin olvidarnos de introducir los datos referentes a las propiedades materiales del acero como ya se especificó anteriormente en este mismo capítulo. Una vez introducida esta información, el programa nos proporciona los modos normales de vibración del Eje 1 mostrados en la siguiente tabla.

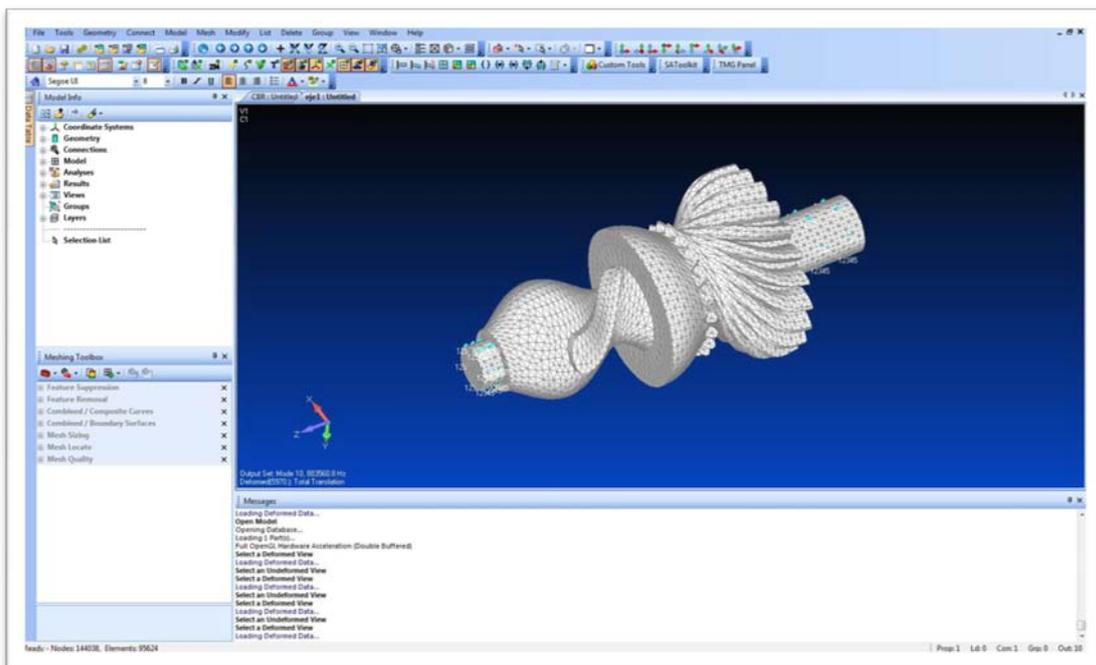


Ilustración 30: Análisis del Eje 1.

Tabla 10: Modos vibración Eje 1.

Modos de vibración (n)	Frecuencia de vibración
Modo 1	2160,629 Hz
Modo 2	2191,835 Hz
Modo 3	3199,447 Hz
Modo 4	6645,646 Hz
Modo 5	6695,972 Hz
Modo 6	8307,126 Hz
Modo 7	11244,37 Hz
Modo 8	11306,68 Hz
Modo 9	13332,26 Hz
Modo 10	18872,47 Hz

#### 4.8.5 Eje Piñón Cónico.

Para finalizar los cálculos relativos al programa de elementos finitos FEMAP, se procedió a analizar el último eje que nos quedaba por simular. Tanto las restricciones como las propiedades del material fueron introducidas como ya se describieron. Además como dicho eje también contaba con un piñón, en este caso cónico, se procedió a utilizar el mallado automático. La siguiente imagen muestra la deformación virtual del eje bajo la influencia de un

modo normal de vibración, y seguidamente se muestran en una tabla con los resultados obtenidos mediante la simulación.

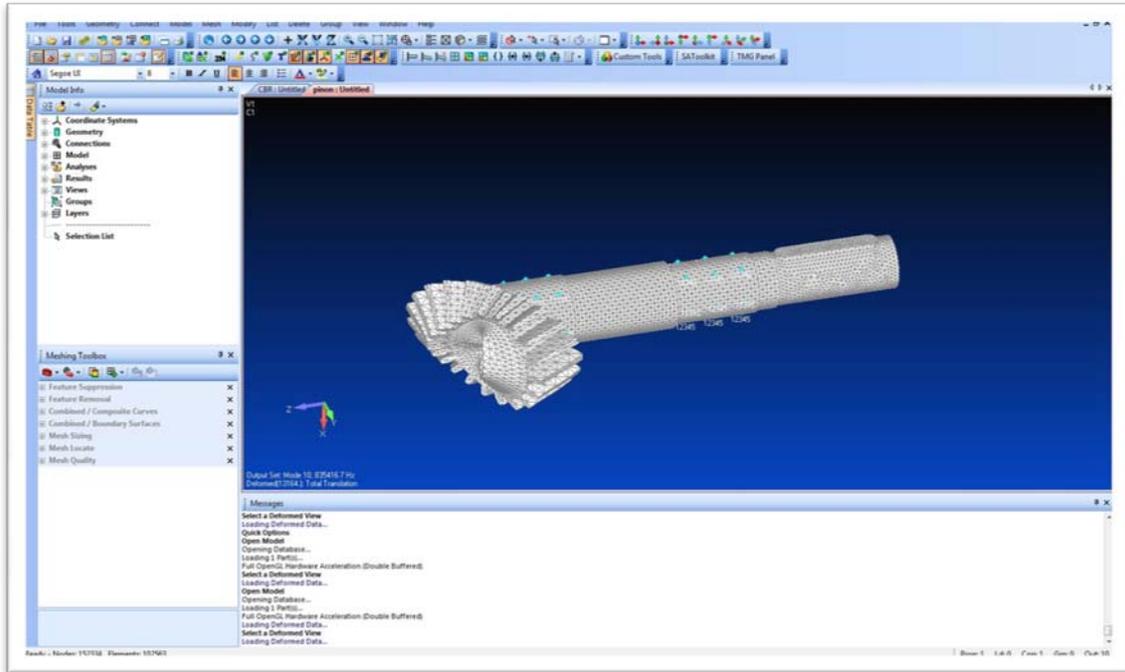


Ilustración 31: Análisis del Eje Piñón Cónico.

Tabla 11: Modos de vibración del Eje Piñón Cónico.

Modos de vibración (n)	Frecuencia de vibración
Modo 1	3636,189 Hz
Modo 2	3733,689 Hz
Modo 3	5183,955 Hz
Modo 4	5189,445 Hz
Modo 5	7460,83 Hz
Modo 6	7463,042 Hz

<b>Modo 7</b>	8055,234 Hz
<b>Modo 8</b>	10670,04 Hz
<b>Modo 9</b>	12288,49 Hz
<b>Modo 10</b>	14449,2 Hz

#### 4.8.6 Conjunto.

Finalmente se intento obtener los modos de vibración del conjunto. Debido a su complejidad se utilizó un mallado automático, para el cual el ordenador invirtió más de una hora, para hacernos una idea, para generar el mallado de uno de los ejes anteriores el ordenador invertía pocos segundos. Debido al gran número de elementos que conformaban, del orden de millones, después de unas nueve horas de simulación, el programa emitía un mensaje de error fatal explicando que la base de datos estaba completa y era necesaria una extensión.

A continuación se intento obtener los modos normales de vibración del conjunto formado únicamente con los ejes y sus respectivos engranajes. La generación del mallado llevo su tiempo, y aunque el resultado se puede observar en la Ilustración 30, el análisis generaba aún un número muy elevado de elementos y fue imposible su cálculo. Se volvió a producir, al cabo de unas horas, el mismo error fatal.

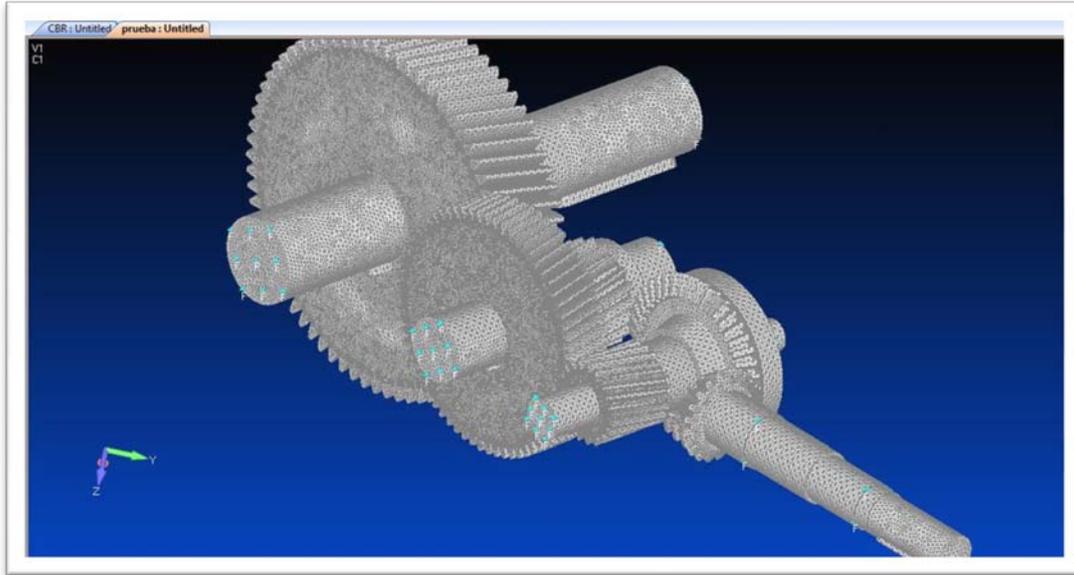


Ilustración 32: Mallado del conjunto.

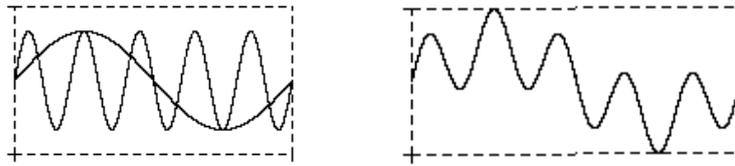


## 5 Conclusiones.

En este capítulo se recogen una serie de conclusiones extraídas a partir de los datos calculados en el apartado 6 del capítulo 2 y de los resultados expuestos en las tablas del apartado 8 del capítulo 4.

Para el Eje Piñón Cónico, el primer modo normal de vibración se encuentra a 3636,189 Hz, muy superior a su frecuencia de giro ( $f_{\text{eje piñón cónico}}=24,49\text{Hz}$ ) cuando el reductor está conectado al motor eléctrico trabajando este a plena carga. Por lo tanto, podemos estar seguros que en estas condiciones este eje no entrará en resonancia. Lo mismo ocurre para el Eje 1 con un valor de 2160,629 Hz para su primer modo de vibración muy distante de la frecuencia de trabajo,  $f_{\text{eje1}}=12,25\text{Hz}$ , para el Eje 2 donde su primer modo normal de vibración se encuentra a 1858,318 Hz y su frecuencia de trabajo a 3,83 Hz, y para el Eje 3 cuando su primer modo de vibración se encuentra en 1751,619 Hz y se frecuencia de trabajo en condiciones de plena carga del motor es de 1,03 Hz. Podemos observar que los ejes con mayor frecuencia de trabajo, también son los que tiene su primer modo de vibración a una frecuencia superior, por lo que este reductor estaría preparado para ser conectado a un motor eléctrico de dos polos ( $n_1=3000\text{min}^{-1}$ ) e incluso a un motor térmico trabajando a un alto régimen de giro.

Dado que para la carcasa principal el primer modo normal de vibración se encuentra en una frecuencia de 285,3538 Hz, esta será la pieza limitadora de nuestro conjunto reductor. Como los distintos ejes están fijados a la carcasa a través de los rodamientos, la carcasa estará sometida a una frecuencia de vibración que será una composición formada por cada una de las frecuencias de vibraciones de los ejes. En la siguiente ilustración se observa un ejemplo sobre la composición de dos ondas de diferente frecuencia, a la izquierda se muestra dos ondas de 100Hz y 500Hz, y a la derecha la composición de ambas, resultando una onda con una frecuencia de 500Hz.



**Ilustración 33: Composición de ondas.**

A continuación se muestra una tabla con el resultado obtenido de la frecuencia a la que está sometida la carcasa cuando el motor eléctrico de cuatro polos gira a 1500r.p.m., que no es otro que el mínimo común múltiplo de las frecuencias a las que son sometidos los distintos ejes.

**Tabla 12: Cálculo de la frecuencia a la que está sometida la carcasa principal.**

Frecuencias (Hz)		
Ejes del reductor		Carcasa principal
Eje Piñón Cónico	24,49 Hz	122,5 Hz
Eje 1	12,25 Hz	
Eje 2	3,83 Hz	
Eje 3	1,03 Hz	

Como el primer modo normal de vibración ( $n=1$ ) de la carcasa se producía a 285,3538 Hz, podemos afirmar con un coeficiente de seguridad superior a 2, que la carcasa principal de nuestro reductor de velocidad no entrará en resonancia, es decir, la frecuencia de excitación a la que se encuentra sometida la carcasa se encuentra suficientemente alejada de la frecuencia natural de la estructura. Ya que si la frecuencia de excitación a la que estuviese sometida la carcasa, por la acción de las fuerzas periódicas

ejercidas por los ejes, se encontrase cerca de una frecuencia natural o modo de vibración tendría lugar la resonancia<sup>[10]</sup>. El cuerpo comienza a vibrar, aumentando de forma progresiva la amplitud del movimiento tras cada una de las actuaciones sucesivas de las fuerzas llegando a causar rápidamente daños críticos sobre el reductor de velocidad. Como muestra de este efecto se incluyen algunas imágenes de un experimento de rotura de una copa de cristal mediante aplicación de ondas sonoras con frecuencias iguales a su frecuencia de resonancia. También se incluyen imágenes del puente de Tacoma, aun que en este caso se sumaron algunos efectos aerodinámicos.

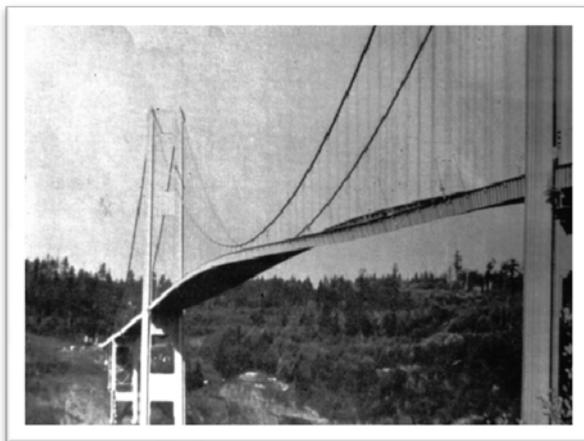


Ilustración 34: Experimento con copa de cristal (arriba). Puente de Tacoma (abajo).



## 6 Bibliografía.

- [1] A. P. French. Vibrations and waves. Una publicación del MIT (Massachusetts Institute of Technology). Versión española: Vibraciones y ondas, por Dr. José Aguilar Peris y Dr. Juan de la Rubia Pacheco. Propiedad de Editorial Reverté.
- [2] Manuel G. Rodríguez R., Moisés Hinojosa R., Ubaldo Ortiz M. Breve y parcial historia de los engranajes. Ingenierías, Julio-Septiembre 2002.
- [3] Price, Derek de Solla. Gears from the Greeks: The Antikythera Mechanism, a Calendar Computer From ca. 80 B.C. Science History Publications, a div. of Neale Watson Academic Publications, Inc., New York, NY, 1974.
- [4] Página oficial del software Solid Edge: [www.solidedge.com](http://www.solidedge.com)
- [5] Foros y tutoriales de Solid Edge que ofrecen soporte y otros servicios a los usuarios en español: [www.solidedge-es.com](http://www.solidedge-es.com)
- [6] Base de datos de rodamientos por SKF, proveedor mundial de productos, soluciones y servicios en las áreas de rodamientos, retenes, mecatrónica, servicios y sistemas de lubricación. [www.skf.com](http://www.skf.com)
- [7] Información referente a los software: Femap y NX Nastran, por [www.iberisa.com](http://www.iberisa.com)
- [8] Base de datos de propiedades de materiales: [www.matweb.com](http://www.matweb.com)
- [9] “Femap/NX Nastran User`s Manual”. Version 10.1 Documentation.
- [10] Gilen White. “Introducción al análisis de vibraciones”. DLI Engineering. [www.dliengineering.com](http://www.dliengineering.com)