Documento de Trabajo 95-18
Serie de Economía de la Empresa 01
Octubre 1995

Departamento de Economía de la Empresa
Universidad Carlos III de Madrid
Calle Madrid, 126
28903 Getafe (Spain)
Fax (341) 624-9608

MEDIDAS DE DISPERSIÓN COMO MEDIDAS DEL RIESGO DE INMUNIZACIÓN

A. Balbás y A. Ibáñez*

Resumen

En el presente trabajo se discute como en principio cualquier medida de dispersión puede ser una medida del riesgo de inmunización. Es el conjunto de shocks y dentro de ellos los peores shocks los que determinan la forma de las medidas de dispersión, haciendo que sólo consideremos como medidas adecuadas a la medida cuadrática M^2 y a la media lineal $\tilde{N}$, porque vienen dadas por un conjunto de shocks y unos peores shocks razonables. Por último, se concluye que quizás la medida $\tilde{N}$ es una mejor medida del riesgo de inmunización que la medida M^2.

Palabras Claves
Inmunización, Medidas de Dispersión, Medidas del Riesgo de Inmunización, M^2, $\tilde{N}$.

*Balbás, Departamento de Economía de la Empresa de la Universidad Carlos III de Madrid and Ibáñez, Departamento de Economía de la Empresa de la Universidad Carlos III de Madrid.

Partially supported by DGICYT PS93/0050

I. Introducción

Tres trabajos importantes en la literatura de inmunización son Fisher and Weil (1971), Bierwag and Khang (1979) y Fong and Vasicek (1984).

Fisher and Weil (1971) es el primer trabajo en demostrar formalmente, como ante shocks aditivos o desplazamientos paralelos de la curva de tipos de interés, la estrategia de igualar la duración de la cartera con el periodo de planificación del inversor, garantiza el rendimiento prometido cuando se observó la estructura inicial de los tipos de interés. Es decir, es una estrategia inmunizadora. Obviamente, los cambios en los tipos de interés no son paralelos, pero si son una buena proporción del cambio total como muestran empíricamente Litterman and Scheinkman (1991).

Bierwag and Khang (1979) muestran como la estrategia inmunizadora ante shocks aditivos es también una estrategia maximin, es la estrategia que garantiza un rendimiento más alto y como las carteras inmunizadas están caracterizadas por un peor shock que es el shock nulo.

Fong and Vasicek (1984) desarrollan un medida de dispersión como medida del riesgo de inmunización, la medida M^2. Dado que las carteras con duración igual al periodo de planificación del inversor son multiples y que los cambios en los tipos de interés no son paralelos, a la hora de escoger una cartera podemos tener en cuenta el efecto de cambios no paralelos. Entonces, suponiendo que la derivada del cambio en los tipos de interés forward instantaneos está acotada Fong and Vasicek (1984) desarrollan la medida de dispersión M^2 y muestran como al minimizarla, también se minimiza el riesgo de inmunización. M^2 viene dada por

$$M^2=\sum_{t=1}^{T}\frac{c(t,0)}{C}(m-t)^2 \tag{1}$$

donde C es el precio de la cartera (o cantidad que queremos invertir), $c(t,0)$ es el valor presente del cupón pagado por la cartera en el instante t y m es el horizonte de planificación del inversor.

II. La Condición Débil de Inmunización y el conjunto de los Peores Shocks

En dos trabajos recientes Balbás e Ibáñez (1995a) y (1995b) proponen una nueva perspectiva a la amplia literatura sobre inmunización. Dado un conjunto de shocks factibles K, cada shock k perteneciente a K es una función definida en el intervalo $[0,T]$ que da el cambio instantaneo en la curva de los tipos de interés forward instantaneos. En Balbás e Ibáñez (1995a) se define que el conjunto de shocks admisibles, K, y el conjunto de bonos considerados verifican la condición débil de inmunización si para cualquier shock admisible, k perteneciente a K, existe al menos un bono, dependiente de k, tal que dado dicho shock el bono no pierde valor en el horizonte de planificación del inversor. Balbás e Ibáñez (1995a) muestran como la condición débil de inmunización es necesaria y suficiente para la existencia de una cartera inmunizada.

El teorema anterior admite otra interpretación totalmente equivalente. No existe una cartera inmunizada si y sólo si existe un shock frente al cual todos los bonos pierden valor en el horizonte de planificación del inversor. ¿Cómo puede ser este shock en general? Que los tipos de interés forward instantaneos bajen antes de m y suban después de m. Por lo tanto, cuando queremos inmunizar, cuando queremos garantizar un rendimiento, a la luz de la condición débil de inmunización, los shocks que nos deben preocupar son aquellos que hacen perder más valor a cualquier bono y ese es el motivo por el que introducen el concepto de peores shocks.

Balbás e Ibáñez (1995a) definen el conjunto de los peores shocks, $\{k_1, k_2, ..., k_h\}$, como un conjunto de shocks factibles tales que dado cualquier shock factible, k perteneciente a K, existen h números reales, $a_1, a_2, ..., a_h$, que dependen de k, tales que

$$k^* = \sum_{j=1}^{h} a_j k_j \in K \qquad (2)$$

y de manera que el valor de cualquier bono en el horizonte de planificación del inversor, V_i, es siempre menor si se da una combinación de estos peores shocks

$$V_i(k) \geq V_i(k^*) \quad i=1,2,...,n. \qquad (3)$$

Algunos ejemplos nos ayudarán a ver como son estos peores shocks.

Considerando el conjunto de shocks con derivada acotada, K, de Fong and Vasicek (1984) donde b es el máximo valor que la derivada puede alcanzar

$$K=\{k(t)\,;\ \frac{dk(t)}{dt} \leq b,\ 0 \leq t \leq T\}$$

entonces la expresión de los peores shocks está dada por

$$k^*(t) = b_0 + b(t-m) \qquad (5)$$

donde b_0 es un número real cualquiera.

Otra de las aportaciones de Balbás e Ibáñez (1995a) es el desarrollo de una nueva medida del riesgo de inmunización, la medida $\tilde{N}$. Balbás e Ibáñez (1995a) consideran que el conjunto de shocks factibles K están acotados, donde b es la máxima variación que puede haber entre los shocks de dos instantes cualquiera

$$K=\{k(t)\,;\ |\,k(t_1)-k(t_2)\,| \leq b,\ 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T\} \qquad (6)$$

Entonces es fácil demostrar como la forma de los peores shocks está dada por

$$k^*(t)=b_0+\frac{b}{2} \quad si \quad t\geq m$$
$$k^*(t)=b_0-\frac{b}{2} \quad si \quad t<m \tag{7}$$

donde b_0 es un número real cualquiera y la expresión de la medida $\tilde{N}$ es

$$\tilde{N}=\sum_{t=1}^{T}\frac{c(t,0)}{C}\,|m-t| \tag{8}$$

En la siguiente sección mostraremos la estrecha relación que existe entre la forma de los peores shocks y la forma de las medidas del riesgo de inmunización.

III. Medidas de Dispersión como medidas del Riesgo de Immunización

En el desarrollo de la medida $\tilde{N}$ en Balbás e Ibáñez (1995a) al observar la medida M^2 pensamos que quizá cualquier medida de dispersión podía ser una medida del riesgo de inmunización. Así, dado un conjunto de shocks K cualquiera si mostramos que los peores shocks tienen la forma

$$k^*(t)=b_0+f(b)g(t) \tag{9}$$

donde b es un parámetro del conjunto K (por ejemplo la máxima derivada en Fong and Vasicek (1984) o la máxima variación en Balbás e Ibáñez (1995a), $f(b)>0$ y

$$g(t)\leq 0 \quad si \quad t\leq m$$
$$g(t)\geq 0 \quad si \quad t>m \tag{10}$$

entonces, utilizando el hecho de que cualquier funcional convexo está acotado por su tangente (ver Fong and Vasicek (1984) y Balbás e Ibáñez (1995a)) es muy fácil demostrar que

$$\frac{V(q,k)-RC}{RC} \geq \frac{V(q,k^{*})-RC}{RC} \geq b_0(m-D)+f(b)\sum_{t=1}^{T}\frac{c(t,0)}{C}\int_t^m g(s)\,ds \tag{11}$$

donde $V(q,k)$ es el valor de la cartera q en el horizonte de planificación del inversor si se da el shock k, y R es el valor que adquiere en el horizonte de planificación del inversor una peseta invertida hoy si no hay cambios sobre los tipos de interés.

Si inmunizamos frente shocks aditivos, $D=m$, entonces

$$\frac{V(q,k)-RC}{RC} \geq -f(b)N \tag{12}$$

donde N podría ser una medida de dispersión

$$N=\sum_{t=1}^{T}\frac{c(t,0)}{C}G(t,m) \tag{13}$$

$$G(t,m)=-\int_t^m g(s)\,ds \tag{14}$$

Si por ejemplo

$$G(t,m)=|\;t-m|^{j}, \quad j\geq 1, \tag{15}$$

tendríamos que cualquier medida de dispersión es una medida del riesgo de inmunización.

Pero la deducción de la medida N debe ser al revés. Primero fijar un conjunto de shocks K lo más razonable posible, ver como son los peores shocks y entonces deducir la correspondiente medida de dispersión, para evitar que cualquier medida de dispersión tenga unos supuestos muy poco realistas sobre el conjunto de shocks del que procede.

Pensemos por ejemplo en $j=4$, entonces tenemos que

$$G(t,m)=(t-m)^4$$

y por lo tanto

$$N=\sum_{t=1}^{T}\frac{c(t,0)}{C}(t-m)^4$$

Pero, ¿cúal es el conjunto K que da lugar a que los peores shocks tengan la forma anterior? Ningún conjunto razonable, porque para un shock tan sencillo como

$$k^*(t)=\lambda(t-m)\quad,\quad\lambda>0 \tag{16}$$

no existe un peor shock que sea peor que él. j=4 implica que la forma de los peores shocks es una constante más una función cúbica. Para cualquier medida de dispersión j>2 tenemos esta misma situación.

Si j<1, entonces el conjunto K tampoco será un conjunto razonable, porque los peores shocks tendrán la forma tan irracional de

$$\begin{array}{l} k^*(t)=-|t-m|^{j-1}\ si\ t<m \\ k^*(t)=|t-m|^{j-1}\ si\ t>m \end{array} \tag{17}$$

sobre todo cuando t se aproxima a m, ya que j-1<0.

Si consideramos 1<j<2 entonces las medidas se encuentran entre la de Fong and Vasicek (1984), j=2, y la de Balbás e Ibáñez (1995a), j=1. Ahora los peores shocks si tienen una forma razonable, por ejemplo si j=3/2, serán de la forma

$$\begin{array}{l} k^*(t)=-|t-m|^{1/2}\ si\ t<m \\ k^*(t)=|t-m|^{1/2}\ si\ t>m \end{array}$$

y no podemos hacerles las críticas anteriores. Pero sin embargo, no sabemos como es el conjunto K que da lugar a estos peores shocks. Recordamos que el conjunto K de Fong y Vasicek (1984) son los shocks que tienen la derivada acotada y el conjunto K de Balbás e Ibáñez (1995a) son los shocks que están acotados.

Por lo tanto, sólo nos vamos a quedar como medidas de dispersión con j=1 y j=2 porque vienen implicadas por unos peores shocks razonables, y estos a su vez por un conjunto de shocks también muy razonables.

IV. Las Medidas de Dispersión M^2 y $\tilde{N}$

Balbás e Ibáñez (1995b) en un segundo trabajo donde estudian y caracterizan a las estrategias maximin cuando no existe una estrategia inmunizadora, muestran como minimizar ambas medidas de dispersión es únicamente equivalente cuando consideramos bonos de cupón cero, y que al considerar bonos que pagan cupón las carteras que minimizan ambas medidas no sólo no son iguales sino que además pueden ser bastante diferentes. Por lo tanto, parece necesario estudiar que medida parece más adecuada.

Para decidir que medida de dispersión es más apropiada para utilizarla como medida del riesgo de inmunización vamos a adoptar dos criterios. El primer criterio, es el mismo criterio que hemos utilizado para rechazar cualquiera de las otras medidas de dispersión, es decir, lo realistas que parezcan los peores shocks y el conjunto de shocks K que dan lugar a ambas medidas de dispersión. El segundo criterio, es un criterio empírico, cuál es la medida de dispersión que se comporta mejor empíricamente. Nos gustaría que ambos criterios apuntasen a la misma medida de dispersión.

Desde un punto de vista más teórico, considerando el primer criterio, Balbás e Ibáñez (1995a y 1995b) hacen tres objeciones a los peores shocks y al conjunto general de shocks considerados por Fong y Vasicek (1984).

Primero, ¿Cuál es el significado económico de una derivada? Por ejemplo b=5%. En cambio, la variación de los shocks en Balbás e Ibáñez (1995a) dada por el parámetro b, puede ser una medida de volatilidad estimada de los tipos de interés, un concepto muy importante en toda la literatura de los tipos de interés. b=2.50% puede ser un valor razonable y b=5% puede ser un nivel de volatilidad muy alto.

Segundo, si las derivadas de los shocks están acotadas, entonces las variaciones de los shocks

$$\{ | \ k(t_2)-k(t_1) \ | \ ; \ 0 \le t_1 \le t_2 \le T \} \tag{18}$$

también lo están. Pero lo contrario es falso en general, shocks con pequeñas variaciones pueden tener grandes derivadas. Con lo cual tenemos que los peores shocks de Fong and Vasicek (1984) son shocks factibles en Balbás e Ibáñez (1995a), pero en cambio los peores shocks de los últimos autores no son shocks factibles en el conjunto considerado por los primeros.

Tercero, los peores shocks a los que da lugar el conjunto de Fong y Vasicek (1984) son muy irreales, porque implican grandes variaciones al alejarnos del instante m, aun para pequeños valores del parámetro b.

En resumen, los shocks de Balbás e Ibáñez (1995a) se pueden considerar como suma de dos componentes, un desplazamiento paralelo de toda la curva de tipos de interés, más un segundo cambio donde la curva se mueve dentro de una banda con una anchura b, y donde este parámetro b puede representar una medida de volatilidad. Estos dos componentes parecen un escenario adecuado para describir los cambios que sufren los tipos de interés.

El segundo criterio para decidir que medida es la más adecuada es un criterio empírico. ¿Cuál de las dos medidas funciona mejor empíricamente? Quizá este segundo criterio no se puede utilizar simplemente porque el desarrollo de la medida $\tilde{N}$ es muy reciente y no existe ningún estudio empírico sobre su funcionamiento, ni ningún estudio empírico en comparación con la medida M^2.

Utilizando este segundo criterio la medida M^2 debe gozar de más crédito porque existen trabajos empíricos, Fong and Fabozzi (1985) y de simulación Fabozzi (1991) que muestran la bondad de dicha estrategia. En general, es postulado en Fong and Vasicek (1984) y Fabozzi (1991) que la cartera que minimiza la medida M^2 es una "bullet portfolio", es decir, aquella cartera formada por los bonos con las duraciones mayor y menor, pero más próximas al periodo de planificación del inversor. Aunque esto es únicamente cierto bajo ciertas condiciones de convexidad de los bonos considerados, como mostraron Bierwag *et al.* (1993).

Pero ahora queremos utilizar los resultados de Bierwag *et al.* (1993) y Balbás e Ibáñez (1995b) para argumentar que la medida $\tilde{N}$ puede funcionar mejor empíricamente. Bierwag *et al.* (1993) contrastan entre una serie de estrategias, cuál es la que mejor funciona empíricamente. Una de las estrategias que comprueban consiste en minimizar la M^2. En el momento que el trabajo fue realizado la medida $\tilde{N}$ aun no estaba desarrollada. Bierwag *et al.* (1993) señalan que la mejor estrategia de inmunización consiste en igualar la duración de la cartera pero incluyendo un bono que vence justo en el periodo de planificación del inversor (un maturity matching bond). No muestran cual es la cartera que minimiza la M^2, pero en general, si asumimos las propiedades de convexidad de los bonos, puede ser una bullet portfolio. El bono con duración menor que el periodo de planificación del inversor podía ser un bono que venciese justo en dicho periodo, pero en general no lo es y la razón puede ser la siguiente.

Aunque el bono que vence justo en el periodo de planificación del inversor es un bono muy interesante, ya que tiene una duración próxima a m y es el bono con menor M^2 entre todos los considerados (ver por ejemplo la Tabla 3a en la siguiente sección), la razón por la que no forma parte de la cartera con mínima M^2 es que al tener una duración menor que el segundo bono que si entra implica que el bono con duración mayor que m debe entrar en la cartera en una proporción mayor para conservar que la duración de la cartera es igual a m. Pero este segundo bono tiene una dispersión muy grande, ya que M^2 es una medida cuadrática, haciendo al final que el valor M^2 de la cartera sea alto y no sea el mínimo.

Balbás e Ibáñez (1995b) muestran con algunos ejemplos como en general, la cartera que minimiza (o casi minimiza) la medida $\tilde{N}$ puede incluir un bono que vence en m y además dicha cartera no tiene porque ser una bullet portfolio. Ambos resultados pueden ser consistentes con el resultado empírico de Bierwag *et al.* (1993). La razón es que al ser la medida $\tilde{N}$ una medida de dispersión lineal no perjudica mucho a los bonos que vencen lejos de m, además dichos bonos tienen duraciones grandes haciendo que para igualar la duración de la cartera con m sea necesario invertir más en el bono con duración menor que m, normalmente un bono que vence en m.

Además, el interés de un bono que vence en m ha sido también puesto de manifiesto por Balbás e Ibáñez (1995b) al estudiar las estrategias maximin considerando los shocks de Fong y Vasicek (1984) y los shocks de Balbás e Ibáñez (1995a) para distintos valores del parámetro b. Ya que un bono que vence en m puede formar parte de las estrategias maximin al considerar los shocks acotados y al considerar los shocks con derivada acotada cuando el parámetro b tiene un valor alto.

V. Ejemplos de las medidas M^2 y $\tilde{N}$

Con los siguientes ejemplos queremos mostrar simplemente como son las carteras que minimizan ambas medidas de dispersión, y si tienen alguna propiedad que nos puede llamar la atención. Para ello vamos a considerar tres ejemplos, vamos a formar carteras con la duración igual al periodo de planificación del inversor y vamos a ver cual es su medida M^2 y su medida $\tilde{N}$.

Supongamos que el periodo de planificación del inversor es 5 años, m=5, en la linea de otros estudios empíricos de inmunización (ver Bierwag *et al.* (1993)). Supongamos por simplicidad que la curva de tipos de interés es plana y el tipo de interés es del 10%. (Estamos utilizando tipo de interés continuo, por lo tanto, utilizamos la función exponencial para capitalizar los distintos flujos de un bono).

En el primer ejemplo vamos a considerar que tenemos dos bonos de cupón cero con vencimiento a los 6 y 4 años respectivamente. Al considerar únicamente dos bonos sólo existe una cartera con duración igual a m y por lo tanto no puede existir discrepancia entre las carteras que minimizan ambas medidas de dispersión. Introduzcamos ahora un bono que paga un cupón anual y vence a los 5 años. Dicho bono tiene una duración menor de 5 años y por lo tanto, combinándolo con el bono de cupón cero que vence a los 6 años podemos formar otra cartera con duración igual a 5 años. Entonces hagámosnos la siguiente pregunta. ¿Cuánto tiene que ser el cupón que pague el bono que vence a los cinco años para que la cartera que incluye a dicho bono sea la que minimiza la medida $\tilde{N}$? y ¿cúanto tiene que ser para minimizar la medida M^2?

Es muy fácil demostrar que la duración del bono que vence a los cinco años aumenta a medida que disminuye el cupón y que las medidas M^2 y $\tilde{N}$ disminuyen a medida que disminuye el cupón.

En la Tabla 1a mostramos por columnas, el número del bono, su vencimiento, el cupón que paga, su duración, su medida M^2 y su medida $\tilde{N}$, todas ellas en años. En la Tabla 1b mostramos como son las carteras que tienen una duración igual a 5 años ordenadas por su mínima medida $\tilde{N}$ entre los bonos de la Tabla 1a. Mostramos por columnas el primer bono de la cartera, el segundo bono de la cartera, el porcentaje del primer bono en la cartera, la medida M^2 y la medida $\tilde{N}$ de la cartera.

Respondiendo a la pregunta anterior, vemos como el bono que vence a los 5 años con un cupón del 13.5% forma parte de la cartera que minimiza la medida $\tilde{N}$. Pero que en cambio, el cupón que pague dicho bono debe ser sólo del 2.75% para que forme parte de la cartera que minimiza la M^2. Dado que el tipo de interés que hemos considerado es del 10% un bono con un cupón igual o inferior al 13.5% puede ser fácil de encontrarlo en el mercado, pero en cambio encontrar un bono con un cupón tan pequeño del 2.75% pede ser mucho más difícil. Además un bono con un cupón tan pequeño es casi un bono de cupón cero que vence a los cinco años y que es el necesario para inmunizar frente a cualquier cambio sobre los tipos de interés. También parece poco razonable que un inversor interesado en inmunizar una cartera teniendo un bono que vence a los 5 años con un cupón bajo pero superior al 2.75% no lo incluyese en su cartera.

En el segundo ejemplo vamos a hacernos la pregunta justo al revés. Consideremos también que únicamente tenemos dos bonos. Un primer bono de cupón cero que vence a los 6 años y un segundo bono que vence a los 5 años y paga un cupón anual del 8%. Por lo tanto, sólo tenemos una cartera con una duración de 5 años y no existe discrepancia entre las carteras que minimizan ambas medidas. Entonces, ¿qué vencimiento tiene que tener un bono de cupón cero para que la cartera que minimiza la medida $\tilde{N}$ esté formada por dos bonos de cupón cero? y ¿cómo debe ser para minimizar la medida M^2?

En la Tabla 2a mostramos el segundo conjunto de bonos que consideramos. En la Tabla 2b mostramos como son las carteras que tienen una duración igual a 5 años ordenadas por su mínima medida $\tilde{N}$ entre los bonos de la Tabla 2a.

Respondiendo a la anterior pregunta vemos como un bono de cupón cero con vencimiento igual o superior a los 3.3 años ya minimizaría la M^2. En cambio, para minimizar la medida $\tilde{N}$ es necesario incluír un bono de cupón cero con vencimiento igual o superior a los 4.2734 años, y dichos bonos pueden ser difíciles de encontrar. Otra vez tenemos la misma conclusión que en el primer ejemplo, la cartera que minimiza la M^2 en general no incluye un bono que vence a los cinco años, cosa que en cambio si hace la cartera que minimiza la medida $\tilde{N}$.

El tercer ejemplo consiste en considerar sólo bonos que pagan cupón y ver como se comportan ambas medidas. La Tabla 3a nos da el tercer conjunto de bonos considerado. La Tabla 3b muestra las carteras con una duración igual a 5 años ordenadas por su mínima medida $\tilde{N}$ para los bonos de la tabla anterior.

En la Tabla 3b vemos como la cartera que minimiza ambas medidas de dispersión es la misma y que no incluye a un bono que vence a los cinco años. Pero sin embargo, las carteras que incluyen al bono tercero prácticamente minimizan la medida $\tilde{N}$ aunque no la M^2. Otra vez volvemos a observar lo relacionado que está la medida $\tilde{N}$ y un bono que vence en m.
Así mismo, en la Tabla 3a observamos que el bono tercero tiene una medida $\tilde{N}$ que es aproximadamente la mitad que la de los bonos adyacentes, segundo y cuarto que tienen un vencimiento a los cuatro y seis años respectivamente. Existe una dramática reducción en la dispersión del bono tercero cuando utilizamos la medida $\tilde{N}$. Dicha reducción es la mayor entre cada par de bonos consecutivos. Sin embargo, si utilizamos la medida M^2 vemos que la reducción no es tan considerable, y además dicha reducción es la menor entre cada par de bonos consecutivos.

VI. Conclusiones

Es en primer lugar el conjunto de shocks considerado y en segundo lugar los peores shocks dentro del conjunto quienes determinan la forma de la medida de dispersión como medida del riesgo de inmunización. Cualquier medida de dispersión distinta a la M^2 o a la $\tilde{N}$ parece poco razonable porque viene implicada por unos peores shocks o por un conjunto de shocks muy irreales.

La medida $\tilde{N}$ parece contar con dos argumentos a su favor con respecto a la medida M^2. El primer argumento es el mismo utilizado para rechazar cualquiera de las otras medidas de dispersión. El conjunto de shocks que da lugar a la medida $\tilde{N}$ acota la variación que pueden sufrir los tipos de interés forward instantaneos. Dicha acotación puede tener una interpretación de la volatilidad que sufren los tipos de interés. En cambio, el conjunto de shocks que da lugar a la medida M^2 acota la derivada, que tiene un significado económico menos claro y además implica unos peores shocks más irreales. El segundo criterio consiste en que un bono que vence en el periodo de planificación del inversor puede minimizar la medida $\tilde{N}$ o formar parte de las carteras maximin con shocks acotados como han mostrado Balbás e Ibáñez (1995b). Dicho resultado puede ser consistente con el resultado empírico de Bierwag *et al.* (1993).

En resumen son necesarios más trabajos sobre que conjunto de shocks es más razonable, si los que tienen derivada acotada o los que están acotados, más trabajos empíricos sobre la efectividad de la medida $\tilde{N}$ y más trabajos empíricos sobre cúal de las dos medidas se comporta mejor. Aunque nosotros creemos, que por los dos criterios discutidos en el trabajo, la medida $\tilde{N}$ es una mejor medida del riesgo de inmunización.

VII. Bibliografía

Balbás A. y A. Ibáñez (1995a), "When can you Immunize a Bond Portfolio?," II Jornadas de Economía Financiera, Bilbao.

Balbás A. y A. Ibáñez (1995b), "Maxmin Portfolio in Financial Immunization," Working Paper n.28-04 Universidad Carlos III de Madrid.

Bierwag, G.O., Fooladi, I. and G.S. Roberts (1993), "Designing an Immunized Portfolio is M-square the key?," *Journal of Banking and Finance*, 17, 1147-1170.

Bierwag, G.O. and C. Khang (1979), "An Immunization Strategy is a Maxmin Strategy," *The Journal of Finance*, XXXVII, May, 379-389.

Fabozzi, F.J. (1991), "The Handbook of Fixed Income Securities,"

Fisher, L., adn R. Weil (1971), "Coping with the Risk of Interest Rate Fluctuations: Returns to Bondholders from Naive and Optimal Strategies," *Journal of Business*, 52, 51-61.

Fong, H.G. and F.J. Fabozzi (1985), "Fixed income portfolio management," (Dow-Jones Irwin, Homewood, IL).

Fong, H.G. and O.A. Vasicek (1984), "A Risk Minimizing Strategy for Portfolio Immunization," *The Journal of Finance*, XXXIX, 5, December, 1541-1546.

Litterman, R. and J.A. Scheinkman (1991), "Common Factors affecting Bond Returns," *The Journal of Fixed Income*, June, 54-61.

Tabla 1a: Conjunto de Bonos

Número del Bono	Vencimiento (años)	Cupón en %	Duración (años)	M^2	Ñ
1	6	0.0	6.000	1.000	1.000
2	4	0.0	4.000	1.000	1.000
3	5	15.0	3.943	3.273	1.056
4	5	14.0	3.980	3.155	1.019
5	5	13.5	4.000	3.094	.9992
6	5	13.0	4.021	3.030	.9786
7	5	10.0	4.161	2.598	.8389
8	5	5.0	4.481	1.605	.5183
9	5	3.0	4.656	1.063	.3434
10	5	2.75	4.681	.9879	.3189
11	5	2.5	4.706	.9099	.2938

Tabla 1b: Carteras con *Duración=m*

1er Bono	2° Bono	Porcentaje 1er Bono	M^2	Ñ
1	11	22.70	.9296	.4541
1	10	24.18	.9908	.4836
1	9	25.56	1.047	.5112
1	8	34.13	1.398	.6827
1	7	45.62	1.869	.9124
1	6	49.46	2.026	.9892
1	5	49.98	2.047	.9996
1	2	50.00	1.000	1.000
1	4	50.47	2.067	1.009
1	3	51.38	2.105	1.027

Tabla 2a: Conjunto de Bonos

Número del Bono	Vencimiento (años)	Cupón en %	Duración (años)	M^2	$\tilde{N}$
1	6	0.0	6.000	1.000	1.000
2	5	8.0	4.273	2.250	.7266
3	4.5	0.0	4.500	.2500	.5000
4	4.2734	0.0	4.273	.5279	.7266
5	4	0.0	4.000	1.000	1.000
6	3.75	0.0	3.750	1.562	1.250
7	3.5	0.0	3.500	2.250	1.500
8	3.3	0.0	3.300	2.890	1.700
9	3	0.0	3.000	4.000	2.000

Tabla 2b: Carteras con *Duración=m*

1er Bono	2° Bono	Porcentaje 1er Bono	M^2	$\tilde{N}$
1	3	33.33	.5000	.6666
1	4	42.08	.7266	.8416
1	2	42.08	1.724	.8416
1	5	50.00	1.000	1.000
1	6	55.55	1.250	1.111
1	7	60.00	1.500	1.200
1	8	62.96	1.700	1.259
1	9	66.66	2.000	1.333

Tabla 3a: Conjunto de Bonos

Número del Bono	Vencimiento (años)	Cupón en %	Duración (años)	M^2	Ñ
1	3	8.0	2.775	5.275	2.224
2	4	8.0	3.557	2.940	1.442
3	5	8.0	4.273	2.250	.7266
4	6	8.0	4.926	2.949	1.402
5	7	8.0	5.521	4.806	2.017
6	8	8.0	6.060	7.611	2.577
7	9	8.0	6.549	11.177	3.083
8	10	8.0	6.990	15.338	3.541
9	11	8.0	7.388	19.947	3.955
10	12	8.0	7.746	24.879	4.327

Tabla 3b: Carteras con *Duración=m*

1er Bono	2° Bono	Porcentaje 1er Bono	M^2	Ñ
4	5	87.65	3.178	1.47834
4	6	93.52	3.251	1.47837
4	7	95.47	3.321	1.47840
4	8	96.44	3.390	1.47843
4	9	97.01	3.456	1.47846
4	10	97.39	3.520	1.47849
3	5	41.76	3.738	1.47857
3	6	59.34	4.429	1.47885
3	7	68.07	5.100	1.47913
3	8	73.26	5.749	1.47940
3	9	76.67	6.378	1.47967
3	10	79.07	6.984	1.47993
2	5	26.54	4.311	1.86509
1	5	18.98	4.895	2.05701

1er Bono	2° Bono	Porcentaje 1er Bono	M^2	Ñ
2	6	42.37	5.632	2.09614
2	7	51.79	6.911	2.23365
2	8	57.98	8.149	2.32438
2	9	62.35	9.343	2.38838
2	10	65.56	10.495	2.43567
1	6	32.29	6.857	2.46307
1	7	41.05	8.754	2.73081
1	8	47.23	10.585	2.91950
1	9	51.78	12.350	3.05881
1	10	55.25	14.047	3.16520

WORKING PAPERS 1995

Business Economics Series

95-02 (01) David Camino and Clara Cardone
"The financial cost of official export credit insurance programs of industrialized countries: an analysis"

95-03 (02) David Camino
"The role of insurance and limited liability on corporate insolvencies"

95-23 (03) S. Bhattacharya, A.W.A. Bost and A.V. Thakor
"The economics of bank regulation"

95-28 (04) Alejandro Balbás and Alfredo Ibáñez
"Maxmin portfolios in financial immunization"

95-45 (05) Manuel Moreno and J. Ignacio Peña
"On the term structure of interbank interest rates: jump-diffusion processes and option pricing"

95-46 (06) Javier Estrada and J. Ignacio Peña
"Empirical evidence on the impact of European insider trading regulations"

Economics Series

95-05 (01) Leandro Prados de la Escosura
"Spain's gross domestic product, 1850-1993: quantitative conjectures"

95-06 (02) Leandro Prados de la Escosura
"Spain's gross domestic product, 1850-1993: quantitative conjectures. Appendix"

95-07 (03) Javier Ruiz-Castillo
"Interpersonal welfare comparisons, redistributive effects, and horizontal inequities in the income tax system"

95-08 (04) Javier Estrada
"Insider trading: regulation, risk reallocation, and welfare"

95-09 (05) Javier Estrada
"Insider trading: regulation, securities markets, and welfare under risk aversion"

95-10 (06) Ana Castañeda, Javier Díaz-Giménez and José Víctor Ríos-Rull