



**UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**

**TESIS DOCTORAL**

**SOBRE PERTURBACIONES DE  
POLINOMIOS ORTOGONALES  
CLÁSICOS**

**AUTOR:**

**Herbert Alonso Dueñas Ruiz**

**DIRECTOR:**

**Francisco Marcellán Español**

Leganés, Febrero de 2009



UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID  
ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

**SOBRE PERTURBACIONES DE POLINOMIOS  
ORTOGONALES CLÁSICOS**

Autor: **Herbert Alonso Dueñas Ruiz**

Memoria presentada para optar al grado de doctor por el programa de Ingeniería Matemática. Realizada bajo la dirección de **Dr. Francisco Marcellán Español**.

Febrero, 2009.



**TESIS DOCTORAL**  
**Sobre perturbaciones de polinomios ortogonales  
clásicos**

**Autor:** Herbert Alonso Dueñas Ruiz

**Director:** Francisco Marcellán Español

**Tribunal Calificador**

**Firma**

<b>Presidente:</b>	_____	_____
<b>Vocal:</b>	_____	_____
<b>Vocal:</b>	_____	_____
<b>Vocal:</b>	_____	_____
<b>Secretario:</b>	_____	_____

**Calificación:**

Leganés,            de            de 200



---

# ÍNDICE GENERAL

<b>Agradecimientos</b>	<b>1</b>
<b>Introducción</b>	<b>3</b>
0.1. Introducción histórica . . . . .	3
0.2. Esquema y aportaciones de la tesis . . . . .	9
<b>1. Preliminares</b>	<b>13</b>
1.1. Funcionales lineales y función de Stieltjes . . . . .	13
1.2. Polinomios Ortogonales . . . . .	15
1.3. La clase Laguerre-Hahn . . . . .	28
1.3.1. Determinación del orden de la clase . . . . .	29
1.3.2. Ejemplos . . . . .	31
<b>2. Polinomios ortogonales de tipo Laguerre</b>	<b>33</b>
2.1. Introducción . . . . .	33
2.2. Fórmula de conexión . . . . .	34
2.3. Ecuación diferencial holonómica . . . . .	35
2.4. Análisis de los ceros . . . . .	39
2.5. Modelo electrostático . . . . .	42
2.6. Representación Hipergeométrica . . . . .	44
2.7. Comportamiento Asintótico . . . . .	45

<b>3. Polinomios ortogonales de tipo Jacobi</b>	<b>51</b>
3.1. Introducción . . . . .	51
3.2. Fórmula de conexión . . . . .	51
3.3. Ecuación diferencial holonómica . . . . .	54
3.4. Análisis de los ceros . . . . .	58
3.5. Modelo electrostático . . . . .	62
3.6. Representación Hipergeométrica . . . . .	65
<b>4. Perturbaciones del funcional de Laguerre-Hahn</b>	<b>67</b>
4.1. Introducción . . . . .	67
4.2. Modificación mediante una derivada de Delta de Dirac. . . . .	68
4.2.1. Determinación de la clase . . . . .	68
4.2.2. Ejemplos . . . . .	76
4.3. Algunos resultados sobre perturbaciones de los polinomios asociados de Laguerre de primera especie mediante una derivada Delta de Dirac. . . . .	78
<b>5. Polinomios ortogonales tipo Laguerre Sobolev</b>	<b>85</b>
5.1. Introducción . . . . .	85
5.2. Fórmula de conexión . . . . .	86
5.3. Ecuación diferencial holonómica . . . . .	91
5.4. Comportamiento de los ceros . . . . .	94
5.5. Modelo Electrostático . . . . .	100
5.6. Representación Hipergeométrica . . . . .	105
5.7. Comportamiento asintótico . . . . .	107
<b>6. Polinomios ortogonales de tipo Laguerre Sobolev. Caso no diagonal</b>	<b>115</b>
6.1. Introducción . . . . .	115
6.2. Comportamiento Asintótico . . . . .	116
6.3. Fórmula de conexión . . . . .	126
6.4. Fórmula de recurrencia a cinco términos . . . . .	127
6.5. Ecuación diferencial holonómica . . . . .	129
6.6. Ejemplo . . . . .	133
<b>7. Polinomios ortogonales de tipo Laguerre-Sobolev de orden superior</b>	<b>137</b>
7.1. Introducción . . . . .	137
7.2. Fórmula de conexión . . . . .	138
7.3. Comportamiento de los ceros . . . . .	145

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	III
7.4. Comportamiento asintótico . . . . .	147
<b>Problemas abiertos.</b>	<b>155</b>



---

# Agradecimientos

Es muy difícil expresar con palabras la inmensa gratitud que le debo al profesor Francisco Marcellán Español, ya que durante estos casi cuatro años de mi permanencia en España, además de mostrarme el camino de la investigación en los polinomios ortogonales y tenerme una paciencia infinita, también me ayudó a resolver inconvenientes personales. El llegar a un feliz término en esta meta que me fijé hace mucho tiempo, es, en un gran porcentaje, gracias a él. Mil gracias Profesor Marcellán.

También debo agradecer al departamento de Matemáticas de la Universidad Carlos III de Madrid, su apoyo no sólo económico, mediante la beca de la que he gozado durante los últimos años, sino la acogida que me brindaron cada uno de los integrantes de este agradable departamento. Particularmente, quiero resaltar el apoyo que me brindó el profesor Guillermo López Lagomasino, quien, como director de departamento, colaboró para que pudiera realizar muchas de las actividades académicas a las que tuve la suerte de asistir.

Agradezco a la Universidad Nacional de Colombia por proporcionarme la comisión de estudios durante estos años. Al profesor Lorenzo Acosta, quien en los inicios de este proyecto, me proporcionó ayuda y consejo. También quiero hacer una mención muy especial del Profesor Jairo Charris (q.e.p.d), quién, además de recomendarme como estudiante con el profesor Marcellán, siempre me apoyó y aconsejó.

De otra parte quiero agradecer a Luis Garza su amistad, su colaboración, no sólo a mí sino a mi familia, en particular, el gran cariño que les dio a mis hijas. También a mi amiga de toda la vida, Marcelita, por su apoyo desde los inicios de

este proyecto y la ayuda que me brindó desde Colombia en cada momento.

Quiero resaltar el sacrificio y dedicación de mis padres, lo que me ha permitido ser lo que soy. Finalmente, quiero decirles a Cristina, María Paula y María Camila, que este proyecto no habría sido posible sin su apoyo y compañía, y que este logro también es de ustedes.

---

# Introducción

## 0.1. Introducción histórica

Los polinomios ortogonales son una clase de funciones que forman parte de las llamadas funciones especiales. Dentro de los polinomios ortogonales existen unas familias que merecen una mención especial por su relevancia en el desarrollo histórico debido a la gran cantidad de aplicaciones que se encuentran en áreas como la física cuántica, ecuaciones diferenciales, aproximación racional, entropías de información, etc. Se trata de los polinomios ortogonales clásicos (Laguerre, Hermite, Bessel y Jacobi). Es por esto que en la primera parte de esta introducción, se presenta el origen de estos polinomios.

Los primeros polinomios ortogonales que fueron definidos formalmente son los polinomios de Legendre. Estos polinomios, llamados de esta manera en honor del matemático francés Adrien-Marie Legendre (1752-1883), fueron definidos en 1784 como los polinomios  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  que cumplen la relación de ortogonalidad

$$\langle \mu, P_n P_m \rangle = \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \delta_{mn},$$

donde  $\delta_{m,n}$  es el símbolo de Kronecker. Legendre probó varias propiedades de estos polinomios, entre ellas las más importantes que caracterizan todos los polinomios ortogonales respecto a una medida de probabilidad no trivial soportada en la recta real, como es el hecho de que los ceros del polinomio  $P_n$  son reales, simples y se encuentran en el interior de la envolvente convexa del soporte de la medida. En el caso de los polinomios de Legendre, en el intervalo  $(-1, 1)$ .

Previamente habían aparecido estos polinomios cuando en 1782 el mismo Legendre, estudiando el problema de la atracción de un cuerpo por una esfera probó un teorema que establece que si se conoce el valor de la fuerza de atracción de un cuerpo de revolución en un punto exterior situado en su eje, entonces se puede determinar en todo punto exterior. De esta manera sería suficiente estudiar la componente radial dada por

$$P(r, \theta, 0) = \int \int \int \frac{(r - r') \cos \gamma}{(r^2 - 2rr' + r'^2)^{3/2}} r'^2 \operatorname{sen} \theta d\theta' d\phi' dr',$$

donde  $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \theta' \cos \phi'$ . Legendre, al estudiar esta integral, probó que el integrando se puede expresar como una serie de potencias en términos de  $r'/r$ ,

$$\frac{1}{r^2} \sum_{k=0}^{\infty} (2k + 1) P_{2k}(\cos \gamma) \left(\frac{r'}{r}\right)^{2k},$$

donde  $P_{2k}$  son los polinomios de Legendre de grado par.

Los siguientes polinomios ortogonales, que aparecen hacia 1864, son los polinomios de Hermite  $\{H_n\}_{n \geq 0}$ , llamados así en honor del matemático francés Charles Hermite (1822-1901) quien los definió de manera formal, aunque, previamente, en 1810 Laplace los había usado en problemas de teoría de probabilidades.

En 1879, el matemático francés Edmond Nicolas Laguerre (1834-1886), estudiando el desarrollo en fracciones continuas de la integral

$$\int_x^{\infty} e^{-t} t^{-1} dt,$$

define un caso particular de los polinomios de Laguerre  $\{L_n^\alpha\}_{n \geq 0}$  correspondiente a  $\alpha = 0$ . En este trabajo, Laguerre probó, al igual que Legendre con los polinomios ortogonales de Legendre, que los ceros de  $L_n^0$  son reales, simples y están en el intervalo  $(0, \infty)$ , es decir en el interior de la envoltura convexa del soporte de la medida. Más adelante, en 1880, Nikolai Yakovlevich Sonin (1849-1915) extendió el trabajo de Laguerre definiendo los polinomios generales de Laguerre  $\{L_n^\alpha\}_{n \geq 0}$  con  $\alpha > -1$ .

Los polinomios ortogonales de Jacobi  $\{P_n^{\alpha, \beta}\}_{n \geq 0}$ , al contrario de los anteriores, no surgen como una herramienta necesaria para resolver algún problema de aplicación específico. En 1859, se publica un artículo póstumo del matemático alemán Karl Jacobi (1804-1851) en el que se introduce esta familia de polinomios ortogonales, que constituye una generalización de los polinomios de Legendre. La

forma como definió Jacobi esta familia de polinomios fue usando funciones hipergeométricas. De hecho,

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)n!} {}_2F_1\left(-n, n + \alpha + \beta + 1; \alpha + 1, \frac{1-x}{2}\right),$$

con  $\alpha > -1, \beta > -1$ .

Ahora bien, ¿por qué llamamos polinomios ortogonales clásicos a los polinomios que hemos definido hasta ahora? Ello es debido a que estos polinomios son los únicos que satisfacen ciertas propiedades que los hacen sobresalir de los demás.

La primera propiedad que presentamos es la obtenida por S. Bochner en 1929 [27]. Bochner probó que los únicos polinomios ortogonales que satisfacen una ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$\sigma(x)P_n''(x) + \tau(x)P_n'(x) + \lambda_n P_n(x) = 0, \quad (1)$$

donde el grado de  $P_n$  es  $n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\sigma(x)$  es un polinomio de grado a lo sumo 2,  $\tau(x)$  un polinomio de grado exactamente 1 y  $\lambda_n$  un número real, son los polinomios clásicos.

Otra caracterización de los polinomios ortogonales clásicos es la que presentó F. Tricomi en 1955 [96], que fue probada de manera rigurosa en 1969 por Cryer [33]. Esta dice que sólo los polinomios ortogonales clásicos se pueden expresar mediante una fórmula de Rodrigues, es decir

$$P_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)} \frac{d^n(\rho(x)\sigma^n(x))}{dx^n}$$

con  $\rho(x)$  una función no negativa en algún intervalo de la recta real y  $\sigma(x)$  un polinomio independiente de  $n$ , de grado a lo más 2.

Pero hay más, en 1931 E. H. Hildebrandt [53] probó que los únicos polinomios ortogonales respecto a una función peso  $\rho$  solución de la ecuación diferencial de Pearson junto con ciertas condiciones de frontera

$$(\rho(x)\sigma(x))' = \tau(x)\rho(x),$$

donde el grado de  $\sigma(x)$  es menor o igual a 2 y el grado de  $\tau(x)$  es exactamente 1, son los polinomios ortogonales clásicos.

En cuanto a las aplicaciones de los polinomios ortogonales, podemos mencionar que son usados en áreas como la mecánica cuántica, estadística y teoría de la aproximación entre otras. Particularmente, quiero resaltar el uso que tienen en

la teoría clásica del potencial electrostático, encargada de estudiar los fenómenos electrostáticos asociados a las cargas en reposo. La razón para hacer un especial énfasis en esta teoría, radica en que a lo largo de esta memoria, presentaremos diferentes tipos de polinomios ortogonales para los que logramos presentar una interpretación electrostática de la localización de sus ceros.

El primero en descubrir la relación entre los polinomios ortogonales clásicos y la teoría de potencial electrostático fue Tomas Jan Stieltjes [94], quien a finales del siglo *XIX* encontró una interpretación de los ceros de los polinomios ortogonales clásicos en términos de un modelo electrostático. Un desarrollo histórico del problema aparece reflejado en [97] y [100].

Esta interpretación consiste en lo siguiente. Sean  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  puntos de un intervalo  $(a, b)$ , no necesariamente acotado. En estos puntos distribuimos  $n$  cargas unitarias de igual signo y sea

$$D(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|$$

el discriminante de los puntos  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Si la interacción de las cargas está determinada por un potencial logarítmico, entonces la energía del sistema es

$$E = -\log(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \log \frac{1}{|x_i - x_j|}, \quad (2)$$

donde el mínimo de esta función obedece al equilibrio electrostático. El resultado principal debido a Stieltjes radica en el hecho que si las  $n$  cargas unitarias están ubicadas en  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , puntos del intervalo acotado  $(-1, 1)$  en presencia de dos cargas positivas en  $1$  y  $-1$  y la energía del sistema alcanza su mínimo en dichos puntos, entonces estos puntos son precisamente los ceros de los polinomios ortogonales de Jacobi.

En particular, si ubicamos  $n$  cargas unitarias con igual signo en el intervalo  $[0, \infty)$ , una carga positiva  $p$  en el origen y para prevenir que las cargas se vayan a infinito, se impone la condición adicional que el centroide satisface para todo  $n$ ,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \leq K,$$

entonces la energía del sistema está dada por

$$E = -\log(x_1, x_2, \dots, x_n) + p \sum_{k=1}^n \log \frac{1}{|x_k|}, \quad (3)$$

con lo que se tiene que la energía (3) es mínima con la restricción anterior cuando los puntos  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , son los ceros del polinomio de Laguerre  $L_n^{2p-1}(c_n x)$ , donde  $c_n = (n + 2p - 1)/K$ . Las contribuciones más relevantes al tratamiento de propiedades electrostáticas de ceros de polinomios ortogonales respecto a funcionales lineales que generalizan los clásicos (el denominado caso semiclásico) son [47], [54], [55] y [74]. Una presentación sintética del tema es [48].

A partir de los polinomios ortogonales clásicos, se han construido otras familias de polinomios ortogonales, perturbando el funcional lineal original  $\mu$ . En 1938. H. L. Krall, estudió el problema de la determinación de soluciones polinómicas de ecuaciones diferenciales de orden  $2n$ , encontrando condiciones suficientes y necesarias para la existencia de dichas soluciones, lo que más tarde, en 1940 le permitió clasificar las ecuaciones diferenciales de cuarto orden con soluciones polinómicas. Gracias a esto, A. M. Krall, en 1978 [62], estudió los anteriores polinomios ortogonales y los denominó polinomios tipo-Laguerre, tipo-Jacobi y tipo-Legendre, respectivamente.

En general, si  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  es una sucesión de polinomios ortogonales clásicos (Hermite, Laguerre, Jacobi, Bessel) correspondientes al funcional lineal de momentos  $\mu$ , los polinomios ortogonales tipo clásico (Hermite, Laguerre, Jacobi, Bessel)  $\{\tilde{P}_n\}_{n \geq 0}$  son los polinomios ortogonales correspondientes al funcional lineal de momentos  $\tilde{\mu}$  definido por

$$\tilde{\mu} = \mu + M\delta(x - a), \quad M > 0, \quad (4)$$

donde  $\delta(x - a)$  es el funcional delta de Dirac soportado en  $x = a$ . El caso Hermite, Laguerre y Bessel corresponde al valor  $a = 0$ , mientras que el Jacobi es  $a \in \{1, -1\}$ .

Es importante observar, que los polinomios tipo clásico, no son polinomios clásicos. Esto motivó el inicio de un nuevo campo de trabajo en los polinomios ortogonales, los llamados polinomios ortogonales semiclásicos. Es decir, polinomios ortogonales que satisfacen una ecuación diferencial de la forma (1), pero sin exigir condiciones a los grados de los polinomios  $\sigma(x)$  y  $\tau(x)$  (ver [80]), que incluso puede depender de  $n$ . Esta ecuación diferencial se denomina holonómica.

Más adelante T. H. Koornwinder [61] generalizó los trabajos de Krall y estudió los polinomios en el intervalo  $[-1, 1]$  ortogonales con respecto a la medida

$$d\tilde{\mu} = (1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta dx + M\delta(x + 1) + N\delta(x - 1), \quad M, N \in \mathbb{R}^+, \quad \alpha, \beta > -1,$$

lo que constituye una generalización de los polinomios de Jacobi. Además, ob-

servó que, como un caso límite, los polinomios  $\{L_n^{\alpha, M}\}_{n \geq 0}$  en  $[0, \infty)$ , constituyen una generalización de los polinomios de Laguerre con respecto a la medida de

$$d\bar{\mu} = x^\alpha e^{-x} dx + M\delta(x), \quad \alpha > -1.$$

Ecuaciones diferenciales de orden superior a 2 con coeficientes polinómicos satisfechas por estos polinomios han sido descritas en [58]. Algunas generalizaciones de estos funcionales, resultado de la adición de masas de Dirac y sus derivadas han sido analizadas en [14] y [15] para el caso Laguerre, y en [13], [20] y [24] en un marco más general. Mas adelante, J. Arvesú, F. Marcellán, R. Alvarez-Nodarse y J.J. Moreno-Balcázar estudian la adición de derivadas de masas de Dirac en el caso clásico [15], [17] y [18].

El primer artículo relacionado con ortogonalidad respecto a productos de Sobolev se debe a D. C. Lewis [66] que estudia un problema de aproximación de una función y sus derivadas utilizando el método de mínimos cuadrados mediante polinomios respecto a una norma de Sobolev. Si  $\mu$  es un funcional de momentos, los polinomios tipo Sobolev son ortogonales con respecto a un producto de la forma

$$\langle p, q \rangle_{\bar{\mu}} = \langle p, q \rangle_{\mu} + \sum_{k=0}^j M_k p^{(k)}(a) q^{(k)}(a), \quad (5)$$

donde  $M_k \geq 0$  para  $0 \leq k \leq j$ . A partir de allí se abre otro campo de trabajo explorado entre otros por R. Koekoek en diversas contribuciones como [59] y junto con H. G. Meijer en [60], donde considera casos particulares del producto escalar (5) cuando  $\mu$  es la medida de Laguerre. Otros resultados importantes acerca de las propiedades de estos polinomios pueden encontrarse en trabajos realizados por W. D. Evans, L. L. Littlejohn, F. Marcellan y A. Ronveaux en [46], así como por G. López, F. Marcellán y W. Van Assche en [68] y [83] donde se consideran propiedades asintóticas de polinomios ortogonales Tipo-Sobolev cuando la medida  $\mu$  está soportada en  $[-1, 1]$  y pertenece a la clase de Nevai. Las propiedades asintóticas relativas y reescaladas de algunas clases de polinomios Tipo-Sobolev soportadas en el intervalo  $(0, \infty)$  han sido tratadas por R. Alvarez-Nodarse y J. J. Moreno en [18] así como en [75] y [88]. Resultados relativos a ceros de polinomios ortogonales con respecto a productos de Sobolev aparecen en [9] y [76]. Como presentaciones generales de la teoría de polinomios ortogonales respecto a productos escalares de Sobolev cabe destacar [7], [85], [86] y [89].

Como se puede ver en artículos históricos y libros de introducción a los polinomios ortogonales mucho más completos que este pequeño acercamiento al de-

sarrollo histórico de los mismos, por ejemplo [10], [11], [12], [21], [32] o [45] los cuales son unas excelentes introducciones al tema, falta mucho por contar aquí, sin embargo, es suficiente para poder entender el desarrollo de los temas de esta Memoria.

## 0.2. Esquema y aportaciones de la tesis

El capítulo 1 de esta monografía está dedicado a conceptos preliminares sobre polinomios ortogonales. A partir de allí, podemos dividir los temas abordados en dos subtemas: polinomios ortogonales tipo clásico y polinomios ortogonales tipo Sobolev.

A los polinomios ortogonales tipo clásico, dedicamos los capítulos 2, 3 y 4. En el capítulo 2 se estudian los polinomios de tipo Laguerre adicionando una masa de Dirac en 0. Hallamos una fórmula de conexión entre estos polinomios y una cierta sucesión de polinomios ortogonales de Laguerre, lo que ha permitido determinar una ecuación diferencial holonómica que satisfacen estos polinomios, procedimiento que es novedoso ya que aunque existía una demostración constructiva de dicha ecuación holonómica, hemos usado un procedimiento diferente para obtenerla. A partir de esta ecuación diferencial, realizamos una interpretación electrostática de los ceros y un estudio del comportamiento de los mismos, resultados que son nuevos en la literatura. Además, representamos estos polinomios como una función hipergeométrica y realizamos un estudio del comportamiento asintótico, que coincide con los resultados de [18], utilizando un procedimiento diferente. Los resultados obtenidos en este capítulo han sido publicados en [36].

En el capítulo 3 obtenemos resultados similares para los polinomios tipo Jacobi adicionando una masa de Dirac en 1, usando principalmente una fórmula de conexión entre estos polinomios y los polinomios de Jacobi. Nos hemos apoyado en una serie de trabajos previos como [5] y [16]. Nuevamente, lo novedoso de los resultados reside en el procedimiento utilizado. Se obtiene el comportamiento asintótico de los ceros en términos de la masa y su estudio electrostático. Los resultados de este capítulo se han publicado en [37].

En el capítulo 4 se perturban funcionales clásicos de primera especie de Laguerre-Hahn mediante adición de la derivada de una Delta de Dirac. Se determina la clase del funcional así como la ecuación diferencial de Riccati que satisface la correspondiente función de Stieltjes y se obtiene la expresión explícita de los polinomios ortogonales respecto al funcional lineal de primera especie de Laguerre. Cada uno de los resultados mencionados en este capítulo son completamente orig-

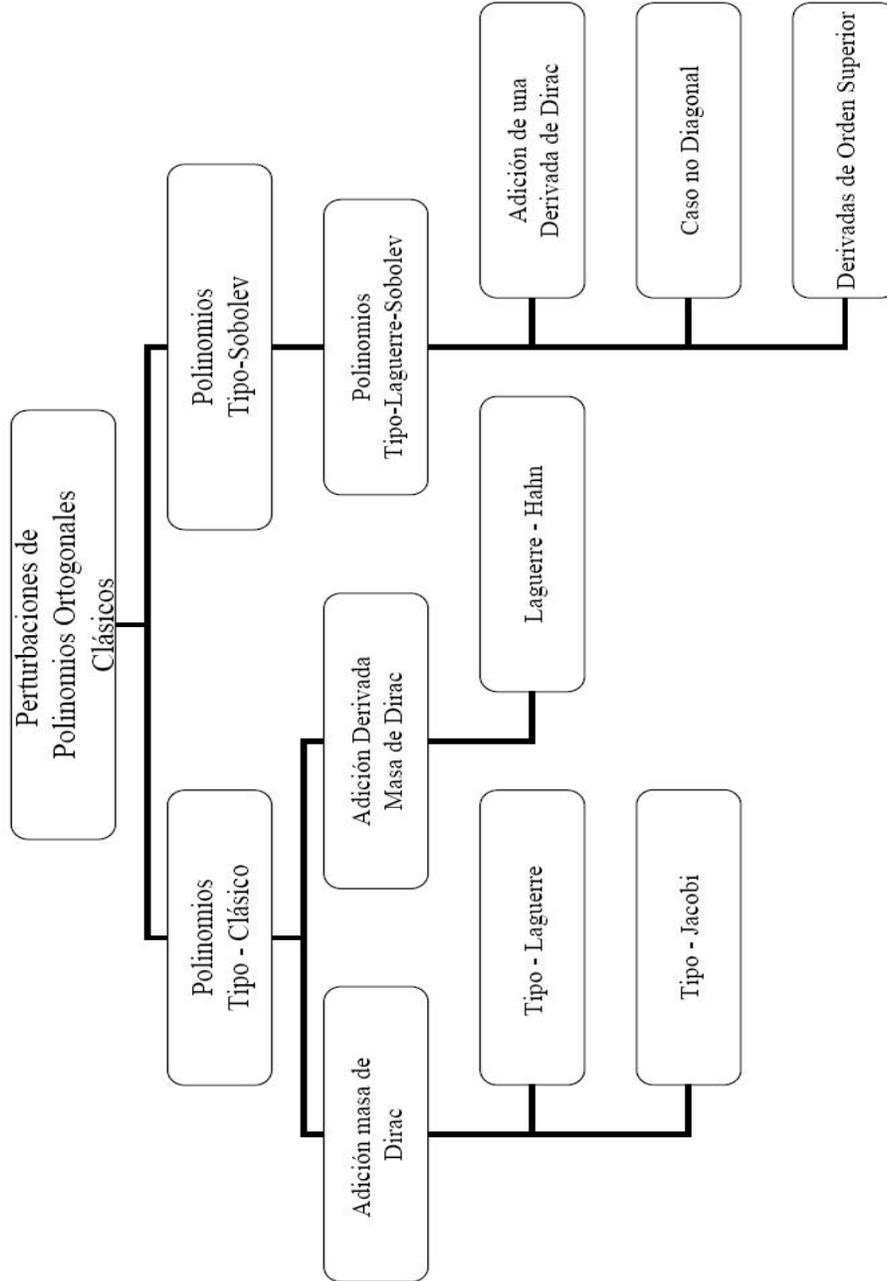
inales y han sido publicados en [40].

Los capítulos 5, 6 y 7 se dedican al estudio de los polinomios ortogonales de tipo Laguerre-Sobolev. En el capítulo 5 adicionamos una derivada de primer orden en el 0 al producto escalar correspondiente a los polinomios ortogonales de Laguerre, obteniendo una clase de polinomios ortogonales de tipo Laguerre-Sobolev. Encontramos una fórmula de conexión entre estos polinomios y una clase de polinomios ortogonales de Laguerre. Hallamos una ecuación diferencial holonómica que satisfacen estos polinomios, realizamos un estudio de la distribución de los ceros y obtenemos una representación de los polinomios ortogonales como una función hipergeométrica. Cada uno de los resultados mencionados constituye un aportación original. Además, realizamos un estudio del comportamiento asintótico usando básicamente la fórmula de conexión encontrada, obteniendo resultados que coinciden con los trabajos realizados en [18]. En [38] se han publicado los resultados de este capítulo.

En el capítulo 6 presentamos una generalización de los polinomios estudiados en los capítulos 2 y 5, los polinomios ortogonales de tipo Laguerre-Sobolev para el caso de una matriz simétrica no diagonal de tamaño  $2 \times 2$ , obteniendo una fórmula de conexión entre estos polinomios y una clase de polinomios ortogonales de Laguerre, resultados acerca del estudio del comportamiento asintótico, una fórmula de recurrencia a cinco términos y, finalmente, una ecuación diferencial holonómica que satisfacen estos polinomios. Este capítulo está motivado por [7] y [8]. Todos los resultados mencionados de este capítulo son originales y han dado lugar a [41] que se encuentra sometido para publicación.

Finalmente, en el capítulo 7, adicionamos al producto escalar de Laguerre una derivada de orden superior evaluada en el cero, encontrando una fórmula de conexión entre estos polinomios y una clase de polinomios de Laguerre, realizándose un estudio de la distribución de sus ceros y un análisis del comportamiento asintótico de los polinomios ortogonales. Los resultados mencionados son novedosos y han sido sometidos para publicación [39]. En buena parte están motivados por [81] y [87].

# Esquema temático





---

---

# CAPÍTULO 1

---

## Preliminares

### 1.1. Funcionales lineales y función de Stieltjes

Sean  $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$  una sucesión de números reales y  $\mu$  un funcional lineal definido en el espacio vectorial  $\mathbb{P}$  de los polinomios con coeficientes reales, tales que:

$$\langle \mu, x^n \rangle = \mu_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Diremos que  $\mu$  es un *funcional de momentos* asociado a  $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ . Además,  $\mu_n$  se denomina *momento de orden  $n$*  del funcional  $\mu$ .

Si  $\phi(x)$  es un polinomio con coeficientes reales, se definen el funcional de momentos  $\phi\mu$ , la multiplicación por la izquierda del funcional  $\mu$  por un polinomio  $\phi$ , y  $D\mu$ , la derivada distribucional usual de  $\mu$ , como sigue:

$$\langle \phi\mu, p(x) \rangle = \langle \mu, \phi(x) p(x) \rangle, \quad \langle D\mu, p(x) \rangle = -\langle \mu, p'(x) \rangle, \quad p \in \mathbb{P}.$$

Si

$$p(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j \in \mathbb{P}$$

entonces definimos

$$\begin{aligned} (\mu p)(x) &= \sum_{m=0}^n \left( \sum_{j=m}^n a_j \mu_{j-m} \right) x^m, \\ (\theta_0 p)(x) &= \frac{p(x) - p(0)}{x}. \end{aligned}$$

El funcional  $x^{-1}\mu$  y el producto de dos funcionales lineales se definen mediante

$$\langle x^{-1}\mu, p \rangle = \langle \mu, \theta_0 p \rangle; \quad \langle \mu v, p \rangle = \langle \mu, v p \rangle, \quad p \in \mathbb{P}.$$

Es fácil probar que

1.  $x(x^{-1}\mu) = \mu$
2.  $x^{-1}(x\mu) = \mu - \mu_0\delta(x)$
3.  $x^{-2}(x^2\mu) = \mu - \mu_0\delta(x) + \mu_1 D\delta(x)$ .

Aquí  $\delta(x - c)$  denota el funcional lineal de Dirac soportado en el punto  $c$ ,  $\langle \delta(x - c), p \rangle = p(c)$ .

Si  $\mu_0 = 1$ , definimos el funcional lineal  $\mu^{-1}$  mediante

$$\mu\mu^{-1} = \delta(x).$$

Sea  $\mu$  un funcional lineal en el espacio vectorial  $\mathbb{P}$  de los polinomios con coeficientes reales y sea  $S(\mu)(z)$  la *función de Stieltjes* asociada a dicho funcional, que está definida mediante

$$S(\mu)(z) = - \sum_{n \geq 0} \frac{\mu_n}{z^{n+1}} \tag{1.1}$$

donde  $\mu_n = \langle \mu, x^n \rangle$ ,  $n \geq 0$ , son los momentos de  $\mu$ . De ahora en adelante, vamos a suponer que  $\mu_0 = 1$ .

Sea  $\mathbb{P}'$  el espacio dual algebraico de  $\mathbb{P}$  y  $\Delta = \text{span}\{D^n \delta\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Consideremos el isomorfismo  $F : \Delta \rightarrow \mathbb{P}$  tal que si

$$v = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n!} \mu_n D^n \delta,$$

entonces

$$F(v)(z) = \sum_{n=0}^N \mu_n z^n.$$

Obsérvese que, desde un punto de vista formal,

$$S(\mu)(z) = -z^{-1} F(\mu)(z^{-1}).$$

Además

$$S(p\mu)(z) = p(z)S(\mu)(z) + (\mu\theta_0 p)(z).$$

A continuación presentamos algunas propiedades de la función de Stieltjes. (Para más detalles ver [77])

**Lema 1** Para  $p \in \mathbb{P}$  y  $\mu, \nu \in \mathbb{P}'$ , tenemos

1.  $S'(\mu)(z) = S(D\mu)(z)$ .
2.  $S(\mu\nu)(z) = -zS(\mu)(z)S(\nu)(z)$ .
3.  $S(x^{-1}\mu)(z) = \frac{1}{z}S(\mu)(z)$ .

El marco general de la teoría de funcionales lineales en conexión con los polinomios ortogonales aparece descrito en [84] y [92].

## 1.2. Polinomios Ortogonales

Dado un funcional de momentos  $\mu$ , una sucesión de polinomios  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  se dice que es una sucesión de *polinomios ortogonales* respecto a  $\mu$  si:

- (i) El grado de  $P_n$  es  $n$ .
- (ii)  $\langle \mu, P_n(x)P_m(x) \rangle = 0$ ,  $m \neq n$ .
- (iii)  $\langle \mu, P_n^2(x) \rangle \neq 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

Si el coeficiente conductor de todos los polinomios  $P_n(x)$  es la unidad, entonces  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  constituye una sucesión de *polinomios ortogonales mónicos*. Es evidente que para cada sucesión de polinomios ortogonales existe la correspondiente familia de polinomios ortogonales mónicos. En lo sucesivo, mientras no se diga lo contrario, trabajaremos con polinomios mónicos.

El siguiente teorema, cuya demostración se puede encontrar en [32], nos proporciona condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una sucesión de polinomios ortogonales  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  respecto a un funcional de momentos  $\mu$  asociado a  $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ .

**Teorema 2** Sea  $\mu$  el funcional de momentos asociado a  $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ . Existe una sucesión de polinomios ortogonales mónicos  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  asociada a  $\mu$  si y solo si las submatrices principales de la matriz de Hankel  $[\mu_{i+j}]_{i,j \in \mathbb{N}}$  son no singulares.

Un funcional de momentos para el que existe la correspondiente sucesión de polinomios ortogonales se denomina *regular* o *cuasi-definido* ([32]). Si las submatrices principales tienen determinante positivo, el funcional se dice definido positivo.

Sea  $P$  un polinomio y  $\mu$  un funcional de momentos definido positivo. Entonces,  $\mu$  admite la siguiente representación integral

$$\langle \mu, P \rangle = \int_{\mathbb{R}} P(x) d\sigma,$$

donde  $\sigma$  es una medida positiva no trivial soportada en un subconjunto formado por infinitos puntos de  $\mathbb{R}$ . Entonces, se puede ver que los ceros de los polinomios ortogonales satisfacen las siguientes propiedades. La demostración de este teorema puede consultarse en [32] y en [95].

**Teorema 3** *Sea  $\mu$  un funcional de momentos definido positivo soportado en un subconjunto infinito  $E$  de  $\mathbb{R}$  y  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$  la sucesión de polinomios ortogonales mónicos correspondiente a  $\mu$ . Entonces, para cada  $n$ , los ceros de  $P_n(x)$  son reales, simples y están en el interior de la envoltura convexa de  $E$ .*

A continuación, se muestran la relación de recurrencia a tres términos que satisface una sucesión de polinomios ortogonales mónicos, el Teorema de Favard y la fórmula de Christoffel-Darboux. Las demostraciones se pueden ver en [32] y [95].

**Teorema 4** *(Relación de recurrencia a tres términos) Si  $\mu$  es un funcional de momentos cuasi-definido y  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  la correspondiente sucesión de polinomios ortogonales mónicos, entonces existen sucesiones de números reales  $\{\beta_n\}_{n \geq 0}$  y  $\{\gamma_n\}_{n \geq 0}$ , con  $\gamma_n \neq 0$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , tales que:*

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x) \quad (1.2)$$

con  $P_0(x) = 1, P_1(x) = x - \beta_0$ .

Recíprocamente,

**Teorema 5** *(Teorema de Favard) Sean  $\{\beta_n\}_{n \geq 0}$  y  $\{\gamma_n\}_{n \geq 0}$  sucesiones de números reales con  $\gamma_n \neq 0$  y  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  una sucesión de polinomios mónicos dada por*

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x), \quad (1.3)$$

donde  $P_0(x) = 1$ ,  $P_1(x) = x - \beta_0$ . Entonces existe un único funcional de momentos  $\mu$  tal que  $\langle \mu, 1 \rangle = \gamma_0$  y  $\langle \mu, P_m(x)P_n(x) \rangle = 0$  para  $m \neq n$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $\mu$  es cuasi-definido y  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$  es la correspondiente sucesión de polinomios ortogonales mónicos. Además,  $\mu$  es definido positivo si y solo si  $\beta_n$  es real y  $\gamma_n > 0$  para  $n \geq 1$ .

**Teorema 6** (Fórmula de Christoffel-Darboux) Si  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$  es la sucesión de polinomios ortogonales mónicos correspondiente al funcional de momentos  $\mu$ , entonces, para cada  $n \in \mathbb{N}$

$$K_n(x, y) = \sum_{k=0}^n \frac{P_k(x)P_k(y)}{\|P_k\|^2} = \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{\|P_n\|^2(x-y)}, \quad (1.4)$$

donde  $\langle \mu, P_k^2(x) \rangle = \|P_k\|^2$ .

Usaremos la siguiente notación para las derivadas parciales de  $K_n(x, y)$

$$\frac{\partial^{j+k}(K_n(x, y))}{\partial^j x \partial^k y} = K_n^{(j,k)}(x, y).$$

Si  $q(x)$  es un polinomio tal que  $\deg q \leq n$ , se puede escribir como una combinación lineal de una sucesión de polinomios ortogonales  $\{P_n\}_{n \geq 0}$

$$q(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\langle P_k(x), q(x) \rangle}{\|P_k\|^2} P_k(x).$$

Por lo tanto,

$$q^{(j)}(y) = \sum_{k=0}^n \frac{\langle P_k(x), q(x) \rangle}{\|P_k\|^2} (P_k)^{(j)}(y),$$

y, usando el hecho de que

$$\begin{aligned} \langle K_n^{(0,j)}(x, y), q(x) \rangle &= \left\langle \sum_{k=0}^n \frac{P_k(x) (P_k)^{(j)}(y)}{\|P_k\|^2}, q(x) \right\rangle \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{\langle P_k(x), q(x) \rangle}{\|P_k\|^2} (P_k)^{(j)}(y), \end{aligned}$$

entonces

$$\langle K_n^{(0,j)}(x, y), q(x) \rangle = q^{(j)}(y). \quad (1.5)$$

Obsérvese que para  $j = 0$  se tiene la denominada propiedad reproductora de los polinomios núcleo.

Sea  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  una sucesión de polinomios ortogonales mónicos. De la fórmula de Christoffel-Darboux,

$$K_{n-1}(x, y) = \frac{1}{\|P_{n-1}\|^2} \frac{P_n(x)P_{n-1}(y) - P_{n-1}(x)P_n(y)}{x - y},$$

calculando la  $j$ -ésima derivada parcial respecto a  $y$ , se tiene

$$K_{n-1}^{(0,j)}(x, y) = \frac{1}{\|P_{n-1}\|^2} \left( P_n(x) \frac{\partial^j}{\partial y^j} \left( \frac{P_{n-1}(y)}{x - y} \right) - P_{n-1}(x) \frac{\partial^j}{\partial y^j} \left( \frac{P_n(y)}{x - y} \right) \right). \quad (1.6)$$

Usando la regla de Leibnitz

$$\frac{\partial^j}{\partial y^j} \left( \frac{P_n(y)}{x - y} \right) = \sum_{k=0}^j \frac{j!}{k!} \frac{P_n^{(k)}(y)}{(x - y)^{j-k+1}},$$

y reemplazando la anterior expresión en (1.6), obtenemos

$$\begin{aligned} K_{n-1}^{(0,j)}(x, y) &= \frac{1}{\|P_{n-1}\|^2} \left( P_n(x) \sum_{k=0}^j \frac{j!}{k!} \frac{P_{n-1}^{(k)}(y)}{(x - y)^{j-k+1}} - P_{n-1}(x) \sum_{k=0}^j \frac{j!}{k!} \frac{P_n^{(k)}(y)}{(x - y)^{j-k+1}} \right) \\ &= \frac{j!}{\|P_{n-1}\|^2 (x - y)^{j+1}} \times \\ &\quad \left( P_n(x) \sum_{k=0}^j \frac{1}{k!} P_{n-1}^{(k)}(y) (x - y)^k - P_{n-1}(x) \sum_{k=0}^j \frac{1}{k!} P_n^{(k)}(y) (x - y)^k \right). \end{aligned}$$

Por tanto

$$K_{n-1}^{(0,j)}(x, a) = \frac{j!}{\|P_{n-1}\|^2 (x - a)^{j+1}} \left( P_n(x) Q_j(x, a; P_{n-1}) - P_{n-1}(x) Q_j(x, a; P_n) \right) \quad (1.7)$$

donde  $Q_j(x, a; P_{n-1})$  y  $Q_j(x, a; P_n)$  son los polinomios de Taylor de grado  $j$  de los polinomios  $P_{n-1}$  y  $P_n$  en torno de  $x = a$  respectivamente.

Usando los polinomios de Taylor de  $P_n(x)$  y  $P_{n-1}(x)$  en (1.7), vamos a calcular  $K_{n-1}^{(0,j)}(a, a)$ . Por tanto

$$K_{n-1}^{(0,j)}(x, a) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{j!}{\|P_{n-1}\|^2 (x-a)^{j+1}} \left[ \left( P_n(a) + P'_n(a)(x-a) + \frac{P''_n(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{P_n^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \right) \right. \\
&\quad \times \left( P_{n-1}(a) + P'_{n-1}(a)(x-a) + \frac{P''_{n-1}(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{P_{n-1}^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j \right) - \\
&\quad \left( P_{n-1}(a) + P'_{n-1}(a)(x-a) + \frac{P''_{n-1}(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{P_{n-1}^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} \right) \\
&\quad \left. \times \left( P_n(a) + P'_n(a)(x-a) + \frac{P''_n(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{P_n^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j \right) \right]. \quad (1.8)
\end{aligned}$$

Realizando unas sencillas operaciones en la anterior expresión, los coeficientes de los monomios de grado menor o igual que  $j$  en  $x-a$  se cancelan, con lo que se obtiene, para  $x=a$ ,

$$K_{n-1}^{(0,j)}(a, a) = \frac{j!}{\|P_{n-1}\|^2} \left( P_{n-1}(a) \frac{P_n^{(j+1)}(a)}{(j+1)!} - P_n(a) \frac{P_{n-1}^{(j+1)}(a)}{(j+1)!} \right),$$

esto es,

$$K_{n-1}^{(0,j)}(a, a) = \frac{1}{\|P_{n-1}\|^2 (j+1)} \left( P_{n-1}(a) P_n^{(j+1)}(a) - P_n(a) P_{n-1}^{(j+1)}(a) \right). \quad (1.9)$$

Para hallar  $K_{n-1}^{(j,j)}(a, a)$ , solo necesitamos determinar en (1.8) los coeficientes de  $(x-a)^{2j+1}$  en el término entre corchetes, esto es,

$$\begin{aligned}
&\left[ \frac{P_{n-1}(a) P_n^{(2j+1)}(a)}{0! (2j+1)!} + \frac{P'_{n-1}(a) P_n^{(2j)}(a)}{1! (2j)!} + \dots + \frac{P_{n-1}^{(j)}(a) P_n^{(j+1)}(a)}{j! (j+1)!} \right] - \\
&\left[ \frac{P_n(a) P_{n-1}^{(2j+1)}(a)}{0! (2j+1)!} + \frac{P'_n(a) P_{n-1}^{(2j)}(a)}{1! (2j)!} + \dots + \frac{P_n^{(j)}(a) P_{n-1}^{(j+1)}(a)}{j! (j+1)!} \right] \\
&= \frac{1}{(2j+1)!} \left[ \left( P_{n-1}(a) P_n^{(2j+1)}(a) + P'_{n-1}(a) P_n^{(2j)}(a) \binom{2j+1}{1} + \dots \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \binom{2j+1}{j} P_{n-1}^{(j)}(a) P_n^{(j+1)}(a) \right) - \right. \\
&\quad \left( P_n(a) P_{n-1}^{(2j+1)}(a) + P'_n(a) P_{n-1}^{(2j)}(a) \binom{2j+1}{1} + \dots \right. \\
&\quad \left. \left. + \binom{2j+1}{j} P_n^{(j)}(a) P_{n-1}^{(j+1)}(a) \right) \right].
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$K_{n-1}^{(j,j)}(a, a) = \frac{(j!)^2}{(2j+1)! \|P_{n-1}\|^2} \times \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} & \left[ \left( P_{n-1}(a)P_n^{(2j+1)}(a) + P'_{n-1}(a)P_n^{(2j)}(a) \binom{2j+1}{1} \right) + \dots \right. \\ & \left. + \binom{2j+1}{j} P_{n-1}^{(j)}(a)P_n^{(j+1)}(a) \right] - \\ & \left( P_n(a)P_{n-1}^{(2j+1)}(a) + P'_n(a)P_{n-1}^{(2j)}(a) \binom{2j+1}{1} \right) + \dots \\ & \left. + \binom{2j+1}{j} P_n^{(j)}(a)P_{n-1}^{(j+1)}(a) \right]. \end{aligned}$$

**Definición 1** ([32], [93].) Sea  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  la sucesión de polinomios ortogonales mónicos respecto al funcional cuasi-definido  $\mu$ . La sucesión de polinomios mónicos  $\{P_n^{(1)}\}_{n \geq 0}$  dada por

$$P_n^{(1)}(x) = \left\langle \mu_\xi, \frac{P_{n+1}(x) - P_{n+1}(\xi)}{x - \xi} \right\rangle, \quad n \geq 0, \quad (1.11)$$

se denomina sucesión de polinomios asociados de primer orden para la sucesión  $\{P_n\}_{n \geq 0}$

Es fácil comprobar que la sucesión  $\{P_n^{(1)}\}_{n \geq 0}$  satisface la relación de recurrencia a tres términos

$$xP_n^{(1)}(x) = P_{n+1}^{(1)}(x) + \beta_{n+1}P_n^{(1)}(x) + \gamma_{n+1}P_{n-1}^{(1)}(x).$$

Denotaremos mediante  $\mu^{(1)}$  el funcional normalizado,  $(\mu^{(1)})_0 = \mu_0^{(1)} = 1$ , tal que la sucesión  $\{P_n^{(1)}\}_{n \geq 0}$  es la correspondiente sucesión de polnomios ortogonales mónicos.

**Teorema 7** ([1]) Sea  $\mu$  un funcional lineal. Entonces

$$\gamma_1 \mu^{(1)} = -x^2 \mu^{-1}.$$

En general, la sucesión asociada de orden  $r \in \mathbb{N}$ ,  $\{P_n^{(r)}\}_{n \geq 0}$  se define mediante

$$P_n^{(r)}(x) = \frac{1}{\langle \mu, P_{r-1}^2 \rangle} \left\langle \mu_\xi, \frac{P_{n+r}(x) - P_{n+r}(\xi)}{x - \xi} P_{r-1}(\xi) \right\rangle,$$

y satisface la relación de recurrencia a tres términos

$$\begin{aligned} P_{n+1}^{(r)}(x) &= (x - \beta_{n+r}) P_n^{(r)}(x) - \gamma_{n+r} P_{n-1}^{(r)}(x), \quad n \geq 0, \\ P_1^{(r)}(x) &= x - \beta_r, P_0^{(r)}(x) = 1. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Esto corresponde a una perturbación por desplazamiento de los coeficientes de la relación de recurrencia a tres términos.

**Observación 8** *Para describir la correspondiente función de Stieltjes en un caso definido positivo, se consideran las funciones*

$$S_n(\mu)(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{P_n(t) d\sigma(t)}{z - t}, \quad (1.13)$$

que se denominan funciones de segunda especie asociadas a  $\mu$ . La función de Stieltjes se puede representar como

$$S(\mu)(z) = S_0(\sigma)(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\sigma(t)}{z - t}.$$

Entonces, si  $\{P_n^{(r)}\}_{n \geq 0}$  es la sucesión de polinomios asociados de orden  $r$ , ortogonales con respecto al funcional  $\mu^{(r)}$ , la correspondiente función de Stieltjes esta dada por

$$S^{(r)}(\mu)(z) = \frac{S_r(\mu)(z)}{\gamma_1 S_{r-1}(\mu)(z)}.$$

Dado un funcional de momentos  $\mu$ , si se le adiciona una masa de Dirac, se obtiene un nuevo funcional de momentos  $\tilde{\mu}$ . El siguiente teorema, caracteriza la sucesión de polinomios ortogonales mónicos  $\{\tilde{P}_n\}_{n \geq 0}$  correspondientes a  $\tilde{\mu}$ .

**Teorema 9** ([14], [73]) *Sea  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  la sucesión de polinomios ortogonales mónicos correspondientes al funcional de momentos  $\mu$ . Si se considera el funcional de momentos  $\tilde{\mu} = \mu + M\delta(x - a)$ , entonces:*

1.  $\tilde{\mu}$  es cuasi-definido si y solo si  $1 + MK_n(a, a) \neq 0$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ , donde

$$K_n(x, a) = \sum_{j=0}^n \frac{P_j(a)}{\|P_j\|^2} P_j(x).$$

2. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\tilde{P}_n(x) = P_n(x) - \frac{MP_n(a)}{1 + MK_{n-1}(a, a)} K_{n-1}(x, a). \quad (1.14)$$

3. Si  $\mu$  es definido positivo, entonces  $\tilde{\mu}$  es definido positivo si y solo si  $1 + MK_n(a, a) > 0$ , esto es,  $M > \frac{-1}{K_n(a, a)}$  para todo  $n \geq 0$ . En otras palabras, basta que  $M$  sea una cota superior de  $\left\{ \frac{-1}{K_n(a, a)} \right\}_{n \geq 0}$  ya que  $\{K_n(a, a)\}_{n \geq 0}$  es monótona no decreciente.

4. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\langle \tilde{\mu}, \tilde{P}_n^2 \rangle = \langle \tilde{\mu}, \tilde{P}_n P_n \rangle = \langle \mu, P_n^2 \rangle \frac{1 + MK_n(a, a)}{1 + MK_{n-1}(a, a)}. \quad (1.15)$$

Si consideramos ahora la perturbación  $\tilde{\mu} = \mu + M\delta'(x - a)$ , el criterio de regularidad para  $\tilde{\mu}$  se presenta en el siguiente teorema.

**Teorema 10** ([24]) Sea  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  la sucesión de polinomios ortogonales mónicos correspondientes al funcional de momentos  $\mu$ . El funcional de momentos  $\tilde{\mu} = \mu + M\delta'(x - a)$ , es cuasi-definido si y solo si para cada  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{vmatrix} 1 - MK_{n-1}^{(0,1)}(a, a) & -MK_{n-1}(a, a) \\ -MK_{n-1}^{(1,1)}(a, a) & 1 - MK_{n-1}^{(0,1)}(a, a) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Además, si  $\{\tilde{P}_n\}$  es la sucesión de polinomios ortogonales correspondientes al funcional de momentos  $\tilde{\mu}$ , entonces

$$\tilde{P}_n(x) = P_n(x) - \frac{MP_n(a)}{1 + MK_{n-1}^{(0,1)}(a, a)} K_{n-1}^{(0,1)}(x, a).$$

Dado un funcional cuasi-definido  $\mu$ , diremos que una sucesión de polinomios ortogonales  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  es clásica, si existen polinomios  $\phi$  y  $\psi$  con  $\deg \phi \leq 2$ ,  $\deg \psi = 1$ , tales que  $\mu$  satisface la ecuación distribucional diferencial de Pearson:

$$D(\phi\mu) = \psi\mu.$$

Los polinomios ortogonales clásicos (Hermite, Laguerre, Jacobi y Bessel) son usados ampliamente en la literatura debido a sus numerosas aplicaciones en física matemática. Por ejemplo en el estudio de problemas que involucran ecuaciones diferenciales hipergeométricas (ver [70],[91] y [95])

El siguiente teorema resume algunas de las propiedades de los polinomios ortogonales clásicos. La demostración se puede encontrar en [72].

**Teorema 11** *Sea  $\mu$  un funcional de momentos cuasi-definido y  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  la correspondiente sucesión de polinomios ortogonales mónicos.*

1.  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  es clásica si y sólo si existen sucesiones  $a_n, b_n, c_n$ , con  $c_n \neq 0$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , tal que:

$$\phi(x)P'_n(x) = a_n P_{n+1}(x) + b_n P_n(x) + c_n P_{n-1}(x) \quad (1.16)$$

con  $\deg \phi \leq 2$ .

2.  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  es clásica si y sólo si para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n$  es una autofunción del operador diferencial

$$\mathcal{L} = \phi D^2 + \psi D \quad (1.17)$$

donde  $\deg \phi \leq 2$ ,  $\deg \psi = 1$ , y  $D$  denota el operador derivada estándar.

3.  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  es clásica si y sólo si existen sucesiones  $r_n$  y  $s_n$  tales que:

$$P_n(x) = Q_n(x) + r_n Q_{n-1}(x) + s_n Q_{n-2}(x), \quad n \geq 2, \quad (1.18)$$

con  $Q_k(x) = \frac{(P_{k+1}(x))'}{k+1}$ ,  $k \geq 0$ .

A continuación, pasamos a describir las familias de polinomios clásicos que sirven de soporte para la memoria. Nótese que centramos nuestra atención en el caso definido positivo.

Los polinomios ortogonales de Laguerre,  $\{L_n^\alpha(x)\}_{n \geq 0}$ , son aquellos que son ortogonales respecto al funcional lineal

$$\langle \mu, P(x) \rangle_\alpha = \int_0^\infty P(x) x^\alpha e^{-x} dx, \quad \alpha > -1, P \in \mathbb{P}.$$

Además, el funcional  $\mu$  satisface la ecuación diferencial de Pearson con  $\phi(x) = x$  y  $\psi(x) = -x + \alpha + 1$ ,  $\alpha > -1$ .

La siguiente proposición resume algunas de sus propiedades. Los detalles de las demostraciones pueden encontrarse en [19], [32], [56], [69] y [95].

**Proposición 1** Sea  $\{L_n^\alpha\}_{n \geq 0}$  la sucesión de polinomios ortogonales mónicos de Laguerre. Entonces,

1. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$xL_n^\alpha(x) = L_{n+1}^\alpha(x) + (2n + 1 + \alpha)L_n^\alpha(x) + n(n + \alpha)L_{n-1}^\alpha(x), \quad (1.19)$$

$$\text{con } L_0^\alpha(x) = 1, L_1^\alpha(x) = x - (\alpha + 1).$$

2. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$x(L_n^\alpha(x))' = nL_n^\alpha(x) + n(n + \alpha)L_{n-1}^\alpha(x). \quad (1.20)$$

3. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $L_n^\alpha(x)$  satisface la ecuación diferencial

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' = \lambda_n y, \quad (1.21)$$

$$\text{con } \lambda_n = -n.$$

4. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$L_n^\alpha(x) = \frac{(-1)^n \Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)} {}_1F_1(-n, \alpha + 1, x), \quad (1.22)$$

donde

$${}_1F_1(-n, \alpha + 1, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_k}{(\alpha + 1)_k} \frac{x^k}{k!},$$

denota una función hipergeométrica y

$$(\alpha)_k = \alpha(\alpha + 1) \dots (\alpha + k - 1), \quad k \geq 1, \quad (\alpha)_0 = 1.$$

5. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\|L_n^\alpha\|_\alpha^2 = n! \Gamma(n + \alpha + 1). \quad (1.23)$$

6. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$L_n^\alpha(x) = L_n^{\alpha+1}(x) + nL_{n-1}^{\alpha+1}(x). \quad (1.24)$$

7. Para cada  $n \in \mathbb{N}$

$$L_n^\alpha(0) = (-1)^n \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)}. \quad (1.25)$$

8. Para cada  $n \in \mathbb{N}$

$$(L_n^\alpha)'(x) = nL_{n-1}^{\alpha+1}(x). \quad (1.26)$$

9. Para cada  $n \in \mathbb{N}$

$$K_n(x, 0) = C_n L_n^{\alpha+1}(x), \quad C_n = \frac{L_n^\alpha(0)}{\langle \mu, 1 \rangle \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_n}. \quad (1.27)$$

10. Si  $J_\alpha$  es la función de Bessel

$$J_\alpha(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (x/2)^{2j+\alpha}}{j! \Gamma(j+\alpha+1)},$$

entonces, si denotamos  $\widehat{L}_n^\alpha(x) = (-1)^n / n! L_n^\alpha(x)$ , se tiene

a) *Fórmula asintótica de tipo Hilb: Asintótica fuerte interior.* Para cada  $n \in \mathbb{N}$

$$e^{-x/2} x^{\alpha/2} \widehat{L}_n^\alpha(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \left( n + \frac{\alpha+1}{2} \right)^{-\alpha/2} J_\alpha \left( 2 \sqrt{\left( n + \frac{\alpha+1}{2} \right) x} \right) + \mathcal{O}(n^{\alpha/2-3/4}), \quad (1.28)$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $(0, \infty)$ .

b) *Fórmula asintótica de Perron: Asintótica fuerte exterior.* Para cada  $n \in \mathbb{N}$  y  $x \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$

$$2\sqrt{\pi} e^{-x/2} (-x)^{\alpha/2+1/4} \widehat{L}_n^\alpha(x) = n^{\alpha/2-1/4} \exp\left(2(-nx)^{1/2}\right) \left[ \sum_{j=0}^{p-1} C_j(x) n^{-j/2} + \mathcal{O}(n^{-p/2}) \right], \quad (1.29)$$

donde  $C_j(x)$  es independiente de  $n$  y regular en  $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ .

c) *Fórmula de tipo Mehler-Heine.* Si fijamos  $j$  tal que  $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widehat{L}_n^\alpha(x/(n+j))}{n^\alpha} = x^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{x}), \quad (1.30)$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $\mathbb{C}$ .

11. *Asintótica del cociente.* Si  $j, l \in \mathbb{R}$  y  $h, k \in \mathbb{Z}$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{(l-j)/2} \frac{\widehat{L}_{n+k}^{\alpha+j}(x)}{\widehat{L}_{n+h}^{\alpha+l}(x)} = (-x)^{(l-j)/2} \quad (1.31)$$

*uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ .*

Los polinomios ortogonales de Jacobi,  $\{P_n^{\alpha,\beta}\}_{n \geq 0}$ , son ortogonales respecto al funcional lineal

$$\langle \mu, P(x) \rangle = \int_{-1}^1 P(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx, \quad \alpha, \beta > -1, P \in \mathbb{P}.$$

Por otra parte, el funcional  $\mu$  satisface la ecuación de Pearson con  $\phi(x) = 1-x^2$  y  $\psi_{\alpha,\beta}(x) = -(\alpha + \beta + 2)x + (\beta - \alpha)$ .

El siguiente teorema resume algunas de las propiedades de los polinomios de Jacobi. (Los detalles de las demostraciones se pueden ver en [32],[70], [91] y [95]).

**Proposición 2** *Sea  $\{P_n^{\alpha,\beta}\}_{n \geq 0}$  la sucesión de polinomios ortogonales mónicos de Jacobi.*

1. *Para cada  $n \in \mathbb{N}$*

$$xP_n^{\alpha,\beta}(x) = P_{n+1}^{\alpha,\beta}(x) + \beta_n^{\alpha,\beta} P_n^{\alpha,\beta}(x) + \gamma_n^{\alpha,\beta} P_{n-1}^{\alpha,\beta}(x), \quad (1.32)$$

*con*

$$\begin{aligned} \beta_n^{\alpha,\beta} &= \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(2n + \alpha + \beta)(2n + 2 + \alpha + \beta)}, \\ \gamma_n^{\alpha,\beta} &= \frac{4n(n + \alpha)(n + \beta)(n + \alpha + \beta)}{(2n + \alpha + \beta - 1)(2n + \alpha + \beta)^2(2n + \alpha + \beta + 1)}, \end{aligned}$$

$$P_0^{\alpha,\beta}(x) = 1 \text{ y } P_1^{\alpha,\beta}(x) = x + \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta + 2}.$$

2. *Para cada  $n \in \mathbb{N}$*

$$(1-x^2)(P_n^{\alpha,\beta}(x))' = a_n^{\alpha,\beta} P_{n+1}^{\alpha,\beta}(x) + b_n^{\alpha,\beta} P_n^{\alpha,\beta}(x) + c_n^{\alpha,\beta} P_{n-1}^{\alpha,\beta}(x), \quad (1.33)$$

donde

$$\begin{aligned} a_n^{\alpha,\beta} &= -n, \\ b_n^{\alpha,\beta} &= \frac{2(\alpha - \beta)n(n + \alpha + \beta + 1)}{(2n + \alpha + \beta)(2n + 2 + \alpha + \beta)}, \\ c_n^{\alpha,\beta} &= \frac{4n(n + \alpha)(n + \beta)(n + \alpha + \beta)(n + \alpha + \beta + 1)}{(2n + \alpha + \beta - 1)(2n + \alpha + \beta)^2(2n + \alpha + \beta + 1)}. \end{aligned}$$

3. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe una sucesión  $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$  de números reales no nulos tal que  $P_n^{\alpha,\beta}(x)$  satisface la ecuación diferencial:

$$\phi(x)y'' + \psi_{\alpha,\beta}(x)y' = \lambda_n^{\alpha,\beta}y, \quad (1.34)$$

con  $\lambda_n^{\alpha,\beta} = -n(n + 1 + \alpha + \beta)$ .

4. Para cada  $n \in \mathbb{N}$

$$\left(P_n^{\alpha,\beta}(x)\right)' = nP_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x). \quad (1.35)$$

5. Para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe una constante  $A_n$  tal que:

$$K_n(x, 1) = A_n P_n^{\alpha+1,\beta}(x), \quad A_n = \frac{P_n^{\alpha,\beta}(1)}{\langle \mu, 1 \rangle \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_n}. \quad (1.36)$$

6. Para cada  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} P_n^{\alpha,\beta}(1) &= 2^n \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(2n + \alpha + \beta + 1)}, \\ P_n^{\alpha,\beta}(-1) &= (-2)^n \frac{\Gamma(n + \beta + 1)\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1)\Gamma(2n + \alpha + \beta + 1)}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

7. Para cada  $n \in \mathbb{N}$

$$\|P_n^{\alpha,\beta}(x)\|_{\alpha,\beta}^2 = \frac{2^{2n+\alpha+\beta+1}\Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(n + \beta + 1)\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)n!}{(2n + \alpha + \beta + 1)(\Gamma(2n + \alpha + \beta + 1))^2}. \quad (1.38)$$

8. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$P_n^{\alpha, \beta}(x) = \frac{2^n (\alpha + 1)_n}{(n + \alpha + \beta + 1)_n} {}_2F_1 \left( -n, n + \alpha + \beta + 1; \alpha + 1; \frac{1-x}{2} \right), \quad (1.39)$$

donde

$$\begin{aligned} & {}_2F_1 \left( -n, n + \alpha + \beta + 1; \alpha + 1; \frac{1-x}{2} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_k (n + \alpha + \beta + 1)_k (1-x)^k}{(\alpha + 1)_k 2^k k!}, \end{aligned}$$

es una función hipergeométrica.

### 1.3. La clase Laguerre-Hahn

**Definición 2** ([1], [71], [84].) Un funcional lineal cuasi-definido  $\mu$  en el espacio vectorial  $\mathbb{P}$  se dice que pertenece a la clase Laguerre-Hahn si su función de Stieltjes satisface una ecuación diferencial de Riccati

$$\Phi(z)S'(\mu)(z) = B(z)S^2(\mu)(z) + C(z)S(\mu)(z) + D(z), \quad (1.40)$$

donde  $\Phi(z)$ ,  $B(z)$ ,  $C(z)$  y  $D(z)$  son polinomios con coeficientes complejos tales que  $\Phi(z) \neq 0$ ,  $B(z) \neq 0$  y  $D(z) = [(D\mu)\theta_0\Phi](z) + (\mu\theta_0C)(z) - (\mu^2\theta_0B)(z)$ .

**Observación 12** Si  $B(z) = 0$ , la función de Stieltjes satisface una ecuación diferencial lineal de primer orden  $\Phi(z)S'(\mu)(z) = C(z)S(\mu)(z) + D(z)$  y los correspondientes polinomios se denominan polinomios afines de Laguerre-Hahn. Más precisamente, son los bien conocidos polinomios ortogonales semiclásicos (ver [23], [52] y [84]).

**Definición 3** Sea  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  la sucesión de polinomios ortogonales mónicos respecto a un funcional lineal cuasi-definido  $\mu$ .  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  pertenece a la clase Laguerre-Hahn si  $\mu$  es un funcional lineal Laguerre-Hahn.

La demostración del siguiente teorema puede consultarse en [77].

**Teorema 13** *Sea  $\mu$  un funcional cuasi-definido tal que  $\mu_0 = 1$  y  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  la correspondiente sucesión de polinomios ortogonales mónicos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1.  $\mu$  es un funcional de Laguerre-Hahn.
2.  $\mu$  satisface la ecuación funcional  $D[\Phi\mu] + \Psi\mu + B(x^{-1}\mu^2) = 0$ , donde  $\Phi(x)$ ,  $B(x)$  y  $C(x)$  son los polinomios definidos en (1.40), y

$$\Psi(x) = -[\Phi'(x) + C(x)]. \quad (1.41)$$

3.  $\mu$  satisface la ecuación funcional

$$D[x\Phi\mu] + (x\Psi - \Phi)\mu + B\mu^2 = 0, \quad (1.42)$$

con la condición adicional  $\langle \mu, \Psi \rangle + \langle \mu^2, \theta_0 B \rangle = 0$  donde  $\Phi(x)$ ,  $\Psi(x)$  y  $B(x)$  son los mismos polinomios de (1.40).

4. Cada polinomio  $P_n(x)$ ,  $n \geq 0$ , satisface una relación de estructura

$$\Phi(x)P'_{n+1}(x) - B(x)P_n^{(1)}(x) = \sum_{k=n-s}^{n+d} \theta_{n,k} P_k(x), \quad n \geq s+1$$

donde  $\Phi(x)$  y  $B(x)$  son los mismos polinomios usados en (1.40) y  $\{P_n^{(1)}\}_{n \geq 0}$  es la sucesión de polinomios asociados de primer orden relativa a  $\{P_n\}_{n \geq 0}$ , donde  $t = \deg \Phi$ ,  $P = \deg \Psi \geq 1$ ,  $r = \deg B$ ,  $s = \max\{p-1, d-2\}$  y  $d = \max\{t, r\}$ .

### 1.3.1. Determinación del orden de la clase

En la caracterización (1.42) de los funcionales de Laguerre Hahn, debemos hacer notar que no hay unicidad en la representación. De hecho, es suficiente multiplicar por cualquier polinomio en ambos miembros de la ecuación. Por otra parte, la unicidad se obtiene imponiendo una condición de minimización en los grados de los polinomios.

Si  $\mu$  satisface la ecuación  $D[\Phi\mu] + \Psi\mu + B(x^{-1}\mu^2) = 0$ , multiplicando por un polinomio  $q(x)$ ,  $\mu$  también satisface

$$D[\Phi^*\mu] + \Psi^*\mu + B^*(x^{-1}\mu^2) = 0, \quad (1.43)$$

donde  $\Phi^* = q\Phi$ ,  $\Psi^* = q\Psi - q'\Phi$  y  $B^* = qB$ . Por tanto, vamos a asociar a  $\mu$  el conjunto de los enteros no negativos

$$H(\mu) = \{ \text{máx}\{p-1, d-2\}, \text{ donde } d = \text{máx}\{t, r\}, t = \text{deg } \Phi^*, p = \text{deg } \Psi^* \\ \text{ y } r = \text{deg } B^*, \text{ para cualquier elección de números positivos de } \\ \Phi^*, \Psi^* \text{ y } B^* \text{ tal que se verifica (1.43)} \}.$$

**Definición 4** *La clase del funcional de Laguerre-Hahn  $\mu$  es el mínimo de  $H(\mu)$ .*

**Teorema 14** *Sea  $\mu$  el funcional lineal cuasi-definido que verifica*

$$D[\Phi\mu] + \Psi\mu + B(x^{-1}\mu^2) = 0 \quad (1.44)$$

donde  $\Phi(x)$ ,  $\Psi(x)$  y  $B(x)$  son los polinomios introducidos en el Teorema 13. Definimos  $d = \text{máx}\{t, r\}$  y  $s = \text{máx}\{p-1, d-2\}$ . Entonces, el funcional de Laguerre-Hahn  $\mu$  es de clase  $s$  si y sólo si

$$\prod_{a \in Z_\Phi} \left( \left| \langle \mu, \Psi_a \rangle + \langle \mu^2, \theta_0 B_a \rangle \right| + |r_a| + |s_a| \right) \neq 0.$$

donde  $Z_\Phi$  denota el conjunto de los ceros de  $\Phi(x)$ . Los polinomios  $\Phi_a$ ,  $\Psi_a$  y  $B_a$  así como las constantes  $r_a$  y  $s_a$  son

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= (x-a)\Phi_a(x), \\ \Psi(x) + \Phi_a(x) &= (x-a)\Psi_a(x) + r_a, \\ B(x) &= (x-a)B_a(x) + s_a. \end{aligned}$$

Estableceremos un resultado equivalente al Teorema 14, donde las condiciones acerca de la clase se dan en términos de los polinomios  $B(x)$ ,  $C(x)$  y  $D(x)$  definidos en (1.40) a través de la ecuación de Riccati que satisface la función de Stieltjes.

**Corolario 1** *Sea  $\mu$  un funcional lineal cuasi-definido de Laguerre-Hahn que satisface (1.40).  $s$  es la clase de  $\mu$  si y sólo si*

$$\prod_{a \in Z_\Phi} (|C(a)| + |B(a)| + |D(a)|) \neq 0,$$

*i.e.,  $\Phi$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  son polinomios coprimos.*

### 1.3.2. Ejemplos

Considérese  $\mu$  un funcional lineal clásico (Hermite, Laguerre, Jacobi, Bessel). Debido a que  $\mu^{(1)}$  es un funcional de Laguerre-Hahn de clase  $s = 0$  (ver [25] y [26]), satisface una ecuación diferencial distribucional y su correspondiente función Stieltjes satisface una ecuación diferencial de Riccati. Los polinomios  $\Phi, \Psi, B, C$  y  $D$  se presentan en la Tabla 1.1.

	$H_n^{(1)}$	$L_n^{\alpha,(1)}$	$P_n^{\alpha,\beta,(1)}$	$B_n^{\alpha,(1)}$
$\Phi(z)$	1	$z$	$z^2 - 1$	$z^2$
$\Psi(z)$	$2z$	$z - \alpha - 3$	$-(\alpha + \beta + 4)z - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha + \beta + 2}$	$-2((\alpha + 1)z + \alpha^{-1})$
$B(z)$	-1	$-\alpha - 1$	$\frac{4(\alpha + 1)(\beta + 1)(\alpha + \beta + 1)}{(\alpha + \beta + 3)(\alpha + \beta + 2)^2}$	$-(2\alpha - 1)\alpha^{-2}(2\alpha + 1)^{-1}$
$C(z)$	$-2z$	$-z + \alpha + 2$	$(\alpha + \beta + 2)z - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha + \beta + 2}$	$2(\alpha z + 1 - \alpha^{-1})$
$D(z)$	-2	-1	$\alpha + \beta + 3$	$2\alpha + 1$

Tabla 1.1: Asociados de polinomios clásicos

Otros ejemplos de funcionales de Laguerre-Hahn que han sido tratados en la literatura están relacionados con diversos modelos de perturbaciones en los parámetros de la relación de recurrencia. Entre ellos cabe destacar los denominados polinomios co-recursivos ([31], [64], [65], [79]). Otros modelos de perturbaciones han sido estudiados en [1], [2], [3] y [78].



---

---

# CAPÍTULO 2

---

## Polinomios ortogonales de tipo Laguerre

### 2.1. Introducción

Consideremos los polinomios de tipo Laguerre  $\{\tilde{L}_n^\alpha\}_{n \geq 0}$  ortogonales respecto al funcional lineal

$$\langle \tilde{\mu}, p \rangle = \int_0^{+\infty} p(x)x^\alpha e^{-x} dx + Mp(0),$$

donde  $\alpha > -1$ ,  $M \in \mathbb{R}_+$ , y  $p$  es un polinomio con coeficientes reales. En este capítulo hallamos una fórmula de conexión entre estos polinomios y los polinomios de Laguerre  $\{L_n^{\alpha+1}\}_{n \geq 0}$ . Usando esta fórmula de conexión, estudiamos la ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes polinómicos dependientes del grado del polinomio que satisface la sucesión  $\{\tilde{L}_n^\alpha\}_{n \geq 0}$ . Es importante hacer notar que una demostración alternativa acerca de esta ecuación diferencial aparece en [57], basada en una fórmula de conexión entre el polinomio  $\tilde{L}_n^\alpha(x)$  y los polinomios  $L_n^\alpha(x)$  y  $xL_{n-1}^{\alpha+1}(x)$ .

Además, se realiza un análisis del comportamiento de los ceros de  $\{\tilde{L}_n^\alpha\}_{n \geq 0}$  y, usando la ecuación diferencial que satisfacen estos polinomios, presentamos una interpretación electrostática de los ceros en términos de un potencial logarítmico. Adicionalmente, encontramos una expresión de estos polinomios en términos de una función hipergeométrica y concluimos con un análisis del comportamiento

asintótico de dichos polinomios.

## 2.2. Fórmula de conexión

Nuestro objetivo es determinar la ecuación diferencial lineal de segundo orden que satisfacen los polinomios  $\tilde{L}_n^\alpha(x)$ , asociados con el funcional  $\tilde{\mu} = \mu + M\delta(x)$ . Utilizando los apartados 6 y 8 de la Proposición 1 y el Teorema 9 se sigue que

$$\begin{aligned}\tilde{L}_n^\alpha(x) &= L_n^{\alpha+1}(x) + nL_{n-1}^{\alpha+1}(x) - \frac{ML_n^\alpha(0)}{1 + MK_{n-1}(0,0)} \frac{L_{n-1}^\alpha(0)}{\langle \mu, 1 \rangle \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{n-1}} L_{n-1}^{\alpha+1}(x) \\ &= L_n^{\alpha+1}(x) + \left( n - \frac{ML_n^\alpha(0)}{1 + MK_{n-1}(0,0)} \frac{L_{n-1}^\alpha(0)}{\langle \mu, 1 \rangle \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{n-1}} \right) L_{n-1}^{\alpha+1}(x), \quad n = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Realizando algunas operaciones elementales se tiene:

$$\frac{ML_n^\alpha(0)}{1 + MK_{n-1}(0,0)} \frac{L_{n-1}^\alpha(0)}{\langle \mu, 1 \rangle \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{n-1}} = \frac{ML_n^\alpha(0)L_{n-1}^\alpha(0)}{\langle \mu, 1 \rangle \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{n-1} + ML_{n-1}^\alpha(0)L_{n-1}^{\alpha+1}(0)}$$

De (1.25)

$$L_n^\alpha(0) = (-1)^n (\alpha + 1)_n.$$

Por otra parte, de (1.19)

$$\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n = n! (\alpha + 1)_n, \quad n \geq 1.$$

Así pues,

$$\begin{aligned}& \frac{ML_n^\alpha(0)L_{n-1}^\alpha(0)}{\langle \mu, 1 \rangle \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{n-1} + ML_{n-1}^\alpha(0)L_{n-1}^{\alpha+1}(0)} = \\ &= \frac{M(-1)^n (\alpha + 1)_n (-1)^{n-1} (\alpha + 1)_{n-1}}{\langle \mu, 1 \rangle (n-1)! (\alpha + 1)_{n-1} + M(-1)^{n-1} (\alpha + 1)_{n-1} (-1)^{n-1} (\alpha + 2)_{n-1}} = \\ &= \frac{-M(\alpha + 1)_n}{\langle \mu, 1 \rangle (n-1)! + M(\alpha + 2)_{n-1}}\end{aligned}$$

y, en consecuencia,

$$\begin{aligned} n + \frac{M(\alpha+1)_n}{\langle \mu, 1 \rangle (n-1)! + M(\alpha+2)_{n-1}} &= \frac{\Gamma(\alpha+1)n! + nM(\alpha+2)_{n-1} + M(\alpha+1)_n}{\Gamma(\alpha+1)(n-1)! + M(\alpha+2)_{n-1}} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)n! + M(\alpha+2)_n}{\Gamma(\alpha+1)(n-1)! + M(\alpha+2)_{n-1}} = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}, \end{aligned}$$

donde  $\alpha_n = \Gamma(\alpha+1)n! + M(\alpha+2)_n$ .

Como conclusión,

$$\tilde{L}_n^\alpha(x) = L_n^{\alpha+1}(x) + d_n L_{n-1}^{\alpha+1}(x), \quad (2.1)$$

donde

$$d_n = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}},$$

de manera que se tiene la siguiente proposición

**Proposición 3** Si  $\{L_n^\alpha\}_{n \geq 0}$  son los polinomios ortogonales mónicos de Laguerre y  $\{\tilde{L}_n^\alpha\}_{n \geq 0}$  la sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociados con el funcional de momentos  $\tilde{\mu} = \mu + M\delta(x)$ ,  $M \in \mathbb{R}_+$ , entonces:

$$\tilde{L}_n^\alpha(x) = L_n^{\alpha+1}(x) + d_n L_{n-1}^{\alpha+1}(x), \quad n \geq 0. \quad (2.2)$$

## 2.3. Ecuación diferencial holonómica

Vamos a usar la Proposición 3 para obtener la ecuación diferencial lineal de segundo orden que satisface  $\tilde{L}_n^\alpha(x)$ . De (1.21) tenemos:

$$\phi \left( L_{n-1}^{\alpha+1}(x) \right)'' + \psi \left( L_{n-1}^{\alpha+1}(x) \right)' - \lambda_{n-1} L_{n-1}^{\alpha+1}(x) = 0$$

y

$$\phi \left( L_n^{\alpha+1}(x) \right)'' + \psi \left( L_n^{\alpha+1}(x) \right)' - \lambda_n L_n^{\alpha+1}(x) = 0$$

con  $\phi(x) = x$  y  $\psi(x) = \alpha + 2 - x$ . Sumando la última igualdad a la precedente multiplicada por  $d_n$  se obtiene:

$$\begin{aligned} &\phi \left( \left( L_n^{\alpha+1}(x) \right)'' + d_n \left( L_{n-1}^{\alpha+1}(x) \right)'' \right) + \psi \left( \left( L_n^{\alpha+1}(x) \right)' + d_n \left( L_{n-1}^{\alpha+1}(x) \right)' \right) \\ &- \lambda_n L_n^{\alpha+1}(x) - \lambda_{n-1} d_n L_{n-1}^{\alpha+1}(x) = 0, \end{aligned}$$

esto es,

$$\phi(\tilde{L}_n^\alpha(x))'' + \psi(\tilde{L}_n^\alpha(x))' - \lambda_n L_n^{\alpha+1}(x) - \lambda_{n-1} d_n L_{n-1}^{\alpha+1}(x) = 0,$$

o, equivalentemente,

$$\phi(\tilde{L}_n^\alpha(x))'' + \psi(\tilde{L}_n^\alpha(x))' - \lambda_n \tilde{L}_n^\alpha(x) = d_n L_{n-1}^{\alpha+1}(x) (\lambda_{n-1} - \lambda_n).$$

Dado que  $\lambda_{n-1} - \lambda_n = -(n-1) + n = 1$ , se deduce:

$$\phi(\tilde{L}_n^\alpha(x))'' + \psi(\tilde{L}_n^\alpha(x))' - \lambda_n \tilde{L}_n^\alpha(x) = d_n L_{n-1}^{\alpha+1}(x). \quad (2.3)$$

Si derivamos en cada miembro de (2.2) y multiplicamos por  $x$  se tiene:

$$x(\tilde{L}_n^\alpha(x))' = x(L_n^{\alpha+1}(x))' + d_n x(L_{n-1}^{\alpha+1}(x))'.$$

Usando (1.20) en  $L_n^{\alpha+1}(x)$  y  $L_{n-1}^{\alpha+1}(x)$ , respectivamente, y reemplazando en la última expresión:

$$\begin{aligned} x(\tilde{L}_n^\alpha(x))' &= (nL_n^{\alpha+1}(x) + n(n+\alpha+1)L_{n-1}^{\alpha+1}(x)) \\ &\quad + d_n((n-1)L_{n-1}^{\alpha+1}(x) + (n-1)(n+\alpha)L_{n-2}^{\alpha+1}(x)). \end{aligned}$$

Entonces:

$$x(\tilde{L}_n^\alpha(x))' = nL_n^{\alpha+1}(x)$$

$$+ (n(n+\alpha+1) + d_n(n-1))L_{n-1}^{\alpha+1}(x) + d_n(n-1)(n+\alpha)L_{n-2}^{\alpha+1}(x). \quad (2.4)$$

De (1.19)

$$xL_{n-1}^{\alpha+1}(x) = L_n^{\alpha+1}(x) + (2n+\alpha)L_{n-1}^{\alpha+1}(x) + (n-1)(n+\alpha)L_{n-2}^{\alpha+1}(x).$$

Despejando  $L_{n-2}^{\alpha+1}(x)$  y reemplazando en (2.4),

$$\begin{aligned} x(\tilde{L}_n^\alpha(x))' &= nL_n^{\alpha+1}(x) + (n(n+\alpha+1) + d_n(n-1))L_{n-1}^{\alpha+1}(x) \\ &\quad + d_n((x - (2n+\alpha))L_{n-1}^{\alpha+1}(x) - L_n^{\alpha+1}(x)) \\ &= (n - d_n)L_n^{\alpha+1}(x) \\ &\quad + (n(n+\alpha+1) + d_n(n-1) + d_n(x - (2n+\alpha)))L_{n-1}^{\alpha+1}(x). \end{aligned}$$

Dado que:

$$\begin{aligned}
 n - d_n &= n - \frac{\Gamma(\alpha + 1)n! + M(\alpha + 2)_n}{\Gamma(\alpha + 1)(n - 1)! + M(\alpha + 2)_{n-1}} \\
 &= \frac{M(n(\alpha + 2)_{n-1} - (\alpha + 2)_n)}{\alpha_{n-1}} = \frac{-M(\alpha + 2)_{n-1}(\alpha + 1)}{\alpha_{n-1}} \\
 &= -\frac{M(\alpha + 1)_n}{\alpha_{n-1}}
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 n(n + \alpha + 1) + d_n(n - 1) + d_n(x - (2n + \alpha)) &= d_nx + (n + \alpha + 1)(n - d_n) \\
 &= d_n\left(x - \frac{M(\alpha + 1)_{n+1}}{\alpha_n}\right)
 \end{aligned}$$

entonces:

$$x\left(\widetilde{L}_n^\alpha(x)\right)' = -\frac{M(\alpha + 1)_n}{\alpha_{n-1}}L_n^{\alpha+1}(x) + d_n\left(x - \frac{M(\alpha + 1)_{n+1}}{\alpha_n}\right)L_{n-1}^{\alpha+1}(x).$$

Si denotamos  $m_n = -\frac{M(\alpha + 1)_n}{\alpha_{n-1}}$  y  $f(x; n) = d_n\left(x - \frac{M(\alpha + 1)_{n+1}}{\alpha_n}\right)$ , deducimos:

$$x\left(\widetilde{L}_n^\alpha(x)\right)' = m_nL_n^{\alpha+1}(x) + f(x; n)L_{n-1}^{\alpha+1}(x). \quad (2.5)$$

A continuación, de (2.2) y (2.5) se sigue la expresión de  $L_{n-1}^{\alpha+1}(x)$  en términos de  $\widetilde{L}_n^\alpha(x)$  y  $\left(\widetilde{L}_n^\alpha(x)\right)'$ ,

$$L_{n-1}^{\alpha+1}(x) = \frac{m_n\widetilde{L}_n^\alpha(x) - x\left(\widetilde{L}_n^\alpha(x)\right)'}{m_nd_n - f(x; n)}. \quad (2.6)$$

Reemplazando este resultado en (2.3):

$$\phi\left(\widetilde{L}_n^\alpha(x)\right)'' + \psi\left(\widetilde{L}_n^\alpha(x)\right)' - \lambda_n\widetilde{L}_n^\alpha(x) = d_n\left(\frac{m_n\widetilde{L}_n^\alpha(x) - x\left(\widetilde{L}_n^\alpha(x)\right)'}{m_nd_n - f(x; n)}\right)'$$

y, en consecuencia,

$$\phi\left(\widetilde{L}_n^\alpha(x)\right)'' + \left(\psi + \frac{d_nx}{m_nd_n - f(x; n)}\right)\left(\widetilde{L}_n^\alpha(x)\right)' - \left(\frac{d_nm_n}{m_nd_n - f(x; n)} - n\right)\widetilde{L}_n^\alpha(x) = 0. \quad (2.7)$$

Pero,

$$\begin{aligned}
m_n d_n - f(x; n) &= d_n \left( -\frac{M(\alpha+1)_n}{\alpha_{n-1}} - x + \frac{M(\alpha+1)_{n+1}}{\alpha_n} \right) = \\
&= d_n \left( -x + \frac{M(\alpha+1)_n}{\alpha_n} ((\alpha+n+1) - d_n) \right) \\
&= d_n \left( -x + \frac{M(\alpha+1)_n}{\alpha_n} \left( (\alpha+n+1) - \frac{\Gamma(\alpha+1)n! + M(\alpha+2)_n}{\Gamma(\alpha+1)(n-1)! + M(\alpha+2)_{n-1}} \right) \right) \\
&= d_n \left( -x + \frac{M(\alpha+1)_n \Gamma(\alpha+2)(n-1)!}{\alpha_n \alpha_{n-1}} \right) = d_n (-x + s_n).
\end{aligned}$$

donde  $s_n = \frac{M(\alpha+1)_n \Gamma(\alpha+2)(n-1)!}{\alpha_n \alpha_{n-1}}$ . Entonces (2.7) se puede escribir como:

$$x(\tilde{L}_n^\alpha(x))'' + \left( \alpha + 2 - x + \frac{x}{s_n - x} \right) (\tilde{L}_n^\alpha(x))' - \left( \frac{m_n}{s_n - x} - n \right) \tilde{L}_n^\alpha(x) = 0$$

y, finalmente,

$$\begin{aligned}
&x(s_n - x)(\tilde{L}_n^\alpha(x))'' + (x^2 - (\alpha+1+s_n)x + (\alpha+2)s_n)(\tilde{L}_n^\alpha(x))' \\
&\quad - \left( nx - \frac{M(\alpha+1)_n}{\alpha_{n-1}} - \frac{M(\alpha+1)_n \Gamma(\alpha+2)n!}{\alpha_n \alpha_{n-1}} \right) \tilde{L}_n^\alpha(x) = 0
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= n! \Gamma(\alpha+1) + M(\alpha+2)_n \\
d_n &= \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} \\
m_n &= -\frac{M(\alpha+1)_n}{\alpha_{n-1}} \\
f(x; n) &= d_n \left( x - \frac{M(\alpha+1)_{n+1}}{\alpha_n} \right) \\
s_n &= \frac{M(n-1)! \Gamma(\alpha+2)(\alpha+1)_n}{\alpha_n \alpha_{n-1}}.
\end{aligned}$$

Por tanto, se ha probado:

**Teorema 15** Si  $\{L_n^\alpha\}_{n \geq 0}$  son los polinomios ortogonales de Laguerre mónicos y  $\{\widetilde{L}_n^\alpha\}_{n \geq 0}$  los polinomios ortogonales mónicos asociados con el funcional de momentos  $\widetilde{\mu} = \mu + M\delta(x)$ , entonces:

$$A(x; n) \left( \widetilde{L}_n^\alpha(x) \right)'' + B(x; n) \left( \widetilde{L}_n^\alpha(x) \right)' - C(x; n) \widetilde{L}_n^\alpha(x) = 0, \quad (2.8)$$

con  $A(x; n) = x(s_n - x)$ ,  $B(x; n) = x^2 - (\alpha + 1 + s_n)x + (\alpha + 2)s_n$  y  $C(x; n) = nx - \frac{M(\alpha + 1)_n}{\alpha_{n-1}} - \frac{M(\alpha + 1)_n \Gamma(\alpha + 2)n!}{\alpha_n \alpha_{n-1}}$ .

Una demostración alternativa aparece en [57], basada en una fórmula de conexión entre el polinomio  $\widetilde{L}_n^\alpha(x)$  y los polinomios  $L_n^\alpha(x)$  y  $xL_{n-1}^{\alpha+1}(x)$ .

## 2.4. Análisis de los ceros

Consideremos la sucesión de polinomios ortogonales mónicos de Laguerre  $\{L_n^\alpha\}_{n \geq 0}$  y  $\mu_n$  el correspondiente momento de orden  $n$ . Dado que  $\widetilde{L}_n^\alpha(x)$  se puede expresar como:

$$\widetilde{L}_n^\alpha(x) = \frac{1}{\Delta_{n-1}(\widetilde{\mu})} \begin{vmatrix} \mu_0 + M & \mu_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \mu_n \\ \mu_1 & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdot & \cdot & \cdot & \mu_{2n-1} \\ 1 & x & \cdot & \cdot & \cdot & x^n \end{vmatrix}$$

con

$$\Delta_{n-1}(\widetilde{\mu}) = \begin{vmatrix} \mu_0 + M & \mu_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \mu_{n-1} \\ \mu_1 & & \cdot & \cdot & \cdot & \mu_n \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \mu_{n-2} & \mu_{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mu_{2n-3} \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdot & \cdot & \cdot & \mu_{2n-2} \end{vmatrix},$$

tenemos:

$$\widetilde{L}_n^\alpha(x) = \frac{1}{\Delta_{n-1}(\widetilde{\mu})} \left( \Delta_{n-1}(\mu) L_n^\alpha(x) + Mx \Delta_{n-2}(x^2 \mu) R_{n-1}(x) \right),$$

donde  $\{R_n\}_{n \geq 0}$  es la sucesión de polinomios ortogonales mónicos respecto al funcional de momentos  $x^2\mu$ . Entonces:

$$\tilde{L}_n^\alpha(x) = \frac{\Delta_{n-1}(\mu) L_n^\alpha(x) + Mx\Delta_{n-2}(x^2\mu) R_{n-1}(x)}{\Delta_{n-1}(\mu) + M\Delta_{n-2}(x^2\mu)}, \quad (2.9)$$

y, como consecuencia:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \tilde{L}_n^\alpha(x) = xR_{n-1}(x) = xL_{n-1}^{\alpha+2}(x).$$

Sean  $\{x_{n,k}^{(M)}\}_{k=1}^n$  los ceros del polinomio  $\tilde{L}_n^\alpha(x)$  ordenados en sentido creciente, i.e  $x_{n,1}^{(M)} < x_{n,2}^{(M)} < \dots < x_{n,n}^{(M)}$ . Si se fija  $n$  y  $1 \leq k \leq n$ , se tiene que  $x_{n,k}^{(M)}$  es una función continua y decreciente en  $M$ . De aquí se obtiene el siguiente resultado cuya demostración aparece en [28].

**Proposición 4** Para  $M > 0$ :

1. Los ceros de  $\tilde{L}_n^\alpha(x)$  son reales, simples y no negativos.
2. Dado que  $d_n > 0$ , se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &< x_{n,1}^{(M)} < x_{n,1}^{\alpha+1} \text{ y} \\ x_{n-1,j-1}^{\alpha+1} &< x_{n,j}^{(M)} < x_{n,j}^{\alpha+1}, \quad j = 2, \dots, n, \end{aligned}$$

donde  $\{x_{n,j}^{\alpha+1}\}_{j=1}^n$  son los ceros del polinomio  $L_n^{\alpha+1}(x)$  y  $\{x_{n,j}^{(M)}\}_{j=1}^n$  los ceros de  $\tilde{L}_n^\alpha(x)$ .

Por tanto:

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} x_{n,1}^{(M)} &= 0, \\ \lim_{M \rightarrow \infty} x_{n,k}^{(M)} &= x_{n-1,k-1}^{\alpha+2}, \quad k = 2, \dots, n, \end{aligned}$$

donde  $\{x_{n-1,k}^{\alpha+2}\}_{k=1}^{n-1}$  son los ceros de  $L_{n-1}^{\alpha+2}(x)$ . De (2.9) se tiene:

$$\tilde{L}_n^\alpha(0) = \frac{\Delta_{n-1}(\mu) L_n^\alpha(0)}{\Delta_{n-1}(\mu) + M\Delta_{n-2}(x^2\mu)}.$$

Por otra parte, dado que  $\widetilde{L}_n^\alpha(0) = (-1)^n x_{n,1}^{(M)} x_{n,2}^{(M)} \cdots x_{n,n}^{(M)}$  y  $L_n^\alpha(0) = (-1)^n x_{n,1}^\alpha x_{n,2}^\alpha \cdots x_{n,n}^\alpha$ , se sigue que

$$(-1)^n x_{n,1}^{(M)} x_{n,2}^{(M)} \cdots x_{n,n}^{(M)} = \frac{\Delta_{n-1}(\mu) (-1)^n x_{n,1}^\alpha x_{n,2}^\alpha \cdots x_{n,n}^\alpha}{\Delta_{n-1}(\mu) + M\Delta_{n-2}(x^2\mu)}.$$

Multiplicando por  $M$  los dos miembros de la anterior expresión y calculando el límite cuando  $M \rightarrow \infty$ ,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} M x_{n,1}^{(M)} x_{n,2}^{(M)} \cdots x_{n,n}^{(M)} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{M\Delta_{n-1}(\mu) x_{n,1}^\alpha x_{n,2}^\alpha \cdots x_{n,n}^\alpha}{\Delta_{n-1}(\mu) + M\Delta_{n-2}(x^2\mu)},$$

i.e

$$\lim_{M \rightarrow \infty} M x_{n,1}^{(M)} x_{n-1,1}^{\alpha+2} \cdots x_{n-1,n-1}^{\alpha+2} = \frac{\Delta_{n-1}(\mu) x_{n,1}^\alpha x_{n,2}^\alpha \cdots x_{n,n}^\alpha}{\Delta_{n-2}(x^2\mu)}.$$

Como consecuencia,

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} M x_{n,1}^{(M)} &= \frac{\Delta_{n-1}(\mu) x_{n,1}^\alpha x_{n,2}^\alpha \cdots x_{n,n}^\alpha}{\Delta_{n-2}(x^2\mu) x_{n-1,1}^{\alpha+2} \cdots x_{n-1,n-1}^{\alpha+2}} = \frac{\Delta_{n-1}(\mu) L_n^\alpha(0)}{\Delta_{n-2}(x^2\mu) L_{n-1}^{\alpha+2}(0)} \\ &= \frac{\Delta_{n-1}(\mu) (-1)^n (\alpha+1)_n}{\Delta_{n-2}(x^2\mu) (-1)^{n-1} (\alpha+3)_{n-1}} = \frac{\Delta_{n-1}(\mu) (\alpha+1)_n}{\Delta_{n-2}(x^2\mu) (\alpha+3)_{n-1}} \\ &= \frac{(n-1)! \Gamma(\alpha+2)}{(\alpha+3)_{n-3}} = \frac{\alpha(\alpha+1)(n-1)! \Gamma(\alpha+3)}{(\alpha)_n}, \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

con lo que tenemos el siguiente teorema:

**Teorema 16** Sean  $\{x_{n,k}\}_{k \geq 1}$  los ceros de  $L_n^\alpha(x)$  y  $\{x_{n,k}^{(M)}\}_{k \geq 1}$  los ceros de  $\widetilde{L}_n^\alpha(x)$ . Entonces, para  $n \geq 1$

1.

$$\lim_{M \rightarrow \infty} M x_{n,1}^{(M)} = \frac{\alpha(\alpha+1)(n-1)! \Gamma(\alpha+3)}{(\alpha)_n}, \quad (2.10)$$

esto es,  $x_{n,1}^{(M)} = O\left(\frac{1}{M}\right)$ .

2.

$$\lim_{M \rightarrow \infty} x_{n,k}^{(M)} = x_{n-1,k-1}^{(\alpha+2)}, \quad k = 2, \dots, n.$$

## 2.5. Modelo electrostático

Sean  $\{x_{n,k}^{(M)}\}_{k \geq 1}$  los ceros de  $\tilde{L}_n^\alpha(x)$ . Evaluemos (2.8) en cada uno de estos ceros, entonces:

$$A(x_{n,k}^{(M)}; n) \left( \tilde{L}_n^\alpha(x_{n,k}^{(M)}) \right)'' + B(x_{n,k}^{(M)}; n) \left( \tilde{L}_n^\alpha(x_{n,k}^{(M)}) \right)' = 0.$$

Así pues,

$$\frac{\left( \tilde{L}_n^\alpha(x_{n,k}^{(M)}) \right)''}{\left( \tilde{L}_n^\alpha(x_{n,k}^{(M)}) \right)'} = -\frac{B(x_{n,k}^{(M)}; n)}{A(x_{n,k}^{(M)}; n)}.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \frac{B(x_{n,k}^{(M)}; n)}{A(x_{n,k}^{(M)}; n)} &= \frac{(m_n d_n - f_n(x_{n,k}^{(M)}; n)) \psi(x_{n,k}^{(M)}) + d_n x_{n,k}^{(M)}}{(m_n d_n - f_n(x_{n,k}^{(M)}; n)) \phi(x_{n,k}^{(M)})} \\ &= \frac{\psi(x_{n,k}^{(M)})}{\phi(x_{n,k}^{(M)})} + \frac{d_n}{(m_n d_n - f_n(x_{n,k}^{(M)}; n))}. \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\frac{\left( \tilde{L}_n^\alpha(x_{n,k}^{(M)}) \right)''}{\left( \tilde{L}_n^\alpha(x_{n,k}^{(M)}) \right)'} = \frac{d_n}{(f_n(x_{n,k}^{(M)}; n) - m_n d_n)} - \frac{\psi(x_{n,k}^{(M)})}{\phi(x_{n,k}^{(M)})}, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (2.11)$$

Pero

$$\frac{\left( \tilde{L}_n^\alpha(x_{n,k}^{(M)}) \right)''}{\left( \tilde{L}_n^\alpha(x_{n,k}^{(M)}) \right)'} = -2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{1}{x_{n,j}^{(M)} - x_{n,k}^{(M)}}$$

y, como consecuencia, (2.11) se puede escribir como:

$$-2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{1}{x_{n,j}^{(M)} - x_{n,k}^{(M)}} = \frac{d_n}{(f_n(x_{n,k}^{(M)}; n) - m_n d_n)} - \frac{\psi(x_{n,k}^{(M)})}{\phi(x_{n,k}^{(M)})},$$

o, lo que es lo mismo,

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{1}{x_{n,j}^{(M)} - x_{n,k}^{(M)}} - \frac{1}{2(s_n - x_{n,k}^{(M)})} - \frac{\alpha + 2 - x_{n,k}^{(M)}}{2x_{n,k}^{(M)}} = 0, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (2.12)$$

Esta última expresión nos dice que los ceros del polinomio  $\widetilde{L}_n^\alpha(x)$  están asociados al siguiente problema de equilibrio electrostático (ver [50] y [54]).

Consideremos  $n$  cargas unitarias localizadas en la semirrecta positiva bajo una interacción logarítmica y con el campo externo dado por:

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2} \ln(x^{\alpha+2} e^{-x}) + \frac{1}{2} \ln|x - s_n|.$$

La ecuación (2.12) nos dice que el gradiente de la energía total

$$E(X) = - \sum_{1 \leq k < j \leq n} \ln|x_k - x_j| + \sum_{j=1}^n \varphi(x_j)$$

se anula en  $(x_{n,1}^{(M)}, x_{n,2}^{(M)}, \dots, x_{n,n}^{(M)})$ . En otras palabras, es un punto crítico. El análisis del tipo de equilibrio constituye un problema abierto.

Fijando  $M \in \mathbb{R}_+$  es interesante analizar el comportamiento de  $s_n$  cuando  $n$  tiende a infinito ya que aparece en la fórmula (2.12), cumpliendo un papel similar al que cumplen los ceros del polinomio  $\widetilde{L}_n^\alpha(x)$ . Para lograrlo, dado que  $s_n$  se expresa en términos de  $\alpha_n$ , veremos primero el comportamiento de los sumandos de  $\alpha_n$  cuando  $n$  tiende a infinito. Usando el hecho que

$$\Gamma(x) \sim x^{x-1/2} e^{-x}$$

podemos ver que

$$\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1) \sim \frac{\sqrt{2\pi}\Gamma(\alpha+1)}{e} n^n n^{1/2} e^{-n}$$

y

$$M(\alpha+2)_n \sim \frac{M\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\alpha+2)e^{\alpha+2}} n^{n+\alpha+3/2} e^{-n}.$$

Por tanto, como consecuencia de la definición de  $s_n$

$$\begin{aligned}
s_n &\sim \frac{M(n-1)! \Gamma(\alpha+2) (\alpha+1)_n}{M^2 (\alpha+2)_n (\alpha+2)_{n-1}} \\
&= \frac{(n-1)! \Gamma(\alpha+2) (\alpha+1)}{M (\alpha+2)_n} \\
&= \frac{(n-1)! (\Gamma(\alpha+2))^2 (\alpha+1)}{M \Gamma(n+\alpha+2)} \\
&\sim \frac{(\alpha+1) (\Gamma(\alpha+2))^2 n^{n-1/2} e^{-n}}{M (n+\alpha+2)^{n+\alpha+3/2} e^{-(n+\alpha+2)}} \\
&\sim \frac{(\alpha+1) (\Gamma(\alpha+2))^2 n^{n-1/2} e^{\alpha+2}}{M n^{n+\alpha+3/2}} \\
&= \frac{(\alpha+1) e^{\alpha+2} (\Gamma(\alpha+2))^2}{M n^{\alpha+2}},
\end{aligned}$$

es decir,  $s_n$  tiende a cero cuando  $n$  tiende a infinito. Además, la velocidad de convergencia a cero es del orden de  $1/n^{\alpha+2}$ .

## 2.6. Representación Hipergeométrica

La ecuación (1.22) nos proporciona la representación de los polinomios ortogonales de Laguerre usando una función hipergeométrica. El objetivo es encontrar una expresión similar para los polinomios ortogonales de tipo Laguerre. Por tanto, usando (1.22) y (2.2) tenemos:

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_n^\alpha(x) &= (-1)^n (\alpha+2)_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_k}{(\alpha+2)_k} \frac{x^k}{k!} + d_n (-1)^{n-1} (\alpha+2)_{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n+1)_k}{(\alpha+2)_k} \frac{x^k}{k!} \\
&= (-1)^n (\alpha+2)_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_k}{(\alpha+2)_k} \frac{x^k}{k!} \left[ 1 - d_n \frac{(-n+k)}{(n+\alpha+1)(-n)} \right] \\
&= (-1)^n (\alpha+2)_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_k}{(\alpha+2)_k} \frac{x^k}{k!} \left[ 1 + d_n \frac{(k-n)}{n(n+\alpha+1)} \right] \\
&= \frac{(-1)^n (\alpha+2)_n d_n}{n(n+\alpha+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_k}{(\alpha+2)_k} \frac{x^k}{k!} \left[ k + \frac{n(n+\alpha+1)}{d_n} - n \right].
\end{aligned}$$

Si  $a_n = \frac{n(n+\alpha+1)}{d_n} - n$ , entonces

$$\tilde{L}_n^\alpha(x) = \frac{(-1)^n(\alpha+2)_n d_n}{n(n+\alpha+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_k (a_n+k) x^k}{(\alpha+2)_k k!}$$

y usando el hecho que

$$(a_n+k) = \frac{a_n(1+a_n)_k}{(a_n)_k}$$

tenemos el siguiente teorema

**Teorema 17** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\tilde{L}_n^\alpha(x) = \frac{(-1)^n(\alpha+2)_n d_n a_n}{n(n+\alpha+1)} {}_2F_2(-n, 1+a_n; a_n, \alpha+2; x). \quad (2.13)$$

donde  ${}_2F_2(-n, 1+a_n; a_n, \alpha+2; x)$  es la función hipergeométrica

$${}_2F_2(-n, 1+a_n; a_n, \alpha+2; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_k (1+a_n)_k x^k}{(a_n)_k (\alpha+2)_k k!}.$$

Resultado que coincide con el obtenido por R. Koekoek en [59].

## 2.7. Comportamiento Asintótico

En esta sección realizamos un estudio del comportamiento asintótico de los polinomios de tipo Laguerre. Los resultados son casos particulares de los obtenidos por R. Álvarez-Nodarse y J. J. Moreno-Balcázar en [18], solo que hemos utilizado una metodología diferente.

En primer lugar, vamos a estudiar el comportamiento asintótico de  $d_n$ , la constante de la fórmula de conexión (2.2). Dado que:

$$\begin{aligned} \frac{d_n}{n} &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2)(n-1)! + M\Gamma(n+\alpha+1)\left(1 + \frac{\alpha+1}{n}\right)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2)(n-1)! + M\Gamma(\alpha+n+1)} \\ &= 1 + \frac{\frac{\alpha+1}{n}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2)(n-1)! + M\Gamma(\alpha+n+1)} \\ &= 1 + \frac{\alpha+1}{n} - \frac{(\Gamma(\alpha+2))^2(n-1)!}{Mn\Gamma(n+\alpha+1) + \Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2)n!} \\ &\cong 1 + \frac{\alpha+1}{n} - \frac{(\Gamma(\alpha+2))^2 \sqrt{2\pi}n^{n-1/2}e^{-n}}{Mn\sqrt{2\pi}(n+\alpha+1)^{n+\alpha+1/2}e^{-(n+\alpha+1)} + \Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2)n!} \end{aligned}$$

podemos concluir que

$$\frac{d_n}{n} = 1 + \frac{\alpha + 1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{2+\alpha}}\right), \quad (2.14)$$

es decir:

$$\frac{d_n}{n} \cong 1 + \frac{\alpha + 1}{n}.$$

Esto significa que para  $n$  suficientemente grande,  $\frac{d_n}{n}$  se comporta como  $1 + \frac{\alpha+1}{n}$ .

Supongamos que  $\widehat{L}_n^\alpha(x)$  es el polinomio ortogonal de Laguerre de grado  $n$  con coeficiente conductor  $\frac{(-1)^n}{n!}$  y  $\widetilde{L}_n^\alpha(x)$  es el polinomio ortogonal de tipo Laguerre de grado  $n$  con el mismo coeficiente conductor. Entonces, usando (2.2) y (2.14) tenemos:

$$\begin{aligned} \widetilde{L}_n^\alpha(x) &= \widehat{L}_n^{\alpha+1}(x) - \frac{d_n}{n} \widehat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x) \\ &\cong \widehat{L}_n^{\alpha+1}(x) - \left(1 + \frac{\alpha + 1}{n}\right) \widehat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x) - \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{2+\alpha}}\right) \widehat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x) \\ &= \widehat{L}_n^\alpha(x) - \frac{\alpha + 1}{n} \widehat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x) - \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{2+\alpha}}\right) \widehat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x), \end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$\frac{\widetilde{L}_n^\alpha(x)}{\widehat{L}_n^\alpha(x)} = 1 - \frac{\alpha + 1}{n} \frac{\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x)}{\widehat{L}_n^\alpha(x)} - \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{2+\alpha}}\right) \frac{\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x)}{\widehat{L}_n^\alpha(x)},$$

y usando (1.31), tenemos la siguiente proposición

### Proposición 5

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widetilde{L}_n^\alpha(x)}{\widehat{L}_n^\alpha(x)} = 1$$

uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ .

Por otra parte:

$$\begin{aligned}
\frac{\widetilde{L}_n^\alpha(x)}{n^{\alpha/2}} &= \frac{\widehat{L}_n^\alpha(x)}{n^{\alpha/2}} - \frac{\alpha + 1}{n^{1/2}} \frac{\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x)}{n^{(\alpha+1)/2}} - O\left(\frac{1}{n^{3/2+\alpha}}\right) \frac{\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x)}{n^{(\alpha+1)/2}} \\
&= e^{x/2} x^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{nx}) + O(n^{-3/4}) - \\
&\quad \frac{\alpha + 1}{n^{1/2}} \left( e^{x/2} x^{-(\alpha+1)/2} J_{\alpha+1}(2\sqrt{(n-1)x}) + O(n^{-3/4}) \right) - O\left(\frac{1}{n^{3/2+\alpha}}\right) \frac{\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x)}{n^{(\alpha+1)/2}} \\
&= e^{x/2} x^{-\alpha/2} \left( J_\alpha(2\sqrt{nx}) - \frac{\alpha + 1}{\sqrt{nx}} J_{\alpha+1}(2\sqrt{(n-1)x}) \right) + O(n^{-3/4}),
\end{aligned}$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $(0, \infty)$ . Dado que

$$\widetilde{L}_n^\alpha(x) = \widehat{L}_n^\alpha(x) - \frac{\alpha + 1}{n} \widehat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x) - O\left(\frac{1}{n^{2+\alpha}}\right) \widehat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x)$$

entonces

$$\frac{\widetilde{L}_n^\alpha(nx)}{\widehat{L}_n^\alpha(nx)} = 1 - \frac{\alpha + 1}{n} \frac{\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(nx)}{\widehat{L}_n^\alpha(nx)} - O\left(\frac{1}{n^{2+\alpha}}\right) \frac{\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(nx)}{\widehat{L}_n^\alpha(nx)}.$$

Usando el hecho que

$$\widehat{L}_n^\alpha(nx) = \widehat{L}_n^{\alpha+1}(nx) - \widehat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(nx)$$

se deduce

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widehat{L}_n^\alpha(nx)}{\widehat{L}_n^{\alpha+1}(nx)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(nx)}{\widehat{L}_n^{\alpha+1}(nx)} \right) \\
&= 1 + \frac{1}{\varphi((x-2)/2)},
\end{aligned}$$

es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widehat{L}_n^{\alpha+1}(nx)}{\widehat{L}_n^\alpha(nx)} = \frac{\varphi((x-2)/2)}{\varphi((x-2)/2) + 1}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widetilde{L}_n^\alpha(nx)}{\widehat{L}_n^\alpha(nx)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{\alpha + 1}{n} \frac{\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(nx)}{\widehat{L}_n^\alpha(nx)} - O\left(\frac{1}{n^{2+\alpha}}\right) \frac{\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(nx)}{\widehat{L}_n^\alpha(nx)} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{\alpha + 1}{n} \frac{\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(nx) \widehat{L}_n^{\alpha+1}(nx)}{\widehat{L}_n^{\alpha+1}(nx) \widehat{L}_n^\alpha(nx)} - O\left(\frac{1}{n^{2+\alpha}}\right) \frac{\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(nx) \widehat{L}_n^{\alpha+1}(nx)}{\widehat{L}_n^{\alpha+1}(nx) \widehat{L}_n^\alpha(nx)} \right)
\end{aligned}$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus [0, 4]$ .

En conclusión tenemos la siguiente

**Proposición 6**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widetilde{L}_n^\alpha(nx)}{\widehat{L}_n^\alpha(nx)} = 1$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus [0, 4]$ .

Finalmente, dado que para  $j$  fija, con  $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\frac{\widetilde{L}_n^\alpha(x/(n+j))}{n^\alpha} = \frac{\widehat{L}_n^\alpha(x/(n+j))}{n^\alpha} - \frac{\alpha+1}{n} \frac{\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x/(n+j))}{n^\alpha} - \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{2+\alpha}}\right) \frac{\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x/(n+j))}{n^\alpha},$$

y, usando la fórmula de tipo Mehler-Heine (1.30), obtenemos la siguiente proposición

**Proposición 7** Dada  $j$  fija, con  $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , entonces

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widetilde{L}_n^\alpha(x/(n+j))}{n^\alpha} &= x^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{x}) - (\alpha+1)x^{-(\alpha+1)/2} J_{\alpha+1}(2\sqrt{x}) \\ &= x^{-\alpha/2} \left[ J_\alpha(2\sqrt{x}) - (\alpha+1)x^{-1/2} J_{\alpha+1}(2\sqrt{x}) \right], \end{aligned}$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $\mathbb{C}$ .

Es importante hacer notar que este resultado coincide con el obtenido en [18].

Para finalizar, vamos a mostrar algunos resultados acerca del comportamiento de la norma de los polinomios ortogonales tipo Laguerre. Usando el hecho que

$$\frac{\|\widetilde{L}_n^\alpha\|^2}{n \|\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+1}\|_{\alpha+1}^2} = \frac{d_n}{n} \rightarrow 1, \quad (2.15)$$

tenemos

$$\frac{\|\widetilde{L}_n^\alpha\|^2}{n \|\widehat{L}_n^\alpha\|_\alpha^2} \frac{\|\widehat{L}_n^\alpha\|_\alpha^2}{\|\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+1}\|_{\alpha+1}^2} \rightarrow 1.$$

Por tanto

$$\frac{\|\widetilde{L}_n^\alpha\|^2}{\|\widehat{L}_n^\alpha\|_\alpha^2} \rightarrow 1.$$

Pero

$$\begin{aligned}\|L_n^\alpha\|_\alpha^{2/n} &= (n!\Gamma(n + \alpha + 1))^{1/n} \\ &\cong n^2 e^{-2},\end{aligned}$$

entonces

$$n^{-1} \|L_n^\alpha\|_\alpha^{1/n} \cong e^{-1}. \quad (2.16)$$

Lo cual nos permite concluir, junto con (2.15) y (2.16)

**Proposición 8**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \|\tilde{L}_n^\alpha\|_\alpha^{1/n} = e^{-1}. \quad (2.17)$$



---

---

# CAPÍTULO 3

---

## Polinomios ortogonales de tipo Jacobi

### 3.1. Introducción

Consideremos los polinomios de tipo Jacobi  $\{\tilde{P}_n^{\alpha,\beta}\}_{n \geq 0}$  ortogonales respecto al funcional lineal

$$\langle \tilde{\mu}, p \rangle = \int_{-1}^1 p(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx + Mp(1),$$

donde  $\alpha, \beta > -1$ ,  $M \in \mathbb{R}_+$ , y  $p$  es un polinomio con coeficientes reales. En este capítulo realizamos un trabajo similar al del capítulo anterior para los polinomios  $\tilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x)$ , determinando una fórmula de conexión entre estos polinomios y los polinomios de Jacobi  $\{P_n^{\alpha+1,\beta}\}_{n \geq 0}$ . Usando esta fórmula de conexión, estudiamos la ecuación diferencial lineal de segundo orden que satisfacen estos polinomios, realizamos un análisis del comportamiento de sus ceros, y usando la ecuación diferencial, presentamos una interpretación electrostática de los ceros en términos de un potencial logarítmico. También encontramos una expresión de estos polinomios en términos de una función hipergeométrica.

### 3.2. Fórmula de conexión

Como consecuencia del Teorema 9, usando (1.14) y (1.36) se puede escribir

$$\tilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x) = P_n^{\alpha,\beta}(x) + d_n P_{n-1}^{\alpha+1,\beta}(x), \quad (3.1)$$

donde

$$d_n = -\frac{MP_n^{\alpha,\beta}(1)P_{n-1}^{\alpha,\beta}(1)}{\|P_{n-1}^{\alpha,\beta}(x)\|_{\alpha,\beta}^2 + MP_{n-1}^{\alpha,\beta}(1)P_{n-1}^{\alpha+1,\beta}(1)}. \quad (3.2)$$

Por otra parte, de (1.36),

$$\begin{aligned} P_n^{\alpha,\beta}(x) &= \frac{P_n^{\alpha,\beta}(x)P_n^{\alpha,\beta}(1)}{P_n^{\alpha,\beta}(1)} \\ &= \frac{\|P_n^{\alpha,\beta}(x)\|_{\alpha,\beta}^2}{P_n^{\alpha,\beta}(1)} [K_n(x, 1) - K_{n-1}(x, 1)] \\ &= \frac{\|P_n^{\alpha,\beta}(x)\|_{\alpha,\beta}^2}{P_n^{\alpha,\beta}(1)} [A_n P_n^{\alpha+1,\beta}(x) - A_{n-1} P_{n-1}^{\alpha+1,\beta}(x)] \\ &= A_n \frac{\|P_n^{\alpha,\beta}(x)\|_{\alpha,\beta}^2}{P_n^{\alpha,\beta}(1)} P_n^{\alpha+1,\beta}(x) - A_{n-1} \frac{\|P_n^{\alpha,\beta}(x)\|_{\alpha,\beta}^2}{P_n^{\alpha,\beta}(1)} P_{n-1}^{\alpha+1,\beta}(x), \end{aligned}$$

y, dado que  $P_n^{\alpha,\beta}(x)$  es mónico, de acuerdo con (1.36) se obtiene

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = P_n^{\alpha+1,\beta}(x) - A_{n-1} \frac{\|P_n^{\alpha,\beta}(x)\|_{\alpha,\beta}^2}{P_n^{\alpha,\beta}(1)} P_{n-1}^{\alpha+1,\beta}(x).$$

Usando la última ecuación, junto con (3.1), deducimos

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x) &= P_n^{\alpha+1,\beta}(x) + \left( d_n - A_{n-1} \frac{\|P_n^{\alpha,\beta}(x)\|_{\alpha,\beta}^2}{P_n^{\alpha,\beta}(1)} \right) P_{n-1}^{\alpha+1,\beta}(x) \\
&= P_n^{\alpha+1,\beta}(x) - \left( \frac{MP_n^{\alpha,\beta}(1)}{1 + MK_{n-1}(1,1)} + \frac{\|P_n^{\alpha,\beta}(x)\|_{\alpha,\beta}^2}{P_n^{\alpha,\beta}(1)} \right) A_{n-1} P_{n-1}^{\alpha+1,\beta}(x) \\
&= P_n^{\alpha+1,\beta}(x) - \left( \frac{M(P_n^{\alpha,\beta}(1))^2 + (1 + MK_{n-1}(1,1)) \|P_n^{\alpha,\beta}(x)\|_{\alpha,\beta}^2}{(1 + MK_{n-1}(1,1)) P_n^{\alpha,\beta}(1)} \right) A_{n-1} P_{n-1}^{\alpha+1,\beta}(x) \\
&= P_n^{\alpha+1,\beta}(x) - \frac{\|P_n^{\alpha,\beta}(x)\|_{\alpha,\beta}^2}{P_n^{\alpha,\beta}(1)} \left( \frac{M(P_n^{\alpha,\beta}(1))^2 + (1 + MK_{n-1}(1,1))}{\|P_n^{\alpha,\beta}(x)\|_{\alpha,\beta}^2 + 1 + MK_{n-1}(1,1)} \right) A_{n-1} P_{n-1}^{\alpha+1,\beta}(x) \\
&= P_n^{\alpha+1,\beta}(x) - \frac{1 + MK_n(1,1)}{1 + MK_{n-1}(1,1)} \frac{A_{n-1}}{A_n} P_{n-1}^{\alpha+1,\beta}(x) \\
&= P_n^{\alpha+1,\beta}(x) - \frac{\|P_n^{\alpha,\beta}(x)\|_{\alpha,\beta}^2 + MP_n^{\alpha,\beta}(1) P_n^{\alpha+1,\beta}(1)}{\|P_{n-1}^{\alpha,\beta}(x)\|_{\alpha,\beta}^2 + MP_{n-1}^{\alpha,\beta}(1) P_{n-1}^{\alpha+1,\beta}(1)} \frac{P_{n-1}^{\alpha,\beta}(1)}{P_n^{\alpha,\beta}(1)} P_{n-1}^{\alpha+1,\beta}(x).
\end{aligned}$$

Sean  $\alpha_n$  y  $r_n$  tales que

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \frac{\|P_n^{\alpha,\beta}(x)\|_{\alpha,\beta}^2 + MP_n^{\alpha,\beta}(1) P_n^{\alpha+1,\beta}(1)}{P_n^{\alpha,\beta}(1)} \\
r_n &= - \frac{\|P_n^{\alpha,\beta}(x)\|_{\alpha,\beta}^2 + MP_n^{\alpha,\beta}(1) P_n^{\alpha+1,\beta}(1)}{\|P_{n-1}^{\alpha,\beta}(x)\|_{\alpha,\beta}^2 + MP_{n-1}^{\alpha,\beta}(1) P_{n-1}^{\alpha+1,\beta}(1)} \frac{P_{n-1}^{\alpha,\beta}(1)}{P_n^{\alpha,\beta}(1)}.
\end{aligned}$$

De aquí se sigue que

**Teorema 18** Para cada  $n \in \mathbb{N}$

$$\widetilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x) = P_n^{\alpha+1,\beta}(x) + r_n P_{n-1}^{\alpha+1,\beta}(x), \quad (3.3)$$

donde  $r_n = -\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}$ .

Usando la definición de  $r_n$ , (1.37), (1.38), y haciendo algunas operaciones elementales, se obtiene una expresión explícita de  $r_n$

$$r_n = -\frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 2)R(n, \alpha, \beta)}{(2n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta + 1)S(n, \alpha, \beta)},$$

con

$$\begin{aligned} R(n, \alpha, \beta) &= 2^{\alpha+\beta+2}n!\Gamma(n + \beta + 1) + 2M\Gamma(n + \alpha + 2)\Gamma(n + \alpha + \beta + 2) \\ S(n, \alpha, \beta) &= 2^{\alpha+\beta+1}(n - 1)!\Gamma(n + \beta)\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 2) + \\ &M\Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(n + \alpha + \beta + 1). \end{aligned}$$

En particular, por paso al límite

$$r_n \sim -\frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 2)}{2}. \quad (3.4)$$

### 3.3. Ecuación diferencial holonómica

Vamos a encontrar la ecuación diferencial lineal de segundo orden que satisfacen los polinomios  $\tilde{P}_n^{\alpha, \beta}(x)$ . Si en (1.34) reemplazamos  $\alpha$  por  $\alpha + 1$ , entonces:

$$\begin{aligned} \phi(x) \left( P_n^{\alpha+1, \beta}(x) \right)'' + \psi_{\alpha+1, \beta}(x) \left( P_n^{\alpha+1, \beta}(x) \right)' &= \lambda_n^{\alpha+1} P_n^{\alpha+1, \beta}(x), \\ \phi(x) \left( P_{n-1}^{\alpha+1, \beta}(x) \right)'' + \psi_{\alpha+1, \beta}(x) \left( P_{n-1}^{\alpha+1, \beta}(x) \right)' &= \lambda_{n-1}^{\alpha+1} P_{n-1}^{\alpha+1, \beta}(x). \end{aligned}$$

Sumando a la primera igualdad, la segunda multiplicada  $r_n$ , y reorganizando adecuadamente los sumandos se tiene:

$$\phi(x) \left( \tilde{P}_n^{\alpha, \beta}(x) \right)'' + \psi_{\alpha+1, \beta}(x) \left( \tilde{P}_n^{\alpha, \beta}(x) \right)' = \lambda_n^{\alpha+1} P_n^{\alpha+1, \beta}(x) + r_n \lambda_{n-1}^{\alpha+1} P_{n-1}^{\alpha+1, \beta}(x).$$

Sumando y restando en el segundo miembro  $r_n \lambda_n^{\alpha+1, \beta} P_{n-1}^{\alpha+1, \beta}(x)$  se tiene:

$$\begin{aligned} &\phi(x) \left( \tilde{P}_n^{\alpha, \beta}(x) \right)'' + \psi_{\alpha+1, \beta}(x) \left( \tilde{P}_n^{\alpha, \beta}(x) \right)' \\ &= \lambda_n^{\alpha+1, \beta} P_n^{\alpha+1, \beta}(x) + r_n \lambda_{n-1}^{\alpha+1, \beta} P_{n-1}^{\alpha+1, \beta}(x) + r_n \lambda_n^{\alpha+1, \beta} P_{n-1}^{\alpha+1, \beta}(x) - r_n \lambda_n^{\alpha+1, \beta} P_{n-1}^{\alpha+1, \beta}(x) \\ &= \lambda_n^{\alpha+1, \beta} \left( P_n^{\alpha+1, \beta}(x) + r_n P_{n-1}^{\alpha+1, \beta}(x) \right) + r_n \left( \lambda_{n-1}^{\alpha+1, \beta} - \lambda_n^{\alpha+1, \beta} \right) P_{n-1}^{\alpha+1, \beta}(x) \\ &= \lambda_n^{\alpha+1} \tilde{P}_n^{\alpha, \beta}(x) + r_n \left( \lambda_{n-1}^{\alpha+1, \beta} - \lambda_n^{\alpha+1, \beta} \right) P_{n-1}^{\alpha+1, \beta}(x). \end{aligned}$$

Para escribir  $P_{n-1}^{\alpha+1,\beta}(x)$  como una combinación de  $\widetilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x)$  y  $(\widetilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x))'$ , se utiliza (1.35) y (3.1). Entonces:

$$\begin{aligned} (\widetilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x))' &= (P_n^{\alpha,\beta}(x))' + d_n (P_{n-1}^{\alpha+1,\beta}(x))' \\ (1-x^2)(\widetilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x))' &= (1-x)(1+x)nP_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x) + d_n(1-x^2)(P_{n-1}^{\alpha+1,\beta}(x))'. \end{aligned}$$

Por otra parte, usando la fórmula de Christoffel-Darboux (1.4)

$$(1+x)P_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x) = P_n^{\alpha+1,\beta}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \zeta_{n,j} P_j^{\alpha+1,\beta}(x)$$

con

$$\begin{aligned} \zeta_{n,j} &= \frac{\int_{-1}^1 (1+x)P_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x)P_j^{\alpha+1,\beta}(x)(1-x)^{\alpha+1}(x+1)^\beta dx}{\|P_j^{\alpha+1,\beta}(x)\|_{\alpha+1,\beta}^2} \\ &= \frac{\int_{-1}^1 P_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x)P_j^{\alpha+1,\beta}(x)(1-x)^{\alpha+1}(x+1)^{\beta+1} dx}{\|P_j^{\alpha+1,\beta}(x)\|_{\alpha+1,\beta}^2} = 0, \quad 0 \leq j \leq n-2. \end{aligned}$$

Por tanto:

$$(1+x)P_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x) = P_n^{\alpha+1,\beta}(x) + t_n P_{n-1}^{\alpha+1,\beta}(x). \quad (3.5)$$

Para calcular  $t_n$ , se evalúa (3.5) en  $x = -1$ , de manera que:

$$t_n = -\frac{P_n^{\alpha+1,\beta}(-1)}{P_{n-1}^{\alpha+1,\beta}(-1)}.$$

Usando (1.37) y tras unas operaciones sencillas:

$$t_n = \frac{2(n+\beta)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)}.$$

De (3.5) y (1.20) se deduce

$$\begin{aligned} &(1-x^2)(\widetilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x))' \\ &= (1-x)n \left[ P_n^{\alpha+1,\beta}(x) + t_n P_{n-1}^{\alpha+1,\beta}(x) \right] + \\ &\quad + d_n \left[ a_{n-1}^{\alpha+1,\beta} P_n^{\alpha+1,\beta} + b_{n-1}^{\alpha+1,\beta} P_{n-1}^{\alpha+1,\beta} + c_{n-1}^{\alpha+1,\beta} P_{n-2}^{\alpha+1,\beta} \right]. \end{aligned}$$

Además, de (1.19)

$$P_{n-2}^{\alpha+1,\beta}(x) = \frac{1}{\gamma_{n-1}^{\alpha+1,\beta}} \left[ (x - \beta_{n-1}^{\alpha+1,\beta}) P_{n-1}^{\alpha+1,\beta}(x) - P_n^{\alpha+1,\beta}(x) \right].$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} & (1-x^2) (\tilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x))' \\ &= \left[ (1-x)n + d_n a_{n-1}^{\alpha+1,\beta} - \frac{c_{n-1}^{\alpha+1,\beta}}{\gamma_{n-1}^{\alpha+1,\beta}} \right] P_n^{\alpha+1,\beta}(x) + \\ &+ \left[ (1-x)nt_n + b_{n-1}^{\alpha+1,\beta} d_n - \frac{c_{n-1}^{\alpha+1,\beta}}{\gamma_{n-1}^{\alpha+1,\beta}} (x - \beta_{n-1}^{\alpha+1,\beta}) \right] P_{n-1}^{\alpha+1,\beta}(x), \end{aligned}$$

Usando los valores de  $c_{n-1}^{\alpha+1,\beta}$  y  $\gamma_{n-1}^{\alpha+1,\beta}$  descritos en la Proposición 2, se tiene:

$$\frac{c_{n-1}^{\alpha+1,\beta}}{\gamma_{n-1}^{\alpha+1,\beta}} = n + \alpha + \beta + 1.$$

Como consecuencia,

$$\begin{aligned} & (1-x^2) (\tilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x))' \\ &= - \left[ xn - a_{n-1}^{\alpha+1,\beta} d_n + n + \alpha + \beta + 1 \right] P_n^{\alpha+1,\beta}(x) + \\ &+ \left[ -x(nt_n + n + \alpha + \beta + 1) + nt_n + b_{n-1}^{\alpha+1,\beta} + (n + \alpha + \beta + 1)\beta_{n-1}^{\alpha+1,\beta} \right] P_{n-1}^{\alpha+1,\beta}(x). \end{aligned}$$

Si denotamos

$$v^{\alpha+1,\beta}(x; n) = - \left[ xn - a_{n-1}^{\alpha+1,\beta} d_n + n + \alpha + \beta + 1 \right]$$

y

$$q^{\alpha+1,\beta}(x; n) = -x(nt_n + n + \alpha + \beta + 1) + nt_n + b_{n-1}^{\alpha+1,\beta} + (n + \alpha + \beta + 1)\beta_{n-1}^{\alpha+1,\beta},$$

se obtiene

$$\begin{cases} \tilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x) = P_n^{\alpha+1,\beta}(x) + r_n P_{n-1}^{\alpha+1,\beta}(x) \\ (1-x^2) (\tilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x))' = v^{\alpha+1,\beta}(x; n) P_n^{\alpha+1,\beta}(x) + q^{\alpha+1,\beta}(x; n) P_{n-1}^{\alpha+1,\beta}(x) \end{cases}.$$

Así pues,

$$P_{n-1}^{\alpha+1,\beta}(x) = \frac{(1-x^2)(\widetilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x))' - v^{\alpha+1,\beta}(x;n)\widetilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x)}{q^{\alpha+1,\beta}(x;n) - r_n v^{\alpha+1,\beta}(x;n)}. \quad (3.6)$$

Como conclusión

$$\begin{aligned} & [q^{\alpha+1,\beta}(x;n) - r_n v^{\alpha+1,\beta}(x;n)](1-x^2)(\widetilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x))'' + \\ & + \psi_{\alpha+1,\beta}(x) [q^{\alpha+1,\beta}(x;n) - r_n v^{\alpha+1,\beta}(x;n)](\widetilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x))' \\ = & [q^{\alpha+1,\beta}(x;n) - r_n v^{\alpha+1,\beta}(x;n)]\lambda_n^{\alpha+1,\beta}\widetilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x) + \\ & + r_n(\lambda_{n-1}^{\alpha+1,\beta} - \lambda_n^{\alpha+1,\beta})[(1-x^2)(\widetilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x))' - v^{\alpha+1,\beta}(x;n)\widetilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x)], \end{aligned}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\begin{aligned} & [q^{\alpha+1,\beta}(x;n) - r_n v^{\alpha+1,\beta}(x;n)](1-x^2)(\widetilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x))'' + \\ & + [\psi_{\alpha+1,\beta}(x) [q^{\alpha+1,\beta}(x;n) - r_n v^{\alpha+1,\beta}(x;n)] + r_n(1-x^2)(\lambda_n^{\alpha+1,\beta} - \lambda_{n-1}^{\alpha+1,\beta})](\widetilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x))' \\ = & [(q^{\alpha+1,\beta}(x;n) - r_n v^{\alpha+1,\beta}(x;n))\lambda_n^{\alpha+1,\beta} + r_n(\lambda_n^{\alpha+1,\beta} - \lambda_{n-1}^{\alpha+1,\beta})v^{\alpha+1,\beta}(x;n)](\widetilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x)). \end{aligned}$$

Por tanto, se ha probado el siguiente teorema,

**Teorema 19** Si  $\{P_n^{\alpha,\beta}\}_{n \geq 0}$  es la sucesión de polinomios ortogonales mónicos de Jacobi y  $\{\widetilde{P}_n^{\alpha,\beta}\}_{n \geq 0}$  es la sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociados con el funcional de momentos  $\widetilde{\mu} = \mu + M\delta(x-1)$ , entonces

$$A(x;n;\alpha)(\widetilde{P}_n^{\alpha,\beta})'' + B(x;n;\alpha)(\widetilde{P}_n^{\alpha,\beta})' - C(x;n;\alpha)\widetilde{P}_n^{\alpha,\beta} = 0, \quad (3.7)$$

donde

$$\begin{aligned} A(x;n;\alpha) &= [q^{\alpha+1,\beta}(x;n) - r_n v^{\alpha+1,\beta}(x;n)](1-x^2), \\ B(x;n;\alpha) &= \psi_{\alpha+1,\beta}(x) [q^{\alpha+1,\beta}(x;n) - r_n v^{\alpha+1,\beta}(x;n)] + r_n(1-x^2)(\lambda_n^{\alpha+1,\beta} - \lambda_{n-1}^{\alpha+1,\beta}), \\ C(x;n;\alpha) &= [q^{\alpha+1,\beta}(x;n) - r_n v^{\alpha+1,\beta}(x;n)]\lambda_n^{\alpha+1,\beta} + r_n(\lambda_n^{\alpha+1,\beta} - \lambda_{n-1}^{\alpha+1,\beta})v^{\alpha+1,\beta}(x;n). \end{aligned}$$

Observemos que  $\deg A(x;n;\alpha) \leq 3$ ,  $\deg B(x;n;\alpha) \leq 2$  y  $\deg C(x;n;\alpha) \leq 1$ .

### 3.4. Análisis de los ceros

En primer lugar, obtenemos una expresión explícita de  $\widetilde{P}_n^{\alpha,\beta}$  en términos de los momentos generalizados aplicando el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt a la familia de polinomios  $1, (1-x), (1-x)^2, \dots, (1-x)^n$ . En efecto, si

$$\begin{aligned} \langle \mu, 1 \rangle &= \mu_0 = \zeta_0 \\ \langle \mu, 1-x \rangle &= \zeta_1 \\ \langle \mu, (1-x)^2 \rangle &= \zeta_2 \\ &\vdots \\ &= \vdots \\ &\vdots \\ \langle \mu, (1-x)^n \rangle &= \zeta_n \end{aligned}$$

y

$$\Omega_n(\mu) = \begin{vmatrix} \zeta_0 & \zeta_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \zeta_n \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \zeta_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \zeta_{n-1} & \zeta_n & \cdot & \cdot & \cdot & \zeta_{2n-1} \\ \zeta_n & \zeta_{n+1} & \cdot & \cdot & \cdot & \zeta_{2n} \end{vmatrix}$$

entonces

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{\Omega_{n-1}(\mu)} \begin{vmatrix} \zeta_0 & \zeta_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \zeta_n \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \zeta_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \zeta_{n-1} & \zeta_n & \cdot & \cdot & \cdot & \zeta_{2n-1} \\ 1 & 1-x & \cdot & \cdot & \cdot & (1-x)^n \end{vmatrix}. \quad (3.8)$$

Por otra parte, dado que  $\widetilde{\mu} = \mu + M\delta(x-1)$  se tiene

$$\tilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{\Omega_{n-1}(\tilde{\mu})} \begin{vmatrix} \zeta_0 + M & \zeta_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \zeta_n \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \zeta_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \zeta_{n-1} & \zeta_n & \cdot & \cdot & \cdot & \zeta_{2n-1} \\ 1 & 1-x & \cdot & \cdot & \cdot & (1-x)^n \end{vmatrix}.$$

Pero

$$\begin{aligned} \Omega_{n-1}(\tilde{\mu}) &= \begin{vmatrix} \zeta_0 + M & \zeta_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \zeta_n \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \zeta_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \zeta_{n-1} & \zeta_n & \cdot & \cdot & \cdot & \zeta_{2n-1} \\ \zeta_n & \zeta_{n+1} & \cdot & \cdot & \cdot & \zeta_{2n} \end{vmatrix} \\ &= \Omega_{n-1}(\mu) + M\Omega_{n-2}((1-x)^2\mu). \end{aligned}$$

De aquí se deduce que

$$(-1)^n \tilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n \Omega_{n-1}(\mu) P_n^{\alpha,\beta}(x) + M(1-x) \Omega_{n-2}((1-x)^2\mu) (-1)^{n-1} P_{n-1}^{\alpha+2,\beta}(x)}{\Omega_{n-1}(\mu) + M\Omega_{n-2}((1-x)^2\mu)},$$

esto es,

$$\tilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{\Omega_{n-1}(\mu) P_n^{\alpha,\beta}(x) + M(x-1) \Omega_{n-2}((1-x)^2\mu) P_{n-1}^{\alpha+2,\beta}(x)}{\Omega_{n-1}(\mu) + M\Omega_{n-2}((1-x)^2\mu)}. \quad (3.9)$$

De (3.9), por paso al límite cuando  $M$  tiende a infinito, obtenemos

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \tilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x) = (x-1) P_{n-1}^{\alpha+2,\beta}(x). \quad (3.10)$$

A continuación se presenta la siguiente proposición que usaremos más adelante. La demostración puede consultarse en [28].

**Proposición 9** Para  $M > 0$ , se tiene:

1. Los ceros de  $\tilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x)$  son reales, simples y se encuentran en el intervalo  $(-1, 1)$ .
2. Dado que  $r_n < 0$ , se tiene

$$\begin{aligned} x_{n,n}^{\alpha+1,\beta} &< x_{n,n}^{(M)}, \\ x_{n,j}^{\alpha+1,\beta} &< x_{n,j}^{(M)} < x_{n-1,j}^{\alpha+1,\beta}, \quad j = 1, \dots, n-1, \end{aligned}$$

donde  $\{x_{n,j}^{\alpha+1,\beta}\}_{j=1}^n$  son los ceros del polinomio  $P_n^{\alpha+1,\beta}(x)$  y  $\{x_{n,j}^{(M)}\}_{j=1}^n$  los ceros de  $\tilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x)$ .

Como consecuencia, de (3.10) deducimos que

$$\lim_{M \rightarrow \infty} x_{n,n}^{(M)} = 1, \quad \lim_{M \rightarrow \infty} x_{n,k}^{(M)} = x_{n-1,k}^{\alpha+2,\beta}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Usando (3.9), concluimos

$$\tilde{P}_n^{\alpha,\beta}(1) = \frac{\Omega_{n-1}(\mu) P_n^{\alpha,\beta}(1)}{\Omega_{n-1}(\mu) + M \Omega_{n-2}((1-x)^2 \mu)}.$$

De esta expresión se tiene:

$$(1 - x_{n,1}^{(M)}) (1 - x_{n,2}^{(M)}) \cdots (1 - x_{n,n}^{(M)}) = \frac{\Omega_{n-1}(\mu) P_n^{\alpha,\beta}(1)}{\Omega_{n-1}(\mu) + M \Omega_{n-2}((1-x)^2 \mu)}$$

y, como consecuencia,

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} M (1 - x_{n,n}^{(M)}) &= \frac{\Omega_{n-1}(\mu) P_n^{\alpha,\beta}(1)}{P_{n-1}^{\alpha+2,\beta}(1) \Omega_{n-2}((1-x)^2 \mu)} \\ &= \frac{\Omega_{n-1}(\mu)}{\Omega_{n-2}((1-x)^2 \mu)} \frac{2(\alpha+1)(\alpha+2)}{(n+\alpha+1)(n+\alpha+\beta+1)}, \end{aligned}$$

esto es,

$$x_{n,n}^{(M)} = 1 - \mathcal{O}\left(\frac{1}{M}\right).$$

Por otra parte, de (3.8),

$$\langle P_n^{\alpha,\beta}(x), (1-x)^n \rangle = (-1)^n \frac{\Omega_n(\mu)}{\Omega_{n-1}(\mu)},$$

es decir,

$$\|P_n^{\alpha,\beta}(x)\|_{\alpha,\beta}^2 = \frac{\Omega_n(\mu)}{\Omega_{n-1}(\mu)},$$

o, lo que es lo mismo,

$$\Omega_n(\mu) = \|P_n^{\alpha,\beta}(x)\|_{\alpha,\beta}^2 \Omega_{n-1}(\mu).$$

Usando el anterior resultado, se tiene

$$\frac{\Omega_{n-1}(\mu)}{\Omega_{n-2}((1-x)^2\mu)} = \frac{\|P_{n-1}^{\alpha,\beta}(x)\|_{\alpha,\beta}^2 \|P_{n-2}^{\alpha,\beta}(x)\|_{\alpha,\beta}^2 \cdots \|P_1^{\alpha,\beta}(x)\|_{\alpha,\beta}^2 \|P_0^{\alpha,\beta}(x)\|_{\alpha,\beta}^2}{\|P_{n-2}^{\alpha+2,\beta}(x)\|_{\alpha+2,\beta}^2 \|P_{n-3}^{\alpha+2,\beta}(x)\|_{\alpha+2,\beta}^2 \cdots \|P_0^{\alpha+2,\beta}(x)\|_{\alpha+2,\beta}^2},$$

pero, usando (1.38)

$$\begin{aligned} \frac{\|P_{n-1}^{\alpha,\beta}(x)\|_{\alpha,\beta}^2}{\|P_{n-2}^{\alpha+2,\beta}(x)\|_{\alpha+2,\beta}^2} &= \frac{2^{2n+\alpha+\beta-1} \Gamma(n+\alpha) \Gamma(n+\beta) \Gamma(n+\alpha+\beta) (n-1)!}{(2n+\alpha+\beta-1) (\Gamma(2n+\alpha+\beta-1))^2} \\ &= \frac{2^{2n+\alpha+\beta-1} \Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta-1) \Gamma(n+\alpha+\beta+1) (n-2)!}{(2n+\alpha+\beta-1) (\Gamma(2n+\alpha+\beta-1))^2} \\ &= \frac{(n+\beta-1)(n-1)}{(n+\alpha)(n+\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_{n-1}(\mu)}{\Omega_{n-2}((1-x)^2\mu)} &= \frac{(n+\beta-1)(n-1)(n+\beta-2)(n-2) \cdots (1+\beta) \|P_0^{\alpha,\beta}(x)\|_{\alpha,\beta}^2}{(n+\alpha)(n+\alpha+\beta)(n+\alpha-1)(n+\alpha+\beta-1) \cdots (\alpha+2)(\alpha+\beta+2)} \\ &= \frac{\Gamma(n+\beta)(n-1)!}{\Gamma(\beta+1)} \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1) \Gamma(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+1) (\Gamma(\alpha+\beta+1))^2} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+2) \Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \\ &= \frac{2^{\alpha+\beta+1} (n-1)! \Gamma(n+\beta) \Gamma(\alpha+1) \Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\alpha+\beta+1)}. \end{aligned}$$

De donde se sigue que:

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} M(1 - x_{n,n}^{(M)}) &= \frac{\Omega_{n-1}(\mu)}{\Omega_{n-2}((1-x)^2 \mu)} \frac{2(\alpha+1)(\alpha+2)}{(n+\alpha+1)(n+\alpha+\beta+1)} = \\ &= \frac{2^{\alpha+\beta+1} (n-1)! \Gamma(n+\beta) \Gamma(\alpha+1) \Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \frac{2(\alpha+1)(\alpha+2)}{(n+\alpha+1)(n+\alpha+\beta+1)} \\ &= \frac{2^{\alpha+\beta+2} (n-1)! \Gamma(n+\beta) \Gamma(\alpha+1) \Gamma(\alpha+3)}{\Gamma(n+\alpha+2) \Gamma(n+\alpha+\beta+2)}. \end{aligned}$$

En resumen, hemos obtenido el siguiente resultado acerca de los ceros de  $\tilde{P}_n^{\alpha,\beta}$ .

**Teorema 20** Para  $n \geq 1$ , se tiene

1.

$$\lim_{M \rightarrow \infty} M(1 - x_{n,n}^{(M)}) = \frac{2^{\alpha+\beta+2} (n-1)! \Gamma(n+\beta) \Gamma(\alpha+1) \Gamma(\alpha+3)}{\Gamma(n+\alpha+2) \Gamma(n+\alpha+\beta+2)}. \quad (3.11)$$

2.

$$\lim_{M \rightarrow \infty} x_{n,k}^{(M)} = x_{n-1,k}^{\alpha+2,\beta}, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

### 3.5. Modelo electrostático

Supongamos que  $\{x_{n,k}^{(M)}\}_{k \geq 1}$  son los ceros de  $\tilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x)$  ordenados de forma creciente. Si evaluamos (3.7) en cada uno de estos ceros se tiene:

$$A(x_{n,k}^{(M)}; n; \alpha) \left( \tilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x_{n,k}^{(M)}) \right)'' + B(x_{n,k}^{(M)}; n; \alpha) \left( \tilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x_{n,k}^{(M)}) \right)' = 0,$$

y

$$\frac{\left( \tilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x_{n,k}^{(M)}) \right)''}{\left( \tilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x_{n,k}^{(M)}) \right)'} = - \frac{B(x_{n,k}^{(M)}; n; \alpha)}{A(x_{n,k}^{(M)}; n; \alpha)}.$$

Pero

$$- \frac{B(x_{n,k}^{(M)}; n; \alpha)}{A(x_{n,k}^{(M)}; n; \alpha)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\psi_{\alpha+1,\beta}(x_{n,k}^{(M)}) [q^{\alpha+1,\beta}(x_{n,k}^{(M)}; n) - r_n^{\alpha+1,\beta} v(x_{n,k}^{(M)}; n)] + r_n (1 - (x_{n,k}^{(M)})^2) (\lambda_n^{\alpha+1,\beta} - \lambda_{n-1}^{\alpha+1,\beta})}{[q^{\alpha+1,\beta}(x_{n,k}^{(M)}; n) - r_n v^{\alpha+1,\beta}(x_{n,k}^{(M)}; n)] \phi(x_{n,k}^{(M)})} \\
&= -\frac{\psi_{\alpha+1,\beta}(x_{n,k}^{(M)})}{\phi(x_{n,k}^{(M)})} + \frac{r_n (\lambda_{n-1}^{\alpha+1,\beta} - \lambda_n^{\alpha+1,\beta})}{q^{\alpha+1,\beta}(x_{n,k}^{(M)}; n) - r_n v^{\alpha+1,\beta}(x_{n,k}^{(M)}; n)}.
\end{aligned}$$

Realizando algunos cálculos tediosos, tenemos:

$$\begin{aligned}
-\frac{\psi_{\alpha+1,\beta}(x_{n,k}^{(M)})}{\phi(x_{n,k}^{(M)})} &= \frac{(\alpha + \beta + 3) x_{n,k}^{(M)} + (\alpha - \beta + 1)}{1 - (x_{n,k}^{(M)})^2} \\
&= \frac{\alpha + 2}{1 - x_{n,k}^{(M)}} - \frac{\beta + 1}{1 + x_{n,k}^{(M)}}.
\end{aligned}$$

De

$$\frac{(\widetilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x_{n,k}^{(M)}))''}{(\widetilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x_{n,k}^{(M)}))'} = -2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{1}{x_{n,j}^{(M)} - x_{n,k}^{(M)}}$$

se sigue que

$$\begin{aligned}
-2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{1}{x_{n,j}^{(M)} - x_{n,k}^{(M)}} &= \frac{\alpha + 2}{1 - x_{n,k}^{(M)}} - \frac{\beta + 1}{1 + x_{n,k}^{(M)}} + \\
&+ \frac{r_n (\lambda_{n-1}^{\alpha+1} - \lambda_n^{\alpha+1})}{q^{\alpha+1,\beta}(x_{n,k}^{(M)}; n) - r_n v^{\alpha+1,\beta}(x_{n,k}^{(M)}; n)}.
\end{aligned}$$

Dado que  $\lambda_n^{\alpha+1} = -n(n + \alpha + \beta + 1)$ ,

$$\lambda_{n-1}^{\alpha+1,\beta} - \lambda_n^{\alpha+1,\beta} = 2n + \alpha + \beta + 1.$$

Por tanto:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{1}{x_{n,j}^{(M)} - x_{n,k}^{(M)}} + \frac{\alpha + 2}{2(1 - x_{n,k}^{(M)})} - \frac{\beta + 1}{2(1 + x_{n,k}^{(M)})} +$$

$$+ \frac{r_n(2n + \alpha + \beta + 1)}{q^{\alpha+1,\beta}(x_{n,k}^{(M)}; n) - r_n v^{\alpha+1,\beta}(x_{n,k}^{(M)}; n)} = 0. \quad (3.12)$$

Usando el hecho que

$$\begin{aligned} & q^{\alpha+1,\beta}(x_{n,k}^{(M)}; n) - r_n v^{\alpha+1,\beta}(x_{n,k}^{(M)}; n) \\ &= x_{n,k}^{(M)}(nr_n - nt_n - n - \alpha - \beta - 1) + \\ & \quad + nt_n + b_{n-1}^{\alpha+1,\beta} + (n + \alpha + \beta + 1)\beta_{n-1}^{\alpha+1,\beta} \\ & \quad + (-a_{n-1}^{\alpha+1,\beta} d_n + n + \alpha + \beta + 1)r_n, \end{aligned}$$

si se definen  $l_n$  y  $s_n$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} l_n &= \frac{r_n(2n + \alpha + \beta + 1)}{(nr_n - nt_n - n - \alpha - \beta - 1)}, \\ s_n &= -\frac{nt_n + b_{n-1}^{\alpha+1,\beta} + (n + \alpha + \beta + 1)\beta_{n-1}^{\alpha+1,\beta} + (-a_{n-1}^{\alpha+1,\beta} d_n + n + \alpha + \beta + 1)r_n}{(nr_n - nt_n - n - \alpha - \beta - 1)}, \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{r_n(2n + \alpha + \beta + 1)}{q^{\alpha+1,\beta}(x_{n,k}^{(M)}; n) - r_n v^{\alpha+1,\beta}(x_{n,k}^{(M)}; n)} = \frac{l_n}{x_{n,k}^{(M)} - s_n}.$$

En otras palabras, (3.12) se puede expresar como

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{1}{x_{n,j}^{(M)} - x_{n,k}^{(M)}} + \frac{\alpha + 2}{2(1 - x_{n,k}^{(M)})} - \frac{\beta + 1}{2(1 + x_{n,k}^{(M)})} + \frac{l_n}{x_{n,k}^{(M)} - s_n} = 0. \quad (3.13)$$

Como consecuencia, se puede dar la siguiente interpretación electrostática de la distribución de los ceros de  $\widetilde{P}_n^{\alpha,\beta}$ . Si consideramos  $n$  cargas localizadas en la recta real bajo una interacción logarítmica y con el campo extremo

$$\varphi(x) = -\frac{(\alpha + 2)}{2} \ln|x - 1| - \frac{\beta + 1}{2} \ln|x + 1| + l_n \ln|x - s_n|,$$

esta ecuación nos dice que el gradiente de la energía total

$$E(X) = - \sum_{1 \leq k < j \leq n} \ln|x_k - x_j| + \sum_{j=1}^n \varphi(x_j)$$

con  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  se anula en  $(x_{n,1}^{(M)}, x_{n,2}^{(M)}, \dots, x_{n,n}^{(M)})$ . Es decir, es un punto crítico. El análisis del tipo de equilibrio es un problema abierto.

Es importante notar que  $l_n$  y  $s_n$  tienen el siguiente comportamiento asintótico.

$$\begin{aligned} l_n &\sim \frac{2\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2)+3} > 0 \\ s_n &\sim \frac{1-\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2)+3} = -\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2)-1}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2)+3}. \end{aligned}$$

Notemos que  $l_n$  y  $s_n$  no dependen de  $M$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

### 3.6. Representación Hipergeométrica

Consideremos la fórmula (1.39) que expresa los polinomios de Jacobi en términos de funciones hipergeométricas así como la fórmula de conexión (3.3). Entonces

$$\begin{aligned} \tilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x) &= \frac{2^n(\alpha+2)_n}{(n+\alpha+\beta+2)_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_k(n+\alpha+\beta+2)_k}{(\alpha+2)_k} \frac{(1-x)^k}{2^k k!} \\ &\quad + r_n \frac{2^{n-1}(\alpha+2)_{n-1}}{(n+\alpha+\beta+1)_{n-1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n+1)_k(n+\alpha+\beta+2)_k}{(\alpha+2)_k} \frac{(1-x)^k}{2^k k!} \\ &= \frac{2^n(\alpha+2)_n}{(n+\alpha+\beta+2)_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_k(n+\alpha+\beta+2)_k}{(\alpha+2)_k} \frac{(1-x)^k}{2^k k!} \times \\ &\quad \left[ 1 + \frac{r_n(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)(-n+k)}{2(n+\alpha+1)(n+\alpha+\beta+1)(-n)} \right] \\ &= \frac{2^n(\alpha+2)_n r_n(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)}{(n+\alpha+\beta+2)_n 2(n+\alpha+1)(n+\alpha+\beta+1)(-n)} \times \\ &\quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_k(n+\alpha+\beta+2)_k}{(\alpha+2)_k} \frac{(1-x)^k}{2^k k!} \left[ \frac{2(n+\alpha+1)(n+\alpha+\beta+1)(-n)}{r_n(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)} + k - n \right]. \end{aligned}$$

Escogiendo

$$a_n = \frac{2(n+\alpha+1)(n+\alpha+\beta+1)(-n)}{r_n(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)} - n$$

se tiene

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x) &= \frac{2^{n-1}(\alpha+2)_n r_n (2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)}{(n+\alpha+\beta+2)_n (n+\alpha+1)(n+\alpha+\beta+1)(-n)} \times \\
&\quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_k (n+\alpha+\beta+2)_k (a_n+k) (1-x)^k}{(\alpha+2)_k 2^k k!} \\
&= \frac{2^{n-1}(\alpha+2)_n r_n (2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)a_n}{(n+\alpha+\beta+2)_n (n+\alpha+1)(n+\alpha+\beta+1)(-n)} \times \\
&\quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_k (n+\alpha+\beta+2)_k (a_n+k) (1-x)^k}{(a_n)_k (\alpha+2)_k 2^k k!} \\
&= \frac{2^{n-1}(\alpha+2)_n r_n (2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)a_n}{(n+\alpha+\beta+2)_n (n+\alpha+1)(n+\alpha+\beta+1)(-n)} \times \\
&\quad {}_3F_2\left(-n, n+\alpha+\beta+2, a_n+k; a_n, \alpha+2; \frac{1-x}{2}\right),
\end{aligned}$$

es decir

**Proposición 10** Para cada  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_n^{\alpha,\beta}(x) &= \frac{2^{n-1}(\alpha+2)_n r_n (2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)a_n}{(n+\alpha+\beta+2)_n (n+\alpha+1)(n+\alpha+\beta+1)(-n)} \times \\
&\quad {}_3F_2\left(-n, n+\alpha+\beta+2, a_n+k; a_n, \alpha+2; \frac{1-x}{2}\right),
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
&{}_3F_2\left(-n, n+\alpha+\beta+2, a_n+k; a_n, \alpha+2; \frac{1-x}{2}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_k (n+\alpha+\beta+2)_k (a_n+k) (1-x)^k}{(a_n)_k (\alpha+2)_k 2^k k!}.
\end{aligned}$$

---

---

# CAPÍTULO 4

---

## Perturbaciones del funcional de Laguerre-Hahn

### 4.1. Introducción

El objetivo principal de este capítulo es analizar cómo las propiedades características de los funcionales de Laguerre-Hahn se conservan al perturbar un funcional lineal de dicha familia mediante la derivada de una Delta de Dirac así como determinar la clase del funcional perturbado. En un trabajo previo (ver [1]) se presentan algunos ejemplos de perturbaciones de funcionales lineales de Laguerre-Hahn. En ese mismo trabajo también se ha analizado la clase de los funcionales lineales perturbados.

En este apartado de la Memoria estudiamos la clase de un funcional lineal de Laguerre-Hahn modificado mediante la adición de la primera derivada de una Delta de Dirac. Esta perturbación se analizará en el caso de los funcionales asociados de primera especie correspondientes a los funcionales clásicos, determinando las ecuaciones distribucionales que este nuevo funcional lineal satisface, así como la ecuación diferencial de Riccati que satisface la correspondiente función de Stieltjes. Finalmente, obtenemos la expresión explícita de los polinomios ortogonales respecto a esta perturbación cuando se considera el funcional asociado de primera especie de Laguerre.

## 4.2. Modificación mediante una derivada de Delta de Dirac.

**Proposición 11** *Sea  $\mu$  un funcional lineal de Laguerre-Hahn y sean  $M$  y  $c$  dos números reales arbitrarios. Entonces*

$$\tilde{\mu} = \mu + M\delta'_c$$

*es un funcional lineal de Laguerre-Hahn, donde  $\delta'_c = D\delta(x - c)$ .*

**Demostración.** Sea  $S = S(\mu)(z)$  la función de Stieltjes correspondiente al funcional  $\mu$  tal que

$$\Phi(z)S' = B(z)S^2 + C(z)S + D(z) \quad (4.1)$$

y sea  $\tilde{S} = S(\tilde{\mu})(z)$  la función de Stieltjes asociada a  $\tilde{\mu}$ . Entonces

$$\langle \tilde{\mu}, x^n \rangle = \mu_n - Mnc^{n-1}, \quad n \geq 0.$$

Por tanto

$$S(z) = \tilde{S}(z) - \frac{M}{(z - c)^2}$$

y sustituyendo la anterior expresión en (4.1), tenemos

$$\begin{aligned} (z - c)^4 \Phi(z) \tilde{S}' &= (z - c)^4 B(z) \tilde{S}^2 + \left( (z - c)^4 C(z) - 2M(z - c)^2 B(z) \right) \tilde{S} \\ &+ \left( M^2 B(z) - 2M(z - c) \Phi(z) - M(z - c)^2 C(z) + (z - c)^4 D(z) \right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Como consecuencia,  $\tilde{\mu}$  es un funcional de Laguerre-Hahn que satisface la ecuación diferencial

$$D \left[ (x - c)^4 \Phi \tilde{\mu} \right] + \left[ (x - c)^4 \Psi + 2\mu(x - c)^2 B - 4(x - c)^3 \Phi \right] \tilde{\mu} + (x - c)^4 B \left( x^{-1} \tilde{\mu}^2 \right) = 0.$$

Esto significa que la familia de funcionales lineales de Laguerre-Hahn permanece invariante para este tipo de perturbación. ■

### 4.2.1. Determinación de la clase

En adelante, asumiremos que  $\mu$  es un funcional lineal de Laguerre-Hahn de clase  $s$ .

**Proposición 12** Sea  $\mu$  un funcional lineal de Laguerre-Hahn de clase  $s$  y  $\tilde{\mu} = \mu + M\delta'_c$ . Entonces  $\tilde{\mu}$  es un funcional lineal de Laguerre-Hahn de clase  $\tilde{s}$  tal que  $s - 4 \leq \tilde{s} \leq s + 4$ .

**Demostración.** Sean  $\Phi, \Psi$  y  $B$  como en el Teorema 13. Si

$$D[\Phi^*\tilde{\mu}] + \Psi^*\tilde{\mu} + B^*(x^{-1}\tilde{\mu}^2) = 0, \quad (4.3)$$

es la ecuación distribucional que satisface  $\tilde{\mu}$ , donde

$$\Phi^*(x) = (x-c)^4\Phi(x), \quad \Psi^*(x) = (x-c)^2\left((x-c)^2\Psi(x) - 4(x-c)\Phi(x) + 2\mu B(x)\right), \quad (4.4)$$

$$B^*(x) = (x-c)^4B(x), \quad (4.5)$$

entonces

$$\deg \Phi^* = t^* \leq s + 6,$$

$$\deg \Psi^* = p^* \leq s + 5,$$

$$\deg B^* = r^* \leq s + 6.$$

Por tanto,  $d^* = \max\{t^*, r^*\} \leq s + 6$  y  $\tilde{s} = \max\{p^* - 1, d^* - 2\} \leq s + 4$ .

Por otra parte, dado que  $\mu = \tilde{\mu} - M\delta'_c$  entonces  $s \leq \tilde{s} + 4$ . ■

**Proposición 13** Sea  $\tilde{\mu}$  un funcional lineal de Laguerre-Hahn que satisface la ecuación (4.3). Entonces para cada cero de  $\Phi^*(x)$  distinto de  $c$ , la ecuación (4.3) es irreducible.

**Demostración.** Dado que  $S(\mu)(z)$  satisface (1.40), donde los polinomios  $\Phi, B, C$ , y  $D$  son coprimos, sean  $\Phi^*$  y  $B^*$  como en la Proposición 12 y

$$C^*(z) = (z-c)^4C(z) - 2M(z-c)^2B(z)$$

$$D^*(z) = M^2B(z) - 2M(z-c)\Phi(z) - M(z-c)^2C(z) + (z-c)^4D(z).$$

Supongamos que  $a$  es un cero de  $\Phi^*$  distinto de  $c$ . Esto nos lleva a tres diferentes situaciones

1. Si  $B(a) \neq 0$ , entonces  $B^*(a) \neq 0$ .
2. Si  $B(a) = 0$  y  $C(a) \neq 0$ , entonces tenemos  $C^*(a) \neq 0$ .

3. Si  $B(a) = C(a) = 0$  entonces, dado que  $D(a) \neq 0$ , tenemos  $D^*(a) \neq 0$ , y, por tanto,

$$|B^*(a)| + |C^*(a)| + |D^*(a)| \neq 0.$$

En conclusión, la ecuación (1.40) es irreducible. ■

Para analizar la clase de  $\mu$  estudiaremos el comportamiento de los polinomios  $B, C$  y  $D$  en  $z = c$ .

**Proposición 14** Sean  $\Phi, B, C$  y  $D$  los polinomios definidos en (1.40). Para  $\tilde{\mu} = \mu + M\delta'_c$ , sean  $\tilde{s}$  y  $s$  las clases de  $\tilde{\mu}$  y  $\mu$ , respectivamente. Entonces tenemos

1.  $\tilde{s} = s + 4$  si  $B(c) \neq 0$ .

2.  $\tilde{s} = s + 3$  si

$$B(c) = 0, \tag{4.6}$$

y  $MB'(c) - 2\Phi(c) \neq 0$ .

3.  $\tilde{s} = s + 2$  si se satisface la condición (4.6) junto con

$$MB'(c) - 2\Phi(c) = 0, \tag{4.7}$$

y  $\frac{1}{2}MB''(c) - 2\Phi'(c) - C(c) \neq 0$ .

4.  $\tilde{s} = s + 1$  si ocurre alguno de los siguientes casos

4.1. (4.6), (4.7),

$$\frac{1}{2}MB''(c) - 2\Phi'(c) - C(c) = 0, \tag{4.8}$$

y  $B'(c) \neq 0$ .

4.2. (4.6), (4.7), (4.8),

$$B'(c) = 0, \tag{4.9}$$

y  $\frac{M}{3!}B'''(c) - \Phi''(c) - C'(c) \neq 0$ .

5.  $\tilde{s} = s$  si ocurre alguno de los siguientes casos

5.1. (4.6), (4.7), (4.8), (4.9),

$$\frac{M}{3!}B'''(c) - \Phi''(c) - C'(c) = 0, \tag{4.10}$$

y  $\Phi(c) \neq 0$ .

5.2. (4.6), (4.7), (4.8), (4.9), (4.10),

$$\Phi(c) = 0, \quad (4.11)$$

$$\text{y } C(c) - MB''(c) \neq 0.$$

5.3. (4.6), (4.7), (4.8), (4.9), (4.10), (4.11),

$$C(c) - MB''(c) = 0, \quad (4.12)$$

$$\text{y } \frac{M^2}{4!}B^{(4)}(c) - \frac{2M}{3!}\Phi'''(c) - \frac{M}{2}C''(c) + D(c) \neq 0.$$

6.  $\bar{s} = s - 1$  si ocurre alguno de los siguientes casos

6.1. (4.6), (4.7), (4.8), (4.9), (4.10), (4.11), (4.12),

$$\frac{M^2}{4!}B^{(4)}(c) - \frac{2M}{3!}\Phi'''(c) - \frac{M}{2}C''(c) + D(c) = 0, \quad (4.13)$$

$$\text{y } \Phi'(c) \neq 0.$$

6.2. (4.6), (4.7), (4.8), (4.9), (4.10), (4.11), (4.12), (4.13),

$$\Phi'(c) = 0, \quad (4.14)$$

$$\text{y } C'(c) - \frac{2M}{3!}B'''(c) \neq 0.$$

6.3. (4.6), (4.7), (4.8), (4.9), (4.10), (4.11), (4.12), (4.13), (4.14),

$$C'(c) - \frac{2M}{3!}B'''(c) = 0 \quad (4.15)$$

$$\text{y } \frac{M^2}{5!}B^{(5)}(c) - \frac{2M}{4!}\Phi^{(4)}(c) - \frac{M}{3!}C'''(c) + D'(c) \neq 0.$$

7.  $\bar{s} = s - 2$  si ocurre alguno de los siguientes casos

7.1. (4.6), (4.7), (4.8), (4.9), (4.10), (4.11), (4.12), (4.13), (4.14), (4.15),

$$\frac{M^2}{5!}B^{(5)}(c) - \frac{2M}{4!}\Phi^{(4)}(c) - \frac{M}{3!}C'''(c) + D'(c) = 0, \quad (4.16)$$

$$\text{y } \Phi''(c) \neq 0.$$

7.2. (4.6), (4.7), (4.8), (4.9), (4.10), (4.11), (4.12), (4.13), (4.14), (4.15), (4.16),

$$\frac{M^2}{5!}B^{(5)}(c) - \frac{2M}{4!}\Phi^{(4)}(c) - \frac{M}{3!}C'''(c) + D'(c) = 0, \Phi''(c) = 0, \quad (4.17)$$

y  $B''(c) \neq 0$ .

7.3. (4.6), (4.7), (4.8), (4.9), (4.10), (4.11), (4.12), (4.13), (4.14), (4.15), (4.16), (4.17),

$$B''(c) = 0, \quad (4.18)$$

y  $\frac{1}{2}C''(c) - \frac{2M}{4!}B^{(4)}(c) \neq 0$ .

7.4. (4.6), (4.7), (4.8), (4.9), (4.10), (4.11), (4.12), (4.13), (4.14), (4.15), (4.16), (4.17), (4.18),

$$\frac{1}{2}C''(c) - \frac{2M}{4!}B^{(4)}(c) = 0, \quad (4.19)$$

y  $\frac{M^2}{6!}B^{(6)}(c) - \frac{2M}{5!}\Phi^{(5)}(c) - \frac{M}{4!}C^{(4)}(c) + \frac{1}{2}D''(c) \neq 0$ .

8.  $\bar{s} = s - 3$  si ocurre alguno de los siguientes casos

8.1. (4.6), (4.7), (4.8), (4.9), (4.10), (4.11), (4.12), (4.13), (4.14), (4.15), (4.16), (4.17), (4.18), (4.19),

$$\frac{M^2}{6!}B^{(6)}(c) - \frac{2M}{5!}\Phi^{(5)}(c) - \frac{M}{4!}C^{(4)}(c) + \frac{1}{2}D''(c) = 0 \quad (4.20)$$

y  $\Phi'''(c) \neq 0$ .

8.2. (4.6), (4.7), (4.8), (4.9), (4.10), (4.11), (4.12), (4.13), (4.14), (4.15), (4.16), (4.17), (4.18), (4.19), (4.20),

$$\Phi'''(c) = 0, \quad (4.21)$$

y  $B'''(c) \neq 0$ .

8.3. (4.6), (4.7), (4.8), (4.9), (4.10), (4.11), (4.12), (4.13), (4.14), (4.15), (4.16), (4.17), (4.18), (4.19), (4.20), (4.21),

$$B'''(c) = 0, \quad (4.22)$$

y  $\frac{1}{3!}C'''(c) - \frac{2M}{5!}B^{(5)}(c) \neq 0$ .

8.4. (4.6), (4.7), (4.8), (4.9), (4.10), (4.11), (4.12), (4.13), (4.14), (4.15), (4.16), (4.17), (4.18), (4.19), (4.20), (4.21), (4.22),

$$\frac{1}{3!}C'''(c) - \frac{2M}{5!}B^{(5)}(c) = 0, \quad (4.23)$$

$$y \frac{M^2}{7!}B^{(7)}(c) - \frac{2M}{6!}\Phi^{(6)}(c) - \frac{M}{5!}C^{(5)}(c) + \frac{1}{3!}D'''(c) \neq 0.$$

9.  $\tilde{s} = s - 3$  si (4.6), (4.7), (4.8), (4.9), (4.10), (4.11), (4.12), (4.13), (4.14), (4.15), (4.16), (4.17), (4.18), (4.19), (4.20), (4.21), (4.22), (4.23), y

$$\frac{M^2}{7!}B^{(7)}(c) - \frac{2M}{6!}\Phi^{(6)}(c) - \frac{M}{5!}C^{(5)}(c) + \frac{1}{3!}D'''(c) \neq 0. \quad (4.24)$$

10.  $\tilde{s} = s - 4$  si (4.6), (4.7), (4.8), (4.9), (4.10), (4.11), (4.12), (4.13), (4.14), (4.15), (4.16), (4.17), (4.18), (4.19), (4.20), (4.21), (4.22), (4.23), y

$$\frac{M^2}{7!}B^{(7)}(c) - \frac{2M}{6!}\Phi^{(6)}(c) - \frac{M}{5!}C^{(5)}(c) + \frac{1}{3!}D'''(c) = 0. \quad (4.25)$$

**Demostración.** En general,  $\tilde{S}(z) = S(\tilde{\mu})(z)$  satisface la ecuación (4.2), donde  $\tilde{s} \leq s + 4$ . Obsérvese que si  $B(c) \neq 0$  entonces  $\tilde{s} = s + 4$ .

En adelante usaremos la siguiente notación. Si  $T_k(z)$  es un polinomio de grado  $k$ ,  $c$  un número real y  $k$  un número entero no negativo, entonces  $T_{c,k}(z)$  será el polinomio tal que

$$T_{c,k}(z) = (z - c)T_{c,k+1}(z) + t_c^{(k)},$$

con la condición inicial  $T_{c,0}(z) = T(z)$ .

Si  $B(c) = 0$ , en (4.2) podemos dividir por  $z - c$  y

$$\begin{aligned} (z - c)^3 \Phi \tilde{S}' &= (z - c)^3 B \tilde{S}^2 + \left( (z - c)^3 C - 2M(z - c)B \right) \tilde{S} \\ &\quad + \left( M^2 B_{c,1} - 2M\Phi - M(z - c)C + (z - c)^3 D \right), \end{aligned}$$

de modo que  $\tilde{s} \leq s + 3$ . En particular, si  $MB_{c,1}(c) - 2\Phi(c) \neq 0$ ,  $\tilde{s} = s + 3$ .

Si  $MB_{c,1}(c) - 2\Phi(c) = 0$ , entonces  $MB'(c) - 2\Phi(c) = 0$ . Dividiendo por  $(z - c)$  en la anterior expresión, obtenemos

$$\begin{aligned} (z - c)^2 \Phi \tilde{S}' &= (z - c)^2 B \tilde{S}^2 + \left( (z - c)^2 C - 2MB \right) \tilde{S} \\ &\quad + \left( M^2 B_{c,2} - 2M\Phi_{c,1} - MC + (z - c)^2 D \right), \end{aligned} \quad (4.26)$$

y, por tanto  $\tilde{s} \leq s + 2$ . En particular si  $MB_{c,2}(c) - 2\Phi_{c,1}(c) - C(c) \neq 0$  entonces  $\tilde{s} = s + 2$ .

Si  $MB_{c,2}(c) - 2\Phi_{c,1}(c) - C(c) = 0$ , entonces  $\frac{1}{2}MB''(c) - 2\Phi'(c) - C(c) = 0$ . Dividiendo por  $(z - c)$  en (4.26),

$$(z - c)\Phi\tilde{S}' = (z - c)B\tilde{S}^2 + ((z - c)C - 2MB_{c,1})\tilde{S} + (M^2B_{c,3} - 2M\Phi_{c,2} - MC_{c,1} + (z - c)D), \quad (4.27)$$

entonces  $\tilde{s} \leq s + 1$ . En particular si  $B'(c) = 0$  entonces  $\tilde{s} = s + 1$ .

Si  $B_{c,1}(c) = 0$  y  $MB_{c,3}(c) - 2\Phi_{c,2}(c) - C_{c,1}(c) \neq 0$ , entonces  $\tilde{s} = s + 1$ . Si  $B'(c) = 0$  y  $\frac{M}{3!}B'''(c) - \Phi''(c) - C'(c) = 0$ , nuevamente, podemos dividir por  $(z - c)$ , en (4.27),

$$\Phi\tilde{S}' = B\tilde{S}^2 + (C - 2MB_{c,2})\tilde{S} + (M^2B_{c,4} - 2M\Phi_{c,3} - MC_{c,2} + D),$$

por tanto  $\tilde{s} \leq s$ . Supongamos  $\Phi(c) \neq 0$ . Entonces la anterior expresión no puede ser simplificada. Si  $\Phi(c) = 0$  y  $B(c) \neq 0$ , o si  $\Phi(c) = 0, B(c) = 0$  y  $C(c) - 2MB_{c,2}(c) \neq 0$ , o si  $\Phi(c) = B(c) = 0 = C(c) - 2MB_{c,2}(c) = 0$  pero  $M^2B_{c,4}(c) - 2M\Phi_{c,3}(c) - MC_{c,2}(c) + D \neq 0$  no podemos simplificar

Ahora, si se satisfacen las siguientes cuatro condiciones

1.  $\Phi(c) = 0$ ,
2.  $B(c) = 0$ ,
3.  $C(c) - 2MB_{c,2}(c) = 0$ , o, lo que es lo mismo,  $C(c) - MB''(c) = 0$ ,
4.  $M^2B_{c,4}(c) - 2M\Phi_{c,3}(c) - MC_{c,2}(c) + D(c) = 0$ , o lo que es lo mismo,  $\frac{M^2}{4!}B^{(4)}(c) - \frac{2M}{3!}\Phi'''(c) - \frac{M}{2}C''(c) + D(c) = 0$ ,

por tanto

$$\Phi_{c,1}\tilde{S}' = B_{c,1}\tilde{S}^2 + (C_{c,1} - 2MB_{c,3})\tilde{S} + (M^2B_{c,5} - 2M\Phi_{c,4} - MC_{c,3} + D_{c,1}).$$

Esto significa que  $\tilde{s} \leq s - 1$ . Por tanto, si alguna de las anteriores condiciones no se satisface y  $\Phi'(c) = 0$ , no podremos simplificar la ecuación y  $\tilde{s} = s$ .

De nuevo, si se satisfacen las siguientes cuatro condiciones

1.  $\Phi_{c,1}(c) = 0$ , i.e.  $\Phi'(c) = 0$ ,

2.  $B_{c,1}(c) = 0$ , i.e.  $B'(c) = 0$ ,
3.  $C_{c,1}(c) - 2MB_{c,3}(c) = 0$ , i.e.  $C'(c) - \frac{2M}{3!}B'''(c) = 0$ ,
4.  $M^2B_{c,5}(c) - 2M\Phi_{c,4}(c) - MC_{c,3}(c) + D_{c,1}(c) = 0$ , i.e.  $\frac{M^2}{5!}B^{(5)}(c) - \frac{2M}{4!}\Phi^{(4)}(c) - \frac{M}{3!}C'''(c) + D'(c) = 0$ ,

entonces

$$\Phi_{c,2}\tilde{S}' = B_{c,2}\tilde{S}^2 + (C_{c,2} - 2MB_{c,4})\tilde{S} + (M^2B_{c,6} - 2M\Phi_{c,5} - MC_{c,4} + D_{c,2}),$$

lo que es lo mismo que  $\tilde{s} \leq s - 2$ . En particular, si alguna de las anteriores condiciones no se satisface entonces la clase es  $s - 1$ .

Si se satisfacen las siguientes condiciones

1.  $\Phi_{c,2}(c) = 0$ , i.e.  $\Phi''(c) = 0$ .
2.  $B_{c,2}(c) = 0$ , i.e.  $B''(c) = 0$ ,
3.  $C_{c,2}(c) - 2MB_{c,4}(c) = 0$  i.e.  $\frac{1}{2}C''(c) - \frac{2M}{4!}B^{(4)}(c) = 0$ ,
4.  $M^2B_{c,6}(c) - 2M\Phi_{c,5}(c) - MC_{c,4}(c) + D_{c,2}(c) = 0$  i.e.  $\frac{M^2}{6!}B^{(6)}(c) - \frac{2M}{5!}\Phi^{(5)}(c) - \frac{M}{4!}C^{(4)}(c) + \frac{1}{2}D''(c) = 0$ ,

entonces

$$\Phi_{c,3}\tilde{S}' = B_{c,3}\tilde{S}^2 + (C_{c,3} - 2MB_{c,5})\tilde{S} + (M^2B_{c,7} - 2M\Phi_{c,6} - MC_{c,5} + D_{c,3}),$$

lo que significa que  $\tilde{s} \leq s - 3$ . En particular, si alguna de las siguientes condiciones no se satisface, entonces la clase es  $s - 2$ .

Finalmente, si se satisfacen las siguientes cuatro condiciones

1.  $\Phi_{c,3}(c) = 0$  i.e.  $\Phi'''(c) = 0$
2.  $B_{c,3}(c) = 0$  i.e.  $B'''(c) = 0$ ,
3.  $C_{c,3}(c) - 2MB_{c,5}(c) = 0$  i.e.  $\frac{1}{3!}C'''(c) - \frac{2M}{5!}B^{(5)}(c) = 0$ ,
4.  $M^2B_{c,7}(c) - 2M\Phi_{c,6}(c) - MC_{c,5}(c) + D_{c,3}(c) = 0$  i.e.  $\frac{M^2}{7!}B^{(7)}(c) - \frac{2M}{6!}\Phi^{(6)}(c) - \frac{M}{5!}C^{(5)}(c) + \frac{1}{3!}D'''(c) = 0$ ,

entonces

$$\Phi_{c,4}\tilde{S}' = B_{c,4}\tilde{S}^2 + (C_{c,4} - 2MB_{c,6})\tilde{S} + (M^2B_{c,8} - 2M\Phi_{c,7} - MC_{c,6} + D_{c,4}),$$

Lo que significa que  $\tilde{s} = s - 4$ . Si alguna de las anteriores no se satisface  $\tilde{s} = s - 3$ . ■

### 4.2.2. Ejemplos

En los siguientes ejemplos, presentamos la ecuación distribucional que satisface  $\tilde{\mu} = \mu^{(1)} - N\delta'_c$  siendo  $\mu^{(1)}$  el funcional asociado de primera especie para los polinomios ortogonales clásicos. También encontramos la ecuación de Riccati cuya solución es la correspondiente función de Stieltjes  $\tilde{S}(z) = S(\tilde{\mu})(z)$ .

De acuerdo con la definición 2,

#### Polinomios asociados de primera especie de Hermite

En este caso  $B(c) = -1 \neq 0$  y  $\tilde{\mu}$  satisface la ecuación

$$D[(x-c)^4\tilde{\mu}] + 2(x-c)^2((x-c)^2x - N - 2(x-c))\tilde{\mu} - (x-c)^4(x^{-1}\tilde{\mu}^2) = 0.$$

La clase  $\tilde{s}$  del funcional lineal  $\tilde{\mu}$  es  $\tilde{s} = 4$ . Además,  $\tilde{S}(z)$  satisface la ecuación de Riccati

$$\begin{aligned} (z-c)^4\tilde{S}' &= -(z-c)^4\tilde{S}^2 + 2(z-c)^2(-z(z-c)^2 + N)\tilde{S} \\ &\quad + (-N^2 - 2N(z-c)^2 + 2z(z-c)^2 - 2(z-c)^4). \end{aligned}$$

#### Polinomios asociados de primera especie de Laguerre

$B(c) = -\alpha - 1 \neq 0$  y  $\tilde{\mu}$  satisface la ecuación

$$\begin{aligned} D[x(x-c)^4\tilde{\mu}] &+ (x-c)^2((x-\alpha-3)(x-c)^2 - 2N(\alpha+1) - 4x(x-c))\tilde{\mu} \\ &- (\alpha+1)(x-c)^4(x^{-1}\tilde{\mu}^2) = 0. \end{aligned}$$

La clase del funcional lineal  $\tilde{\mu}$  es  $\tilde{s} = 4$ . Además  $\tilde{S}(z)$  satisface la ecuación de Riccati

$$z(z-c)^4\tilde{S}' = -(\alpha+1)(z-c)^4\tilde{S}^2 \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned} &+ (z-c)^2(2N(\alpha+1) + (-z+\alpha+2)(z-c)^2)\tilde{S} \\ &+ (-N^2(\alpha+1) - 2Nz(z-c) - N(-z+\alpha+2)(z-c)^2 - (z-c)^4). \end{aligned}$$

### Polinomios asociados de primera especie de Jacobi

$B(c) \neq 0$ , ya que si  $\alpha + \beta + 1 = 0$  obtenemos un caso semiclásico. Por tanto,  $\tilde{s} = 4$ . Por otra parte,  $\tilde{S}$  satisface,

$$\begin{aligned} (z-c)^4(z^2-1)\tilde{S}' = \\ (z-c)^4 \frac{4(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2} \tilde{S}^2 + (z-c)^2 \left( -2N \frac{4(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2} + \right. \\ \left. + (z-c)^2 \left( (\alpha+\beta+2)z - \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha+\beta+2} \right) \right) \tilde{S} + \\ + \left( -2N(z^2-1)(z-c) + N^2 \frac{4(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2} \right. \\ \left. - N(z-c)^2 \left( (\alpha+\beta+2)z - \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha+\beta+2} \right) + (z-c)^4(\alpha+\beta+3) \right), \end{aligned}$$

y  $\tilde{\mu}$  satisface la ecuación distribucional

$$\begin{aligned} D \left[ (x-c)^4(x^2-1)\tilde{\mu} \right] + (x-c)^2 \left( -(\alpha+\beta+4)x + \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha+\beta+2} \right) (x-c)^2 \\ + 2N \frac{(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2} - 4(x-c)(x^2-1) \Big) \tilde{\mu} + \\ 4(x-c)^4 \frac{(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2} (x^{-1}\tilde{\mu}^2) = 0. \end{aligned}$$

### Polinomios asociados de primera especie de Bessel

Dado que  $B(c) \neq 0$ , ya que  $\alpha = 1/2$  pertenece a un caso semiclásico, entonces  $\tilde{s} = 4$ .  $\tilde{S}$  satisface

$$\begin{aligned} z^2(z-c)^4\tilde{S}' = \\ -(z-c)^4 \frac{(2\alpha-1)}{\alpha^2(2\alpha+1)} \tilde{S}^2 + (z-c)^2 \left( 2N \frac{(2\alpha-1)}{\alpha^2(2\alpha+1)} + (z-c)^2 2(\alpha z + 1 - \alpha^{-1}) \right) \tilde{S} \\ + \left( -2Nz^2(z-c) - N^2 \frac{(2\alpha-1)}{\alpha^2(2\alpha+1)} - N(z-c)^2 2(\alpha z + 1 - \alpha^{-1}) + (z-c)^4(2\alpha+1) \right), \end{aligned}$$

y para  $\tilde{\mu}$  tenemos

$$\begin{aligned} D \left[ x^2(x-c)^4 \tilde{\mu} \right] + \\ (x-c)^2 \left( -2(x-c)^2 \left( (\alpha+1)x + 1 - \alpha^{-1} \right) - 2N \frac{(2\alpha-1)}{\alpha^2(2\alpha+1)} - 4x^2(x-c) \right) \tilde{\mu} \\ - (x-c)^4 \frac{(2\alpha-1)}{\alpha^2(2\alpha+1)} \left( x^{-1} \tilde{\mu}^2 \right) = 0. \end{aligned}$$

### 4.3. Algunos resultados sobre perturbaciones de los polinomios asociados de Laguerre de primera especie mediante una derivada Delta de Dirac.

En esta sección trabajamos con los polinomios asociados de primera especie  $(L_n^\alpha)^{(1)}(x)$  de los polinomios de Laguerre que denotaremos mediante  $L_n(\alpha, 1, x)$ . Estos polinomios satisfacen la siguiente ecuación diferencial de cuarto orden (ver [35]).

$$x^2 L_{n+1}^{(iv)}(\alpha, 1, x) + 5x L_{n+1}'''(\alpha, 1, x) + \left( -x^2 + 2(n+\alpha+3)x - \alpha^2 + 4 \right) L_{n+1}''(\alpha, 1, x) \quad (4.29)$$

$$+ 3(-x + \alpha + n + 3) L_{n+1}'(\alpha, 1, x) + (n+3)(n+1) L_{n+1}(\alpha, 1, x) = 0, \quad n \geq 0.$$

Además, son ortogonales respecto al funcional lineal  $\mu$ , (ver [22]), tal que

$$\langle \mu, p(x) \rangle = \int_0^\infty \frac{p(x) x^\alpha e^{-x} dx}{|\Psi(\alpha, 1 - \alpha, x e^{-\pi i})|^2}, \quad \alpha > 2, \quad (4.30)$$

donde

$$\begin{aligned} \Psi(a, b, x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n} x^n, \\ (a)_n &= a(a+1) \cdots (a+n-1), \quad (a)_0 = 1. \end{aligned}$$

La relación de ortogonalidad de los polinomios mónicos está dada por

$$\int_0^\infty \frac{L_n(\alpha, 1, x) L_m(\alpha, 1, x) x^\alpha e^{-x} dx}{|\Psi(\alpha, 1 - \alpha, x e^{-\pi i})|^2} = \Gamma(\alpha + n + 2)(n+1)! \delta_{mn}. \quad (4.31)$$

Además, se tiene la siguiente relación de estructura

$$xL'_n(\alpha, 1, x) = -(n+2)L_n(\alpha, 1, x) - L_{n+1}(\alpha, 1, x) + L_{n+1}(\alpha, 0, x) \quad (4.32)$$

donde  $\{L_n(\alpha, 0, x)\}_{n \geq 0}$  denota la sucesión de los polinomios clásicos de Laguerre.

Los polinomios asociados de primera especie de los polinomios de Laguerre pueden representarse mediante

$$L_n(\alpha, 1, x) = (-1)^n (n+1)! (\alpha+2)_n \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k x^k}{(2)_k (\alpha+2)_k} {}_3F_2(k-n, 1, \alpha+1; \alpha+k+2, k+2; 1),$$

(ver [21] y [22]).

Los polinomios  $\{L_n(\alpha, 1, x)\}_{n \geq 0}$  satisfacen la fórmula de Christoffel-Darboux,

$$\sum_{m=0}^{n-1} \frac{L_m(\alpha, 1, x)L_m(\alpha, 1, y)}{(m+1)!\Gamma(\alpha+m+2)} = \frac{1}{x-y} \frac{L_n(\alpha, 1, x)L_{n-1}(\alpha, 1, y) - L_{n-1}(\alpha, 1, x)L_n(\alpha, 1, y)}{n!\Gamma(\alpha+n+1)}.$$

Ahora, consideremos  $\tilde{\mu} = \mu + M\delta'_c$ . Entonces

$$\langle \tilde{\mu}, p(x) \rangle = \langle \mu, p(x) \rangle - Mp'(c). \quad (4.33)$$

Denotemos mediante  $\{L_n(\alpha, 1, M, x)\}_{n \geq 0}$  la sucesión de polinomios ortogonales mónicos, ortogonales respecto a  $\tilde{\mu}$ . Tenemos

**Proposición 15** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$L_n(\alpha, 1, M, x) = R(x; \alpha, n, M, c)L_n(\alpha, 1, x) - S(x; \alpha, n, M, c)L_{n-1}(\alpha, 1, x) \quad (4.34)$$

donde

$$R(x, \alpha, n, M, c) = 1 - \frac{MB(\alpha, n, M, c)L_{n-1}(\alpha, 1, c)}{D(\alpha, n, M, c)(x-c)\Gamma(\alpha+n+1)n!} - \frac{MA(\alpha, n, M, c)L_{n-1}(\alpha, 1, c)}{D(\alpha, n, M, c)(x-c)^2\Gamma(\alpha+n+1)n!} - \frac{MA(\alpha, n, M, c)L'_{n-1}(\alpha, 1, c)}{D(\alpha, n, M, c)(x-c)\Gamma(\alpha+n+1)n!}.$$

$$S(x, \alpha, n, M, c) =$$

$$\frac{MB(\alpha, n, M, c)L_n(\alpha, 1, c)}{D(\alpha, n, M, c)(x-c)\Gamma(\alpha+n+1)n!} + \frac{MA(\alpha, n, M, c)L_n(\alpha, 1, c)}{D(\alpha, n, M, c)(x-c)^2\Gamma(\alpha+n+1)n!}$$

$$+ \frac{MA(\alpha, n, M, c)L'_n(\alpha, 1, c)}{D(\alpha, n, M, c)(x-c)\Gamma(\alpha+n+1)n!},$$

$$A(\alpha, n, M, c) = L_n(\alpha, 1, c) \left( 1 - M \frac{L''_n(\alpha, 1, c)L_{n-1}(\alpha, 1, c) - L''_{n-1}(\alpha, 1, c)L_{n-1}(\alpha, 1, c)}{2\Gamma(\alpha+n+1)n!} \right)$$

$$+ M \frac{L'_n(\alpha, 1, c)L_{n-1}(\alpha, 1, c) - L'_{n-1}(\alpha, 1, c)L_n(\alpha, 1, c)}{\Gamma(\alpha+n+1)n!} L'_n(\alpha, 1, c),$$

$$B(\alpha, n, M, c) = \left( 1 - M \frac{L''_n(\alpha, 1, c)L_{n-1}(\alpha, 1, c) - L''_{n-1}(\alpha, 1, c)L_{n-1}(\alpha, 1, c)}{2\Gamma(\alpha+n+1)n!} \right) L'_n(\alpha, 1, c)$$

$$+ \frac{M}{6\Gamma(\alpha+n+1)n!} (L'''_n(\alpha, 1, c)L_{n-1}(\alpha, 1, c) - L'''_{n-1}(\alpha, 1, c)L_n(\alpha, 1, c)$$

$$+ 3(L''_n(\alpha, 1, c)L'_{n-1}(\alpha, 1, c) - L''_{n-1}(\alpha, 1, c)L'_n(\alpha, 1, c))) L_n(\alpha, 1, c),$$

$$D(\alpha, n, M, c) = \left( 1 - M \frac{L''_n(\alpha, 1, c)L_{n-1}(\alpha, 1, c) - L''_{n-1}(\alpha, 1, c)L_{n-1}(\alpha, 1, c)}{2\Gamma(\alpha+n+1)n!} \right)^2$$

$$- \frac{L'_n(\alpha, 1, c)L_{n-1}(\alpha, 1, c) - L'_{n-1}(\alpha, 1, c)L_n(\alpha, 1, c)}{\Gamma(\alpha+n+1)n!} \times$$

$$\frac{M^2}{6\Gamma(\alpha+n+1)n!} (L'''_n(\alpha, 1, c)L_{n-1}(\alpha, 1, c) - L'''_{n-1}(\alpha, 1, c)L_n(\alpha, 1, c)$$

$$+ 3(L''_n(\alpha, 1, c)L'_{n-1}(\alpha, 1, c) - L''_{n-1}(\alpha, 1, c)L'_n(\alpha, 1, c))) L_n(\alpha, 1, c).$$

**Demostración.** Consideremos el desarrollo de Fourier

$$L_n(\alpha, 1, M, x) = L_n(\alpha, 1, x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_{n,k} L_k(\alpha, 1, x),$$

donde

$$a_{n,k} = \frac{\langle \mu, L_n(\alpha, 1, M, x) L_k(\alpha, 1, x) \rangle}{\|L_k(\alpha, 1, x)\|_{\mu}^2}.$$

Para obtener los coeficientes  $a_{n,k}$ , podemos usar la ortogonalidad de los polinomios  $L_n(\alpha, 1, M, x)$  con respecto a  $\bar{\mu}$ , esto es,

$$\langle \bar{\mu}, L_n(\alpha, 1, M, x) L_k(\alpha, 1, x) \rangle = 0, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

De (4.33)

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{\mu}, L_n(\alpha, 1, M, x)L_k(\alpha, 1, x) \rangle &= \langle \mu, L_n(\alpha, 1, M, x)L_k(\alpha, 1, x) \rangle \\ &\quad - ML'_n(\alpha, 1, M, c)L_k(\alpha, 1, c) - ML_n(\alpha, 1, M, c)L'_k(\alpha, 1, c) \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$a_{n,k} = \frac{ML'_n(\alpha, 1, M, c)L_k(\alpha, 1, c) + ML_n(\alpha, 1, M, c)L'_k(\alpha, 1, c)}{\|L_k(\alpha, 1, x)\|_\mu^2}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} L_n(\alpha, 1, M, x) &= L_n(\alpha, 1, x) + ML'_n(\alpha, 1, M, c) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{L_k(\alpha, 1, c)L_k(\alpha, 1, x)}{\Gamma(\alpha + k + 2)(k + 1)!} \\ &\quad + ML_n(\alpha, 1, M, c) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{L'_k(\alpha, 1, c)L_k(\alpha, 1, x)}{\Gamma(\alpha + k + 2)(k + 1)!}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$L_n(\alpha, 1, M, x) = L_n(\alpha, 1, x) + ML'_n(\alpha, 1, M, c)K_{n-1}(x, c) + ML_n(\alpha, 1, M, c)K_{n-1}^{(0,1)}(x, c),$$

obteniéndose el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} (1 - MK_{n-1}^{(1,0)}(c, c))L_n(\alpha, 1, M, c) - MK_{n-1}(c, c)L'_n(\alpha, 1, M, c) = L_n(\alpha, 1, c), \\ -MK_{n-1}^{(1,1)}(c, c)L_n(\alpha, 1, M, c) + (1 - MK_{n-1}^{(1,0)}(c, c))L'_n(\alpha, 1, M, c) = L'_n(\alpha, 1, c). \end{cases} \quad (4.35)$$

Para obtener  $L_n(\alpha, 1, M, c)$  y  $L'_n(\alpha, 1, M, c)$  necesitamos los valores de,  $K_n(c, c)$ ,  $K_{n-1}^{(0,1)}(c, c)$  y  $K_{n-1}^{(1,1)}(c, c)$ . Usando la fórmula de Christoffel-Darboux, (1.9) y (1.10) tenemos

$$K_{n-1}(c, c) = \frac{L'_n(\alpha, 1, c)L_{n-1}(\alpha, 1, c) - L'_{n-1}(\alpha, 1, c)L_n(\alpha, 1, c)}{\Gamma(\alpha + n + 1)n!},$$

$$\begin{aligned} K_{n-1}^{(0,1)}(c, c) &= K_{n-1}^{(1,0)}(c, c) \\ &= \frac{L''_n(\alpha, 1, c)L_{n-1}(\alpha, 1, c) - L''_{n-1}(\alpha, 1, c)L_n(\alpha, 1, c)}{2\Gamma(\alpha + n + 1)n!}, \end{aligned}$$

y

$$K_{n-1}^{(1,1)}(c, c) = \frac{1}{6\Gamma(\alpha + n + 1)n!} (L_n'''(\alpha, 1, c)L_{n-1}(\alpha, 1, c) - L_{n-1}'''(\alpha, 1, c)L_n(\alpha, 1, c) + 3(L_n''(\alpha, 1, c)L_{n-1}'(\alpha, 1, c) - L_{n-1}''(\alpha, 1, c)L_n'(\alpha, 1, c))).$$

De (4.35) se tiene

$$\begin{aligned} L_n(\alpha, 1, M, c) &= \frac{A(\alpha, n, M, c)}{D(\alpha, n, M, c)}, \\ L_n'(\alpha, 1, M, c) &= \frac{B(\alpha, n, M, c)}{D(\alpha, n, M, c)}. \end{aligned}$$

Entonces

$$L_n(\alpha, 1, M, x) = R(x; \alpha, n, M, c)L_n(\alpha, 1, x) - S(x; \alpha, n, M, c)L_{n-1}(\alpha, 1, x),$$

■

A continuación mostraremos algunos ejemplos de casos particulares de (4.34) teniendo en cuenta que los coeficientes que aparecen en (4.34) vienen dados en términos de  $L_n^{(k)}(\alpha, 1, c)$ . En el caso en el que  $c = 0$ , tenemos que calcular,  $L_n(\alpha, 1, 0)$ ,  $L_n'(\alpha, 1, 0)$ ,  $L_n''(\alpha, 1, 0)$  y  $L_n'''(\alpha, 1, 0)$ . Usando la relación de estructura (4.32) evaluada en  $c = 0$ , en los casos de  $n = 0$  y  $n = 1$ , obtenemos

$$L_2(\alpha, 1, 0) = a_2 - 3a_1 + 2,$$

donde  $a_1 = L_1(\alpha, 1, 0)$ ,  $a_2 = L_2(\alpha, 1, 0)$ . Demostraremos por inducción, que

$$L_n(\alpha, 1, 0) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (n+1)! a_{n-k}}{(n+1-k)!}, \quad (4.36)$$

donde  $a_n = L_n(\alpha, 1, 0)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . En efecto, de (4.32), se tiene

$$(n+2)L_n(\alpha, 1, 0) + L_{n+1}(\alpha, 1, 0) = a_{n+1},$$

por tanto, de (4.36) obtenemos

$$\begin{aligned}
 L_{n+1}(\alpha, 1, 0) &= a_{n+1} - (n+2) \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (n+1)! a_{n-k}}{(n+1-k)!} \\
 &= a_{n+1} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (n+2)! a_{n-k}}{(n+1-k)!} \\
 &= a_{n+1} - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (n+2)! a_{n+1-k}}{(n+2-k)!} \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k (n+2)! a_{n+1-k}}{(n+2-k)!}.
 \end{aligned}$$

Si derivamos tres veces (4.34), evaluamos cada una de estas derivadas en  $c = 0$ , obtenemos las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}
 (n+3)L'_n(\alpha, 1, 0) + L'_{n+1}(\alpha, 1, 0) &= L'_{n+1}(\alpha, 1, 0), \\
 (n+4)L''_n(\alpha, 1, 0) + L''_{n+1}(\alpha, 1, 0) &= L''_{n+1}(\alpha, 1, 0), \\
 (n+5)L'''_n(\alpha, 1, 0) + L'''_{n+1}(\alpha, 1, 0) &= L'''_{n+1}(\alpha, 1, 0).
 \end{aligned}$$

Aplicando el mismo método que usamos para probar (4.36) en cada una de las anteriores expresiones se tiene

**Proposición 16** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$L_n(\alpha, 1, 0) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (n+1)! \Gamma(n+\alpha+1-k)}{(n+1-k)! \Gamma(\alpha+1)}, \quad (4.37)$$

$$L'_n(\alpha, 1, 0) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1} (n+2)! (n-k) \Gamma(n+\alpha+1-k)}{(n+2-k)! \Gamma(\alpha+2)}, \quad (4.38)$$

$$L''_n(\alpha, 1, 0) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^{k+2} (n+3)! (n-k-1)_2 \Gamma(n+\alpha+1-k)}{(n+3-k)! \Gamma(\alpha+3)}, \quad (4.39)$$

$$L'''_n(\alpha, 1, 0) = \sum_{k=0}^{n-3} \frac{(-1)^{k+3} (n+4)! (n-k-2)_3 \Gamma(n+\alpha+1-k)}{(n+4-k)! \Gamma(\alpha+4)}. \quad (4.40)$$



---

---

# CAPÍTULO 5

---

## Polinomios ortogonales tipo Laguerre Sobolev

### 5.1. Introducción

Los polinomios con los que trabajamos en este capítulo corresponden a un modelo de polinomios de tipo Laguerre-Sobolev  $\{\tilde{L}_n^\alpha\}_{n \geq 0}$  que son ortogonales respecto al producto escalar

$$\langle p, q \rangle_S = \int_0^\infty p(x)q(x)x^\alpha e^{-x} dx + Np'(0)q'(0), \quad N \in \mathbb{R}_+, p, q \in \mathbb{P}. \quad (5.1)$$

Nuestro objetivo es encontrar una ecuación diferencial lineal de segundo orden que satisfagan los polinomios  $\tilde{L}_n^\alpha$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , usando una fórmula de conexión entre estos polinomios y los polinomios mónicos de Laguerre  $L_n^{\alpha+2}$ ,  $L_{n-1}^{\alpha+2}$  y  $L_{n-2}^{\alpha+2}$ . Una vez encontrada esta ecuación diferencial, la usaremos para dar una interpretación electrostática de los ceros de  $\tilde{L}_n^\alpha$ . Por otra parte, hallamos una expresión hipergeométrica de estos polinomios y realizamos un estudio numérico del comportamiento de los ceros de  $\tilde{L}_n^\alpha$ . Finalmente, analizamos el comportamiento asintótico de los polinomios ortogonales de tipo Laguerre-Sobolev.

## 5.2. Fórmula de conexión

Usando la misma notación de los capítulos precedentes para los polinomios ortogonales mónicos de Laguerre  $L_n^\alpha(x)$ , definimos el siguiente producto escalar de tipo Sobolev

$$\langle p, q \rangle_S = \int_0^\infty pqx^\alpha e^{-x} dx + Np'(0)q'(0), \quad N \in \mathbb{R}_+. \quad (5.2)$$

con  $p, q \in \mathbb{P}$ ,  $\alpha > -1$ .

Sea  $\{\tilde{L}_n^\alpha\}_{n \geq 0}$  la sucesión de polinomios ortogonales mónicos correspondientes al producto escalar (5.2), que se denominarán de tipo Laguerre-Sobolev. Para encontrar la ecuación diferencial de segundo orden que satisfacen dichos polinomios ortogonales, los escribiremos como una combinación lineal de polinomios ortogonales mónicos de Laguerre. En efecto, teniendo en cuenta el desarrollo de Fourier:

$$\tilde{L}_n^\alpha(x) = L_n^\alpha(x) + \sum_{j=0}^{n-1} a_{n,j} L_j^\alpha(x)$$

donde

$$\begin{aligned} a_{n,j} &= \frac{\langle \tilde{L}_n^\alpha(x), L_j^\alpha(x) \rangle_\alpha}{\|L_j^\alpha\|_\alpha^2}, \quad j = 1, \dots, n-1, \\ &= \frac{\langle \tilde{L}_n^\alpha(x), L_j^\alpha(x) \rangle_S - N(\tilde{L}_n^\alpha)'(0)(L_j^\alpha)'(0)}{\|L_j^\alpha\|_\alpha^2} \\ &= \frac{-N(\tilde{L}_n^\alpha)'(0)(L_j^\alpha)'(0)}{\|L_j^\alpha\|_\alpha^2}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\tilde{L}_n^\alpha(x) = L_n^\alpha(x) - N(\tilde{L}_n^\alpha)'(0) \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(L_j^\alpha)'(0)L_j^\alpha(x)}{\|L_j^\alpha\|_\alpha^2}.$$

Así pues,

$$\tilde{L}_n^\alpha(x) = L_n^\alpha(x) - N(\tilde{L}_n^\alpha)'(0)K_{n-1}^{(0,1)}(x, 0). \quad (5.3)$$

Dado que  $K_{n-1}(x, 0)$  es un múltiplo del polinomio de Laguerre  $L_{n-1}^{\alpha+1}$ , podemos encontrar una expresión similar para  $K_{n-1}^{(0,1)}(x, 0)$  en términos de polinomios de Laguerre. En efecto, si denotamos mediante  $\langle p, q \rangle_{\alpha+2}$  el producto escalar asociado con el peso Laguerre  $x^{\alpha+2}e^{-x}dx$  y dado que,

$$\frac{\|L_{n-1}^\alpha\|_\alpha^2}{(L_{n-1}^\alpha)'(0)} K_{n-1}^{(0,1)}(x, 0) = L_{n-1}^{\alpha+2}(x) + \sum_{j=0}^{n-2} b_{n-1,j} L_j^{\alpha+2}(x)$$

donde

$$\begin{aligned} b_{n-1,j} &= \frac{\left\langle \frac{\|L_{n-1}^\alpha\|_\alpha^2}{(L_{n-1}^\alpha)'(0)} K_{n-1}^{(0,1)}(x, 0), L_j^{\alpha+2}(x) \right\rangle_{\alpha+2}}{\|L_j^{\alpha+2}\|_{\alpha+2}^2} \\ &= \frac{\|L_{n-1}^\alpha\|_\alpha^2}{(L_{n-1}^\alpha)'(0) \|L_j^{\alpha+2}\|_{\alpha+2}^2} \left\langle K_{n-1}^{(0,1)}(x, 0), L_j^{\alpha+2}(x) \right\rangle_{\alpha+2}. \end{aligned}$$

Usando el hecho que para  $0 \leq j \leq n-3$  se tiene:

$$\begin{aligned} \left\langle K_{n-1}^{(0,1)}(x, 0), L_j^{\alpha+2}(x) \right\rangle_{\alpha+2} &= \int_0^\infty K_{n-1}^{(0,1)}(x, 0) L_j^{\alpha+2}(x) x^{\alpha+2} e^{-x} dx \\ &= \int_0^\infty K_{n-1}^{(0,1)}(x, 0) x^2 L_j^{\alpha+2}(x) x^\alpha e^{-x} dx \\ &= 0, \end{aligned}$$

y deducimos que

$$\frac{\|L_{n-1}^\alpha\|_\alpha^2}{(L_{n-1}^\alpha)'(0)} K_{n-1}^{(0,1)}(x, 0) = L_{n-1}^{\alpha+2}(x) + b_{n-1,n-2} L_{n-2}^{\alpha+2}(x),$$

o, equivalentemente,

$$\frac{\|L_{n-1}^\alpha\|_\alpha^2}{(L_{n-1}^\alpha)'(0)} K_{n-1}^{(0,1)}(x, 0) = L_{n-1}^{\alpha+2}(x) + \frac{\|L_{n-1}^\alpha\|_\alpha^2}{(L_{n-1}^\alpha)'(0) \|L_{n-2}^{\alpha+2}\|_{\alpha+2}^2} \left\langle K_{n-1}^{(0,1)}(x, 0), L_{n-2}^{\alpha+2}(x) \right\rangle_{\alpha+2} L_{n-2}^{\alpha+2}(x)$$

es decir,

$$K_{n-1}^{(0,1)}(x, 0) = \frac{(L_{n-1}^\alpha)'(0)}{\|L_{n-1}^\alpha\|_\alpha^2} L_{n-1}^{\alpha+2}(x) + \frac{\left\langle K_{n-1}^{(0,1)}(x, 0), L_{n-2}^{\alpha+2}(x) \right\rangle_{\alpha+2}}{\|L_{n-2}^{\alpha+2}\|_{\alpha+2}^2} L_{n-2}^{\alpha+2}(x).$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\langle K_{n-1}^{(0,1)}(x, 0), L_{n-2}^{\alpha+2}(x) \rangle_{\alpha+2} &= \left\langle K_n^{(0,1)}(x, 0) - \frac{L_n^\alpha(x) (L_n^\alpha)'(0)}{\|L_n^\alpha\|^2}, L_{n-2}^{\alpha+2}(x) \right\rangle_{\alpha+2} \\
&= \langle K_n^{(0,1)}(x, 0), L_{n-2}^{\alpha+2}(x) \rangle_{\alpha+2} - \left\langle \frac{L_n^\alpha(x) (L_n^\alpha)'(0)}{\|L_n^\alpha\|^2}, L_{n-2}^{\alpha+2}(x) \right\rangle_{\alpha+2} \\
&= \langle K_n^{(0,1)}(x, 0), x^2 L_{n-2}^{\alpha+2}(x) \rangle_\alpha - \frac{(L_n^\alpha)'(0)}{\|L_n^\alpha\|^2} \langle L_n^\alpha(x), x^2 L_{n-2}^{\alpha+2}(x) \rangle_\alpha \\
&= -(L_n^\alpha)'(0)
\end{aligned}$$

con lo que se ha probado

**Proposición 17** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$K_{n-1}^{(0,1)}(x, 0) = a_{n-1} L_{n-1}^{\alpha+2}(x) + b_{n-1} L_{n-2}^{\alpha+2}(x) \quad (5.4)$$

donde

$$a_{n-1} = \frac{(L_{n-1}^\alpha)'(0)}{\|L_{n-1}^\alpha\|_\alpha^2} = \frac{(-1)^n}{(n-2)! \Gamma(\alpha+2)}$$

y

$$b_{n-1} = -\frac{(L_n^\alpha)'(0)}{\|L_{n-2}^{\alpha+2}\|_{\alpha+2}^2} = \frac{(-1)^n n}{(n-2)! \Gamma(\alpha+2)} = n a_{n-1}.$$

Ahora, usando (1.24) y (5.4)

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_n^\alpha(x) &= L_n^\alpha(x) - N(\tilde{L}_n^\alpha)'(0) (a_{n-1} L_{n-1}^{\alpha+2}(x) + b_{n-1} L_{n-2}^{\alpha+2}(x)) \\
&= L_n^{\alpha+1}(x) + n L_{n-1}^{\alpha+1}(x) - N(\tilde{L}_n^\alpha)'(0) (a_{n-1} L_{n-1}^{\alpha+2}(x) + b_{n-1} L_{n-2}^{\alpha+2}(x)) \\
&= L_n^{\alpha+2}(x) + n L_{n-1}^{\alpha+2}(x) + n (L_{n-1}^{\alpha+2}(x) + (n-1) L_{n-2}^{\alpha+2}(x)) \\
&\quad - N(\tilde{L}_n^\alpha)'(0) (a_{n-1} L_{n-1}^{\alpha+2}(x) + b_{n-1} L_{n-2}^{\alpha+2}(x)) \\
&= L_n^{\alpha+2}(x) + [2n - N(\tilde{L}_n^\alpha)'(0) a_{n-1}] L_{n-1}^{\alpha+2}(x) \\
&\quad + [n(n-1) - N(\tilde{L}_n^\alpha)'(0) b_{n-1}] L_{n-2}^{\alpha+2}(x).
\end{aligned}$$

Queremos encontrar una expresión explícita de  $(\tilde{L}_n^\alpha)'(0)$ . Para ello, derivamos en (5.3) y evaluamos en cero la correspondiente expresión

$$\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(0) = nL_{n-1}^{\alpha+1}(0) - N\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(0)K_{n-1}^{(1,1)}(0,0).$$

Así pues, centraremos nuestra atención en el cálculo de  $K_{n-1}^{(1,1)}(0,0)$ . De (5.4) deducimos que

$$K_{n-1}^{(1,1)}(x,0) = (n-1)a_{n-1}L_{n-2}^{\alpha+3}(x) + (n-2)b_{n-1}L_{n-3}^{\alpha+3}(x),$$

Por otra parte, de (1.23) y (1.25)

$$\begin{aligned} K_{n-1}^{(1,1)}(0,0) &= (n-1)a_{n-1}L_{n-2}^{\alpha+3}(0) + (n-2)b_{n-1}L_{n-3}^{\alpha+3}(0) \\ &= \frac{(-1)^{n-2}(n-1)}{(n-2)!\Gamma(\alpha+2)} \frac{(-1)^{n-2}\Gamma(n+\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+4)} + \\ &\quad \frac{(-1)^n n(n-2)}{(n-2)!\Gamma(\alpha+2)} \frac{(-1)^{n-3}\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+4)} \\ &= \frac{(n-1)\Gamma(n+\alpha+2)}{(n-2)!\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha+4)} - \frac{n\Gamma(n+\alpha+1)}{(n-3)!\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha+4)} \\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{(n-3)!\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha+4)} \left( \frac{(n-1)(n+\alpha+1)}{(n-2)} - n \right) \\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha+1)(n(\alpha+2) - (\alpha+1))}{(n-2)!\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha+4)}, \end{aligned}$$

es decir,

$$K_{n-1}^{(1,1)}(0,0) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)(n(\alpha+2) - (\alpha+1))}{(n-2)!\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha+4)}. \quad (5.5)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(0) &= \frac{nL_{n-1}^{\alpha+1}(0)}{1 + NK_{n-1}^{(1,1)}(0,0)} \\ &= \frac{n(-1)^{n-1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+2)}}{1 + N \frac{\Gamma(n+\alpha+1)(n(\alpha+2) - (\alpha+1))}{(n-2)!\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha+4)}} \\ &= \frac{n(-1)^{n-1}\Gamma(\alpha+4)\Gamma(n+\alpha+1)(n-2)!}{(n-2)!\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha+4) + N\Gamma(n+\alpha+1)(n(\alpha+2) - (\alpha+1))}, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Entonces

$$2n - N\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(0)a_{n-1}$$

$$\begin{aligned}
&= 2n - N \frac{(-1)^n}{(n-2)! \Gamma(\alpha+2)} \times \\
&\quad \frac{n(-1)^{n-1} \Gamma(\alpha+4) \Gamma(n+\alpha+1) (n-2)!}{(n-2)! \Gamma(\alpha+2) \Gamma(\alpha+4) + N \Gamma(n+\alpha+1) (n(\alpha+2) - (\alpha+1))} \\
&= \frac{2n(n-2)! \Gamma(\alpha+2) \Gamma(\alpha+4) + N \Gamma(n+\alpha+1) (n(\alpha+2) - (\alpha+1))}{(n-2)! \Gamma(\alpha+2) \Gamma(\alpha+4) + N \Gamma(n+\alpha+1) (n(\alpha+2) - (\alpha+1))} + \\
&\quad \frac{N \Gamma(n+\alpha+1) [2n(n(\alpha+2) - (\alpha+1)) + n(\alpha+3)(\alpha+2)]}{(n-2)! \Gamma(\alpha+2) \Gamma(\alpha+4) + N \Gamma(n+\alpha+1) (n(\alpha+2) - (\alpha+1))} \\
&= \frac{2n(n-2)! \Gamma(\alpha+2) \Gamma(\alpha+4) + N \Gamma(n+\alpha+1) (2n^2\alpha + 4n^2 + n\alpha^2 + 4n + 3n\alpha)}{(n-2)! \Gamma(\alpha+2) \Gamma(\alpha+4) + N \Gamma(n+\alpha+1) (n(\alpha+2) - (\alpha+1))}
\end{aligned}$$

y

$$n(n-1) - N \left( \widetilde{L}_n^\alpha \right)'(0) b_{n-1}$$

$$\begin{aligned}
&= n(n-1) - N \frac{(-1)^n n}{(n-2)! \Gamma(\alpha+2)} \times \\
&\quad \frac{n(-1)^{n-1} \Gamma(\alpha+4) \Gamma(n+\alpha+1) (n-2)!}{(n-2)! \Gamma(\alpha+2) \Gamma(\alpha+4) + N \Gamma(n+\alpha+1) (n(\alpha+2) - (\alpha+1))} \\
&= \frac{n! \Gamma(\alpha+2) \Gamma(\alpha+4)}{(n-2)! \Gamma(\alpha+2) \Gamma(\alpha+4) + N \Gamma(n+\alpha+1) (n(\alpha+2) - (\alpha+1))} + \\
&\quad \frac{n N \Gamma(n+\alpha+1) [(n-1)(n(\alpha+2) - (\alpha+1)) + n(\alpha+3)(\alpha+2)]}{(n-2)! \Gamma(\alpha+2) \Gamma(\alpha+4) + N \Gamma(n+\alpha+1) (n(\alpha+2) - (\alpha+1))} \\
&= \frac{n! \Gamma(\alpha+2) \Gamma(\alpha+4) + n N \Gamma(n+\alpha+1) (n^2\alpha + 2n^2 + n\alpha^2 + 3n\alpha + 3n + \alpha + 1)}{(n-2)! \Gamma(\alpha+2) \Gamma(\alpha+4) + N \Gamma(n+\alpha+1) (n(\alpha+2) - (\alpha+1))}.
\end{aligned}$$

Por tanto, hemos probado el siguiente teorema

**Teorema 21** Sean  $L_n^\alpha(x)$  los polinomios ortogonales mónicos de Laguerre y  $\widehat{L}_n^\alpha(x)$  los polinomios ortogonales mónicos de tipo Laguerre-Sobolev. Entonces

$$\widetilde{L}_n^\alpha(x) = L_n^{\alpha+2}(x) + A_n L_{n-1}^{\alpha+2}(x) + B_n L_{n-2}^{\alpha+2}(x) \quad (5.6)$$

donde

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{2n(n-2)! \Gamma(\alpha+2) \Gamma(\alpha+4) + N \Gamma(n+\alpha+1) (2n^2\alpha + 4n^2 + n\alpha^2 + 4n + 3n\alpha)}{(n-2)! \Gamma(\alpha+2) \Gamma(\alpha+4) + N \Gamma(n+\alpha+1) (n(\alpha+2) - (\alpha+1))}, \\
B_n &= \frac{n! \Gamma(\alpha+2) \Gamma(\alpha+4) + n N \Gamma(n+\alpha+1) (n^2\alpha + 2n^2 + n\alpha^2 + 3n\alpha + 3n + \alpha + 1)}{(n-2)! \Gamma(\alpha+2) \Gamma(\alpha+4) + N \Gamma(n+\alpha+1) (n(\alpha+2) - (\alpha+1))}.
\end{aligned}$$

### 5.3. Ecuación diferencial holonómica

Para encontrar la ecuación diferencial lineal de segundo orden que satisfacen los polinomios ortogonales de tipo Laguerre-Sobolev, usaremos la ecuación (1.21).

Por tanto,

$$\begin{aligned} x \left( L_n^{\alpha+2}(x) \right)'' + (\alpha + 3 - x) \left( L_n^{\alpha+2}(x) \right)' &= -n L_n^{\alpha+2}(x) \\ x \left( L_{n-1}^{\alpha+2}(x) \right)'' + (\alpha + 3 - x) \left( L_{n-1}^{\alpha+2}(x) \right)' &= -(n-1) L_{n-1}^{\alpha+2}(x) \\ x \left( L_{n-2}^{\alpha+2}(x) \right)'' + (\alpha + 3 - x) \left( L_{n-2}^{\alpha+2}(x) \right)' &= -(n-2) L_{n-2}^{\alpha+2}(x) \end{aligned}$$

y, en consecuencia,

$$x \left( \tilde{L}_n^\alpha(x) \right)'' + (\alpha + 3 - x) \left( \tilde{L}_n^\alpha(x) \right)' = -n L_n^{\alpha+2}(x) - A_n(n-1) L_{n-1}^{\alpha+2}(x) - B_n(n-2) L_{n-2}^{\alpha+2}(x). \quad (5.7)$$

Nuestro objetivo es expresar  $L_n^{\alpha+2}(x)$ ,  $L_{n-1}^{\alpha+2}(x)$  y  $L_{n-2}^{\alpha+2}(x)$  como combinación de  $\tilde{L}_n^\alpha(x)$  y  $\left( \tilde{L}_n^\alpha \right)'(x)$  con funciones racionales como coeficientes. Por tanto, derivando en (5.6) y multiplicando por  $x$  ambos miembros de la expresión resultante, de (1.20) se sigue

$$\begin{aligned} x \left( \tilde{L}_n^\alpha(x) \right)' &= n L_n^{\alpha+2}(x) + n(n + \alpha + 2) L_{n-1}^{\alpha+2}(x) + \\ &+ A_n \left( (n-1) L_{n-1}^{\alpha+2}(x) + (n-1)(n + \alpha + 1) L_{n-2}^{\alpha+2}(x) \right) + \\ &B_n \left( (n-2) L_{n-2}^{\alpha+2}(x) + (n-2)(n + \alpha) L_{n-3}^{\alpha+2}(x) \right) \\ &= n L_n^{\alpha+2}(x) + (n(n + \alpha + 2) + A_n(n-1) - B_n) L_{n-1}^{\alpha+2}(x) + \\ &+ (A_n(n-1)(n + \alpha + 1) + B_n(n-2) + B_n x - (2n + \alpha - 1) B_n) L_{n-2}^{\alpha+2}(x). \end{aligned}$$

Si denotamos

$$\begin{aligned} H_n &= n(n + \alpha + 2) + A_n(n-1) - B_n \\ C_1(x; n) &= B_n x + (n + \alpha + 1)(A_n(n-1) - B_n) \end{aligned}$$

entonces

$$x \left( \tilde{L}_n^\alpha(x) \right)' = n L_n^{\alpha+2}(x) + H_n L_{n-1}^{\alpha+2}(x) + C_1(x; n) L_{n-2}^{\alpha+2}(x).$$

Dado que de (1.19)

$$L_{n-2}^{\alpha+2}(x) = \frac{(x - (2n + \alpha + 1))L_{n-1}^{\alpha+2}(x) - L_n^{\alpha+2}(x)}{(n-1)(n + \alpha + 1)}, \quad (5.8)$$

podemos escribir

$$x(\tilde{L}_n^\alpha(x))' = \left[ n - \frac{C_1(x; n)}{(n-1)(n + \alpha + 1)} \right] L_n^{\alpha+2}(x) + \left[ H_n + \frac{C_1(x; n)(x - (2n + \alpha + 1))}{(n-1)(n + \alpha + 1)} \right] L_{n-1}^{\alpha+2}(x).$$

Si definimos

$$\begin{aligned} K_n &= 1 - \frac{B_n}{(n-1)(n + \alpha + 1)}, \\ g_1(x; n) &= A_n + \frac{(x - (2n + \alpha + 1))B_n}{(n-1)(n + \alpha + 1)}, \\ f_1(x; n) &= n - \frac{C_1(x; n)}{(n-1)(n + \alpha + 1)}, \\ f_2(x; n) &= H_n + \frac{C_1(x; n)(x - (2n + \alpha + 1))}{(n-1)(n + \alpha + 1)}, \end{aligned}$$

obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} \tilde{L}_n^\alpha(x) = K_n L_n^{\alpha+2}(x) + g_1(x; n) L_{n-1}^{\alpha+2}(x) \\ x(\tilde{L}_n^\alpha(x))' = f_1(x; n) L_n^{\alpha+2}(x) + f_2(x; n) L_{n-1}^{\alpha+2}(x). \end{cases}$$

Por tanto,

$$L_n^{\alpha+2}(x) = \frac{f_2(x; n)\tilde{L}_n^\alpha(x) - xg_1(x; n)(\tilde{L}_n^\alpha(x))'}{K_n f_2(x; n) - f_1(x; n)g_1(x; n)}, \quad (5.9)$$

$$L_{n-1}^{\alpha+2}(x) = \frac{K_n x(\tilde{L}_n^\alpha(x))' - f_1(x; n)\tilde{L}_n^\alpha(x)}{K_n f_2(x; n) - f_1(x; n)g_1(x; n)}. \quad (5.10)$$

De (5.7) y usando (5.8) tenemos

$$\begin{aligned}
& x\left(\widetilde{L}_n^\alpha(x)\right)'' + (\alpha + 3 - x)\left(\widetilde{L}_n^\alpha(x)\right)' \\
&= nL_n^{\alpha+2}(x) - A_n(n-1)L_{n-1}^{\alpha+2}(x) - \\
& \quad B_n(n-2)\left[\frac{(x - (2n + \alpha + 1))L_{n-1}^{\alpha+2}(x) - L_n^{\alpha+2}(x)}{(n-1)(n + \alpha + 1)}\right] \\
&= \left[n + \frac{B_n(n-2)}{(n-1)(n + \alpha + 1)}\right]L_n^{\alpha+2}(x) - \\
& \quad \left[(n-1)A_n + \frac{(n-2)B_n(x - (2n + \alpha + 1))}{(n-1)(n + \alpha + 1)}\right]L_{n-1}^{\alpha+2}(x),
\end{aligned}$$

y, de (5.10),

$$\begin{aligned}
& x\left(\widetilde{L}_n^\alpha(x)\right)'' + (\alpha + 3 - x)\left(\widetilde{L}_n^\alpha(x)\right)' \\
&= \left(-n + \frac{B_n(n-2)}{(n-1)(n + \alpha + 1)}\right)\frac{f_2(x; n)\widetilde{L}_n^\alpha(x) - xg_1(x; n)\left(\widetilde{L}_n^\alpha(x)\right)'}{K_n f_2(x; n) - f_1(x; n)g_1(x; n)} \\
& \quad - \left(A_n(n-1) + \frac{B_n(n-2)(x - (2n + \alpha + 1))}{(n-1)(n + \alpha + 1)}\right)\frac{K_n x\left(\widetilde{L}_n^\alpha(x)\right)' - f_1(x; n)\widetilde{L}_n^\alpha(x)}{K_n f_2(x; n) - f_1(x; n)g_1(x; n)}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
& x\left(\widetilde{L}_n^\alpha(x)\right)'' + \\
& \left[(\alpha + 3 - x) + \left(-n + \frac{B_n(n-2)}{(n-1)(n + \alpha + 1)}\right)\frac{xg_1(x; n)}{K_n f_2(x; n) - f_1(x; n)g_1(x; n)} + \right. \\
& \left. \left(A_n(n-1) + \frac{B_n(n-2)(x - (2n + \alpha + 1))}{(n-1)(n + \alpha + 1)}\right)\frac{K_n x}{K_n f_2(x; n) - f_1(x; n)g_1(x; n)}\right] \times \\
& \left(\widetilde{L}_n^\alpha(x)\right)' - \left[\left(-n + \frac{B_n(n-2)}{(n-1)(n + \alpha + 1)}\right)\frac{f_2(x; n)}{K_n f_2(x; n) - f_1(x; n)g_1(x; n)} + \right. \\
& \left. \left(A_n(n-1) + \frac{B_n(n-2)(x - (2n + \alpha + 1))}{(n-1)(n + \alpha + 1)}\right)\frac{f_1(x; n)\widetilde{L}_n^\alpha(x)}{K_n f_2(x; n) - f_1(x; n)g_1(x; n)}\right] \times \\
& \widetilde{L}_n^\alpha(x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por tanto, hemos probado:

**Teorema 22** Sea  $\{L_n^\alpha\}_{n \geq 0}$  la sucesión de los polinomios ortogonales mónicos de Laguerre y  $\{\tilde{L}_n^\alpha\}_{n \geq 0}$  la sucesión de los polinomios ortogonales asociados con el producto escalar de tipo Sobolev  $\langle p, q \rangle_S = \int_0^\infty pqx^\alpha e^{-x} dx + Np'(0)q'(0)$ , donde  $p$  y  $q$  son polinomios reales. Entonces

$$A(x; n) \left( \tilde{L}_n^\alpha(x) \right)'' + B(x; n) \left( \tilde{L}_n^\alpha(x) \right)' - C(x; n) \tilde{L}_n^\alpha(x) = 0, \quad (5.11)$$

donde

$$\begin{aligned} A(x; n) &= x(K_n f_2(x; n) - f_1(x; n)g_1(x; n)), \\ B(x; n) &= (\alpha + 3 - x)(K_n f_2(x; n) - f_1(x; n)g_1(x; n)) + \\ &\quad \left( -n + \frac{B_n(n-2)}{(n-1)(n+\alpha+1)} \right) xg_1(x; n) + \\ &\quad \left( A_n(n-1) + \frac{B_n(n-2)(x - (2n + \alpha + 1))}{(n-1)(n+\alpha+1)} \right) K_n x, \\ C(x; n) &= \left( -n + \frac{B_n(n-2)}{(n-1)(n+\alpha+1)} \right) f_2(x; n) + \\ &\quad \left( A_n(n-1) + \frac{B_n(n-2)(x - (2n + \alpha + 1))}{(n-1)(n+\alpha+1)} \right) f_1(x; n). \end{aligned}$$

## 5.4. Comportamiento de los ceros

Para realizar un estudio del comportamiento de los ceros de los polinomios ortogonales de tipo Laguerre-Sobolev, usaremos las siguientes dos proposiciones. La demostración de la primera aparece en [6], mientras que para la demostración de la segunda hemos usado un método similar al utilizado en la Proposición (3,2) del mismo artículo.

**Proposición 18** Si  $n \geq 3$ , el polinomio  $\tilde{L}_n^\alpha$  tiene al menos  $n - 2$  ceros diferentes de multiplicidad impar en  $(0, \infty)$ .

**Proposición 19** Los ceros de  $\tilde{L}_n^\alpha$  son reales, simples y al menos  $n - 1$  de ellos se encuentran en el intervalo  $(0, \infty)$ .

**Demostración.** Supongamos que  $\xi_{n,1}, \xi_{n,2}, \dots, \xi_{n,k}$  son los ceros de  $\tilde{L}_n^\alpha(x)$  que están en  $(0, \infty)$ . De la anterior proposición tenemos que  $k \geq n - 2$ .

Sea  $\phi(x) = (x - \xi_{n,1})(x - \xi_{n,2}) \cdots (x - \xi_{n,k})$ . Por tanto, los polinomios  $\phi(x)\tilde{L}_n^\alpha(x)$  y  $x\phi(x)\tilde{L}_n^\alpha(x)$  son positivos en  $(0, \infty)$ . Si suponemos que  $k = n - 2$ , tenemos

$$\begin{aligned} \langle x\phi(x), \tilde{L}_n^\alpha(x) \rangle_S &= \int_0^\infty x\phi(x)\tilde{L}_n^\alpha(x)x^\alpha e^{-x} dx + N\phi(0) (\tilde{L}_n^\alpha)'(0) = 0 \\ \langle \phi(x), \tilde{L}_n^\alpha(x) \rangle_S &= \int_0^\infty \phi(x)\tilde{L}_n^\alpha(x)x^\alpha e^{-x} dx + N(\phi)'(0) (\tilde{L}_n^\alpha)'(0) = 0 \end{aligned}$$

dado que

$$\int_0^\infty x\phi(x)\tilde{L}_n^\alpha(x)x^\alpha e^{-x} dx \geq 0, \quad \int_0^\infty \phi(x)\tilde{L}_n^\alpha(x)x^\alpha e^{-x} dx \geq 0,$$

y  $(\tilde{L}_n^\alpha)'(0) > 0$  (Ver demostración del Teorema 21), entonces  $\phi(0) < 0$  y  $\phi'(0) < 0$  lo cual es contradictorio. ■

Presentamos ahora un teorema cuya demostración la realizamos en el capítulo 6 para el caso de los polinomios de tipo Laguerre-Sobolev generalizados. Esta demostración está basada en el trabajo de H. G. Meijer [87].

**Teorema 23** Sean  $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n$  los ceros del polinomio mónico de tipo Laguerre-Sobolev  $\tilde{L}_n^\alpha(x)$  y sean  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  los ceros del polinomio mónico de Laguerre  $L_n^\alpha(x)$ . Entonces  $\xi_1 < x_1$  y  $x_i < \xi_{i+1} < x_{i+1}$  para  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ .

Vamos a usar (5.6) para mostrar algunos ejemplos del comportamiento de los ceros de los polinomios ortogonales tipo Laguerre-Sobolev. En primera instancia analizamos los polinomios  $\tilde{L}_2^3(x)$  y  $\tilde{L}_2^5(x)$ . Dado que

$$\tilde{L}_2^3(x) = x^2 - \frac{240}{N+24}x - 20\frac{N-24}{N+24},$$

entonces para  $N > 24$ ,  $\tilde{L}_2^3(x)$  tiene un cero negativo; para  $N = 24$ ,  $\tilde{L}_2^3(0) = 0$  y para  $N < 24$ ,  $\tilde{L}_2^3(x)$  no tiene ceros negativos. Adicionalmente, los ceros son:

$$\frac{2}{N+24} (60 \pm \sqrt{5N^2 + 720}).$$

De manera similar

$$\tilde{L}_2^5(x) = x^2 - \frac{10080}{N+720}x + \frac{30240 - 42N}{N+720},$$

por lo que los ceros de  $\tilde{L}_2^5(x)$  son

$$\frac{5040 \pm \sqrt{42} \sqrt{N^2 + 86400}}{N + 720},$$

es decir,  $\tilde{L}_2^5(x)$  tiene un cero negativo siempre que  $N > 720$ .

Usando la fórmula (5.6) realizamos algunos ejemplos para determinar el comportamiento de los ceros de los polinomios  $\tilde{L}_n^\alpha(x)$  al mantener fijos  $n$  y  $\alpha$ , lo que nos permitió establecer la siguiente conjetura.

**Conjetura 24** *Fijados  $n, \alpha$ , entonces los ceros de  $\tilde{L}_n^\alpha(x)$ ,  $\tilde{x}_{n,k}(N)$ , son funciones monótonas crecientes de  $N$ .*

Existe otro hecho que podemos conjeturar de los cálculos realizados. Aparentemente, si  $n = 2$ , existe  $l$  tal que los ceros de  $\tilde{L}_2^\alpha(x)$  tienden a  $l$  y  $-l$  cuando  $N \rightarrow \infty$ . De hecho, usando Maple deducimos que:

$$\begin{aligned} \tilde{L}_2^\alpha(x) = & \\ & \frac{7\alpha - 8x - 2x\alpha + x^2 + \alpha^2 + 12}{\Gamma(\alpha + 2)\Gamma(\alpha + 4) + \Gamma(\alpha + 3)(30N + 22N\alpha + 4N\alpha^2)} \\ & + \frac{(x - \alpha - 3)(4\Gamma(\alpha + 2)\Gamma(\alpha + 4) + \Gamma(\alpha + 3)(24N + 14N\alpha + 2N\alpha^2))}{\Gamma(\alpha + 2)\Gamma(\alpha + 4) + \Gamma(\alpha + 3)(3N + N\alpha)} \end{aligned}$$

y

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{L}_2^\alpha(x) = x^2 - 3\alpha - \alpha^2 - 2 \quad (5.12)$$

$$= (x - \sqrt{(\alpha + 2)(\alpha + 1)})(x + \sqrt{(\alpha + 2)(\alpha + 1)}). \quad (5.13)$$

Por tanto,

$$l = \sqrt{(\alpha + 2)(\alpha + 1)}.$$

Si calculamos el límite cuando  $N \rightarrow \infty$ , para  $n = 3$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{L}_3^\alpha(x)$$

$$\begin{aligned}
& 60x - 47\alpha + 27x\alpha - 15x^2 + x^3 - 12\alpha^2 - \alpha^3 + 3x\alpha^2 - 3x^2\alpha + \\
& \frac{1}{2\alpha + 5} (84x - 255\alpha + 57x\alpha - 84\alpha^2 - 9\alpha^3 + 9x\alpha^2 - 252) + \\
& \frac{1}{2\alpha + 5} (660\alpha - 384x - 312x\alpha + 48x^2 + 273\alpha^2 + 48\alpha^3 + 3\alpha^4 \\
& - 78x\alpha^2 + 27x^2\alpha - 6x\alpha^3 + 3x^2\alpha^2 + 576) - 60,
\end{aligned}$$

pero, no es fácil encontrar una expresión que nos muestre los ceros de este polinomio en función de  $\alpha$ . Sin embargo, el análisis numérico nos permitió ver que el comportamiento de los ceros de los polinomios  $\tilde{L}_3^\alpha(x)$  es acorde con la Conjetura 24.

Nuestro siguiente objetivo es fijar  $n$  y  $\alpha$  para determinar los valores de  $N$  tales que el polinomio  $\tilde{L}_n^\alpha(x)$  tiene un cero negativo. Por tanto, sean  $\Pi$  y  $N_0$  definidos como

$$\Pi = \{N : \tilde{L}_n^\alpha(x) \text{ tiene una raíz negativa}\} \text{ y } N_0 = \inf \Pi.$$

Para  $n = 2$ ,  $n = 3$ , y  $n = 4$ , encontramos los valores aproximados de  $N$  tales que  $\tilde{L}_n^\alpha(x)$  tiene un cero negativo. Algunos ejemplos numéricos se presentan en las tablas 5.1, 5.2 y 5.3.

Es importante hacer notar que en las tablas 5.1, 5.2 y 5.3 pudimos, en algunos casos, encontrar el valor exacto de  $N_0$ . En estos casos, el polinomio de la tercera columna se anula en  $x = 0$ , y para  $N > N_0$ ,  $\tilde{L}_n^\alpha(x)$  tiene un cero negativo.

Una aproximación numérica interesante es hacer otra elección de los parámetros fijos. Por ejemplo, si fijamos  $N$  nos gustaría encontrar los valores  $n$  para los cuales  $\tilde{L}_n^\alpha(x)$  tiene un cero negativo. Si denotamos mediante  $n_0$  el menor de los  $n$  que satisface esta condición y efectuamos los cálculos para algunos valores de  $N$ , entonces obtenemos algunos resultados que presentamos en las tablas 5.4 y 5.5.

Por tanto, de las tablas 5.4 y 5.5, podemos plantear la siguiente conjetura

**Conjetura 25** *Si fijamos  $N$ , los valores de  $n_0$  crecen cuando  $\alpha$  crece, y si fijamos  $\alpha$  los valores de  $n_0$  decrecen cuando  $N$  crece.*

	$\Pi$	$\widetilde{L}_2^\alpha(x)$ para $N_0$
$\alpha = -0,99$	$N \gtrsim 0,9944$	$x^2 - 1.0100x - 3.7657 \times 10^{-7}$
$\alpha = -1/2$	$N \gtrsim 0,8863$	$x^2 - 1.4999x - 3.0920 \times 10^{-5}$
$\alpha = -0,1$	$N \gtrsim 0,96178$	$x^2 - 1.9000x - 1.2595 \times 10^{-5}$
$\alpha = 0,1$	$N \gtrsim 1,0465$	$x^2 - 2.1x - 1.5621 \times 10^{-5}$
$\alpha = 1/2$	$N \gtrsim 1.3295$	$x^2 - 2.4998x - 2.2511 \times 10^{-4}$
$\alpha = 1$	$N > 2$	$x^2 - 3x$
$\alpha = 3$	$N > 24$	$x^2 - 5x$
$\alpha = 5$	$N > 720$	$x^2 - 7x$
$\alpha = 10$	$N > 39916800$	$x^2 - 12x$

Tabla 5.1: Comportamiento de  $N$ 

	$\Pi$	$\widetilde{L}_3^\alpha(x)$ para $N_0$
$\alpha = -0,99$	$N \gtrsim 0,3304$	$1.8154 \times 10^{-6} + 3.0398x - 5.0199x^2 + x^3$
$\alpha = -1/2$	$N \gtrsim 0,2533$	$3.1892 \times 10^{-4} + 5.2490x - 5.9997x^2 + x^3$
$\alpha = -0,1$	$N \gtrsim 0,2467$	$8.4155 \times 10^{-4} + 7.4085x - 6.7997x^2 + x^3$
$\alpha = 0,1$	$N \gtrsim 0,2552$	$7.3646 \times 10^{-4} + 8.6089x - 7.1998x^2 + x^3$
$\alpha = 1/2$	$N \gtrsim 0,2955$	$+1.7329 \times 10^{-3} + 11.248x - 7.9997x^2 + x^3$
$\alpha = 1$	$N > 0,4$	$15x - 9x^2 + x^3$
$\alpha = 3$	$N \gtrsim 3,4286$	$3.8889 \times 10^{-4} + 35x - 13x^2 + x^3$
$\alpha = 5$	$N > 80$	$63x - 17x^2 + x^3$
$\alpha = 10$	$N > 2851200$	$168x - 27x^2 + x^3$

Tabla 5.2: Comportamiento de  $N$ 

	$N > N_0$	$\widetilde{L}_4^\alpha(x)$ para $N_0$
$\alpha = -0,99$	$N \gtrsim 0,1648$	$-7.6737 \times 10^{-6} + 28.189x^2 - 12.189x - 11.03x^3 + x^4$
$\alpha = -1/2$	$N \gtrsim 0,1126$	$-1.6592 \times 10^{-3} + 38.246x^2 - 23.618x - 12.5x^3 + x^4$
$\alpha = -0,1$	$N \gtrsim 0,1007$	$-3.5894 \times 10^{-3} + 47.526x^2 - 36.3x - 13.7x^3 + x^4$
$\alpha = 0,1$	$N \gtrsim 0,1001$	$-6.8832 \times 10^{-4} + 52.529x^2 - 43.91x - 14.3x^3 + x^4$
$\alpha = 1/2$	$N \gtrsim 0,1075$	$-0,01696 + 63.241x^2 - 61.848x - 15.499x^3 + x^4$
$\alpha = 1$	$N \gtrsim 0,1334$	$-2.2493 \times 10^{-2} + 77.992x^2 - 89.972x - 16.999x^3 + x^4$
$\alpha = 3$	$N \gtrsim 0,8572$	$-1.8666 \times 10^{-2} + 152x^2 - 279.99x - 23x^3 + x^4$
$\alpha = 5$	$N > 16$	$-630x + 250x^2 - 29x^3 + x^4$
$\alpha = 10$	$N > 380160$	$-2520x + 600x^2 - 44x^3 + x^4$

Tabla 5.3: Comportamiento de  $N$

$N = 0,1$	$n \geq n_0$	$N = 0,5$	$n > n_0$	$N = 1$	$n \geq n_0$
$\alpha = -0,99$	$n \geq 5$	$\alpha = -0,99$	$n \geq 3$	$\alpha = -0,99$	$n \geq 2$
$\alpha = -0,1$	$n \geq 5$	$\alpha = -0,1$	$n \geq 3$	$\alpha = -0,1$	$n \geq 2$
$\alpha = 0,1$	$n \geq 5$	$\alpha = 0,1$	$n \geq 3$	$\alpha = 0,1$	$n \geq 3$
$\alpha = 1/2$	$n \geq 5$	$\alpha = 1/2$	$n \geq 5$	$\alpha = 1/2$	$n \geq 3$
$\alpha = 1$	$n \geq 5$	$\alpha = 1$	$n \geq 5$	$\alpha = 1$	$n \geq 3$
$\alpha = 3$	$n \geq 7$	$\alpha = 3$	$n \geq 7$	$\alpha = 3$	$n \geq 4$
$\alpha = 5$	$n \geq 10$	$\alpha = 5$	$n \geq 10$	$\alpha = 5$	$n \geq 7$
$\alpha = 10$	$n \geq 22$	$\alpha = 10$	$n \geq 22$	$\alpha = 8$	$n \geq 10$

Tabla 5.4:  $N = 0, 1, N = 0, 5, N=1$ 

$N = 5$	$n_0$	$N = 10$	$n_0$
$\alpha = -0,99$	$n \geq 2$	$\alpha = -0,99$	$n \geq 2$
$\alpha = -0,1$	$n \geq 2$	$\alpha = -0,1$	$n \geq 2$
$\alpha = 0,1$	$n \geq 2$	$\alpha = 0,1$	$n \geq 2$
$\alpha = 1/2$	$n \geq 2$	$\alpha = 1/2$	$n \geq 2$
$\alpha = 1$	$n \geq 2$	$\alpha = 1$	$n \geq 2$
$\alpha = 3$	$n \geq 3$	$\alpha = 3$	$n \geq 3$
$\alpha = 5$	$n \geq 5$	$\alpha = 5$	$n \geq 5$
$\alpha = 8$	$n \geq 10$	$\alpha = 10$	$n \geq 14$

Tabla 5.5:  $N = 5, N = 10$

## 5.5. Modelo Electrostático

Usando la fórmula de conexión (5.6), realizaremos un análisis de un modelo electrostático que responde a la distribución de los ceros de los polinomios ortogonales tipo Laguerre-Sobolev que estudiamos en este capítulo. Supongamos que  $\{x_{n,k}^{(N)}\}_{k \geq 1}$  son los ceros de  $\tilde{L}_n^\alpha(x)$  y evaluemos (5.11) en estos ceros. Por tanto

$$A(x_{n,k}^{(N)}; n) \left( \tilde{L}_n^\alpha(x_{n,k}^{(N)}) \right)'' + B(x_{n,k}^{(N)}; n) \left( \tilde{L}_n^\alpha(x_{n,k}^{(N)}) \right)' = 0,$$

esto es,

$$\frac{B(x_{n,k}^{(N)}; n)}{A(x_{n,k}^{(N)}; n)} = - \frac{\left( \tilde{L}_n^\alpha(x_{n,k}^{(N)}) \right)''}{\left( \tilde{L}_n^\alpha(x_{n,k}^{(N)}) \right)'}. \quad (5.14)$$

Pero, usando la expresión explícita de  $A(x_{n,k}^{(N)}; n)$  y  $B(x_{n,k}^{(N)}; n)$  se tiene

$$\begin{aligned} \frac{B(x_{n,k}^{(N)}; n)}{A(x_{n,k}^{(N)}; n)} &= \frac{\alpha + 3}{x_{n,k}^{(N)}} - 1 + \frac{\left( -n + \frac{B_n(n-2)}{(n-1)(n+\alpha+1)} \right) g_1(x_{n,k}^{(N)}; n)}{K_n f_2(x_{n,k}^{(N)}; n) - f_1(x_{n,k}^{(N)}; n) g_1(x_{n,k}^{(N)}; n)} + \\ &\quad \left( A_n(n-1) + \frac{B_n(n-2)(x_{n,k}^{(N)} - (2n + \alpha + 1))}{(n-1)(n+\alpha+1)} \right) K_n \\ &\quad + \frac{K_n f_2(x_{n,k}^{(N)}; n) - f_1(x_{n,k}^{(N)}; n) g_1(x_{n,k}^{(N)}; n)}{K_n f_2(x_{n,k}^{(N)}; n) - f_1(x_{n,k}^{(N)}; n) g_1(x_{n,k}^{(N)}; n)}. \end{aligned}$$

Para poder encontrar el modelo electrostático, necesitaremos alguna información respecto de los ceros de  $K_n f_2(x, n) - f_1(x, n) g_1(x, n)$ .

Así pues, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} &K_n f_2(x; n) - f_1(x; n) g_1(x; n) = \\ &= K_n H_n + \frac{K_n [B_n x + (n + \alpha + 1) (A_n(n-1) - B_n)] (x - (2n + \alpha + 1))}{(n-1)(n+\alpha+1)} - \\ &\quad \left( n - \frac{B_n x + (n + \alpha + 1) (A_n(n-1) - B_n)}{(n-1)(n+\alpha+1)} \right) \left( A_n + \frac{(x - (2n + \alpha + 1)) B_n}{(n-1)(n+\alpha+1)} \right) \\ &= R(n, \alpha) x^2 + S(n, \alpha) x + T(n, \alpha) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 R(n, \alpha) &= \frac{K_n B_n}{(n-1)(n+\alpha+1)} + \frac{B_n^2}{(n-1)^2(n+\alpha+1)^2} \\
 S(n, \alpha) &= \frac{K_n(n+\alpha+1)(A_n(n-1) - B_n) - B_n K_n(2n+\alpha+1)}{(n-1)(n+\alpha+1)} - \frac{nB_n + A_n B_n}{(n-1)(n+\alpha+1)} + \\
 &\quad \frac{B_n(n+\alpha+1)(A_n(n-1) - B_n) - B_n^2(2n+\alpha+1)}{(n-1)^2(n+\alpha+1)^2} \\
 T(n, \alpha) &= K_n H_n - \frac{(A_n(n-1) - B_n)(2n+\alpha+1)K_n}{(n-1)} - A_n n + \frac{nB_n(2n+\alpha+1)}{(n-1)(n+\alpha+1)} + \\
 &\quad \frac{A_n(A_n(n-1) - B_n)}{(n-1)} - \frac{(2n+\alpha+1)(A_n(n-1) - B_n)B_n}{(n-1)^2(n+\alpha+1)}.
 \end{aligned}$$

Además, si  $x_1^{(\alpha, n)}$  y  $x_2^{(\alpha, n)}$  son los ceros de  $K_n f_2(x, n) - f_1(x, n)g_1(x, n)$ , entonces

$$\begin{aligned}
 \frac{B(x_{n,k}^{(N)}; n)}{A(x_{n,k}^{(N)}; n)} &= \frac{\alpha+3}{x_{n,k}^{(N)}} - 1 + \frac{1}{R(n, \alpha)} \left( -n + \frac{B_n(n-2)}{(n-1)(n+\alpha+1)} \right) g_1(x_{n,k}^{(N)}; n) \\
 &\quad + \frac{1}{\left( x_{n,k}^{(N)} - x_1^{(\alpha, n)} \right) \left( x_{n,k}^{(N)} - x_2^{(\alpha, n)} \right)} + \\
 &\quad + \frac{1}{R(n, \alpha)} \left( A_n(n-1) + \frac{B_n(n-2)(x - (2n+\alpha+1))}{(n-1)(n+\alpha+1)} \right) K_n \\
 &\quad + \frac{1}{\left( x_{n,k}^{(N)} - x_1^{(\alpha, n)} \right) \left( x_{n,k}^{(N)} - x_2^{(\alpha, n)} \right)}.
 \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{R(n, \alpha)} \left( -n + \frac{B_n(n-2)}{(n-1)(n+\alpha+1)} \right) g_1(x; n) = \\
 &\frac{(n-1)^2(n+\alpha+1)^2}{K_n B_n(n-1)(n+\alpha+1) + B_n^2} \left( -n + \frac{B_n(n-2)}{(n-1)(n+\alpha+1)} \right) \left( A_n + \frac{(x - (2n+\alpha+1))B_n}{(n-1)(n+\alpha+1)} \right) \\
 &= \left( \frac{B_n^2(n-2) - n(n-1)(n+\alpha+1)B_n}{K_n B_n(n-1)(n+\alpha+1) + B_n^2} \right) x + \\
 &\quad + \left( \frac{B_n(n-2) - n(n-1)(n+\alpha+1)}{K_n B_n(n-1)(n+\alpha+1) + B_n^2} \right) (A_n(n-1)(n+\alpha+1) - (2n+\alpha+1)B_n).
 \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\frac{1}{R(n, \alpha)} \left( A_n(n-1) + \frac{B_n(n-2)(x - (2n+\alpha+1))}{(n-1)(n+\alpha+1)} \right) K_n =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(n-1)^2(n+\alpha+1)^2K_n}{K_nB_n(n-1)(n+\alpha+1)+B_n^2} \left( A_n(n-1) + \frac{B_n(n-2)(x-(2n+\alpha+1))}{(n-1)(n+\alpha+1)} \right) \\
= & \frac{(n-1)(n-2)(n+\alpha+1)K_n}{K_n(n-1)(n+\alpha+1)+B_n} x + \frac{(n-1)^3(n+\alpha+1)^2K_nA_n}{K_nB_n(n-1)(n+\alpha+1)+B_n^2} - \\
& \frac{(n-1)(n-2)(n+\alpha+1)(2n+\alpha+1)K_n}{K_n(n-1)(n+\alpha+1)+B_n}.
\end{aligned}$$

Si denotamos

$$\frac{1}{R(n,\alpha)} \left( -n + \frac{B_n(n-2)}{(n-1)(n+\alpha+1)} \right) g_1(x,n) = \kappa(n,\alpha)x + \lambda(n,\alpha)$$

y

$$\frac{1}{R(n,\alpha)} \left( A_n(n-1) + \frac{B_n(n-2)(x-(2n+\alpha+1))}{(n-1)(n+\alpha+1)} \right) K_n = \nu(n,\alpha)x + \xi(n,\alpha)$$

donde

$$\begin{aligned}
\kappa(n,\alpha) &= \frac{B_n^2(n-2) - n(n-1)(n+\alpha+1)B_n}{K_nB_n(n-1)(n+\alpha+1) + B_n^2}, \\
\lambda(n,\alpha) &= \left( \frac{B_n(n-2) - n(n-1)(n+\alpha+1)}{K_nB_n(n-1)(n+\alpha+1) + B_n^2} \right) \times \\
& \quad (A_n(n-1)(n+\alpha+1) - (2n+\alpha+1)B_n), \\
\nu(n,\alpha) &= \frac{(n-1)(n-2)(n+\alpha+1)K_n}{K_n(n-1)(n+\alpha+1) + B_n}, \\
\xi(n,\alpha) &= \frac{(n-1)^3(n+\alpha+1)^2K_nA_n}{K_nB_n(n-1)(n+\alpha+1) + B_n^2} \\
& \quad - \frac{(n-1)(n-2)(n+\alpha+1)(2n+\alpha+1)K_n}{K_n(n-1)(n+\alpha+1) + B_n},
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{B(x_{n,k}^{(N)}; n)}{A(x_{n,k}^{(N)}; n)} &= \frac{\alpha + 3}{x_{n,k}^{(N)}} - 1 + \frac{\kappa(n, \alpha)x_{n,k}^{(N)} + \lambda(n, \alpha)}{(x_{n,k}^{(N)} - x_1^{(\alpha, n)})(x_{n,k}^{(N)} - x_2^{(\alpha, n)})} + \frac{\nu(n, \alpha)x_{n,k}^{(N)} + \xi(n, \alpha)}{(x_{n,k}^{(N)} - x_1^{(\alpha, n)})(x_{n,k}^{(N)} - x_2^{(\alpha, n)})} \\
&= \frac{\alpha + 3}{x_{n,k}^{(N)}} - 1 + \frac{\kappa(n, \alpha)x_1^{(\alpha, n)} + \lambda(n, \alpha)}{x_1^{(\alpha, n)} - x_2^{(\alpha, n)}} + \frac{\kappa(n, \alpha)x_2^{(\alpha, n)} + \lambda(n, \alpha)}{x_2^{(\alpha, n)} - x_1^{(\alpha, n)}} + \\
&\quad \frac{\nu(n, \alpha)x_1^{(\alpha, n)} + \xi(n, \alpha)}{x_1^{(\alpha, n)} - x_2^{(\alpha, n)}} + \frac{\nu(n, \alpha)x_2^{(\alpha, n)} + \xi(n, \alpha)}{x_2^{(\alpha, n)} - x_1^{(\alpha, n)}} \\
&\quad \frac{\kappa(n, \alpha)x_1^{(\alpha, n)} + \lambda(n, \alpha) + \nu(n, \alpha)x_1^{(\alpha, n)} + \xi(n, \alpha)}{(x_{n,k}^{(N)} - x_1^{(\alpha, n)})} + \frac{\kappa(n, \alpha)x_2^{(\alpha, n)} + \lambda(n, \alpha) + \nu(n, \alpha)x_2^{(\alpha, n)} + \xi(n, \alpha)}{(x_{n,k}^{(N)} - x_2^{(\alpha, n)})} \\
&= \frac{\alpha + 3}{x_{n,k}^{(N)}} - 1 + \frac{x_1^{(\alpha, n)} - x_2^{(\alpha, n)}}{x_{n,k}^{(N)} - x_1^{(\alpha, n)}} \\
&\quad + \frac{\kappa(n, \alpha)x_2^{(\alpha, n)} + \lambda(n, \alpha) + \nu(n, \alpha)x_2^{(\alpha, n)} + \xi(n, \alpha)}{x_2^{(\alpha, n)} - x_1^{(\alpha, n)}} \\
&\quad + \frac{\kappa(n, \alpha)x_1^{(\alpha, n)} + \lambda(n, \alpha) + \nu(n, \alpha)x_1^{(\alpha, n)} + \xi(n, \alpha)}{x_{n,k}^{(N)} - x_2^{(\alpha, n)}}.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{(\bar{L}_n^a(x_{n,k}^{(N)}))''}{(\bar{L}_n^a(x_{n,k}^{(N)}))'} = -2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{1}{x_{n,j}^{(N)} - x_{n,k}^{(N)}} = \frac{B(x_{n,k}^{(N)}; n)}{A(x_{n,k}^{(N)}; n)}$$

y usando la última expresión, obtenemos

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{1}{x_{n,j}^{(N)} - x_{n,k}^{(N)}} - \frac{\alpha + 3 - x_{n,k}^{(M)}}{2x_{n,k}^{(N)}} - \frac{\kappa(n, \alpha)x_1^{(\alpha, n)} + \lambda(n, \alpha) + \nu(n, \alpha)x_1^{(\alpha, n)} + \xi(n, \alpha)}{x_1^{(\alpha, n)} - x_2^{(\alpha, n)}} \\
&\quad - \frac{\kappa(n, \alpha)x_2^{(\alpha, n)} + \lambda(n, \alpha) + \nu(n, \alpha)x_2^{(\alpha, n)} + \xi(n, \alpha)}{x_2^{(\alpha, n)} - x_1^{(\alpha, n)}} \\
&\quad - \frac{\kappa(n, \alpha)x_1^{(\alpha, n)} + \lambda(n, \alpha) + \nu(n, \alpha)x_1^{(\alpha, n)} + \xi(n, \alpha)}{2(x_{n,k}^{(N)} - x_2^{(\alpha, n)})}.
\end{aligned}$$

Si denotamos

$$C_n = \frac{\kappa(n, \alpha)x_1^{(\alpha, n)} + \lambda(n, \alpha) + \nu(n, \alpha)x_1^{(\alpha, n)} + \xi(n, \alpha)}{x_1^{(\alpha, n)} - x_2^{(\alpha, n)}}$$

$$D_n = \frac{\kappa(n, \alpha)x_2^{(\alpha, n)} + \lambda(n, \alpha) + \nu(n, \alpha)x_2^{(\alpha, n)} + \xi(n, \alpha)}{x_2^{(\alpha, n)} - x_1^{(\alpha, n)}}$$

entonces

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{1}{x_{n,j}^{(N)} - x_{n,k}^{(N)}} - \frac{\alpha + 3 - x_{n,k}^{(N)}}{2x_{n,k}^{(N)}} + \frac{C_n}{2(x_{n,k}^{(N)} - x_1^{(\alpha, n)})} + \frac{D_n}{2(x_{n,k}^{(N)} - x_2^{(\alpha, n)})} = 0. \quad (5.15)$$

Por lo tanto, podemos realizar la siguiente interpretación electrostática acerca de la distribución de los ceros de  $\tilde{L}_n^\alpha$ . Si consideramos  $n$  cargas localizadas en la recta real, sometidas a una interacción logarítmica y con un campo externo

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2} \ln(x^{\alpha+3} e^{-x}) + \frac{C_n}{2} \ln|x - x_1^{(\alpha, n)}| + \frac{D_n}{2} \ln|x - x_2^{(\alpha, n)}|,$$

(5.15) significa que el gradiente de la energía total

$$E(X) = - \sum_{1 \leq k < j \leq n} \ln|x_k - x_j| + \sum_{j=1}^n \varphi(x_j)$$

con  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  se anula en  $(x_{n,1}^{(M)}, x_{n,2}^{(M)}, \dots, x_{n,n}^{(M)})$ . En otras palabras es un punto crítico. En [50], [54], y [74] se lleva a cabo un estudio más general de la interpretación electrostática de polinomios ortogonales estándar.

Los ceros de  $R(n, \alpha)x^2 + S(n, \alpha)x + T(n, \alpha)$ , que hemos denotado mediante  $x_1^{(\alpha, n)}$  y  $x_2^{(\alpha, n)}$ , juegan un papel muy importante en la interpretación electrostática, por lo que, usando Maple, calculamos el siguiente límite que nos ilustra su comportamiento cuando  $N$  tiende a infinito.

$$\begin{aligned}
& \lim_{N \rightarrow \infty} R(n, \alpha)x^2 + S(n, \alpha)x + T(n, \alpha) \\
= & \frac{1}{\alpha + 3} (-18\alpha - 42) - 4\alpha^2 - 24\alpha + \frac{1}{\alpha + 3} (60\alpha + 8\alpha^2 + 100) + \frac{1}{\alpha + 3} (10x^2 + 4x^2\alpha) \\
& + \frac{1}{\alpha + 3} (-156x - 98x\alpha - 14x\alpha^2) + \frac{1}{\alpha + 3} (-114\alpha - 50\alpha^2 - 6\alpha^3 - 70) \\
& + \frac{1}{\alpha + 3} (160\alpha + 68\alpha^2 + 8\alpha^3 + 100) - 32 \\
= & \left[ x - \frac{1}{2\alpha + 5} \left( \frac{49}{2}\alpha + \frac{7}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2} \sqrt{7836\alpha + 3657\alpha^2 + 746\alpha^3 + 57\alpha^4 + 6164 + 39} \right) \right] \times \\
& \left[ x - \frac{1}{2\alpha + 5} \left( \frac{49}{2}\alpha + \frac{7}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2} \sqrt{7836\alpha + 3657\alpha^2 + 746\alpha^3 + 57\alpha^4 + 6164 + 39} \right) \right].
\end{aligned}$$

## 5.6. Representación Hipergeométrica

En esta sección presentamos una expresión de los polinomios ortogonales de tipo Laguerre-Sobolev como una función hipergeométrica multiplicada por un factor constante.

La sustitución de (1.22) en (5.6) conduce a

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_n^\alpha(x) &= (-1)^n(\alpha+3)_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_k}{(\alpha+3)_k} \frac{x^k}{k!} + \\
&\quad + A_n(-1)^{n-1}(\alpha+3)_{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n+1)_k}{(\alpha+3)_k} \frac{x^k}{k!} \\
&\quad + B_n(-1)^{n-2}(\alpha+3)_{n-2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n+2)_k}{(\alpha+3)_k} \frac{x^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(\alpha+3)_n(-n)_k}{(\alpha+3)_k} \times \\
&\quad \times \left[ 1 - \frac{A_n(-n+k)}{(n+\alpha+2)(-n)} + \frac{B_n(-n+k)(-n+k+1)}{(n+\alpha+2)(n+\alpha+1)(-n)(-n+1)} \right] \\
&= (-1)^n(\alpha+3)_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_k}{(\alpha+3)_k} \times \\
&\quad \times \left[ 1 - \frac{A_n(-n+k)}{(n+\alpha+2)(-n)} + \frac{B_n(-n+k)(-n+k+1)}{(n+\alpha+2)(n+\alpha+1)(-n)(-n+1)} \right].
\end{aligned}$$

Sea  $\pi_2(k)$  el polinomio de grado 2 en  $k$  dado por

$$\begin{aligned}
\pi_2(k) &= 1 - \frac{A_n(-n+k)}{(n+\alpha+2)(-n)} + \frac{B_n(-n+k)(-n+k+1)}{(n+\alpha+2)(n+\alpha+1)(-n)(-n+1)} \\
&= D_n(k+c_0)(k+c_1)
\end{aligned}$$

donde

$$D_n = \frac{B_n}{(n+\alpha+2)(n+\alpha+1)(-n)(-n+1)},$$

entonces

$$\tilde{L}_n^\alpha(x) = (-1)^n(\alpha+3)_n D_n c_0 c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_k (1+c_0)_k (1+c_1)_k}{(c_0)_k (c_1)_k (\alpha+3)_k} \frac{x^k}{k!}.$$

Por tanto tenemos

**Teorema 26** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\tilde{L}_n^\alpha(x) = (-1)^n(\alpha+3)_n D_n c_0 c_1 {}_3F_3(-n, 1+c_0, 1+c_1; c_0, c_1, \alpha+3; x). \quad (5.16)$$

## 5.7. Comportamiento asintótico

En primer lugar, estudiaremos el comportamiento asintótico de las constantes  $A_n$  y  $B_n$  de la ecuación (5.6). Realizando algunos cálculos tediosos, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{A_n}{n} &= \frac{2(n-2)!\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha+4) + N\Gamma(n+\alpha+1)(2n(\alpha+2) + \alpha^2 + 4 + 3\alpha)}{(n-2)!\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha+4) + N\Gamma(n+\alpha+1)(n(\alpha+2) - (\alpha+1))} \\ &= 2 + \frac{\alpha+3}{n} + \frac{(\alpha+3)(\alpha+1)N\Gamma(n+\alpha+1) - (\alpha+3)(n-2)!\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha+4)}{nN\Gamma(n+\alpha+1)(n(\alpha+2) - (\alpha+1)) + (n-2)!\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha+4)}. \end{aligned}$$

Así pues,

$$\frac{A_n}{n} = 2 + \frac{\alpha+3}{n} + \frac{(\alpha+1)(\alpha+3)}{(\alpha+2)n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right). \quad (5.17)$$

Si hacemos un análisis similar para  $B_n$ , tenemos

$$\begin{aligned} \frac{B_n}{n(n-1)} &= \frac{(n-2)!\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha+4) + \frac{N}{n-1}\Gamma(n+\alpha+1)(n^2\alpha + 2n^2 + n(\alpha^2 + 3\alpha + 3) + (\alpha+1))}{(n-2)!\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha+4) + N\Gamma(n+\alpha+1)(n(\alpha+2) - (\alpha+1))} \\ &= \frac{(n-1)!\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha+4) + N\Gamma(n+\alpha+1)(n^2\alpha + 2n^2 + n(\alpha^2 + 3\alpha + 3) + (\alpha+1))}{(n-1)!\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha+4) + N\Gamma(n+\alpha+1)(n(\alpha+2) - (\alpha+1))(n-1)} \\ &= 1 + \frac{\alpha+3}{n} + \frac{(\alpha+3)(2\alpha+3)}{(\alpha+2)n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{B_n}{n(n-1)} = 1 + \frac{\alpha+3}{n} + \frac{(\alpha+3)(2\alpha+3)}{(\alpha+2)n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right). \quad (5.18)$$

Usando (5.17) y (5.18) podemos concluir

### Proposición 20

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{n} = 2 \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n}{n(n-1)} = 1, \quad (5.19)$$

En [18], los autores analizan el comportamiento asintótico de los polinomios ortogonales de tipo Laguerre-Sobolev con coeficiente principal  $\frac{(-1)^n}{n!}$ , que denotaron por  $L_n^{(\alpha, M, N)}(x)$ . Nosotros realizaremos un estudio alternativo de estos resultados para  $\widetilde{L}_n^\alpha(x)$  cuando  $M = 0$ . Si denotamos  $\widehat{L}_n^\alpha(x)$  los polinomios ortogonales de Laguerre con coeficiente principal  $\frac{(-1)^n}{n!}$  y  $\widetilde{L}_n^\alpha(x)$  los polinomios ortogonales de tipo Laguerre-Sobolev con el mismo coeficiente principal y teniendo en cuenta (5.6), deducimos

$$\widetilde{L}_n^\alpha(x) = \widehat{L}_n^{\alpha+2}(x) - \frac{A_n}{n} \widehat{L}_{n-1}^{\alpha+2}(x) + \frac{B_n}{n(n-1)} \widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(x), \quad (5.20)$$

Usando (5.17) y (5.18) obtenemos

$$\begin{aligned} \widetilde{L}_n^\alpha(x) &= \widehat{L}_n^{\alpha+2}(x) - \left(2 + \frac{\alpha+3}{n}\right) \widehat{L}_{n-1}^{\alpha+2}(x) + \left(1 + \frac{\alpha+3}{n}\right) \widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(x) \\ &\quad - \widehat{L}_{n-1}^{\alpha+2}(x) \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) + \widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(x) \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \widehat{L}_n^\alpha(x) - \frac{\alpha+3}{n} \widehat{L}_{n-1}^{\alpha+2}(x) + \frac{\alpha+3}{n} \widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(x) \\ &\quad - \widehat{L}_{n-1}^{\alpha+2}(x) \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) + \widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(x) \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Dividiendo en ambos miembros de la anterior expresión por  $\widehat{L}_n^\alpha(x)$

$$\begin{aligned} \frac{\widetilde{L}_n^\alpha(x)}{\widehat{L}_n^\alpha(x)} &= \\ &= \frac{\widehat{L}_n^\alpha(x)}{\widehat{L}_n^\alpha(x)} = 1 - \frac{\alpha+3}{n} \frac{\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+2}(x)}{\widehat{L}_n^\alpha(x)} + \frac{\alpha+3}{n} \frac{\widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(x)}{\widehat{L}_n^\alpha(x)} - \frac{\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+2}(x)}{\widehat{L}_n^\alpha(x)} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{\widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(x)}{\widehat{L}_n^\alpha(x)} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Pero, usando (1.31) tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widetilde{L}_n^\alpha(x)}{\widehat{L}_n^\alpha(x)} = 1$$

de donde se deduce la fórmula asintótica relativa exterior

**Proposición 21**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widetilde{L}_n^\alpha(x)}{L_n^\alpha(x)} = 1 \quad (5.22)$$

uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ .

Es bien conocido que (ver [18] y [95])

$$\frac{\widehat{L}_n^\alpha(x)}{n^{\alpha/2}} = e^{x/2} x^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{nx}) + \mathcal{O}(n^{-3/4}) \quad (5.23)$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $(0, \infty)$ . Vamos a usar esta expresión para deducir nuestro siguiente resultado.

Si usamos (5.17) y (5.18) en (5.20) se tiene

$$\begin{aligned} \widetilde{L}_n^\alpha(x) &= \widehat{L}_n^\alpha(x) - \frac{\alpha + 3}{n} \widehat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x) - \frac{(\alpha + 3)}{(\alpha + 2)n^2} \left( (\alpha + 1) \widehat{L}_{n-1}^{\alpha+2}(x) - (2\alpha + 3) \widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(x) \right) \\ &\quad - \widehat{L}_{n-1}^{\alpha+2}(x) \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) + \widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(x) \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

Dividiendo en ambos miembros de dicha expresión por  $n^{\alpha/2}$

$$\begin{aligned} \frac{\widetilde{L}_n^\alpha(x)}{n^{\alpha/2}} &= \frac{\widehat{L}_n^\alpha(x)}{n^{\alpha/2}} - \frac{\alpha + 3}{n^{1/2}} \frac{\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x)}{n^{(\alpha+1)/2}} - \frac{(\alpha + 3)}{(\alpha + 2)n} \left( (\alpha + 1) \frac{\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+2}(x)}{n^{(\alpha+2)/2}} - (2\alpha + 3) \frac{\widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(x)}{n^{(\alpha+2)/2}} \right) \\ &\quad - \frac{\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+2}(x)}{n^{(\alpha+2)/2}} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{\widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(x)}{n^{(\alpha+2)/2}} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

y, usando (5.23), deducimos la asintótica fuerte exterior

**Proposición 22** Para  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\widetilde{L}_n^\alpha(x)}{n^{\alpha/2}} &= e^{x/2} x^{-\alpha/2} \left( J_\alpha(2\sqrt{nx}) - \frac{\alpha + 3}{\sqrt{nx}} J_{\alpha+1}(2\sqrt{(n-1)x}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\alpha + 3)}{(\alpha + 2)n} \left[ (\alpha + 1) J_{\alpha+2}(2\sqrt{(n-1)x}) - (2\alpha + 3) J_{\alpha+2}(2\sqrt{(n-2)x}) \right] \right) \\ &\quad + \mathcal{O}(n^{-3/4}) \quad (5.24) \end{aligned}$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $(0, \infty)$ .

Para poder encontrar una fórmula asintótica relativa con reescalamiento, usaremos (5.20) y evaluamos  $\widetilde{L}_n^\alpha(nx)$  de modo que

$$\widetilde{L}_n^\alpha(nx) = \widehat{L}_n^{\alpha+2}(nx) - \frac{A_n}{n} \widehat{L}_{n-1}^{\alpha+2}(nx) + \frac{B_n}{n(n-1)} \widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(nx).$$

Ahora bien, usando (5.17) y (5.18)

$$\begin{aligned} \widetilde{L}_n^\alpha(nx) &= \widehat{L}_n^\alpha(nx) - \frac{(\alpha+3)}{n} \widehat{L}_{n-1}^{\alpha+2}(nx) + \frac{(\alpha+3)}{n} \widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(nx) + \\ &\quad - \widehat{L}_{n-1}^{\alpha+2}(nx) \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) + \widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(nx) \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned} \frac{\widetilde{L}_n^\alpha(nx)}{\widehat{L}_n^\alpha(nx)} &= 1 - \frac{(\alpha+3)}{n} \frac{\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+2}(nx)}{\widehat{L}_n^\alpha(nx)} + \frac{(\alpha+3)}{n} \frac{\widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(nx)}{\widehat{L}_n^\alpha(nx)} + \\ &\quad - \frac{\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+2}(nx)}{\widehat{L}_n^\alpha(nx)} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{\widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(nx)}{\widehat{L}_n^\alpha(nx)} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Queremos encontrar el límite del primer miembro en la última identidad cuando  $n \rightarrow \infty$ . Usando la asintótica relativa reescalada ([18] y [95])

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widehat{L}_{n-1}^\alpha(nx)}{\widehat{L}_n^\alpha(nx)} = -\frac{1}{\varphi((x-2)/2)} \quad (5.26)$$

que se verifica uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus [0, 4]$ , donde  $\varphi$  es la función que aplica  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$  en el exterior del círculo unidad que viene dada por

$$\varphi(x) = x + \sqrt{x^2 - 1},$$

R. Alvarez-Nodarse y J. J. Moreno-Balcázar determinaron en [18], que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widehat{L}_n^\alpha(nx)}{\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+2}(nx)} = -\frac{(\varphi((x-2)/2) + 1)^2}{\varphi(x-2)/2}. \quad (5.27)$$

Por lo tanto, usando (5.26) y (5.27) podemos concluir

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(nx)}{\widehat{L}_n^\alpha(nx)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(nx) \widehat{L}_{n-1}^{\alpha+2}(nx)}{\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+2}(nx) \widehat{L}_n^\alpha(nx)} \\
&= \left( -\frac{1}{\varphi((x-2)/2)} \right) \left( -\frac{\varphi((x-2)/2)}{(\varphi((x-2)/2) + 1)^2} \right) \\
&= \frac{1}{(\varphi((x-2)/2) + 1)^2}
\end{aligned}$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus [0, 4]$ . Así pues, de (5.25) obtenemos la asintótica relativa para los polinomios ortogonales de tipo Laguerre-Sobolev escalados.

### Proposición 23

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widetilde{L}_n^\alpha(nx)}{\widehat{L}_n^\alpha(nx)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widetilde{L}_n^\alpha(nx)}{L_n^\alpha(nx)} = 1 \quad (5.28)$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus [0, 4]$ .

Otro resultado importante se obtiene a partir de la fórmula Mehler-Heine (1.30). Por tanto, si sustituímos (5.17) y (5.18) en (5.20)

$$\begin{aligned}
\widetilde{L}_n^\alpha(x) &= \widehat{L}_n^\alpha(x) - \frac{\alpha+3}{n} \left( \widehat{L}_{n-1}^{\alpha+2}(x) - \widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(x) \right) + \\
&\quad - \frac{(\alpha+1)(\alpha+3)}{(\alpha+2)n^2} \widehat{L}_{n-1}^{\alpha+2}(x) + \frac{(\alpha+3)(2\alpha+3)}{(\alpha+2)n^2} \widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(x) \\
&\quad - \widehat{L}_{n-1}^{\alpha+2}(x) \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) + \widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(x) \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&= \widehat{L}_n^\alpha(x) - \frac{\alpha+3}{n} \widehat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x) + \frac{(\alpha+3)}{(\alpha+2)n^2} \left( (2\alpha+3) \widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(x) - (\alpha+1) \widehat{L}_{n-1}^{\alpha+2}(x) \right) \\
&\quad - \widehat{L}_{n-1}^{\alpha+2}(x) \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) + \widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(x) \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

Realizando el cambio de variable de  $x$  por  $x/n$  en la anterior expresión y dividiendo en ambos miembros por  $n^\alpha$

$$\frac{\widetilde{L}_n^\alpha(x/n)}{n^\alpha} =$$

$$\begin{aligned} & \frac{\widehat{L}_n^\alpha(x/n)}{n^\alpha} - (\alpha + 3) \frac{\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x/n)}{n^{\alpha+1}} + \frac{(\alpha + 3)}{(\alpha + 2)} \left( (2\alpha + 3) \frac{\widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(x/n)}{n^{\alpha+2}} - (\alpha + 1) \frac{\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+2}(x/n)}{n^{\alpha+2}} \right) \\ & - \frac{\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+2}(x/n)}{n^{\alpha+2}} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{\widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(x/n)}{n^{\alpha+2}} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Calculando el límite cuando  $n$  tiende a  $\infty$  y usando (1.30)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widehat{L}_n^\alpha(x/n)}{n^\alpha} &= x^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{x}) - (\alpha + 3) x^{-(\alpha+1)/2} J_{\alpha+1}(2\sqrt{x}) \\ &+ \frac{(\alpha + 3)}{(\alpha + 2)} \left( (2\alpha + 3) x^{-(\alpha+2)/2} J_{\alpha+2}(2\sqrt{x}) - (\alpha + 1) x^{-(\alpha+2)/2} J_{\alpha+2}(2\sqrt{x}) \right) \end{aligned}$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $\mathbb{C}$ . Entonces, se obtiene una fórmula tipo Mehler-Heine

**Proposición 24**

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widehat{L}_n^\alpha(x/n)}{n^\alpha} \\ &= x^{-\alpha/2} \left[ J_\alpha(2\sqrt{x}) - \frac{(\alpha + 3)}{\sqrt{x}} J_{\alpha+1}(2\sqrt{x}) + \frac{(\alpha + 3)}{x} J_{\alpha+2}(2\sqrt{x}) \right] \end{aligned} \quad (5.29)$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $\mathbb{C}$ .

Esta fórmula coincide con la obtenida por R. Alvarez-Nodarse y J. J. Moreno Balcázar en [18], de forma alternativa, utilizando la conocida relación de recurrencia para las funciones de Bessel

$$J_\alpha(2\sqrt{x}) + J_{\alpha+2}(2\sqrt{x}) = \frac{\alpha + 1}{\sqrt{x}} J_{\alpha+1}(2\sqrt{x}), \quad (5.30)$$

por lo que

$$\begin{aligned} & J_\alpha(2\sqrt{x}) - \frac{\alpha + 3}{\alpha + 1} (J_\alpha(2\sqrt{x}) + J_{\alpha+2}(2\sqrt{x})) + \frac{\alpha + 3}{x} J_{\alpha+2}(2\sqrt{x}) \\ &= -\frac{2}{\alpha + 1} J_\alpha(2\sqrt{x}) + (\alpha + 3) \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\alpha + 1} \right) J_{\alpha+2}(2\sqrt{x}). \end{aligned}$$

que es la expresión que aparece en [18] y [75].

Finalmente, mostraremos la manera cómo se comporta la norma de los polinomios ortogonales tipo Laguerre Sobolev. Dado que de (5.6)

$$\frac{\|\tilde{L}_n^\alpha\|_S^2}{\|L_{n-2}^{\alpha+2}\|_{\alpha+2}^2} = B_n \quad (5.31)$$

entonces

$$\frac{\|\tilde{L}_n^\alpha\|_S^2}{n(n-1)\|L_n^\alpha\|_\alpha^2} \frac{\|L_n^\alpha\|_\alpha^2}{\|L_{n-2}^{\alpha+2}\|_{\alpha+2}^2} = \frac{B_n}{n(n-1)} \rightarrow 1.$$

Por tanto,

$$\frac{\|\tilde{L}_n^\alpha\|_S^2}{\|L_n^\alpha\|_\alpha^2} \rightarrow 1.$$

Pero, dado que

$$n^{-1} \|L_n^\alpha\|_\alpha^{1/n} \cong e^{-1}, \quad (5.32)$$

se sigue

**Proposición 25**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \|\tilde{L}_n^\alpha\|_S^{1/n} = e^{-1}. \quad (5.33)$$



---

---

# CAPÍTULO 6

---

## Polinomios ortogonales de tipo Laguerre Sobolev. Caso no diagonal

### 6.1. Introducción

En este capítulo presentamos una generalización de los polinomios de tipo Laguerre y de tipo Laguerre-Sobolev estudiados en los capítulos 2 y 5. Esta generalización surgió al ver la relación existente entre el trabajo presentado por M. Alfaro en el IWOPA08 en Leganés, que es un resumen de [8], y los resultados de esta Memoria. Específicamente, en el trabajo de M. Alfaro se presenta una generalización de los polinomios de tipo Hermite-Sobolev y, a continuación, se analiza su comportamiento asintótico.

En esta parte de la tesis presentamos los polinomios ortogonales mónicos de tipo Laguerre-Sobolev  $\{\tilde{L}_n^\alpha\}_{n \geq 0}$  ortogonales respecto al producto escalar (6.1). Realizamos un estudio del comportamiento asintótico de los mismos, en particular, la correspondiente fórmula de Mehler-Heine y la asintótica exterior del cociente. Hallamos una fórmula de conexión entre estos polinomios y la sucesión de polinomios de Laguerre  $\{L_n^{\alpha+2}\}_{n \geq 0}$ , una fórmula de recurrencia a cinco términos así como la ecuación diferencial holonómica que satisfacen estos polinomios. Finalmente, consideramos un caso particular de (6.1), para  $\lambda = 0$ , estableciendo una relación entre los polinomios de Tipo Laguerre-Sobolev y una clase de los polinomios generalizados de Hermite definidos en [8]. Esta relación viene dada por el hecho que la sucesión de polinomios  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  ortogonales respecto a (6.29), satis-

facen  $P_{2n}(x) = \widetilde{L}_n^{\alpha-1/2}(x^2)$  y  $P_{2n+1}(x) = xL_n^{\alpha+1/2}(x^2)$ .

## 6.2. Comportamiento Asintótico

Sea  $p$  un polinomio con coeficientes reales. Denotamos

$$\mathbb{P}(x) = \begin{pmatrix} p(x) \\ p'(x) \end{pmatrix}.$$

Sean  $p$  y  $q$  polinomios con coeficientes reales. Definimos el producto escalar de tipo Sobolev

$$\langle p, q \rangle_S = \int_0^\infty p(x)q(x)x^\alpha e^{-x} dx + \mathbb{P}(0)^t A \mathbb{Q}(0), \alpha > -1, \quad (6.1)$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} M_0 & \lambda \\ \lambda & M_1 \end{pmatrix},$$

$M_0, M_1 \geq 0$ ,  $A$  una matriz semidefinida positiva, esto es  $\text{Det}A = |A| \geq 0$ . Observemos que  $\lambda = 0$  cuando  $M_0 = 0, M_1 > 0$  o,  $M_1 = 0, M_0 > 0$ .

Recordemos que  $\langle p, q \rangle_S$  es un producto escalar en el espacio vectorial  $\mathbb{P}$  de polinomios con coeficientes reales en el sentido que se satisfacen las siguientes propiedades

1.  $\langle \lambda p + \mu q, r \rangle_S = \lambda \langle p, r \rangle_S + \mu \langle q, r \rangle_S$ , para  $p, q, r \in \mathbb{P}$  y  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .
2.  $\langle p, q \rangle_S = \langle q, p \rangle_S$  para  $p, q \in \mathbb{P}$ .
3.  $\langle p, p \rangle_S > 0$ , para cada  $p \in \mathbb{P} \setminus \{0\}$ .

Antes de iniciar el estudio del comportamiento asintótico de los polinomios  $\widetilde{L}_n^\alpha$ , necesitaremos hacer uso de la siguiente proposición. La demostración de (6.2) y (6.3) es consecuencia de sustituir (1.23) y (1.25) en (1.27) y (5.4). Para obtener (6.4) derivamos (5.4) y nuevamente usamos (1.23) y (1.25).

**Proposición 26** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$K_{n-1}(0, 0) = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{(n - 1)! \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\alpha + 2)}, \quad (6.2)$$

$$K_{n-1}^{(1,0)}(0,0) = -\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{(n-2)!\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+3)} = -\frac{n-1}{\alpha+2}K_{n-1}(0,0), \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} K_{n-1}^{(1,1)}(0,0) &= \frac{\Gamma(n+\alpha+1)(n(\alpha+2)-(\alpha+1))}{(n-2)!\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha+4)} = \\ &= \frac{(n(\alpha+2)-(\alpha+1))(n-1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}K_{n-1}(0,0). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Sea  $\{\tilde{L}_n^\alpha\}_{n \geq 0}$  la sucesión de polinomios ortogonales respecto al producto escalar (6.1). Consideremos el desarrollo de Fourier de  $\tilde{L}_n^\alpha$  en términos de la sucesión de polinomios ortogonales mónicos de Laguerre  $\{L_n^\alpha\}_{n \geq 0}$

$$\tilde{L}_n^\alpha(x) = L_n^\alpha(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_{n,k} L_k^\alpha(x),$$

con

$$a_{n,k} = \frac{\langle \tilde{L}_n^\alpha(x), L_k^\alpha(x) \rangle_\alpha}{\|L_k^\alpha\|_\alpha^2}, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

De (6.1), tenemos

$$a_{n,k} = -\frac{(\tilde{\mathbb{L}}_n^\alpha(0))^t A \mathbb{L}_k^\alpha(0)}{\|L_k^\alpha\|_\alpha^2}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \tilde{L}_n^\alpha(x) &= L_n^\alpha(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\tilde{\mathbb{L}}_n^\alpha(0))^t A \mathbb{L}_k^\alpha(0)}{\|L_k^\alpha\|_\alpha^2} L_k^\alpha(x) \\ &= L_n^\alpha(x) - (\tilde{\mathbb{L}}_n^\alpha(0))^t A \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathbb{L}_k^\alpha(0) L_k^\alpha(x)}{\|L_k^\alpha\|_\alpha^2}, \end{aligned}$$

esto es,

$$\tilde{L}_n^\alpha(x) = L_n^\alpha(x) - (\tilde{\mathbb{L}}_n^\alpha(0))^t A \begin{pmatrix} K_{n-1}(x,0) \\ K_{n-1}^{(0,1)}(x,0) \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

Usando (6.5)

$$\begin{aligned}\widetilde{L}_n^\alpha(0) &= L_n^\alpha(0) - (\widetilde{\mathbb{L}}_n^\alpha(0))^t A \begin{pmatrix} K_{n-1}(0,0) \\ K_{n-1}^{(0,1)}(0,0) \end{pmatrix} \\ (\widetilde{L}_n^\alpha)'(0) &= (L_n^\alpha)'(0) - (\widetilde{\mathbb{L}}_n^\alpha(0))^t A \begin{pmatrix} K_{n-1}^{(1,0)}(0,0) \\ K_{n-1}^{(1,1)}(0,0) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Por tanto

$$(\widetilde{\mathbb{L}}^\alpha(0))^t = (\mathbb{L}^\alpha(0))^t - (\widetilde{\mathbb{L}}^\alpha(0))^t A \mathbb{K}_{n-1}(0,0), \quad (6.6)$$

donde

$$\mathbb{K}_{n-1}(0,0) = \begin{pmatrix} K_{n-1}(0,0) & K_{n-1}^{(1,0)}(0,0) \\ K_{n-1}^{(0,1)}(0,0) & K_{n-1}^{(1,1)}(0,0) \end{pmatrix},$$

es decir

$$(\widetilde{\mathbb{L}}^\alpha(0))^t (I + A \mathbb{K}_{n-1}(0,0)) = (\mathbb{L}^\alpha(0))^t, \quad (6.7)$$

siendo  $I$  la matriz identidad de tamaño  $2 \times 2$ . Observemos que

$$\begin{aligned}I + A \mathbb{K}_{n-1}(0,0) &= \\ &= K_{n-1}(0,0) \left[ \begin{pmatrix} \frac{1}{K_{n-1}(0,0)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{K_{n-1}(0,0)} \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} 1 & \frac{-\frac{n-1}{\alpha+2}}{(n(\alpha+2)-(\alpha+1)(n-1))} \\ -\frac{n-1}{\alpha+2} & \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} \end{pmatrix} \right] \\ &= K_{n-1}(0,0) \begin{pmatrix} G & H \\ J & K \end{pmatrix},\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}G &= \frac{1}{K_{n-1}(0,0)} + \left( M_0 + \frac{\lambda}{\alpha+2} \right) - \frac{n\lambda}{\alpha+2} \\ H &= \frac{\lambda n^2}{(\alpha+1)(\alpha+3)} - \left( \frac{M_0}{\alpha+2} + \frac{(2\alpha+3)\lambda}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} \right) n + \\ &\quad \left( \frac{M_0}{\alpha+2} + \frac{\lambda}{(\alpha+2)(\alpha+3)} \right) \\ J &= -\frac{M_1}{\alpha+2} n + \left( \lambda + \frac{M_1}{\alpha+2} \right) \\ K &= \frac{M_1 n^2}{(\alpha+1)(\alpha+3)} - \left( \frac{\lambda}{\alpha+2} + \frac{(2\alpha+3)M_1}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} \right) n + \\ &\quad \left( \frac{\lambda}{\alpha+2} + \frac{M_1}{(\alpha+2)(\alpha+3)} \right) + \frac{1}{K_{n-1}(0,0)}.\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
& |I + A\mathbb{K}_{n-1}(0)| = \\
& (K_{n-1}(0,0))^2 \left[ \frac{1}{(K_{n-1}(0,0))^2} + \frac{1}{K_{n-1}(0,0)} \operatorname{traza} \left( A \begin{pmatrix} 1 & -\frac{n-1}{\alpha+2} \\ -\frac{n-1}{\alpha+2} & \frac{(n(\alpha+2) - (\alpha+1))(n-1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} \end{pmatrix} \right) \right] \\
& + |A| \left[ \frac{(n(\alpha+2) - (\alpha+1))(n-1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} - \frac{(n-1)^2}{(\alpha+2)^2} \right] \\
& = 1 + K_{n-1}(0,0) \left( M_1 \frac{(n(\alpha+2) - (\alpha+1))(n-1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} - \frac{2\lambda}{\alpha+2} (n-1) + M_0 \right) + \\
& |A| \frac{n-1}{\alpha+2} \left( \frac{(n(\alpha+2) - (\alpha+1))}{(\alpha+1)(\alpha+3)} - \frac{n-1}{\alpha+2} \right) (K_{n-1}(0,0))^2 \\
& = 1 + K_{n-1}(0,0) \left( M_1 \frac{(n(\alpha+2) - (\alpha+1))(n-1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} - \frac{2\lambda}{\alpha+2} (n-1) + M_0 \right) + \\
& (K_{n-1}(0,0))^2 |A| \frac{n-1}{\alpha+2} \left( \frac{n}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} + \frac{1}{(\alpha+2)(\alpha+3)} \right),
\end{aligned}$$

entonces tenemos que si  $|A| > 0$

$$|I + A\mathbb{K}_{n-1}(0,0)| \sim \frac{|A| n^{2\alpha+4}}{(\alpha+1)(\alpha+2)^2(\alpha+3)}, \quad (6.8)$$

mientras que si  $|A| = 0$  y  $M_1 > 0$

$$|I + A\mathbb{K}_{n-1}(0,0)| \sim \frac{n^{\alpha+3} M_1}{(\alpha+1)(\alpha+3)}. \quad (6.9)$$

Así pues, de (6.5) y (6.7),

$$\begin{aligned}
& \tilde{L}_n^\alpha(x) = \\
& L_n^\alpha(x) - (\mathbb{L}_n^\alpha(0))^t (I + A\mathbb{K}_{n-1}(0))^{-1} A \begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n-1}(\alpha+1)}{(n-1)!\Gamma(\alpha+2)} & 0 \\ \frac{(-1)^n}{(n-2)!\Gamma(\alpha+2)} & \frac{(-1)^n}{(n-2)!\Gamma(\alpha+2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{n-1}^{\alpha+1}(x) \\ L_{n-2}^{\alpha+2}(x) \end{pmatrix} \\
& = L_n^\alpha(x) - \frac{(-1)^n}{(n-2)!\Gamma(\alpha+2)K_{n-1}(0,0)} \begin{pmatrix} (-1)^n \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} \\ (-1)^{n-1} \frac{n\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} G & H \\ J & K \end{pmatrix}^{-1} A \times \\
& \begin{pmatrix} -\frac{\alpha+1}{n-1} & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{n-1}^{\alpha+1}(x) \\ L_{n-2}^{\alpha+2}(x) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} \tilde{L}_n^\alpha(x) &= \tag{6.10} \\ &= L_n^\alpha(x) + \left( \frac{-1}{\frac{n}{\alpha+1}} \right)^t \begin{pmatrix} G & H \\ J & K \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} -(\alpha+1) & 0 \\ n-1 & n-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{n-1}^{\alpha+1}(x) \\ L_{n-2}^{\alpha+2}(x) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Además, si

$$M = \begin{pmatrix} G & H \\ J & K \end{pmatrix},$$

entonces

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} \begin{pmatrix} K & -H \\ -J & G \end{pmatrix},$$

donde  $|M|$  se puede expresar como

$$|M| = \frac{1}{(K_{n-1}(0,0))^2} |I + A\mathbb{K}_{n-1}(0,0)|.$$

Por tanto, de (6.10), realizando algunas operaciones tediosas tenemos que,

$$\begin{aligned} \tilde{L}_n^\alpha(x) &= \tag{6.11} \\ &= L_n^\alpha(x) + \frac{1}{|M|} (\tilde{A}_n n^2 + B_n n + C_n, \tilde{A}'_n n^2 + B'_n n + C'_n) \begin{pmatrix} L_{n-1}^{\alpha+1}(x) \\ L_{n-2}^{\alpha+2}(x) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{A}_n &= \frac{2|A|}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} + \frac{M_1}{(\alpha+1)K_{n-1}(0,0)} \\ B_n &= \frac{2\alpha|A|}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} - \frac{2\lambda}{K_{n-1}(0,0)} - \frac{M_1}{(\alpha+1)K_{n-1}(0,0)} \\ \tilde{A}'_n &= \frac{|A|}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{M_1}{(\alpha+1)K_{n-1}(0,0)} \\ B'_n &= \frac{\alpha|A|}{(\alpha+1)(\alpha+2)} - \frac{\lambda}{K_{n-1}(0,0)} - \frac{M_1}{(\alpha+1)K_{n-1}(0,0)}, \end{aligned}$$

$C_n$  y  $C'_n$  términos que dependen de  $M_0$ ,  $M_1$ ,  $\lambda$  y  $\alpha$ .

Si denotamos

$$\begin{aligned}\widehat{L}_n^\alpha(x) &= \frac{(-1)^n}{n!} L_n^\alpha(x) \\ \widetilde{L}_n^\alpha(x) &= \frac{(-1)^n}{n!} \widetilde{L}_n^\alpha(x),\end{aligned}$$

entonces, de (6.11)

$$\widetilde{L}_n^\alpha(x) = \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned}& \widehat{L}_n^\alpha(x) + \frac{1}{|M|} \left( \widetilde{A}_n n^2 + B_n n + C_n, \widetilde{A}'_n n^2 + B'_n n + C'_n \right) \left( \begin{array}{c} -\frac{1}{n} \widehat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x) \\ \frac{1}{n(n-1)} \widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(x) \end{array} \right) \\ &= \widehat{L}_n^\alpha(x) + \frac{1}{|M|} \left( \widetilde{A}_n n + B_n + \frac{C_n}{n}, \widetilde{A}'_n n + B'_n + \frac{C'_n}{n} \right) \left( \begin{array}{c} -\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x) \\ \frac{1}{n-1} \widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(x) \end{array} \right).\end{aligned}$$

Además, dado que

$$|M| = \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned}& \frac{1}{(K_{n-1}(0,0))^2} + \frac{1}{(K_{n-1}(0,0))} \left( \frac{M_1}{(\alpha+1)(\alpha+3)} n^2 + Rn + T \right) \\ &+ |A| \left( \frac{n^2}{(\alpha+1)(\alpha+2)^2(\alpha+3)} + R'n + T' \right),\end{aligned}$$

con  $R, T, R'$  y  $T'$  términos que dependen de  $M_0, M_1, \lambda$  y  $\alpha$ , y suponiendo que  $|A| > 0$ , se tiene

$$|M| \sim \frac{|A|}{(\alpha+1)(\alpha+2)^2(\alpha+3)} n^2.$$

Entonces

$$\widetilde{L}_n^\alpha(x) \quad (6.14)$$

$$\sim \widehat{L}_n^\alpha(x) + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)^2(\alpha+3)}{n^2 |A|} \left( \widetilde{A}_n n + B_n + \frac{C_n}{n}, \widetilde{A}'_n n + B'_n + \frac{C'_n}{n} \right) \left( \begin{array}{c} -\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x) \\ \frac{1}{n-1} \widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(x) \end{array} \right).$$

Por tanto

$$\frac{\widetilde{L}_n^\alpha(x)}{\widehat{L}_n^\alpha(x)}$$

$$\begin{aligned}
 & \sim 1 + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)^2(\alpha+3)}{n^2|A|} \left( \widetilde{A}_n n + B_n + \frac{C_n}{n}, \widetilde{A}'_n n + B'_n + \frac{C'_n}{n} \right) \begin{pmatrix} -\frac{\widetilde{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x)}{\widetilde{L}_n^\alpha(x)} \\ \frac{1}{n-1} \frac{\widetilde{L}_{n-2}^{\alpha+2}(x)}{\widetilde{L}_n^\alpha(x)} \end{pmatrix} \\
 & = 1 + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)^2(\alpha+3)}{|A|} \left( \frac{\widetilde{A}_n}{n} + \frac{B_n}{n^2} + \frac{C_n}{n^3}, \frac{\widetilde{A}'_n}{n} + \frac{B'_n}{n^2} + \frac{C'_n}{n^3} \right) \begin{pmatrix} -\frac{\widetilde{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x)}{\widetilde{L}_n^\alpha(x)} \\ \frac{1}{n-1} \frac{\widetilde{L}_{n-2}^{\alpha+2}(x)}{\widetilde{L}_n^\alpha(x)} \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

y usando (1.31), tenemos

$$\frac{\widetilde{L}_n^\alpha(x)}{L_n^\alpha(x)} = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ .

Por otra parte, si  $|A| = 0$  y  $M_1 > 0$ , de (6.12) y (6.13)

$$\begin{aligned}
 \widetilde{L}_n^\alpha(x) &= \widehat{L}_n^\alpha(x) + \frac{1}{\frac{1}{(K_{n-1}(0,0))^2} + \frac{1}{(K_{n-1}(0,0))} \left( \frac{M_1}{(\alpha+1)(\alpha+3)} n^2 + Rn + T \right)} \times \\
 & \quad \left( \widetilde{A}_n n + B_n + \frac{C_n}{n}, \widetilde{A}'_n n + B'_n + \frac{C'_n}{n} \right) \begin{pmatrix} -\widetilde{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x) \\ \frac{1}{n-1} \widetilde{L}_{n-2}^{\alpha+2}(x) \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{\widetilde{L}_n^\alpha(x)}{\widehat{L}_n^\alpha(x)} \sim 1 + \frac{(\alpha+1)(\alpha+3)K_{n-1}(0,0)}{M_1} \left( \frac{\widetilde{A}_n}{n} + \frac{B_n}{n^2} + \frac{C_n}{n^3}, \frac{\widetilde{A}'_n}{n} + \frac{B'_n}{n^2} + \frac{C'_n}{n^3} \right) \begin{pmatrix} -\frac{\widetilde{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x)}{\widetilde{L}_n^\alpha(x)} \\ \frac{1}{n-1} \frac{\widetilde{L}_{n-2}^{\alpha+2}(x)}{\widetilde{L}_n^\alpha(x)} \end{pmatrix}.$$

Como

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} K_{n-1}(0,0) \widetilde{A}_n &= \frac{M_1}{\alpha+1} \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} K_{n-1}(0,0) \widetilde{A}'_n &= \frac{M_1}{\alpha+1} \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} K_{n-1}(0,0) B_n &= -2\lambda - \frac{M_1}{\alpha+1} \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} K_{n-1}(0,0) B'_n &= -\lambda - \frac{M}{\alpha+1} \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} K_{n-1}(0,0) C_n &= L_1 \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} K_{n-1}(0,0) C'_n &= L_2,
 \end{aligned}$$

con  $L_1, L_2$  constantes que no dependen  $n$ , concluimos que

$$\frac{\widetilde{L}_n^\alpha(x)}{\widehat{L}_n^\alpha(x)} = 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ . Es decir,

**Teorema 27**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widetilde{L}_n^\alpha(x)}{\widehat{L}_n^\alpha(x)} = 1 \quad (6.15)$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ .

Ahora, vamos a hallar la correspondiente fórmula de Mehler-Heine para los polinomios ortogonales de tipo Laguerre Sobolev  $\widetilde{L}_n^\alpha(x)$ . Como antes, primero supondremos que  $|A| > 0$ . De (6.14) se tiene

$$\begin{aligned} & \frac{\widetilde{L}_n^\alpha(x/n)}{n^\alpha} \\ & \sim \frac{\widehat{L}_n^\alpha(x/n)}{n^\alpha} + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)^2(\alpha+3)}{n^{\alpha+2}|A|} \left( \widetilde{A}_n n + B_n + \frac{C_n}{n}, \widetilde{A}'_n n + B'_n + \frac{C'_n}{n} \right) \left( \frac{-\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x/n)}{\frac{1}{n-1}\widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(x/n)} \right) \\ & = \frac{\widehat{L}_n^\alpha(x/n)}{n^\alpha} + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)^2(\alpha+3)}{|A|} \left( \widetilde{A}_n + \frac{B_n}{n} + \frac{C_n}{n^2}, \widetilde{A}'_n + \frac{B'_n}{n} + \frac{C'_n}{n^2} \right) \left( \frac{-\frac{\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x/n)}{n^{\alpha+1}}}{\frac{n}{n-1} \frac{\widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(x/n)}{n^{\alpha+2}}} \right) \end{aligned}$$

asi pues,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widetilde{L}_n^\alpha(x/n)}{n^\alpha} = x^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{x}) +$$

$$\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)^2(\alpha+3)}{|A|} \left( \frac{2|A|}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}, \frac{|A|}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right) \left( \frac{x^{-(\alpha+1)/2} J_{\alpha+1}(2\sqrt{x})}{x^{-(\alpha+2)/2} J_{\alpha+2}(2\sqrt{x})} \right),$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $\mathbb{C}$ . Por tanto, el segundo miembro de la anterior expresión resulta ser

$$x^{-\alpha/2} \left( J_\alpha(2\sqrt{x}) - 2(\alpha+2)x^{-1/2} J_{\alpha+1}(2\sqrt{x}) + (\alpha+2)(\alpha+3) J_{\alpha+2}(2\sqrt{x}) \right).$$

Ahora, de la relación de recurrencia para las funciones de Bessel (5.30) tenemos

$$\begin{aligned}
& x^{-\alpha/2} \left[ J_\alpha(2\sqrt{x}) - 2(\alpha+2)x^{-1/2}J_{\alpha+1}(2\sqrt{x}) + (\alpha+2)(\alpha+3)J_{\alpha+2}(2\sqrt{x}) \right] \\
= & x^{-\alpha/2} \left[ -\frac{(\alpha+3)}{\sqrt{x}}J_{\alpha+1}(2\sqrt{x}) + \left( \frac{(\alpha+2)(\alpha+3)}{x} - 1 \right) J_{\alpha+2}(2\sqrt{x}) \right] \\
= & x^{-\alpha/2} \left[ -\frac{(\alpha+3)}{\sqrt{x}} \left( \frac{\alpha+2}{\sqrt{x}}J_{\alpha+2}(2\sqrt{x}) - J_{\alpha+3}(2\sqrt{x}) \right) + \right. \\
& \left. \left( \frac{(\alpha+2)(\alpha+3)}{x} - 1 \right) J_{\alpha+2}(2\sqrt{x}) \right] \\
= & x^{-\alpha/2} \left[ \frac{(\alpha+3)}{\sqrt{x}}J_{\alpha+3}(2\sqrt{x}) - J_{\alpha+2}(2\sqrt{x}) \right] \\
= & x^{-\alpha/2}J_{\alpha+4}(2\sqrt{x}).
\end{aligned}$$

Lo que nos lleva a enunciar el siguiente teorema

**Teorema 28** Si  $\{\widetilde{L}_n^\alpha\}_{n \geq 0}$  es la sucesión de polinomios ortogonales con respecto a (6.1) y  $|A| > 0$ . Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widetilde{L}_n^\alpha(x/n)}{n^\alpha} = x^{-\alpha/2}J_{\alpha+4}(2\sqrt{x}), \quad (6.16)$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $\mathbb{C}$ .

Observemos que este resultado coincide con el obtenido en [75] para el caso diagonal,  $M_0, M_1 > 0$ .

Vamos ahora a hallar la fórmula de Mehler-Heine en el caso en que  $|A| = 0$  y  $M_1 > 0$ . De (6.11),

$$\frac{\widetilde{L}_n^\alpha(x/n)}{n^\alpha}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\widehat{L}_n^\alpha(x/n)}{n^\alpha} + \frac{1}{\frac{1}{(K_{n-1}(0,0))^2} + \frac{1}{(K_{n-1}(0,0))}} \left( \frac{M_1}{(\alpha+1)(\alpha+3)} n^2 + Rn + T \right) \times \\
&\quad \left( \widetilde{A}_n n + B_n + \frac{C_n}{n}, \widetilde{A}'_n n + B'_n + \frac{C'_n}{n} \right) \begin{pmatrix} -n \frac{\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x/n)}{n^{\alpha+1}} \\ \frac{n}{n-1} \frac{\widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(x/n)}{n^{\alpha+2}} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\widehat{L}_n^\alpha(x/n)}{n^\alpha} + \frac{1}{\frac{1}{(K_{n-1}(0,0))^2} + \frac{1}{(K_{n-1}(0,0))}} \left( \frac{M_1}{(\alpha+1)(\alpha+3)} n^2 + Rn + T \right) \times \\
&\quad \left( -\widetilde{A}_n n^2 - B_n n - C_n, \frac{n}{n-1} (\widetilde{A}'_n n^2 + B'_n n + C'_n) \right) \begin{pmatrix} -n \frac{\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x/n)}{n^{\alpha+1}} \\ \frac{\widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(x/n)}{n^{\alpha+2}} \end{pmatrix} \\
&\rightarrow x^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{x}) + (-\alpha+3, \alpha+3) \begin{pmatrix} x^{-(\alpha+1)/2} J_{\alpha+1}(2\sqrt{x}) \\ x^{-(\alpha+2)/2} J_{\alpha+2}(2\sqrt{x}) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $\mathbb{C}$ . Por tanto, tenemos

**Teorema 29** Si  $\{\widehat{L}_n^\alpha\}_{n \geq 0}$  es la sucesión de polinomios ortogonales con respecto a (6.1) y  $|A| = 0$ ,  $M_1 > 0$ . Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widehat{L}_n^\alpha(x/n)}{n^\alpha} = x^{-\alpha/2} \left( J_\alpha(2\sqrt{x}) - \frac{\alpha+3}{\sqrt{x}} J_{\alpha+1}(2\sqrt{x}) + \frac{\alpha+3}{x} J_{\alpha+2}(2\sqrt{x}) \right), \quad (6.17)$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $\mathbb{C}$ .

Observemos que este resultado coincide con (5.29) y la fórmula obtenida en [18] que es el caso en que  $M_0 = 0$  y  $\lambda = 0$ .

Usando la definición (6.1) tenemos

$$\|\widetilde{L}_n^\alpha\|_S^2 = \|L_n^\alpha\|_\alpha^2 + \mathbb{L}^\alpha(0)' (I + A \mathbb{K}_{n-1}(0,0))^{-1} A \mathbb{L}^\alpha(0).$$

Dado que

$$\begin{vmatrix} 0 & u' \\ v & B \end{vmatrix} = -|B| u' B^{-1} v$$

donde

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned}
 \|\widetilde{L}_n^\alpha\|_S^2 &= \|L_n^\alpha\|_\alpha^2 - \frac{1}{|I + A\mathbb{K}_{n-1}(0, 0)|} \left| \begin{array}{cc} 0 & \mathbb{L}_n^\alpha(0)^t \\ A\mathbb{L}_n^\alpha(0) & I + A\mathbb{K}_{n-1}(0, 0) \end{array} \right| \\
 &= \frac{\|L_n^\alpha\|_\alpha^2}{|I + A\mathbb{K}_{n-1}(0, 0)|} \left( |I + A\mathbb{K}_{n-1}(0, 0)| + \left| \begin{array}{cc} 0 & \mathbb{L}_n^\alpha(0)^t / \|L_n^\alpha\|_\alpha^2 \\ -A\mathbb{L}_n^\alpha(0) & I + A\mathbb{K}_{n-1}(0, 0) \end{array} \right| \right) \\
 &= \frac{\|L_n^\alpha\|_\alpha^2}{|I + A\mathbb{K}_{n-1}(0, 0)|} \left| \begin{array}{cc} 1 & \mathbb{L}_n^\alpha(0)^t / \|L_n^\alpha\|_\alpha^2 \\ -A\mathbb{L}_n^\alpha(0) & I + A\mathbb{K}_{n-1}(0, 0) \end{array} \right|.
 \end{aligned}$$

Finalmente, debido a que

$$I + A\mathbb{K}_n(0, 0) = I + A\mathbb{K}_{n-1}(0, 0) + \frac{A}{\|L_n^\alpha\|_\alpha^2} \mathbb{L}_n^\alpha(0) \mathbb{L}_n^\alpha(0)^t,$$

entonces

$$\frac{\|\widetilde{L}_n^\alpha\|_S^2}{\|L_n^\alpha\|_\alpha^2} = \frac{|I + A\mathbb{K}_n(0, 0)|}{|I + A\mathbb{K}_{n-1}(0, 0)|}. \quad (6.18)$$

En conclusión, usando (6.18), (6.8) y (6.9)

**Proposición 27** Si  $\{\widetilde{L}_n^\alpha\}_{n \geq 0}$  es la sucesión de polinomios ortogonales con respecto a (6.1). Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|\widetilde{L}_n^\alpha\|_S^2}{\|L_n^\alpha\|_\alpha^2} = 1.$$

### 6.3. Fórmula de conexión

En esta sección vamos a encontrar una relación entre la sucesión de polinomios ortogonales de tipo Laguerre Sobolev  $\{\widetilde{L}_n^\alpha\}_{n \geq 0}$  y una sucesión de polinomios de Laguerre. Sustituyendo (1.27) y (5.4) en (6.5) tenemos

$$\begin{aligned}
 \widetilde{L}_n^\alpha(x) &= L_n^\alpha(x) - (\widetilde{\mathbb{L}}_n^\alpha(0))^t A \begin{pmatrix} K_{n-1}(x, 0) \\ K_{n-1}^{(0,1)}(x, 0) \end{pmatrix} \\
 &= L_n^\alpha(x) - (\widetilde{\mathbb{L}}_n^\alpha(0))^t A \begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)! \Gamma(\alpha+1)} L_{n-1}^{\alpha+1}(x) \\ \frac{(-1)^n}{(n-2)! \Gamma(\alpha+2)} L_{n-1}^{\alpha+2}(x) + \frac{(-1)^n}{(n-2)! \Gamma(\alpha+2)} L_{n-2}^{\alpha+2}(x) \end{pmatrix} \\
 &= L_n^\alpha(x) - \frac{(-1)^n}{(n-2)! \Gamma(\alpha+1)} (\widetilde{\mathbb{L}}_n^\alpha(0))^t A \begin{pmatrix} -\frac{1}{n-1} L_{n-1}^{\alpha+1}(x) \\ \frac{1}{(\alpha+1)} L_{n-1}^{\alpha+2}(x) + \frac{n}{\alpha+1} L_{n-2}^{\alpha+2}(x) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Además, usando (1.24)

$$\begin{aligned}\widetilde{L}_n^\alpha(x) &= L_n^\alpha(x) - \frac{(-1)^n}{(n-2)!\Gamma(\alpha+1)} \left(\widetilde{\mathbb{L}}_n^\alpha(0)\right)^t A \left( \begin{array}{c} -\frac{1}{n-1} \left( L_{n-1}^{\alpha+2}(x) + (n-1)L_{n-2}^{\alpha+2}(x) \right) \\ \frac{1}{(\alpha+1)} L_{n-1}^{\alpha+2}(x) + \frac{n}{\alpha+1} L_{n-2}^{\alpha+2}(x) \end{array} \right) \\ &= L_n^\alpha(x) - \frac{(-1)^n}{(n-2)!\Gamma(\alpha+1)} \left(\widetilde{\mathbb{L}}_n^\alpha(0)\right)^t A \left[ \left( \begin{array}{c} -\frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{(\alpha+1)} \end{array} \right) L_{n-1}^{\alpha+2}(x) + \left( \begin{array}{c} -1 \\ \frac{n}{\alpha+1} \end{array} \right) L_{n-2}^{\alpha+2}(x) \right],\end{aligned}$$

donde

$$\left(\widetilde{\mathbb{L}}_n^\alpha(0)\right)^t = (I + A\mathbb{K}_{n-1}(0,0))^{-1} \left(\mathbb{L}_n^\alpha(0)\right)^t.$$

Nuevamente, usando (1.24)

$$L_n^\alpha(x) = L_n^{\alpha+2}(x) + 2nL_{n-1}^{\alpha+2}(x) + n(n-1)L_{n-2}^{\alpha+2}(x).$$

Por lo que tenemos el siguiente Teorema

**Teorema 30** Para cada  $n \in \mathbb{N}$

$$\widetilde{L}_n^\alpha(x) = L_n^{\alpha+2}(x) + A_{n,\alpha}L_{n-1}^{\alpha+2}(x) + B_{n,\alpha}L_{n-2}^{\alpha+2}(x) \quad (6.19)$$

donde

$$\begin{aligned}A_{n,\alpha} &= 2n - \frac{(-1)^n}{(n-2)!\Gamma(\alpha+1)} \left(\widetilde{\mathbb{L}}_n^\alpha(0)\right)^t A \left( \begin{array}{c} -\frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{(\alpha+1)} \end{array} \right) \sim 2n - (\alpha+1)(\alpha+2) \\ B_{n,\alpha} &= n(n-1) - \frac{(-1)^n}{(n-2)!\Gamma(\alpha+1)} \left(\widetilde{\mathbb{L}}_n^\alpha(0)\right)^t A \left( \begin{array}{c} -1 \\ \frac{n}{\alpha+1} \end{array} \right) \sim n(n-1) - (\alpha+1)(\alpha+2)(n-1).\end{aligned}$$

Esto implica que la sucesión  $\{\widetilde{L}_n^\alpha\}_{n \geq 0}$  es cuasi-ortogonal con respecto a la medida de Laguerre  $d\mu_{\alpha+2} = x^{\alpha+2}e^{-x}dx$ . Ver [28] para más información acerca de familias cuasi-ortogonales, en particular, el análisis de la distribución de los ceros.

## 6.4. Fórmula de recurrencia a cinco términos

En esta parte de la memoria encontraremos una fórmula de recurrencia a cinco términos para los polinomios mónicos de tipo Laguerre Sobolev  $\{\widetilde{L}_n^\alpha\}_{n \geq 0}$  ortogonales con respecto a (6.1). Para ello, será necesario usar la siguiente Proposición. La prueba de (6.20) es una consecuencia de (6.1).

**Proposición 28** Si  $p$  y  $q$  son polinomios con coeficientes reales, entonces

$$\langle x^2 p, q \rangle_S = \langle p, x^2 q \rangle_S. \quad (6.20)$$

Consideremos la representación de Fourier de  $x^2 \tilde{L}_n^\alpha$  en términos de  $\{\tilde{L}_n^\alpha\}_{n \geq 0}$

$$x^2 \tilde{L}_n^\alpha(x) = \tilde{L}_{n+2}^\alpha(x) + \sum_{k=0}^{n+1} a_{n,k} \tilde{L}_k^\alpha(x) \quad (6.21)$$

donde

$$a_{n,k} = \frac{\langle x^2 \tilde{L}_n^\alpha(x), \tilde{L}_k^\alpha(x) \rangle_S}{\|\tilde{L}_k^\alpha(x)\|_S^2}, \quad k = 0, \dots, n+1.$$

De (6.20) tenemos

$$a_{n,k} = \frac{\langle \tilde{L}_n^\alpha(x), x^2 \tilde{L}_k^\alpha(x) \rangle_S}{\|\tilde{L}_k^\alpha(x)\|_S^2}.$$

Entonces,  $a_{n,k} = 0$  para  $k = 0, \dots, n-3$ . Por tanto

$$x^2 \tilde{L}_n^\alpha(x) = \tilde{L}_{n+2}^\alpha(x) + a_{n,n+1} \tilde{L}_{n+1}^\alpha(x) + a_{n,n} \tilde{L}_n^\alpha(x) + a_{n,n-1} \tilde{L}_{n-1}^\alpha(x) + a_{n,n-2} \tilde{L}_{n-2}^\alpha(x).$$

El siguiente objetivo es determinar los coeficientes  $a_{n,k}$ ,  $k = n-2, \dots, n+1$ . Dado que

$$\langle \tilde{L}_n^\alpha(x), x^2 \tilde{L}_k^\alpha(x) \rangle_S = \langle \tilde{L}_n^\alpha(x), \tilde{L}_k^\alpha(x) \rangle_{\alpha+2}$$

y usando la fórmula de conexión (6.19) para  $\tilde{L}_n^\alpha(x)$  y  $\tilde{L}_k^\alpha(x)$ ,  $k = n-2, \dots, n+1$ , se tiene

$$\begin{aligned} a_{n,n+1} &= \frac{A_{n+1,\alpha} \|L_n^{\alpha+2}\|_{\alpha+2}^2 + A_{n,\alpha} B_{n+1,\alpha} \|L_{n-1}^{\alpha+2}\|_{\alpha+2}^2}{\|\tilde{L}_{n+1}^\alpha(x)\|_S^2} \sim 4n \\ a_{n,n} &= \frac{\|L_n^{\alpha+2}\|_{\alpha+2}^2 + A_{n,\alpha}^2 \|L_{n-1}^{\alpha+2}\|_{\alpha+2}^2 + B_{n,\alpha}^2 \|L_{n-2}^{\alpha+2}\|_{\alpha+2}^2}{\|\tilde{L}_n^\alpha(x)\|_S^2} \sim 6n^2 \\ a_{n,n-1} &= \frac{A_{n,\alpha} \|L_{n-1}^{\alpha+2}\|_{\alpha+2}^2 + B_{n,\alpha} A_{n-1,\alpha} \|L_{n-2}^{\alpha+2}\|_{\alpha+2}^2}{\|\tilde{L}_{n-1}^\alpha(x)\|_S^2} \sim 4n^3 \end{aligned} \quad (6.22)$$

$$a_{n,n-2} = \frac{B_{n,\alpha} \|L_{n-2}^{\alpha+2}\|_{\alpha+2}^2}{\|\tilde{L}_{n-2}^\alpha(x)\|_S^2} \sim n^4.$$

Por lo tanto,

**Teorema 31** (*Fórmula de recurrencia a cinco términos*) Para cada  $n \in \mathbb{N}$

$$x^2 \tilde{L}_n^\alpha(x) = \tilde{L}_{n+2}^\alpha(x) + a_{n,n+1} \tilde{L}_{n+1}^\alpha(x) + a_{n,n} \tilde{L}_n^\alpha(x) + a_{n,n-1} \tilde{L}_{n-1}^\alpha(x) + a_{n,n-2} \tilde{L}_{n-2}^\alpha(x). \quad (6.23)$$

donde los coeficientes  $a_{n,k}$ ,  $k = n - 2, \dots, n + 1$ , están dados en (6.22) y, por convenio, definimos  $\tilde{L}_{-1}^\alpha(x) = \tilde{L}_{-2}^\alpha(x) = 0$ .

Observemos que la representación matricial del operador de multiplicación por  $x^2$  está relacionado con el cuadrado de la matriz de representación del operador de multiplicación por  $x$  cuando se consideran los polinomios ortogonales clásicos de Laguerre. Perturbaciones compactas de estos operadores de multiplicación para medidas de soporte acotado han sido estudiadas en [90].

## 6.5. Ecuación diferencial holonómica

En esta sección vamos a hallar una ecuación diferencial lineal de segundo orden que satisface la sucesión de polinomios ortogonales mónicos  $\{\tilde{L}_n^\alpha\}_{n \geq 0}$ . Para ello, vamos a determinar dos operadores diferenciales lineales de primer orden  $\mathcal{J}_n$  y  $\mathcal{K}_n$ , tales que

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_n(\tilde{L}_n^\alpha) &= H(x; n) \tilde{L}_{n-1}^\alpha \\ \mathcal{K}_n(\tilde{L}_{n-1}^\alpha) &= K(x; n) \tilde{L}_n^\alpha. \end{aligned}$$

para ciertos polinomios  $H(x; n)$  y  $K(x; n)$ . Estos operadores son llamados en la literatura operadores de aniquilación y creación, respectivamente ([56]).

Reemplazando (1.19) en (6.19) se obtiene

$$\tilde{L}_n^\alpha(x) = f(x; n) L_{n-1}^{\alpha+2}(x) + M_n L_{n-2}^{\alpha+2}(x) \quad (6.24)$$

asi como para  $n - 1$

$$\tilde{L}_{n-1}^\alpha(x) = K_n L_{n-1}^{\alpha+2}(x) + g(x; n) L_{n-2}^{\alpha+2}(x), \quad (6.25)$$

donde

$$\begin{aligned} f(x; n) &= A_{n,\alpha} + (x - (2n + 1 + \alpha)) \\ M_n &= B_{n,\alpha} - (n - 1)(n + \alpha + 1) \\ K_n &= 1 - \frac{B_{n-1,\alpha}}{(n-2)(n+\alpha)} \\ g(x; n) &= A_{n-1,\alpha} + \frac{B_{n-1,\alpha}(x - (2n + \alpha - 1))}{(n-2)(n+\alpha)}. \end{aligned}$$

Derivando en ambos miembros de (6.24)

$$\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(x) = L_{n-1}^{\alpha+2}(x) + f(x; n)\left(L_{n-1}^{\alpha+2}\right)'(x) + M_n\left(L_{n-2}^{\alpha+2}\right)'(x).$$

Multiplicando por  $x$  en ambos miembros de la anterior expresión y usando (1.20),

$$\begin{aligned} x\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(x) &= xL_{n-1}^{\alpha+2}(x) + f(x; n)\left[(n-1)L_{n-1}^{\alpha+2}(x) + (n-1)(n+\alpha+1)L_{n-2}^{\alpha+2}(x)\right] + \\ &M_n\left[(n-2)L_{n-2}^{\alpha+2}(x) + (n-2)(n+\alpha)L_{n-3}^{\alpha+2}(x)\right]. \end{aligned}$$

De (1.19)

$$L_{n-3}^{\alpha+2}(x) = -\frac{1}{(n-2)(n+\alpha)}L_{n-1}^{\alpha+2}(x) + \frac{(x - (2n + \alpha - 1))}{(n-2)(n+\alpha)}L_{n-2}^{\alpha+2}(x).$$

Entonces

$$\begin{aligned} x\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(x) &= [x + (n-1)f(x; n) - M_n]L_{n-1}^{\alpha+2}(x) + \\ &[(n-1)(n+\alpha+1)f(x; n) + M_n(x - (n+\alpha+1))]L_{n-2}^{\alpha+2}(x). \end{aligned}$$

Por tanto, si definimos

$$\begin{aligned} \phi(x; n) &= x + (n-1)f(x; n) - M_n \\ \sigma(x; n) &= f(x; n)(n-1)(n+\alpha+1) + M_n(x - (n+\alpha+1)) \end{aligned}$$

obtenemos

$$x\left(\widetilde{L}_n^\alpha\right)'(x) = \phi(x; n)L_{n-1}^{\alpha+2}(x) + \sigma(x; n)L_{n-2}^{\alpha+2}(x). \quad (6.26)$$

De manera similar,

$$x \left( \widetilde{L}_{n-1}^\alpha \right)' (x) = \tau(x; n) L_{n-1}^{\alpha+2}(x) + \nu(x; n) L_{n-2}^{\alpha+2}(x),$$

donde

$$\tau(x; n) = K_n(n-1) - g(x; n)$$

$$\nu(x; n) = K_n(n-1)(n+\alpha+1) + \frac{B_{n-1, \alpha} x}{(n-2)(n+\alpha)} + g(x; n)(x - (n+\alpha+1)).$$

Usando (6.24) y (6.25) obtenemos

$$L_{n-1}^{\alpha+2}(x) = \frac{g(x; n) \widetilde{L}_n^\alpha(x) - M_n \widetilde{L}_{n-1}^\alpha(x)}{g(x; n) f(x; n) - K_n M_n} \quad (6.27)$$

$$L_{n-2}^{\alpha+2}(x) = \frac{f(x; n) \widetilde{L}_{n-1}^\alpha(x) - K_n \widetilde{L}_n^\alpha(x)}{g(x; n) f(x; n) - K_n M_n}. \quad (6.28)$$

Reemplazando (6.27) y (6.28) en (6.26),

$$\begin{aligned} & x [g(x; n) f(x; n) - K_n M_n] \left( \widetilde{L}_n^\alpha \right)' (x) + [g(x; n) \phi(x; n) - K_n \phi(x; n)] \widetilde{L}_n^\alpha(x) \\ &= [f(x; n) \sigma(x; n) - M_n \phi(x; n)] \widetilde{L}_{n-1}^\alpha(x). \end{aligned}$$

De manera similar, se puede probar que

$$\begin{aligned} & x [g(x; n) f(x; n) - K_n M_n] \left( \widetilde{L}_{n-1}^\alpha \right)' (x) + [M_n \tau(x; n) - \nu(x; n) f(x; n)] \widetilde{L}_{n-1}^\alpha(x) \\ &= [\tau(x; n) g(x; n) \sigma(x; n) - K_n \nu(x; n)] \widetilde{L}_n^\alpha(x). \end{aligned}$$

Por tanto, hemos probado el siguiente

**Proposición 29** Sea  $\{\widetilde{L}_n^\alpha\}_{n \geq 0}$  la sucesión de polinomios mónicos ortogonales con respecto a (6.1). Entonces, los operadores diferenciales  $\mathcal{J}_n$  y  $\mathcal{K}_n$  definidos por

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_n &= F(x; n)D + G(x; n)I \\ \mathcal{K}_n &= F(x; n)D + J(x; n)I \end{aligned}$$

donde  $D$  es el operador derivada,  $I$  el operador identidad y

$$\begin{aligned} F(x; n) &= x [g(x; n)f(x; n) - K_n M_n] \\ G(x; n) &= \phi(x; n) (K_n - g(x; n)) \\ H(x; n) &= f(x; n)\sigma(x; n) - M_n \phi(x; n) \\ J(x; n) &= M_n \tau(x; n) - \nu(x; n)f(x; n) \\ K(x; n) &= \tau(x; n)g(x; n) - K_n \nu(x; n), \end{aligned}$$

satisfacen,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_n(\tilde{L}_n^\alpha) &= H(x; n)\tilde{L}_{n-1}^\alpha \\ \mathcal{K}_n(\tilde{L}_{n-1}^\alpha) &= K(x; n)\tilde{L}_n^\alpha. \end{aligned}$$

En otras palabras  $\mathcal{J}_n$  es un operador de aniquilación (lowering operator) y  $\mathcal{K}_n$  es un operador creación (raising operator) asociado con la sucesión  $\{\tilde{L}_n^\alpha\}_{n \geq 0}$ .

De la anterior proposición

$$\frac{1}{H(x; n)} \mathcal{J}_n(\tilde{L}_n^\alpha) = \tilde{L}_{n-1}^\alpha.$$

Por tanto, aplicando el operador diferencial  $\mathcal{K}_n$  en ambos miembros de la anterior igualdad

$$\mathcal{K}_n\left(\frac{1}{H(x; n)} \mathcal{J}_n(\tilde{L}_n^\alpha)\right) = K(x; n)\tilde{L}_n^\alpha,$$

esto es

$$F(x; n)D\left(\frac{1}{H(x; n)} \mathcal{J}_n(\tilde{L}_n^\alpha)\right) + \frac{J(x; n)}{H(x; n)} \mathcal{J}_n(\tilde{L}_n^\alpha) = K(x; n)\tilde{L}_n^\alpha.$$

Por otra parte, usando el hecho que

$$\begin{aligned} D\left(\frac{1}{H(x; n)} \mathcal{J}_n(\tilde{L}_n^\alpha)\right) &= D\left(\frac{1}{H(x; n)} (F(x; n)(\tilde{L}_n^\alpha)' + G(x; n)\tilde{L}_n^\alpha)\right) \\ &= -\frac{H'(x; n)}{H^2(x; n)} (F(x; n)(\tilde{L}_n^\alpha)' + G(x; n)\tilde{L}_n^\alpha) + \\ &\quad \frac{1}{H(x; n)} (F'(x; n)(\tilde{L}_n^\alpha)' + F(x; n)(\tilde{L}_n^\alpha)'' ) + \\ &\quad \frac{1}{H(x; n)} (G'(x; n)\tilde{L}_n^\alpha + G(x; n)(\tilde{L}_n^\alpha)'), \end{aligned}$$

se deduce

$$\begin{aligned} & \frac{F^2(x; n)}{H(x; n)} \left( \widetilde{L}_n^\alpha \right)'' + \frac{F(x; n)}{H(x; n)} \left[ -\frac{F(x; n)H'(x; n)}{H(x; n)} + F'(x; n) + G(x; n) + J(x; n) \right] \left( \widetilde{L}_n^\alpha \right)' \\ & + \frac{1}{H(x; n)} \left[ -\frac{F(x; n)G(x; n)H'(x; n)}{H(x; n)} + F(x; n)G'(x; n) + \right. \\ & \left. J(x; n)G(x; n) - K(x; n)H(x; n) \right] \widetilde{L}_n^\alpha \\ & = 0. \end{aligned}$$

Asi pues, utilizando la misma notación de la Proposición 29, se tiene

**Teorema 32** Sea  $\{\widetilde{L}_n^\alpha\}_{n \geq 0}$  los polinomios mónicos de tipo Laguerre Sobolev ortogonales con respecto a (6.1). Entonces

$$A(x; n) \left( \widetilde{L}_n^\alpha(x) \right)'' + B(x; n) \left( \widetilde{L}_n^\alpha(x) \right)' + C(x; n) \widetilde{L}_n^\alpha(x) = 0,$$

donde

$$A(x; n) = F^2(x; n)$$

$$B(x; n) = F(x; n) \left[ F'(x; n) + G(x; n) + J(x; n) - \frac{F(x; n)H'(x; n)}{H(x; n)} \right]$$

$$C(x; n) = F(x; n)G'(x; n) + J(x; n)G(x; n) - \frac{F(x; n)G(x; n)H'(x; n)}{H(x; n)} - K(x; n)H(x; n).$$

## 6.6. Ejemplo

Consideremos producto escalar (6.1) con  $M_0 = M$ ,  $M_1 = 4N$  y  $\lambda = 0$ . Es decir, si  $p, q$  son polinomios reales estamos considerando el producto escalar

$$\langle p, q \rangle_S = \int_0^\infty p(x)q(x)x^\alpha e^{-x} dx + Mp(0)q(0) + 4Np'(0)q'(0).$$

Sea  $\{\widetilde{L}_n^\alpha\}_{n \geq 0}$  la sucesión de polinomios mónicos de tipo Laguerre-Sobolev ortogonales respecto a (6.6).

Por otra parte, consideremos  $\{P_n\}_{n \geq 0}$ , la sucesión de polinomios ortogonales correspondientes al producto escalar

$$\langle p, q \rangle_H = \int_{-\infty}^\infty p(x)q(x)|x|^{2\alpha} e^{-x^2} dx + Mp(0)q(0) + Np''(0)q''(0), \quad (6.29)$$

$M, N \in \mathbb{R}^+$ . Entonces, establecemos una relación entre las sucesiones  $\{\tilde{L}_n^\alpha\}_{n \geq 0}$  y  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  mediante la siguiente proposición

**Proposición 30** Para cada  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} P_{2n}(x) &= \tilde{L}_n^{\alpha-1/2}(x^2) \\ P_{2n+1}(x) &= xL_n^{\alpha+1/2}(x^2). \end{aligned}$$

**Demostración.** Para demostrar que  $P_{2n+1}(x) = xL_n^{\alpha+1/2}(x^2)$ , veamos que  $\langle xL_n^{\alpha+1/2}(x^2), x^{2k+1} \rangle_H = 0$ , siempre que  $n < k$ . En efecto,

$$\begin{aligned} \langle xL_n^{\alpha+1/2}(x^2), x^{2k+1} \rangle_H &= \int_{-\infty}^{\infty} L_n^{\alpha+1/2}(x^2) x^{2k+2} |x|^{2\alpha} e^{-x^2} dx \\ &= \int_0^{\infty} L_n^{\alpha+1/2}(t) t^k t^{\alpha+1/2} e^{-t} dt \\ &= \delta_{n,k} \|L_n^{\alpha+1/2}\|_{\alpha+1/2}^2, k \leq n. \end{aligned}$$

Además

$$\langle xL_n^{\alpha+1/2}(x^2), x^{2k} \rangle_H = 0,$$

es decir,

$$P_{2n+1}(x) = xL_n^{\alpha+1/2}(x^2).$$

Realizamos un procedimiento similar para probar que  $P_{2n}(x) = \tilde{L}_n^{\alpha-1/2}(x^2)$ . Si  $1 \leq k \leq n$ ,

$$\begin{aligned} &\langle \tilde{L}_n^{\alpha-1/2}(x^2), x^{2k} \rangle_H \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} \tilde{L}_n^{\alpha-1/2}(x^2) |x|^{2\alpha} e^{-x^2} dx + \left[ (2k)(2k-1)x^{2k-2} \right]_{x=0} 2 \left( \tilde{L}_n^{\alpha-1/2} \right)'(0) N \\ &= \int_0^{\infty} t^k \tilde{L}_n^{\alpha-1/2}(t) t^{\alpha-1/2} e^{-t} dt + 4N \left[ k(2k-1)x^{2k-2} \right]_{x=0} \left( \tilde{L}_n^{\alpha-1/2} \right)'(0) \\ &= \int_0^{\infty} t^k \tilde{L}_n^{\alpha-1/2}(t) t^{\alpha-1/2} e^{-t} dt + 4N (t^k)'(0) \left( \tilde{L}_n^{\alpha-1/2} \right)'(0) \\ &= \langle \tilde{L}_n^{\alpha-1/2}(t), t^k \rangle_S \\ &= \delta_{nk} \| \tilde{L}_n^{\alpha-1/2}(x^2) \|_S^2. \end{aligned}$$

Puesto que

$$\begin{aligned}
 \langle \tilde{L}_n^{\alpha-1/2}(x^2), 1 \rangle_H &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{L}_n^{\alpha-1/2}(x^2) |x|^{2\alpha} e^{-x^2} dx + M\tilde{L}_n^{\alpha-1/2}(0) \\
 &= \int_0^{\infty} \tilde{L}_n^{\alpha-1/2}(t) t^{\alpha-1/2} e^{-t} dt + M\tilde{L}_n^{\alpha-1/2}(0) \\
 &= \langle \tilde{L}_n^{\alpha-1/2}(x), 1 \rangle_S
 \end{aligned}$$

entonces

$$P_{2n}(x) = \tilde{L}_n^{\alpha-1/2}(x^2),$$

con lo que se completa la prueba. ■

Un marco general para el problema de simetrización para el caso de ortogonalidad Sobolev respecto a un vector de medidas aparece descrito en [29] y [30].



---

---

# CAPÍTULO 7

---

## Polinomios ortogonales de tipo Laguerre-Sobolev de orden superior

### 7.1. Introducción

Sea  $\{\mathcal{L}_n^\alpha\}_{n \geq 0}$  la sucesión de polinomios ortogonales respecto al producto escalar

$$\langle p, q \rangle_S = \int_0^\infty pqx^\alpha e^{-x} dx + Np^{(j)}(0)q^{(j)}(0), \quad p, q \in \mathbb{P},$$

donde  $N \in \mathbb{R}^+$  y  $j \geq 2$ . En el capítulo 5 realizamos el estudio de propiedades analíticas de estos polinomios para el caso  $j = 1$ . En este capítulo, encontramos algunas generalizaciones de los resultados del capítulo 5. Entre ellos, presentamos una fórmula de conexión de los polinomios  $\mathcal{L}_n^\alpha(x)$  con los polinomios ortogonales de Laguerre  $\{L_n^{\alpha+j+1}\}_{n \geq 0}$ . Obtenemos la fórmula asintótica relativa exterior de los polinomios  $\{\mathcal{L}_n^\alpha\}_{n \geq 0}$  en términos de  $\{L_n^\alpha\}_{n \geq 0}$  así como la fórmula de tipo Mehler-Heine. Es decir, el comportamiento de  $\frac{\mathcal{L}_n^\alpha(x/n)}{n^\alpha}$  en subconjuntos compactos del plano, donde  $\widehat{\mathcal{L}}_n^\alpha(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \mathcal{L}_n^\alpha(x)$ . En el caso  $j = 1$  se deducen los resultados asintóticos obtenidos en el capítulo 5.

## 7.2. Fórmula de conexión

Si  $\{L_n^\alpha\}_{n \geq 1}$  es la sucesión de polinomios ortogonales mónicos de Laguerre, se define un producto escalar de tipo Sobolev como sigue:

$$\langle p, q \rangle_S = \int_0^\infty pqx^\alpha e^{-x} dx + Np^{(j)}(0)q^{(j)}(0), \quad p, q \in \mathbb{P}, \quad (7.1)$$

donde  $\alpha > -1$ ,  $N \in \mathbb{R}^+$  y  $j \geq 2$ .

Denotemos mediante  $\{\mathcal{L}_n^\alpha\}_{n \geq 0}$  la sucesión de polinomios ortogonales mónicos de tipo Laguerre-Sobolev correspondientes al producto escalar definido anteriormente.

Nuestro objetivo es escribir los polinomios ortogonales mónicos de tipo Laguerre-Sobolev  $\mathcal{L}_n^\alpha(x)$ , mediante su desarrollo de Fourier en términos de los polinomios ortogonales de Laguerre. Es decir,

$$\mathcal{L}_n^\alpha(x) = L_n^\alpha(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(n)} L_k^\alpha(x),$$

donde

$$a_k^{(n)} = \frac{\langle \mathcal{L}_n^\alpha(x), L_k^\alpha(x) \rangle_\alpha}{\|L_k^\alpha(x)\|_\alpha^2}.$$

De (7.1)

$$a_k^{(n)} = \frac{\langle \mathcal{L}_n^\alpha(x), L_k^\alpha(x) \rangle_S - N(\mathcal{L}_n^\alpha)^{(j)}(0)(L_k^\alpha)^{(j)}(0)}{\|L_k^\alpha(x)\|_\alpha^2},$$

y dado que  $\langle \mathcal{L}_n^\alpha(x), L_k^\alpha(x) \rangle_S = 0$  para  $k = 0, \dots, n-1$ , se tiene

$$a_k^{(n)} = -\frac{N(\mathcal{L}_n^\alpha)^{(j)}(0)(L_k^\alpha)^{(j)}(0)}{\|L_k^\alpha(x)\|_\alpha^2}.$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{L}_n^\alpha(x) = L_n^\alpha(x) - N(\mathcal{L}_n^\alpha)^{(j)}(0) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(L_k^\alpha)^{(j)}(0)L_k^\alpha(x)}{\|L_k^\alpha(x)\|_\alpha^2}$$

$$= L_n^\alpha(x) - N(\mathcal{L}_n^\alpha)^{(j)}(0)K_{n-1}^{(0,j)}(x, 0). \quad (7.2)$$

A continuación vamos a expresar  $K_{n-1}^{(0,j)}(x, 0)$  como una combinación lineal de ciertos polinomios de Laguerre. De la ortogonalidad de los polinomios de Laguerre tenemos

$$\frac{K_{n-1}^{(0,j)}(x, 0) \|L_{n-1}^\alpha(x)\|_\alpha^2}{(L_{n-1}^\alpha)^{(j)}(0)} = L_{n-1}^{\alpha+j+1}(x) + \sum_{k=0}^{n-2} b_k^{(n)} L_k^{\alpha+j+1}(x),$$

donde

$$b_k^{(n)} = \frac{\|L_{n-1}^\alpha(x)\|_\alpha^2 \langle K_{n-1}^{(0,j)}(x, 0), L_k^{\alpha+j+1}(x) \rangle_{\alpha+j+1}}{(L_{n-1}^\alpha)^{(j)}(0) \|L_k^{\alpha+j+1}(x)\|_{\alpha+j+1}^2},$$

y, usando el hecho que

$$\langle K_{n-1}^{(0,j)}(x, 0), L_k^{\alpha+j+1}(x) \rangle_{\alpha+j+1} = \langle K_{n-1}^{(0,j)}(x, 0), x^{j+1} L_k^{\alpha+j+1}(x) \rangle_\alpha = 0,$$

para  $0 \leq k \leq n - j - 2$ , se tiene

$$\begin{aligned} K_{n-1}^{(0,j)}(x, 0) &= \frac{(L_{n-1}^\alpha)^{(j)}(0)}{\|L_{n-1}^\alpha(x)\|_\alpha^2} L_{n-1}^{\alpha+j+1}(x) + \frac{\langle K_{n-1}^{(0,j)}(x, 0), L_{n-2}^{\alpha+j+1}(x) \rangle_{\alpha+j+1}}{\|L_{n-2}^{\alpha+j+1}(x)\|_{\alpha+j+1}^2} L_{n-2}^{\alpha+j+1}(x) \\ &\quad + \cdots + \frac{\langle K_{n-1}^{(0,j)}(x, 0), L_{n-j-1}^{\alpha+j+1}(x) \rangle_{\alpha+j+1}}{\|L_{n-j-1}^{\alpha+j+1}(x)\|_{\alpha+j+1}^2} L_{n-j-1}^{\alpha+j+1}(x). \end{aligned} \quad (7.3)$$

A continuación, calcularemos cada uno de los coeficientes de la anterior expresión. De (1.20),

$$xL_{n-1}^{\alpha+1}(x) = L_n^\alpha(x) + (n + \alpha) L_{n-1}^\alpha(x),$$

se tiene

$$\begin{aligned} x^j x L_{n-k-1}^{\alpha+j+1}(x) &= x^j \left( L_{n-k}^{\alpha+j}(x) + (n - k + \alpha + j) L_{n-k-1}^{\alpha+j}(x) \right) \\ &= x^{j-1} \left[ L_{n-k+1}^{\alpha+j-1}(x) + (n - k + j + \alpha) L_{n-k}^{\alpha+j-1}(x) + \right. \\ &\quad \left. + (n - k + \alpha + j) (L_{n-k}^{\alpha+j-1}(x) + (n - k + \alpha + j - 1) L_{n-k-1}^{\alpha+j-1}(x)) \right] \\ &= x^{j-1} \left[ L_{n-k+1}^{\alpha+j-1}(x) + 2(n - k + j) L_{n-k}^{\alpha+j-1}(x) + \right. \\ &\quad \left. + (n - k + \alpha + j) (n - k + \alpha + j - 1) L_{n-k-1}^{\alpha+j-1}(x) \right] \end{aligned}$$

e iterando el procedimiento, podemos probar que (ver también [34] y [49])

$$x^{j+1}L_{n-k-1}^{\alpha+j+1}(x) = \sum_{r=0}^{j+1} \binom{j+1}{r} (n-k+\alpha+j-r+1)_r L_{n-k+j-r}^{\alpha}(x). \quad (7.4)$$

Para ello utilizaremos el método de inducción. Supongamos que la anterior expresión es válida para  $j-1$ , i.e

$$x^j L_{n-k-1}^{\alpha+j}(x) = \sum_{r=0}^j \binom{j}{r} (n-k+\alpha+j-r)_r L_{n-k+j-r-1}^{\alpha}(x)$$

con lo que obtenemos

$$\begin{aligned} x^{j+1}L_{n-k-1}^{\alpha+j+1}(x) &= x \left( x^j L_{n-k-1}^{\alpha+j+1}(x) \right) \\ &= x \sum_{r=0}^j \binom{j}{r} (n-k+\alpha+j-r+1)_r L_{n-k+j-r-1}^{\alpha+1}(x) \\ &= \sum_{r=0}^j \binom{j}{r} (n-k+\alpha+j-r+1)_r \left( L_{n-k+j-r}^{\alpha}(x) + (n-k+j-r+\alpha)L_{n-k+j-r-1}^{\alpha}(x) \right) \\ &= \sum_{r=0}^j \binom{j}{r} (n-k+\alpha+j-r+1)_r L_{n-k+j-r}^{\alpha}(x) + \\ &\quad + \sum_{r=0}^j \binom{j}{r} (n-k+\alpha+j-r+1)_r (n-k+j-r+\alpha)L_{n-k+j-r-1}^{\alpha}(x) \\ &= \sum_{r=0}^j \binom{j}{r} (n-k+\alpha+j-r+1)_r L_{n-k+j-r}^{\alpha}(x) + \\ &\quad + \sum_{r=0}^j \binom{j}{r} (n-k+\alpha+j-r)_{r+1} L_{n-k+j-r-1}^{\alpha}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{r=0}^j \binom{j}{r} (n-k+\alpha+j-r+1)_r L_{n-k+j-r}^\alpha(x) + \\
&\quad + \sum_{r=1}^{j+1} \binom{j}{r-1} (n-k+\alpha+j-r+1)_r L_{n-k+j-r}^\alpha(x) \\
&= L_{n-k+j}^\alpha(x) + \sum_{r=1}^j \left( \binom{j}{r} + \binom{j}{r-1} \right) (n-k+\alpha+j-r+1)_r L_{n-k+j-r}^\alpha(x) + \\
&\quad + (n-k+\alpha)_{j+1} L_{n-k-1}^\alpha(x) \\
&= \sum_{r=0}^{j+1} \binom{j+1}{r} (n-k+\alpha+j-r+1)_r L_{n-k+j-r}^\alpha(x),
\end{aligned}$$

con lo que se sigue (7.4).

Ahora, usaremos este último resultado para calcular los coeficientes en (7.3).

De (7.4)

$$\begin{aligned}
&\left\langle K_{n-1}^{(0,j)}(x, 0), x^{j+1} L_{n-k-1}^{\alpha+j+1}(x) \right\rangle_\alpha = \\
&= \left\langle K_{n-1}^{(0,j)}(x, 0), \sum_{r=0}^{j+1} \binom{j+1}{r} (n-k+\alpha+j-r+1)_r L_{n-k+j-r}^\alpha(x) \right\rangle_\alpha \\
&= \sum_{r=0}^{j+1} \binom{j+1}{r} (n-k+\alpha+j-r+1)_r \left\langle K_{n-1}^{(0,j)}(x, 0), L_{n-k+j-r}^\alpha(x) \right\rangle_\alpha.
\end{aligned}$$

Por tanto, nuestro problema se reduce al cálculo de  $\left\langle K_{n-1}^{(0,j)}(x, 0), L_{n-k+j-r}^\alpha(x) \right\rangle_\alpha$  para  $0 \leq r \leq j+1$ . Pero, de (7.1) y (1.5) tenemos

$$\left\langle K_{n-1}^{(0,j)}(x, 0), L_{n-k+j-r}^\alpha(x) \right\rangle_\alpha = 0,$$

para  $0 \leq r \leq j-k$ , y

$$\left\langle K_{n-1}^{(0,j)}(x, 0), L_{n-k+j-r}^\alpha(x) \right\rangle_\alpha = \left( L_{n-k+j-r}^\alpha \right)^{(j)}(0),$$

$j-k+1 \leq r \leq j+1$ . En conclusión,

$$\left\langle K_{n-1}^{(0,j)}(x, 0), x^{j+1} L_{n-k-1}^{\alpha+j+1}(x) \right\rangle_\alpha = \sum_{r=j-k+1}^{j+1} \binom{j+1}{r} (n-k+\alpha+j-r+1)_r \left( L_{n-k+j-r}^\alpha \right)^{(j)}(0),$$

es decir,

$$K_{n-1}^{(0,j)}(x, 0) = A_{n,1}^{(j)} L_{n-1}^{\alpha+j+1}(x) + A_{n,2}^{(j)} L_{n-2}^{\alpha+j+1}(x) + \cdots + A_{n,j+1}^{(j)} L_{n-j-1}^{\alpha+j+1}(x), \quad (7.5)$$

donde

$$A_{n,1}^{(j)} = \frac{(L_{n-1}^{\alpha})^{(j)}(0)}{\|L_{n-1}^{\alpha}(x)\|_{\alpha}^2}$$

y

$$A_{n,r}^{(j)} = \frac{1}{\|L_{n-r}^{\alpha+j+1}(x)\|_{\alpha+j+1}^2} \sum_{s=j-r+2}^{j+1} \binom{j+1}{s} (n-r+\alpha+j-s+2)_s (L_{n-r+j-s+1}^{\alpha})^{(j)}(0),$$

para  $2 \leq r \leq j+1$ .

Para calcular  $A_{n,r}^{(j)}$ , usaremos la siguiente expresión que es una consecuencia de (1.24)

$$(L_n^{\alpha})^{(j)}(x) = \frac{n!}{(n-j)!} L_{n-j}^{\alpha+j}(x).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} A_{n,1}^{(j)} &= \frac{\frac{(n-1)!}{(n-j-1)!} L_{n-j-1}^{\alpha+j}(0)}{(n-1)! \Gamma(n+\alpha)} = \frac{(-1)^{n-j-1} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha+j+1)}}{(n-j-1)! \Gamma(n+\alpha)} \\ &= \frac{(-1)^{n-j-1}}{(n-j-1)! \Gamma(\alpha+j+1)}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} A_{n,r}^{(j)} &= \frac{1}{(n-r)! \Gamma(n+\alpha+j-r+2)} \\ &\quad \sum_{s=j-r+2}^{j+1} \binom{j+1}{s} (n-r+\alpha+j-s+2)_s \frac{(n-r+j-s+1)!}{(n-r-s+1)!} (L_{n-r-s+1}^{\alpha+j})^{(j)}(0) \\ &= \frac{1}{(n-r)! \Gamma(n+\alpha+j-r+2)} \sum_{s=j-r+2}^{j+1} \binom{j+1}{s} (n-r+\alpha+j-s+2)_s \times \\ &\quad \frac{(n-r+j-s+1)!}{(n-r-s+1)!} \frac{(-1)^{n-r-s+1} \Gamma(n+\alpha+j-r-s+2)}{\Gamma(\alpha+j+1)}, \end{aligned}$$

$2 \leq r \leq j + 1$ . Entonces tenemos

$$\mathcal{L}_n^\alpha(x) = L_n^\alpha(x) - N(\mathcal{L}_n^\alpha)^{(j)}(0) \sum_{r=1}^{j+1} A_{n,r}^{(j)} L_{n-r}^{\alpha+j+1}(x). \quad (7.6)$$

Usando la anterior igualdad, vamos a calcular  $(\mathcal{L}_n^\alpha)^{(j)}(0)$ . Para ello, consideremos la derivada  $j$ -ésima en ambos miembros de (7.6).

$$(\mathcal{L}_n^\alpha)^{(j)}(x) = (n-j+1)_j L_{n-j}^{\alpha+j}(x) - N(\mathcal{L}_n^\alpha)^{(j)}(0) \sum_{r=1}^{j+1} A_{n,r}^{(j)} (n-r-j+1)_j L_{n-r-j}^{\alpha+2j+1}(x),$$

luego,

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_n^\alpha)^{(j)}(0) &= \frac{(n-j+1)_j L_{n-j}^{\alpha+j}(0)}{1 + N \sum_{r=1}^{j+1} A_{n,r}^{(j)} (n-r-j+1)_j D(n, \alpha, j, r)} \\ &= \frac{(n-j+1)_j (-1)^{n-j} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+j+1)}}{1 + N \sum_{r=1}^{j+1} A_{n,r}^{(j)} (n-r-j+1)_j D(n, \alpha, j, r)}, \end{aligned}$$

con

$$D(n, \alpha, j, r) = \begin{cases} 0 & \text{if } n-r-j < 0 \\ (-1)^{n-r-j} \frac{\Gamma(n+\alpha+j-r+2)}{\Gamma(\alpha+2j+2)} & \text{if } n-r-j \geq 0 \end{cases}.$$

Como una consecuencia, obtenemos el siguiente resultado

**Teorema 33** *Sea  $\{L_n^\alpha\}_{n \geq 0}$  la sucesión de polinomios ortogonales mónicos de Laguerre y  $\{\mathcal{L}_n^\alpha(x)\}_{n \geq 0}$  la sucesión de polinomios ortogonales mónicos de tipo Laguerre-Sobolev correspondientes al producto escalar definido en (7.1). Entonces, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,*

$$\mathcal{L}_n^\alpha(x) = L_n^\alpha(x) - N(\mathcal{L}_n^\alpha)^{(j)}(0) \sum_{r=1}^{j+1} A_{n,r}^{(j)} L_{n-r}^{\alpha+j+1}(x), \quad (7.7)$$

donde

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_n^\alpha)^{(j)}(0) &= \frac{(n-j+1)_j (-1)^{n-j} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+j+1)}}{1 + N \sum_{r=1}^{j+1} A_{n,r}^{(j)} (n-r-j+1)_j D(n, \alpha, j, r)}, \\ D(n, \alpha, j, r) &= \begin{cases} 0 & \text{si } n-r-j < 0 \\ (-1)^{n-r-j} \frac{\Gamma(n+\alpha+j-r+1)}{\Gamma(\alpha+2j+2)} & \text{si } n-r-j \geq 0 \end{cases}, \end{aligned}$$

$$A_{n,1}^{(j)} = \frac{(-1)^{n-j-1}}{(n-j-1)!\Gamma(\alpha+j+1)}$$

y, para  $2 \leq r \leq j+1$ ,

$$A_{n,r}^{(j)} =$$

$$\frac{1}{(n-r)!\Gamma(n+\alpha+j-r+2)} \sum_{s=j-r+2}^{j+1} \binom{j+1}{s} \times \\ (n-r+\alpha+j-s+2)_s \frac{(n-r+j-s+1)! (-1)^{n-r-s+1} \Gamma(n+\alpha+j-r-s+2)}{(n-r-s+1)! \Gamma(\alpha+j+1)}.$$

De (1.24),

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{r=0}^{j+1} (n-r+1)_r \binom{j+1}{r} L_{n-r}^{\alpha+j+1}(x),$$

y usando la misma notación del teorema anterior, obtenemos una nueva representación

**Corolario 2** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathcal{L}_n^\alpha(x) = L_n^{\alpha+j+1}(x) + \sum_{r=1}^{j+1} \left[ (n-r+1)_r \binom{j+1}{r} - N(\mathcal{L}_n^\alpha)^{(j)}(0) A_{n,r}^{(j)} \right] L_{n-r}^{\alpha+j+1}(x). \quad (7.8)$$

Si

$$C_{n,r}^{(j)} = (n-r+1)_r \binom{j+1}{r} - N(\mathcal{L}_n^\alpha)^{(j)}(0) A_{n,r}^{(j)} \quad (7.9)$$

para  $r = 1, \dots, j+1$ , podemos escribir los polinomios ortogonales de tipo Laguerre Sobolev, como sigue

$$\mathcal{L}_n^\alpha(x) = L_n^{\alpha+j+1}(x) + \sum_{r=1}^{j+1} C_{n,r}^{(j)} L_{n-r}^{\alpha+j+1}(x). \quad (7.10)$$

Esto implica que  $\{\mathcal{L}_n^\alpha(x)\}_{n \geq 0}$  es cuasi-ortogonal de orden  $j+1$  respecto al funcional asociado con la función peso  $w_{\alpha+j+1}(x) = x^{\alpha+j+1} e^{-x}$  (véase [28]).

### 7.3. Comportamiento de los ceros

En esta sección vamos a demostrar que los ceros de los polinomios ortogonales mónicos de tipo Laguerre-Sobolev, son reales, simples y satisfacen la propiedad de entrelazamiento. Las ideas de las demostraciones son las mismas usadas por H. G. Meijer en [87].

**Teorema 34** *Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , el polinomio ortogonal mónico de tipo Laguerre-Sobolev  $\mathcal{L}_n^\alpha(x)$ , tiene  $n$  ceros reales, simples y, a lo más, uno de ellos se encuentra fuera del intervalo  $(0, \infty)$ .*

**Demostración.** Sean  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$  los ceros positivos de  $\mathcal{L}_n^\alpha(x)$  de multiplicidad impar. Definamos

$$\varphi(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2) \cdots (x - \xi_k).$$

Por tanto  $\varphi(x)\mathcal{L}_n^\alpha(x)$  no cambia de signo en  $(0, \infty)$ . Supongamos que  $\deg \varphi \leq n - 2$ . Entonces, usando el hecho que  $(x\varphi(x))^{(j)}(0) = j\varphi^{(j-1)}(0)$  tenemos

$$\begin{aligned} \langle \varphi(x), \mathcal{L}_n^\alpha(x) \rangle_S &= \int_0^\infty \varphi(x)\mathcal{L}_n^\alpha(x)x^\alpha e^{-x} dx + N\varphi^{(j)}(0) (\mathcal{L}_n^\alpha)^{(j)}(0) = 0, \\ \langle x\varphi(x), \mathcal{L}_n^\alpha(x) \rangle_S &= \int_0^\infty x\varphi(x)\mathcal{L}_n^\alpha(x)x^\alpha e^{-x} dx + jN\varphi^{(j-1)}(0) (\mathcal{L}_n^\alpha)^{(j)}(0) = 0. \end{aligned}$$

Dado que en las anteriores integrales los integrandos son funciones positivas, entonces  $\varphi^{(j)}(0) (\mathcal{L}_n^\alpha)^{(j)}(0) < 0$  y  $\varphi^{(j-1)}(0) (\mathcal{L}_n^\alpha)^{(j)}(0) < 0$ . Esto es,  $\varphi^{(j)}(0)$  y  $\varphi^{(j-1)}(0)$  tienen el mismo signo, lo que contradice el hecho que si  $p(x)$  es un polinomio con ceros simples en  $(0, \infty)$ , entonces  $p'(0)$  y  $p(0)$  tienen signos diferentes. En otras palabras,  $\deg \varphi = n - 1$  o  $\deg \varphi = n$ , que es lo que queríamos probar. ■

**Teorema 35** *Sean  $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n$  los ceros del polinomio mónico de tipo Laguerre-Sobolev  $\mathcal{L}_n^\alpha(x)$  y sean  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  los ceros del polinomio mónico de Laguerre  $L_n^\alpha(x)$ . Entonces  $\xi_1 < x_1$  y  $x_i < \xi_{i+1} < x_{i+1}$  para  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ .*

**Demostración.** De acuerdo con la fórmula de cuadratura de Gauss existen constantes positivas  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  tales que

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i \mathcal{L}_n^\alpha(x_i) x_i^r = \int_0^\infty x^r \mathcal{L}_n^\alpha(x) x^\alpha e^{-x} dx, \quad 0 \leq r \leq n - 1,$$

es decir,

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i \mathcal{L}_n^\alpha(x_i) x_i^r = -j! N(\mathcal{L}_n^\alpha)^{(j)}(0) \delta_{j,r}.$$

Consideremos el sistema de  $n$  ecuaciones lineales con  $n$  incógnitas  $\mathcal{L}_n^\alpha(x_1), \mathcal{L}_n^\alpha(x_2), \dots, \mathcal{L}_n^\alpha(x_n)$ . El determinante de este sistema es

$$D = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

que es igual  $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$  multiplicado por el determinante de Vandermonde  $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Por tanto,  $D$  es positivo. Así pues,  $\mathcal{L}_n^\alpha(x_i) = \frac{D_i}{D}$ , donde

$$D_i = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{i-1} & x_{i+1} & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{i-1}^2 & x_{i+1}^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{j-1} & x_2^{j-1} & \cdots & x_{i-1}^{j-1} & x_{i+1}^{j-1} & \cdots & x_n^{j-1} \\ x_1^{j+1} & x_2^{j+1} & \cdots & x_{i-1}^{j+1} & x_{i+1}^{j+1} & \cdots & x_n^{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_{i-1}^{n-1} & x_{i+1}^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Pero

$$D_i = -(-1)^{i+j} j! N(\mathcal{L}_n^\alpha)^{(j)}(0) V(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \times \phi(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

con  $\phi(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$  una función simétrica. Entonces  $D_i$  y  $D_{i+1}$  tienen signos diferentes, lo cual implica que  $\mathcal{L}_n^\alpha(x_i)$  y  $\mathcal{L}_n^\alpha(x_{i+1})$  tienen signos diferentes. En otras palabras,  $\mathcal{L}_n^\alpha(x)$  tiene al menos un cero en cada intervalo  $(x_i, x_{i+1})$  para  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . Finalmente, usando el hecho que el signo de  $\mathcal{L}_n^\alpha(x_1)$  es  $(-1)^{n+1}$ , deducimos que  $\xi_1 < x_1$ . ■

## 7.4. Comportamiento asintótico

Vamos a analizar el comportamiento asintótico de los polinomios ortogonales de tipo Laguerre-Sobolev  $\mathcal{L}_n^\alpha(x)$ . De (1.10) se tiene

$$K_{n-1}^{(j,j)}(0,0) = \quad (7.11)$$

$$\begin{aligned} & \frac{(j!)^2}{(2j+1)! \|L_{n-1}^\alpha\|^2} \sum_{k=0}^j \binom{2j+1}{k} \times \\ & \left[ (L_{n-1}^\alpha)^{(k)}(0) (L_n^\alpha)^{(2j+1-k)}(0) - (L_n^\alpha)^{(k)}(0) (L_{n-1}^\alpha)^{(2j+1-k)}(0) \right] \\ &= \frac{(j!)^2}{(2j+1)!(n-1)!\Gamma(n+\alpha)} \sum_{k=0}^j \binom{2j+1}{k} \times \\ & \left[ (n-1) \cdots (n-k) L_{n-k-1}^{\alpha+k}(0) n(n-1) \cdots (n-2j+k) L_{n-2j-1+k}^{\alpha+2j+1-k}(0) \right. \\ & \left. - n \cdots (n-k+1) L_{n-k}^{\alpha+k}(0) (n-1) \cdots (n-2j-1+k) L_{n-2j-2+k}^{\alpha+2j-k+1}(0) \right] \\ &= \sum_{k=0}^j \frac{(j!)^2 n(n-1) \cdots (n-k+1) (n-1) \cdots (n-2j+k)}{(2j+1)!(n-1)!\Gamma(n+\alpha)} \binom{2j+1}{k} \times \\ & \left[ (n-k) (-1)^{n-k-1} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha+k+1)} (-1)^{n-2j-1+k} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+2j-k+2)} \right. \\ & \left. - (n-2j+k-1) (-1)^{n-k} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)} (-1)^{n-2j-2+k} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha+2j-k+2)} \right] \\ &= \sum_{k=0}^j \binom{2j+1}{k} \times \\ & \frac{(j!)^2 (2j-2k+1) n(n-1) \cdots (n-k+1) (n-1) \cdots (n-2j+k) \Gamma(n+\alpha+1)}{(2j+1)!(n-1)!\Gamma(\alpha+k+1)\Gamma(\alpha+2j-k+2)}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$K_{n-1}^{(j,j)}(0,0) \sim C_{\alpha,j} \frac{\Gamma(n+\alpha+1) n^{2j+1}}{n!} \quad (7.12)$$

donde  $C_{\alpha,j}$  es un número real que depende de  $\alpha$  y  $j$ . De hecho,

$$C_{\alpha,j} = \frac{(j!)^2}{(2j+1)!} \sum_{k=0}^j \binom{2j+1}{k} \frac{(2j-2k+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)\Gamma(\alpha+2j+2-k)}. \quad (7.13)$$

En particular, si  $j = 1$

$$C_{\alpha,1} = \frac{1}{(\alpha + 3) [\Gamma(\alpha + 2)]^2}. \quad (7.14)$$

De (7.2) tenemos

$$\frac{\mathcal{L}_n^\alpha(x)}{L_n^\alpha(x)} = 1 - \frac{N(\mathcal{L}_n^\alpha)^{(j)}(0)K_{n-1}^{(0,j)}(x,0)}{L_n^\alpha(x)}.$$

Usando (1.7), obtenemos

$$\frac{\mathcal{L}_n^\alpha(x)}{L_n^\alpha(x)} = 1 - \frac{j!N(\mathcal{L}_n^\alpha)^{(j)}(0) \left( L_n^\alpha(x)Q_j(x,0;L_{n-1}^\alpha) - L_{n-1}^\alpha(x)Q_j(x,0;L_n^\alpha) \right)}{\|L_{n-1}^\alpha\|_\alpha^2 x^{j+1} L_n^\alpha(x)},$$

donde  $Q_j(x,0;L_{n-1}^\alpha)$  y  $Q_j(x,0;L_n^\alpha)$  son los polinomios Taylor de grado  $j$  de  $L_{n-1}^\alpha(x)$  y  $L_n^\alpha(x)$  en torno a  $x = 0$  respectivamente. Por tanto

$$\frac{\mathcal{L}_n^\alpha(x)}{L_n^\alpha(x)} = 1 - \frac{j!N(\mathcal{L}_n^\alpha)^{(j)}(0)Q_j(x,0;L_{n-1}^\alpha)}{\|L_{n-1}^\alpha\|_\alpha^2 x^{j+1}} \left( 1 - \frac{Q_j(x,0;L_n^\alpha)}{Q_j(x,0;L_{n-1}^\alpha)} \frac{L_{n-1}^\alpha(x)}{L_n^\alpha(x)} \right). \quad (7.15)$$

Nuestro objetivo es analizar el comportamiento asintótico de (7.15) para  $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ . Para ello estudiaremos el comportamiento de cada una de las siguientes expresiones,

$$\begin{aligned} (i) & \frac{j!Q_j(x,0;L_{n-1}^\alpha)}{\|L_{n-1}^\alpha\|_\alpha^2}, \\ (ii) & 1 - \frac{Q_j(x,0;L_n^\alpha)}{Q_j(x,0;L_{n-1}^\alpha)} \frac{L_{n-1}^\alpha(x)}{L_n^\alpha(x)}, \\ (iii) & (\mathcal{L}_n^\alpha)^{(j)}(0). \end{aligned}$$

En primer lugar, dado que

$$\begin{aligned} Q_j(x,0;L_{n-1}^\alpha) &= \sum_{k=0}^j \frac{(L_{n-1}^\alpha)^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &= \sum_{k=0}^j \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k)(L_{n-1-k}^{\alpha+k})^{(k)}(0)}{k!} x^k \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{j!Q_j(x, 0; L_{n-1}^\alpha)}{\|L_{n-1}^\alpha\|_\alpha^2} &\sim \frac{j! (L_{n-1}^\alpha)^{(j)}(0)x^j}{\|L_{n-1}^\alpha\|_\alpha^2 j!} \\
&= \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-j)}{(n-1)!\Gamma(n+\alpha)} L_{n-1-j}^{\alpha+j}(0)x^j \\
&= \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-j)}{(n-1)!\Gamma(n+\alpha)} (-1)^{n-1-j} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha+j+1)} x^j.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\frac{j!Q_j(x, 0; L_{n-1}^\alpha)}{\|L_{n-1}^\alpha\|_\alpha^2 x^{j+1}} \sim \frac{(-1)^{n-1-j} n^j}{x(n-1)!\Gamma(\alpha+j+1)}. \quad (7.16)$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
1 - \frac{Q_j(x, 0; L_n^\alpha)}{Q_j(x, 0; L_{n-1}^\alpha)} \frac{L_{n-1}^\alpha(x)}{L_n^\alpha(x)} &\sim \quad (7.17) \\
1 + \frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)\Gamma(n+\alpha+1)}{(n-1)(n-2)\cdots(n-j)\Gamma(n+\alpha)} \frac{L_{n-1}^\alpha(x)}{L_n^\alpha(x)} \\
&= 1 - \frac{n+\alpha}{n-j} \frac{\widehat{L}_{n-1}^\alpha(x)}{\widehat{L}_n^\alpha(x)}.
\end{aligned}$$

Finalmente, de (7.2) y (7.12) obtenemos

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_n^\alpha)^{(j)}(0) &= \frac{(L_n^\alpha)^{(j)}(0)}{1 + NK_{n-1}^{(j,j)}(0,0)} \\
&\sim \frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)(-1)^{n-j} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+j+1)}}{1 + NC_{\alpha,j} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)n^{2j+1}}{n!}},
\end{aligned}$$

de manera que

$$(\mathcal{L}_n^\alpha)^{(j)}(0) \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha+j+1)} \frac{(-1)^{n-j} n^j \Gamma(n+\alpha+1)(n-1)!}{(n-1)! + NC_{\alpha,j} \Gamma(n+\alpha+1)n^{2j}}. \quad (7.18)$$

Por tanto, usando (1.31) en (7.17) se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{Q_j(x, 0; L_n^\alpha) \widehat{L}_{n-1}^\alpha(x)}{Q_j(x, 0; L_{n-1}^\alpha) \widehat{L}_n^\alpha(x)} \right) = 0 \quad (7.19)$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ .

Luego, de (7.15), tenemos

$$\begin{aligned} & \frac{\mathcal{L}_n^\alpha(x)}{L_n^\alpha(x)} - 1 \\ & \sim - \frac{Nj!(\mathcal{L}_n^\alpha)^{(j)}(0)Q_j(x, 0; L_{n-1}^\alpha)}{\|L_{n-1}^\alpha\|_\alpha^2 x^{j+1}} \left( 1 - \frac{Q_j(x, 0; L_n^\alpha) L_{n-1}^\alpha(x)}{Q_j(x, 0; L_{n-1}^\alpha) L_n^\alpha(x)} \right) \\ & = - \frac{N(-1)^{n-j}n^j\Gamma(n+\alpha+1)}{(n-1)! + NC_{\alpha,j}\Gamma(n+\alpha+1)n^{2j}} \frac{(-1)^{n-1-j}n^j}{x(\Gamma(\alpha+j+1))^2} \left( 1 - \frac{Q_j(x, 0; L_n^\alpha) L_{n-1}^\alpha(x)}{Q_j(x, 0; L_{n-1}^\alpha) L_n^\alpha(x)} \right) \\ & = \frac{N}{x(\Gamma(\alpha+j+1))^2} \frac{n^{2j}\Gamma(n+\alpha+1)}{(n-1)! + NC_{\alpha,j}\Gamma(n+\alpha+1)n^{2j}} \left( 1 - \frac{Q_j(x, 0; L_n^\alpha) L_{n-1}^\alpha(x)}{Q_j(x, 0; L_{n-1}^\alpha) L_n^\alpha(x)} \right) \end{aligned}$$

esto es, de (7.19)

### Proposición 31

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}_n^\alpha(x)}{L_n^\alpha(x)} = 1. \quad (7.20)$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ .

Usando la formula de Mehler-Heine (1.30), encontraremos la correspondiente fórmula para los polinomios ortogonales de tipo Laguerre-Sobolev  $\mathcal{L}_n^\alpha(x)$ .

En primera instancia, vamos a encontrar una expresión para el polinomios de Taylor de grado  $j$ , de  $L_n^\alpha(x)$  evaluado en  $x/n$ , i.e  $Q_j(x/n, 0; L_n^\alpha)$ .

$$\begin{aligned} Q_j(x/n, 0; L_n^\alpha) &= \frac{(-1)^n\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(-1)^{n-1}n\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+2)} \frac{x}{n} + \dots \\ &+ \frac{(-1)^{n-j}n(n-1)\cdots(n-j+1)\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+j+1)} \frac{x^j}{n^j} \\ &= \frac{(-1)^n\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} \left[ S_j^\alpha(x) - \frac{1}{n}R_j^\alpha(x) + \mathcal{O}(n^{-2}) \right], \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} S_j^\alpha(x) &= 1 - \frac{x}{1!(\alpha+1)_1} + \cdots + \frac{(-1)^j x^j}{j!(\alpha+1)_j}, \\ R_j^\alpha(x) &= \frac{x^2}{2!(\alpha+1)_2} - \frac{3x^3}{3!(\alpha+1)_3} + \cdots + \frac{(-1)^j x^j (j-1)j}{2j!(\alpha+1)_j}, \end{aligned}$$

luego

$$Q_j(x/n, 0; L_n^\alpha) = \frac{(-1)^n \Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} \left[ S_j^\alpha(x) - \frac{1}{n} R_j^\alpha(x) + \mathcal{O}(n^{-2}) \right]. \quad (7.21)$$

Usando ideas similares, podemos concluir

$$Q_j(x/n, 0; L_{n-1}^\alpha) = \frac{(-1)^{n-1} \Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} \left[ S_j^\alpha(x) + \frac{1}{n} T_j^\alpha(x) + \mathcal{O}(n^{-2}) \right], \quad (7.22)$$

donde

$$T_j^\alpha(x) = \frac{x}{1!(\alpha+1)} - \frac{3x^2}{2!(\alpha+1)_2} + \cdots + \frac{(-1)^{j-1} x^j j(j+1)}{2(\alpha+1)_j j!}.$$

De (1.23), (7.6) y (7.18), tenemos

$$\mathcal{L}_n^\alpha(x) = L_n^\alpha(x) - \frac{Nj!(\mathcal{L}_n^\alpha)^{(j)}(0)}{\|L_{n-1}^\alpha\|_\alpha^2 x^{j+1}} \left[ L_n^\alpha(x) Q_j(x, 0; L_{n-1}^\alpha) - L_{n-1}^\alpha(x) Q_j(x, 0; L_n^\alpha) \right],$$

y, usando (1.24) se obtiene que  $L_n^{\alpha-1}(x) = L_n^\alpha(x) + nL_{n-1}^\alpha(x)$ . Así pues

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n^\alpha(x) &= L_n^\alpha(x) - \frac{Nj!(\mathcal{L}_n^\alpha)^{(j)}(0)}{\|L_{n-1}^\alpha\|_\alpha^2 x^{j+1}} \left[ L_n^\alpha(x) Q_j(x, 0; L_{n-1}^\alpha) - \frac{L_n^{\alpha-1}(x) - L_n^\alpha(x)}{n} Q_j(x, 0; L_n^\alpha) \right] \\ &= L_n^\alpha(x) - \frac{Nj!(\mathcal{L}_n^\alpha)^{(j)}(0)}{\|L_{n-1}^\alpha\|_\alpha^2 x^{j+1}} \left[ \left( Q_j(x, 0; L_{n-1}^\alpha) + \frac{Q_j(x, 0; L_n^\alpha)}{n} \right) L_n^\alpha(x) - \frac{L_n^{\alpha-1}(x)}{n} Q_j(x, 0; L_n^\alpha) \right]. \end{aligned}$$

Multiplicando en ambos miembros de la última expresión por  $\frac{(-1)^n}{n!n^\alpha}$  y usando el cambio de variable  $x$  por  $x/n$ , se tiene

$$\frac{\widehat{\mathcal{L}}_n^\alpha(x/n)}{n^\alpha} =$$

$$\frac{\widehat{L}_n^\alpha(x/n)}{n^\alpha} - \frac{Nj!(\mathcal{L}_n^\alpha)^{(j)}(0)n^{j+1}}{\|L_{n-1}^\alpha\|_\alpha^2 x^{j+1}} \times \left[ \left( Q_j(x/n, 0; L_{n-1}^\alpha) + \frac{Q_j(x/n, 0; L_n^\alpha)}{n} \right) \frac{\widehat{L}_n^\alpha(x/n)}{n^\alpha} - \frac{1}{n^2} \frac{\widehat{L}_n^{\alpha-1}(x/n)}{n^{\alpha-1}} Q_j(x/n, 0; L_n^\alpha) \right].$$

Finalmente, de (1.23), (7.18), (7.21) y (7.22) se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{\mathcal{L}}_n^\alpha(x/n)}{n^\alpha} = & \frac{\widehat{L}_n^\alpha(x/n)}{n^\alpha} - \frac{Nj!}{\Gamma(\alpha+j+1)} \frac{(-1)^{n-j} n^j \Gamma(n+\alpha+1)(n-1)!}{(n-1)! + N C_{\alpha,j} \Gamma(n+\alpha+1) n^{2j}} n^{j+1} \frac{(-1)^n \Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} \times \\ & \left[ \left( \frac{\alpha}{n} S_j^\alpha(x) - \frac{1}{n} T_j^\alpha(x) - \frac{1}{n} R_j^\alpha(x) + \mathcal{O}(n^{-2}) \right) \frac{\widehat{L}_n^\alpha(x/n)}{n^\alpha} \right. \\ & \left. - \frac{\widehat{L}_{n-1}^{\alpha-1}(x/n)(n+\alpha)}{n^2 n^{\alpha-1}} \left( S_j^\alpha(x) - \frac{1}{n} R_j^\alpha(x) + \mathcal{O}(n^{-2}) \right) \right]. \end{aligned}$$

Esto implica

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widehat{\mathcal{L}}_n^\alpha(x/n)}{n^\alpha} = & x^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{x}) + \frac{(-1)^{j+1} j!}{C_{\alpha,j} \Gamma(\alpha+j+1) \Gamma(\alpha+1) x^{j+1}} \times \\ & \left[ x^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{x}) \left( \alpha S_j^\alpha(x) - T_j^\alpha(x) - R_j^\alpha(x) \right) - x^{-(\alpha-1)/2} J_{\alpha-1}(2\sqrt{x}) S_j^\alpha(x) \right], \end{aligned}$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $\mathbb{C}$ . Usando el hecho que

$$\begin{aligned} J_{\alpha-1}(2\sqrt{x}) + J_{\alpha+1}(2\sqrt{x}) &= \frac{\alpha}{\sqrt{x}} J_\alpha(2\sqrt{x}), \\ T_j^\alpha(x) + R_j^\alpha(x) &= \frac{x}{\alpha+1} S_{j-1}^{\alpha+1}(x), \end{aligned}$$

y realizando algunos cálculos elementales tenemos

**Proposición 32**

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widehat{\mathcal{L}}_n^\alpha(x/n)}{n^\alpha} \tag{7.23} \\ &= x^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{x}) \left[ 1 + \frac{(-1)^j j! S_{j-1}^{\alpha+1}(x)}{C_{\alpha,j} \Gamma(\alpha+j+1) \Gamma(\alpha+2) x^j} \right] \\ & \quad - x^{-\alpha/2} J_{\alpha+1}(2\sqrt{x}) \frac{(-1)^j j! S_j^\alpha(x)}{C_{\alpha,j} \Gamma(\alpha+j+1) \Gamma(\alpha+1) x^{j+1/2}}, \end{aligned}$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $\mathbb{C}$ .

Por otra parte, dado que

$$J_\alpha(2\sqrt{x}) + J_{\alpha+2}(2\sqrt{x}) = \frac{\alpha+1}{\sqrt{x}} J_{\alpha+1}(2\sqrt{x}),$$

(7.23) se transforma en

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widehat{\mathcal{L}}_n^\alpha(x/n)}{n^\alpha} \\ &= x^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{x}) \left[ 1 + \frac{(-1)^j j! (S_{j-1}^{\alpha+1}(x) - S_j^\alpha(x))}{C_{\alpha,j} \Gamma(\alpha+j+1) \Gamma(\alpha+2) x^j} \right] \\ & \quad - x^{-\alpha/2} J_{\alpha+2}(2\sqrt{x}) \frac{(-1)^j j! S_j^\alpha(x)}{C_{\alpha,j} \Gamma(\alpha+j+1) \Gamma(\alpha+2) x^j}. \end{aligned}$$

Si  $j = 1$ , entonces podemos deducir, después de realizar algunos cálculos, que este resultado coincide con el obtenido en [18].

Ahora, vamos a analizar el comportamiento asintótico de la raíz  $n$ -ésima de la norma de Sobolev de  $\mathcal{L}_n^\alpha(x)$ . Dado que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_n^\alpha\|_S^2 &= \langle \mathcal{L}_n^\alpha, L_n^\alpha \rangle_S \\ &= \langle \mathcal{L}_n^\alpha, L_n^\alpha \rangle_\alpha + N(\mathcal{L}_n^\alpha)^{(j)}(0) (L_n^\alpha)^{(j)}(0) \\ &= \|L_n^\alpha\|_\alpha^2 + N(\mathcal{L}_n^\alpha)^{(j)}(0) (L_n^\alpha)^{(j)}(0), \end{aligned}$$

teniendo en cuenta el comportamiento asintótico de  $(L_n^\alpha)^{(j)}(0)$  así como (7.18), lo cual nos proporciona el comportamiento de  $(\mathcal{L}_n^\alpha)^{(j)}(0)$ ,

$$\begin{aligned}
\frac{\|\mathcal{L}_n^\alpha\|_S^2}{\|L_n^\alpha\|_\alpha^2} &= 1 + \frac{N (\mathcal{L}_n^\alpha)^{(j)}(0) (L_n^\alpha)^{(j)}(0)}{\|L_n^\alpha\|_\alpha^2} \\
&\sim 1 + N \frac{(-1)^{n-j} n^j \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+j+1)} n^j (-1)^{n-j} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+j+1)}}{1 + NC_{\alpha,j} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} n^{2j+1} n! \Gamma(n+\alpha+1)} \\
&= 1 + \frac{n^{2j} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+j+1)^2}}{n! + NC_{\alpha,j} \Gamma(n+\alpha+1) n^{2j+1}} \\
&= 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Por tanto, hemos probado la siguiente proposición

**Proposición 33**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|\mathcal{L}_n^\alpha\|_S^2}{\|L_n^\alpha\|_\alpha^2} = 1.$$

Finalmente, presentamos un resultado acerca del comportamiento de la norma de los polinomios ortogonales de tipo Laguerre Sobolev, que es una consecuencia de la anterior proposición y el hecho que  $n^{-1} \|\mathcal{L}_n^\alpha\|_S^{1/n} \rightarrow e^{-1}$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

**Corolario 3**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \|\mathcal{L}_n^\alpha\|_S^{1/n} = e^{-1}. \quad (7.24)$$

---

## Problemas abiertos

1. En el capítulo 7, se han generalizado algunos resultados obtenidos en el capítulo 5, considerando el producto escalar (7.1). Sin embargo, a pesar de haber hallado una fórmula de conexión entre los polinomios de tipo Laguerre Sobolev generados por este producto escalar y ciertos polinomios de Laguerre, no se ha encontrado una ecuación diferencial de segundo orden que nos permita, por ejemplo, presentar una interpretación electrostática de los ceros de estos polinomios. Sin embargo, usando la fórmula de conexión (7.10), este trabajo es viable, aunque los resultados aparentan ser poco manejables por la complejidad de los coeficientes de la ecuación diferencial holonómica resultante. Así mismo, estamos estudiando los operadores de creación y aniquilación correspondientes a dichos polinomios, lo que puede facilitar la obtención de la correspondiente ecuación holonómica que satisfacen.
2. Realizar el estudio de los polinomios ortogonales respecto del producto escalar

$$\langle p, q \rangle_S = \int_0^\infty p(x)q(x)x^\alpha e^{-x} dx + \mathbb{P}(0)'A\mathbb{Q}(0), \quad (7.25)$$

donde

$$\mathbb{P}(0) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p'(0) \\ \vdots \\ p^{(j)}(0) \end{pmatrix}, \quad \mathbb{Q}(0) = \begin{pmatrix} q(0) \\ q'(0) \\ \vdots \\ q^{(j)}(0) \end{pmatrix}$$

$p$  y  $q$  son polinomios,  $N_j \in \mathbb{R}^+$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , y  $A$  una matriz cuadrada de tamaño  $j \times j$  simétrica. En particular, como en los capítulos 3 y 5, queremos hallar una ecuación diferencial de segundo orden que satisfagan los polinomios ortogonales respecto a (7.25), así como llevar a cabo un estudio del comportamiento de los ceros de estos polinomios y encontrar una interpretación electrostática de los mismos.

3. Usando las ideas del apartado anterior, queremos generalizar la definición (3.1) del capítulo 2. Es decir, considerar el producto escalar

$$\langle p, q \rangle_S = \int_{-1}^1 p(x)q(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx + \sum_{j=0}^k N_j p^{(j)}(1)q^{(j)}(1), \quad (7.26)$$

donde  $p$  y  $q$  son polinomios  $N_j \in \mathbb{R}^+$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . O, con mayor generalidad, adicionar masas no solo en 1, sino también en  $-1$ . En otras palabras, considerar el producto escalar tipo Sobolev

$$\begin{aligned} \langle p, q \rangle_S &= \int_{-1}^1 p(x)q(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx \\ &+ \sum_{j=0}^k N_j p^{(j)}(1)q^{(j)}(1) + \sum_{j=0}^l M_j p^{(j)}(-1)q^{(j)}(-1), \end{aligned} \quad (7.27)$$

para determinar una fórmula de conexión que generalice (3.3), hallar la ecuación diferencial holonómica que satisfacen los polinomios ortogonales respecto a (7.27), realizar una interpretación electrostática de los ceros, estudiar su comportamiento asintótico, etc.

Naturalmente, la complejidad para obtener los resultados crece en la medida que agregamos elementos extra en (7.27). Es por esto que el camino más adecuado sería incrementar el número de masas adicionadas de manera gradual, lo que nos pueda permitir avanzar en los estudios.

4. Establecer una conexión entre las propiedades analíticas de los polinomios ortogonales tipo Sobolev y polinomios ortogonales matriciales como los estudiados en [42], [44] y [82], teniendo en cuenta que la matriz de medidas inducida tiene soporte no acotado y además se adiciona una masa de Dirac con peso matricial en  $x = 0$ . El caso de medidas matriciales con soporte no acotado ha recibido muy poca atención en la literatura. En esa dirección se puede considerar [43].



---

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] J. Alaya, *Quelques resultats nouveaux dans la théorie des polynômes de Laguerre-Hahn*, Thèse de Doctorat, Université de Tunis II. (1996)
- [2] J. Alaya y P. Maroni *Symmetric Laguerre-Hahn forms of class  $s = 1$* . Integral Transf. Spec. Funct. **4** (1996), 301–320.
- [3] J. Alaya y P. Maroni *Some semi-classical and Laguerre-Hahn forms defined by pseudo-functions*, Methods Appl. Anal. **3** (1996), 12–30.
- [4] M. Alfaro, F. Marcellán y M. L. Rezola, *Orthogonal Polynomials on Sobolev spaces: old and new directions*, J. Comput. Appl. Math. **48** (1993), 113–131.
- [5] M. Alfaro, F. Marcellán y M. L. Rezola, *Estimates for Jacobi-Sobolev type orthogonal polynomials*, Appl. Anal. **67** (1997), 157–174.
- [6] M. Alfaro, F. Marcellán, M. L. Rezola y A. Ronveaux *On Orthogonal Polynomials of Sobolev Type: Algebraic Properties and Zeros*, SIAM J. Math. Anal. **23** (1992), 737–757.
- [7] M. Alfaro, F. Marcellán y M. L. Rezola, A. Ronveaux, *Sobolev-Type orthogonal polynomials: The nondiagonal case*, J. Approx. Theory **83** (1995), 266–287.
- [8] M. Alfaro, J. J. Moreno-Balcázar, A. Peña y M. L. Rezola, *Asymptotics for a generalization of Hermite polynomials* (2008), Preprint.

- [9] M. Alfaro, G. López y M. L. Rezola, *Some properties of zeros of Sobolev-Type orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **69** (1996), 171–179.
- [10] W. Al-Salam, *Characterization theorems for orthogonal polynomials*, Orthogonal Polynomials: Theory and Practice. P. Nevai (Ed.), NATO ASI Series C, **294**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, (1990), 1–24.
- [11] R. Álvarez-Nodarse, *Polinomios ortogonales: historia y aplicaciones*, Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. **18** (2001), 19–45.
- [12] R. Álvarez-Nodarse, *Polinomios hipergeométricos y  $q$ -polinomios*, Monografías del Seminario Matemático García de Galdeano, Univ. Zaragoza. **26** Zaragoza, (2003).
- [13] R. Álvarez-Nodarse, J. Arvesú y F. Marcellán, *Modifications of quasi-definite linear functional via addition of delta and derivatives of delta Dirac functions*, Indag. Math., N. S. **15** (2004), 1–20.
- [14] R. Álvarez-Nodarse y F. Marcellán, *A generalization of the classical Laguerre polynomials*, Rend. Circ. Mat. Palermo Serie 2, **44** (1995), 315–329.
- [15] R. Álvarez-Nodarse y F. Marcellán, *A generalization of the classical Laguerre polynomials: Asymptotic properties and Zeros*, Appl. Anal. **62** (1996), 349–366.
- [16] R. Álvarez-Nodarse, F. Marcellán y K. Pan, *Jacobi-Sobolev-Type orthogonal polynomials. Second order differential equation and zeros*, J. Comput. Appl. Math. **90** (1998), 137–158.
- [17] R. Álvarez-Nodarse, J. Arvesú y F. Marcellán, *On the Krall-Type polynomials*, J. Appl. Math. (2004), 359–369.
- [18] R. Álvarez-Nodarse y J. J. Moreno-Balcázar, *Asymptotic properties of generalized Laguerre orthogonal polynomials*, Indag. Math. N.S. **15** (2004), 151–165.
- [19] G. E. Andrews, R. Askey y R. Roy, *Special Functions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications Vol **71**, Cambridge University Press, Cambridge (1999).

- [20] J. Arvesú, *Propiedades analíticas y algebraicas de polinomios con diversos modelos de ortogonalidad:  $q$ -Discretos, tipo Sobolev y semiclásicos*, Tesis Doctoral, Universidad Carlos III de Madrid. (1999).
- [21] R. Askey, *Orthogonal Polynomials and Special Functions*, Reg. Conf. in Appl. Math. **21**, SIAM, Philadelphia, (1975).
- [22] R. Askey y J. Wimp, *Associated Laguerre and Hermite polynomials*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect A **96**(1984), 15–37.
- [23] S. Belmehdi, *On semiclassical linear functionals of class  $s = 1$ . Classification and integral representations*, Indag. Math. N. S. **3** (1992), 253–275.
- [24] S. Belmehdi y F. Marcellán, *Orthogonal polynomials associated with some modifications of a linear functional*, Appl. Anal. **46** (1992), 1–24.
- [25] H. Bouakkaz, *Les polynômes orthogonaux de Laguerre-Hahn de classe zéro*, Thèse Troisième Cycle. Université Pierre et Marie Curie, Paris (1990).
- [26] H. Bouakkaz y P. Maroni, *Description des polynômes orthogonaux de Laguerre-Hahn de classe zéro*, In Orthogonal Polynomials and their Applications, C. Brezinski et al editors, IMACS Ann. Comput. Appl. Math. **9**. J.C Baltzer AG, Basel (1991), 189–194.
- [27] M. Bochner, *Über Sturm-Liouvillesche polynomsysteme*, Math. Zeit. **29** (1929), 730–736.
- [28] C. Brezinski, K. Driver y M. Redivo-Zaglia, *Quasi-orthogonality with applications to some families of classical orthogonal polynomials*, Appl. Numer. Math. **48** (2004), 157–168.
- [29] I. Bueno, F. Marcellán y J. Sánchez-Ruiz *Continuous symmetrized Sobolev inner products of order  $N$  (I)*, J. Math. Anal. Appl. **306** (2005), 83–96.
- [30] I. Bueno, F. Marcellán y J. Sánchez-Ruiz *Continuous symmetrized Sobolev inner products of order  $N$  (II)*, Electron. Trans. Numer. Anal. **24** (2006), 55–65.
- [31] T. S. Chihara, *On co-recursive orthogonal polynomials*, Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 899–905.

- [32] T. S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York, (1978).
- [33] C. W. Cryer, *Rodrigues's formula and the classical orthogonal polynomials*, Boll. Un. Mat. Ital. **25** (1970), 1–11.
- [34] J. S. Dehesa y J. Sanchez-Ruiz, *Expansions in series of orthogonal hypergeometric polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **89** (1997), 155–170.
- [35] J. Dini, *Sur les formes linéaires et les polynômes orthogonaux de Laguerre-Hahn*, Thèse Troisième Cycle. Université Pierre et Marie Curie, Paris (1988).
- [36] H. Dueñas y F. Marcellán, *Laguerre-Type orthogonal polynomials. Electrostatic interpretation*, Int. J. Pure and Appl. Math. **38** (2007), 345–358.
- [37] H. Dueñas y F. Marcellán, *Jacobi-Type orthogonal polynomials: holonomic equation and electrostatic interpretation*, Comm. Anal. Theory Cont. Frac. **15** (2008), 4–19.
- [38] H. Dueñas y F. Marcellán, *The Laguerre-Sobolev-Type orthogonal polynomials: Holonomic equation and electrostatic interpretation*, Rocky Mount. J. Math. (2009), En prensa.
- [39] H. Dueñas y F. Marcellán, *The Laguerre-Sobolev-Type orthogonal polynomials*, Sometido (2008).
- [40] H. Dueñas, E. Prianes y F. Marcellán, *Perturbations of Laguerre-Hahn functional: Modification by the derivative of a Dirac Delta*, Integral. Transf. Spec. Func. Vol **20** No **1** (2009), 59–77.
- [41] H. Dueñas y F. Marcellán, *The Laguerre-Sobolev type Orthogonal Polynomials. The nondiagonal case*, Sometido.
- [42] A. J. Duran, *A generalization of Favard's theorem for polynomials satisfying a recurrence relation*, J. Approx. Theory **74** (1993), 83–109.
- [43] A. J. Duran y E. Daneri-Vias *Ratio Asymptotics for Orthogonal Matrix Polynomials with Unbounded Recurrence Coefficients*, J. Approx. Theory **110** (2001), 1–17.

- [44] A. J. Duran y W. Van Assche *Orthogonal matrix polynomials and higher-order recurrence relations*, Linear Algebra and Appl. **219** (1995), 261–280.
- [45] A. Erdélyi, A. Magnus, F. Oberhettinger y F. Tricomi *Higher Transcendental Functions*, McGraw-Hill Book Co., New York. **1,2** (1953); **3** (1955).
- [46] W. D. Evans, L. L. Littlejohn, F. Marcellan y A. Ronveaux *On Recurrence Relations for Sobolev Orthogonal Polynomials*, SIAM J. Math. Anal. **26** (1995), 446–467.
- [47] P. J. Forrester y J. B. Rogers, *Electrostatic and zeros of the classical orthogonal polynomials*, SIAM J. Math. Anal. **17** (1986), 461–468.
- [48] A. Garrido, *Modelos electrostáticos de polinomios semiclásicos*, Tesis Doctoral, Universidad Carlos III de Madrid. (2005).
- [49] E. Godoy, A. Ronveaux y A. Zarzo, *Recurrence relation for connection coefficients between two families of orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **62** (1995), 67.
- [50] F. A. Grünbaum, *Variations on a theme of Heine and Stieltjes: an electrostatic interpretation of the zeros of certain polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **99** (1998), 189–194.
- [51] W. Hahn, *Über orthogonalpolynomen die  $q$ -differentialgleichungen genügen*, Math. Nachr. **2** (1949), 4–34.
- [52] E. Hendriksen y H. Van Rossum, *Semi-classical orthogonal polynomials*, In Polynômes orthogonaux et leurs applications. C. Brezinski et al. Editors Lecture Notes in Math. Springer-Verlag. **1171** Berlin, (1985), 354–361.
- [53] E. H. Hildebrandt, *Systems of polynomials connected with the Charlier expansion and the Pearson and difference equation*, Ann. Math. Statist. **2** (1931), 379–439.
- [54] M. E. H. Ismail, *More on electrostatic models for zeros of orthogonal polynomials*, Numer. Funct. Anal. Optimiz. **21** (2000), 191–204.
- [55] M. E. H. Ismail, *An Electrostatic Model for Zeros of General Orthogonal Polynomials*, Pacific J. Math. **193** (20 00), 355–369.

- [56] M. E. H. Ismail, *Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in one variable*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications Vol **98**, Cambridge University Press, Cambridge (2005).
- [57] R. Koekoek, *Koornwinder's Laguerre Polynomials*, Delft Progr. Rep. **12** (1998), 393–404.
- [58] R. Koekoek y R. Koekoek, *On a differential equation for Koornwinder's generalized Laguerre polynomials*, Proc. Amer. Math. Soc. **112** (1991), 1045–1054.
- [59] R. Koekoek, *Generalizations of Laguerre polynomials*, J. Math. Anal. Appl. **153** (1990), 576–590.
- [60] R. Koekoek y H. G. Meijer, *A generalization of Laguerre Polynomials*, SIAM J. Math. Anal. **24** (1993), 768–782.
- [61] T. H. Koornwinder, *Orthogonal polynomials with weight function  $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta + M\delta(x+1) + N\delta(x-1)$* , Canad. Math. Bull. **27** (1984), 205–214.
- [62] A. M. Krall, *Orthogonal polynomials satisfying a fourth order differential equation*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canad. **4** (1978), 219–222.
- [63] A. M. Krall, *Orthogonal polynomials satisfying a fourth order differential equation*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect A **87** (1980), 271–288.
- [64] J. Letessier, *On co-recursive associated Laguerre polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **49** (1993), 127–136.
- [65] J. Letessier, *Some results on co-recursive associated Laguerre and Jacobi polynomials*, SIAM J. Math. Anal. **25** (1994), 528–548.
- [66] D. C. Lewis, *Polynomial least-squares approximations*, Amer. J. Math. **69** (1947), 273–278.
- [67] G. López, *Convergence of Padé approximants of Stieltjes type meromorphic functions and comparative asymptotic for orthogonal polynomials*, USSR Math. Sborn. **64** (1989), 207–227.
- [68] G. López, F. Marcellán y W. Van Assche, *Relative asymptotics for polynomials orthogonal with respect to a discrete Sobolev inner product*, Constr. Approx. **11** (1995), 107–137.

- [69] Y. Luke, *Mathematical functions and their approximations*, Academic Press, New York, (1975).
- [70] N. N. Lebedev, *Special Functions and Their Applications*, Dover Publications, New York, (1972).
- [71] A. Magnus, *Riccati acceleration of the Jacobi continued fractions and Laguerre-Hahn orthogonal polynomials*, In Padé Approximation and its Applications, H. Werner and H. T. Burger editors, Lecture Notes in Math. **1071** Springer Verlag, Berlin (1984), 213–230.
- [72] F. Marcellán, A. Branquinho y J. C. Petronilho, *Classical Orthogonal Polynomials: A Functional Approach*, Acta Appl. Math. **34** (1994), 283–303.
- [73] F. Marcellán y P. Maroni, *Sur l'adjonction d'une masse de Dirac à une forme régulière et semi-classique*, Ann. Mat. Pura ed Appl. **CLXII** (1992), 1–22.
- [74] F. Marcellán, A. Martínez-Finkelshtein, and P. Martínez-González, *Electrostatic models for zeros of polynomials: old, new, and some open problems*, J. Comput. Appl. Math. **207** (2007), 258–272.
- [75] F. Marcellán y J. J. Moreno-Balcázar, *Asymptotics and Zeros of Sobolev Orthogonal Polynomials on Unbounded Supports*, Acta Appl. Math. **94** (2006), 163–192.
- [76] F. Marcellán, T. Pérez y M. Piñar, *On zeros of Sobolev-Type Orthogonal Polynomials*, Rend. Mat. Appl. **7** (12) (1992), 455–473.
- [77] F. Marcellán y E. Prianes *Orthogonal polynomials and Stieltjes functions: the Laguerre-Hahn case*, Rend. Mat. Appl. **7** (16) (1996), 117–141.
- [78] F. Marcellán y E. Prianes, *Perturbations of Laguerre-Hahn linear functionals*, J. Comput. Appl. Math. **105** (1999), 109–128.
- [79] F. Marcellán y A. Ronveaux *Co-recursive orthogonal polynomials and fourth order differential equations*, J. Comput. Appl. Math. **25** (1989), 105–109.
- [80] F. Marcellán y A. Ronveaux *Differential equation for classical-type orthogonal polynomials*, Canad. Math. Bull. **32** (1989), 404–410.

- [81] F. Marcellán y A. Ronveaux *On a class of polynomials orthogonal with respect to a discrete Sobolev inner product*, *Indag. Math. N.S.* **1** (1990), 451–464.
- [82] F. Marcellán y G. Sansigre *On a class of matrix orthogonal polynomials on the real line*, *Linear Algebra and Appl.* **181** (1993), 97–109.
- [83] F. Marcellán y W. Van Assche *Relative asymptotics for orthogonal polynomials with a Sobolev inner product*, *J. Approx. Theory* **72** (1992), 192–209.
- [84] P. Maroni, *Une théorie algébrique des polynômes orthogonaux: Applications aux polynômes orthogonaux semi-classiques*, In *Orthogonal Polynomials and their Applications*. C. Brezinski et al. eds. IMACS Ann. Comput. Appl. Math. **9** J.C Baltzer AG, Basel (1991), 95–130.
- [85] A. Martínez-Finkelshtein, *Asymptotic properties of Sobolev orthogonal polynomials revisited*, *J. Comput. Appl. Math.* **99** (1998), 491–510.
- [86] A. Martínez-Finkelshtein, *Analytic aspects of Sobolev orthogonal polynomials revisited*, *J. Comput. Appl. Math.* **127** (2001), 255–266.
- [87] H. G. Meijer, *Zero distribution of orthogonal polynomials in a certain discrete Sobolev space*, *J. Math. Anal. Appl.* **172** (1993), 520–532.
- [88] H. G. Meijer, *Laguerre polynomials generalized to a certain discrete Sobolev inner product space*, *J. Approx. Theory* **73** (1993), 1–16.
- [89] H. G. Meijer, *A short history of orthogonal polynomials in a Sobolev space. The non discrete case*, *Nieuw Arch. Wisk.* **14** (1996), 93–112.
- [90] P. Nevai y W. Van Assche, *Compact perturbations of orthogonal polynomials* *Pacific J. Math.* **153** (1992), 163–184.
- [91] A. F. Nikiforov y V. B. Uvarov, *Special Functions of Mathematical Physics: An Unified Approach*, Birkhäuser Verlag, Basel, (1988).
- [92] J. C. Petronilho, *Topological aspects in the theory of orthogonal polynomials and an inverse problem*, *Textos Mat. Ser. B.* **34**, Universidade de Coimbra (2004), 91–107.
- [93] J. Sherman, *On the numerators of the convergents of the Stieltjes continued fractions*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **35** (1933), 64–87.

- 
- [94] T. J. Stieltjes, *Sur certain polynômes que vérifient une équation différentielle linéaire du second ordre et sur la théorie des fonctions de Lamé*, Acta Math. **6** (1885), 321–326.
- [95] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, 4<sup>th</sup> ed., Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Series, vol 23, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1975).
- [96] F. Tricomi, *Vorlesungen über Orthogonalreihen*, Grund. Math. Wissen. **76** Springer-Verlag, Berlin, (1955).
- [97] G. Valent y W. Van Assche, *The impact of Stieltjes work on continued fractions and orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **65** (1995), 419–447.
- [98] W. Van Assche, *Asymptotic for orthogonal polynomials*, Lecture Notes in Math. **1265**, Springer Verlag, Berlín, (1987).
- [99] W. Van Assche, *Asymptotic properties of orthogonal polynomials from their recurrence relation II*, J. Approx. Theory **52** (1988), 322–338.
- [100] W. Van Assche, *The impact of Stieltjes work on continued fractions and orthogonal polynomials*, In Collected Papers of T. J. Stieltjes, G. Van Dijk Editor. Springer Verlag, Berlin (1993), 5–37.

---

# ÍNDICE ALFABÉTICO

- asintótica del cociente, 26
- ceros
  - polinomios de tipo Jacobi, 58
  - polinomios de Tipo Laguerre, 39
  - polinomios de tipo Laguerre-Sobolev, 94
    - de orden superior, 145
- clase Laguerre-Hahn, 28
- comportamiento asintótico
  - polinomios de tipo Laguerre, 45
  - polinomios de tipo Laguerre-Sobolev, 107, 116
    - de orden superior, 147
- ecuación diferencial, 22
  - de Pearson, 22
  - de Riccati, 28
  - holonómica
    - de tipo Jacobi, 54
    - de tipo Laguerre, 35
    - de tipo Laguerre-Sobolev, 91, 129
- fórmula
  - de tipo Mehler-Heine, 25
- funcional
  - de Dirac, 14
  - de Laguerre-Hahn, 68
    - perturbaciones, 67
  - de momentos, 13
    - cuasi-definido, 16
    - definido positivo, 16
    - regular, 16
- función, 14
  - de Bessel, 25
  - de Stieltjes, 14
- fórmula
  - asintótica
    - de Perron, 25
    - de tipo Hilb, 25
  - de Christoffel-Darboux, 17
  - de conexión
    - de tipo Jacobi, 51
    - de tipo Laguerre, 34
    - de tipo Laguerre-Sobolev, 86, 126, 138
- modelo electrostático, 42
  - de tipo Jacobi, 62
  - de tipo Laguerre, 42
  - de tipo Laguerre-Sobolev, 100

- orden de la clase, 29
- polinomios asociados de primer orden,  
20
- polinomios ortogonales, 15
  - clásicos, 22
  - de Jacobi, 26
  - de Laguerre, 23
  - de tipo Jacobi, 51
  - de tipo Laguerre-Sobolev, 85, 115
  - de tipo Laguerre, 33
  - de tipo Laguerre-Sobolev
    - de orden superior, 137
  - mónicos, 15
- relación de recurrencia a tres términos,  
16
- representación hipergeométrica, 44
  - polinomios de tipo Jacobi, 65
  - polinomios de tipo Laguerre, 44
  - polinomios de tipo Laguerre-Sobolev,  
105
- teorema de Favard, 16