



Subcell Resolution이 가능한 고차 정확도 다차원 공간 제한 기법(hMLP) 연구 Hierarchical Multi-Dimensional Limiting Strategy for Subcell Resolution

저자 (Authors)	유호준, 김종암 Hojun You, Chongam Kim
출처 (Source)	한국항공우주학회 학술발표회 논문집 , 2016.11, 24-25 (2 pages)
발행처 (Publisher)	한국항공우주학회 The Korean Society For Aeronautical And Space Sciences
URL	http://www.dbpia.co.kr/Article/NODE07090348
APA Style	유호준, 김종암 (2016). Subcell Resolution이 가능한 고차 정확도 다차원 공간 제한 기법(hMLP) 연구. 한국항공우주학회 학술발표회 논문집, 24-25.
이용정보 (Accessed)	서울대학교 147.46.118.*** 2017/04/28 11:50 (KST)

저작권 안내

DBpia에서 제공되는 모든 저작물의 저작권은 원저작자에게 있으며, 누리미디어는 각 저작물의 내용을 보증하거나 책임을 지지 않습니다. 그리고 DBpia에서 제공되는 저작물은 DBpia와 구독계약을 체결한 기관소속 이용자 혹은 해당 저작물의 개별 구매자가 비영리적으로만 이용할 수 있습니다. 그러므로 이에 위반하여 DBpia에서 제공되는 저작물을 복제, 전송 등의 방법으로 무단 이용하는 경우 관련 법령에 따라 민, 형사상의 책임을 질 수 있습니다.

Copyright Information

Copyright of all literary works provided by DBpia belongs to the copyright holder(s) and Nurimedia does not guarantee contents of the literary work or assume responsibility for the same. In addition, the literary works provided by DBpia may only be used by the users affiliated to the institutions which executed a subscription agreement with DBpia or the individual purchasers of the literary work(s) for non-commercial purposes. Therefore, any person who illegally uses the literary works provided by DBpia by means of reproduction or transmission shall assume civil and criminal responsibility according to applicable laws and regulations.

Subcell Resolution이 가능한 고차 정확도 다차원 공간 제한 기법(hMLP) 연구

유호준^{1*}, 김종암¹

서울대학교 기계항공공학부¹

Hierarchical Multi-Dimensional Limiting Strategy for Subcell Resolution

Hojun You^{1*}, Chongam Kim¹

Key Words: Subcell Gibbs Oscillation, Hierarchical Multi-Dimensional Limiting Process, Troubled Boundary Detector, Subcell Resolution, High-Order Method

1. 서론

최근 들어 복잡한 유동장에 대한 수치해석이 요구되면서 과도한 수치점성을 가진 유한체적법으로는 정확한 유동의 미세구조를 포착하는 일이 어려워지고 있다. 이러한 한계점을 극복하기 위해 고차정확도 수치기법에 대한 활발한 연구가 진행되고 있는데, 대표적으로는 DG(Discontinuous Galerkin) 방법과 CPR(Correction Procedure via Reconstruction) 방법이 있다. 이러한 고차정확도 기법은 연속인 유동장에서는 매우 높은 정확도의 수치 해를 보장하지만 불연속 구간에서는 수치진동인 Gibbs oscillation이 나타나는 문제점이 있다.

이러한 수치진동을 제거하기 위해서 다양한 연구가 진행되었는데 비점열격자에서도 성공적으로 적용된 기법들은 AV(Artificial Viscosity), WENO(Weighted Essentially Non-Oscillatory) 방법과 본 연구그룹에서 제안한 hMLP(hierarchical Multi-dimensional Limiting Process) 방법이 있다. AV 방법은 subcell resolution이 가능하지만 free parameter가 많고 인공 점성을 추가하기 때문에 지배방정식이 바뀐다는 단점이 있고, WENO 방법은 계산량이 많고 적용 방법이 어렵다는 단점이 있다. 그에 반해 hMLP 방법은 적용이 쉽고 계산량이 적어 효율적이고, free parameter가 없어 강건하지만 subcell resolution이 되지 않는다는 단점이 있다.

본 연구에서는 hMLP 방법의 단점인 subcell resolution을 보완하기 위해 subcell Gibbs oscillation의 원인을 찾고 이를 제한하기 위해 troubled boundary detector를 도입하여 기존 hMLP 방법의 장점을 그대로 가지며 subcell resolution이 가능한 hMLP_BD 방법을 만들고, 수치해석을 통해 이를 검증하였다.

수치기법에 적용되는 hMLP 방법으로 확장되었다.

hMLP 방법은 선형 기울기(P1 component)의 극값이 꼭짓점에서 나타난다는 것에 착안하여 Maximum principle을 다음과 같이 적용한 P1-projected MLP condition을 사용한다.

$$\min_{T_k \in S_{v_1}}(\bar{q}_k) \leq \Pi^1 q_i^{h,Pn} \Big|_{v_1} \leq \max_{T_k \in S_{v_1}}(\bar{q}_k) \quad (1)$$

여기서 $\Pi^1 q_i^{h,Pn} \Big|_{v_1}$ 은 수치 해 $q^{h,Pn}$ 의 셀 T_i 의 꼭짓점 v_1 에서의 값을 P1-공간으로 정사영한(Π_1) 값이고, S_{v_1} 은 v_1 을 포함하는 모든 셀의 집합이다. 일반적으로 고차정확도 수치기법에서 식 (1)을 적용하면 매끄럽게 유동이 변하는 구간의 국소극점에서 clipping 현상이 나타난다. 이를 해결하기 위해 셀 내부의 수치 해를 다음과 같이 평균값, 선형 기울기, 고차 정확도 부분으로 분리하였다.

$$q_i^{h,Pn} \Big|_{v_1} = \bar{q}_i + \underbrace{\left(\Pi^1 q_i^{h,Pn} \Big|_{v_1} - \bar{q}_i \right)}_{\text{Projected slope}} + \underbrace{\left(q_i^{h,Pn} \Big|_{v_1} - \Pi^1 q_i^{h,Pn} \Big|_{v_1} \right)}_{\text{P1-filtered } Pn} \quad (2)$$

그런 뒤 다음과 같은 조건을 갖는 smooth extrema detector를 이용하여 clipping 현상을 억제하였다.

- C1 condition (local smooth maximum)
projected slope > 0, P1-filtered Pn < 0, and $q_i^{h,Pn} \Big|_{v_1} > \min_{T_k \in S_{v_1}}(\bar{q}_k)$
- C2 condition (local smooth minimum)
projected slope < 0, P1-filtered Pn > 0, and $q_i^{h,Pn} \Big|_{v_1} < \max_{T_k \in S_{v_1}}(\bar{q}_k)$

hMLP는 위의 조건을 최고차 모드부터 계층적으로 적용하여 수치점성을 최소화 하며, 최종적으로 P1모드에서는 유한체적법에서 제안되었던 MLP-u 제한자를 사용한다.

2. 수치 기법 및 해석 결과

2.1. 다차원 공간제한기법(hMLP)

Kim과 Kim⁽¹⁾에 의해 유한체적법 기반에서 제안된 MLP(Multi-dimensional Limiting Process)는 Park과 Kim^(2,3)에 의해 DG 및 CPR 방법과 같은 고차정확도

2.2. hMLP_BD 기법

최근에 수행된 You와 Kim⁽⁴⁾의 연구에 의하면 hMLP 기법은 셀 내부의 고차 모드에서 발생하는 수치진동을 억제하지 못한다. 이러한 수치진동의 발생원인을 분석한 결과 <Fig.1>과 같이 P1-projected MLP condition

으로부터 발생하는 Type 1과 smooth extrema detector로부터 발생하는 Type 2로 구분할 수 있다.

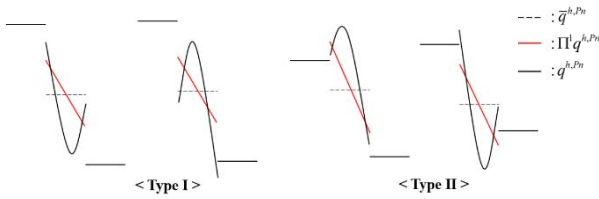


Fig. 1. Example of type 1 and 2 subcell Gibbs oscillations in one dimensional cases

본 연구는 이러한 셀 내부의 수치진동을 억제하기 위해 셀의 경계에서 인접 셀과의 수치 해의 차이를 분석했고, 2차원의 경우 일반적으로 다음이 성립한다.

$$\int_{e \in \partial T_i} [q] dl = \begin{cases} O(h^{n+2}) & \text{at smooth region} \\ O(1) & \text{across discontinuous region} \end{cases} \quad (4)$$

여기서 $[[\cdot]]$ 는 jump operator이고, e 는 셀 T_i 의 한 경계(2차원의 경우 모서리)이다. 이를 이용하여 다음과 같이 셀 경계의 수치진동 유무를 검사하는 troubled boundary detector를 도입할 수 있다.

$$\eta(\theta_e) = \begin{cases} 0, & \text{if } \theta_e < 1 \text{ (smooth region)} \\ 1, & \text{if } \theta_e \geq 1 \text{ (troubled-boundary)} \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{where } \theta_e = \frac{\int_{e \in \partial T_i} (q^+ - q^-) dl}{\int_{e \in \partial T_i} dl \times c_{std} h_e^2}, \quad h_e = \int_{e \in \partial T_i} dl \text{ and } c_{std} = 1$$

최종적으로 troubled boundary detector를 도입한 hMLP_BD 기법은 <Fig.2>와 같으며, 변수 N_{eI} 과 N_{eII} 는 수치 실험을 통해 2차원 비정렬 삼각형 격자에 대해서는 $N_{eI} = 2$, $N_{eII} = 1$ 을 사용한다.

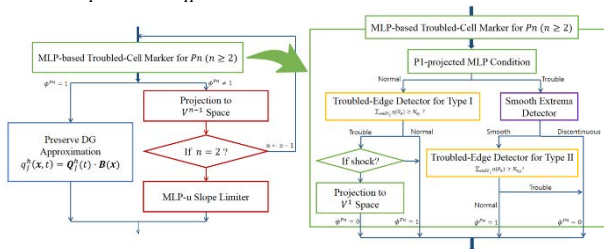


Fig. 2. Overall flowchart of hMLP_BD method

2.3. 수치해석 결과 및 결론

강한 와류-충격파 상호작용 문제는 불연속 현상인 충격파와 이로 인한 매우 복잡한 유동구조가 나타나는 문제로서 <Fig.3>은 hMLP_BD를 사용하여 비정렬 삼각형 격자에 대해 수치해석을 한 결과이다. 플렉스는 RoeM 기법, 시간전진은 3rd order TVD-RK 기법을 사용하였다. hMLP_BD는 효율적이면서도 강건한 방법으로 정확한 subcell resolution을 제공하여 유동의 미세 구조를 매우 자세히 포착할 수 있게 해준다.

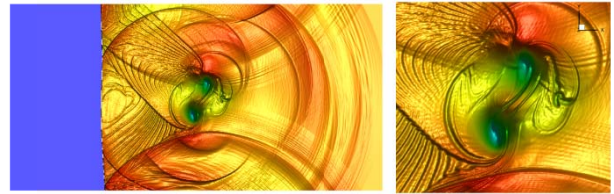


Fig. 3. Density contour of subcell resolved results of strong vortex shock interaction problem: DG-P2, $h=1/400$, hMLP_BD

결론적으로 hMLP_BD는 hMLP의 장점을 그대로 유지하며 매끄러운 유동장에 대해서는 높은 정확도를 유지하는 반면, troubled boundary detector를 사용하여 불연속근방에서 나타나는 subcell Gibbs oscillation을 성공적으로 억제하기 때문에 정확하고 신뢰할 수 있는 subcell resolution을 제공한다.

후 기

본 연구는 교육과학기술부의 우주핵심기술개발사업(NRF-2016M3C1A6937383)의 지원을 받아 이루어졌으며 이에 감사드립니다.

참고문헌

- 1) Kim, K. H., and Kim, C., "Accurate, efficient and monotonic numerical methods for multi-dimensional compressible flows Part II: Multi-dimensional limiting process," Journal of Computational Physics, Vol. 208, No. 2, 2005, pp. 570-615.
- 2) Park, J. S., and Kim, C., "Higher-order multi-dimensional limiting strategy for discontinuous Galerkin methods in compressible inviscid and viscous flows," Computers & Fluids, Vol. 96, 2014, pp. 377-396.
- 3) Park, J. S., and Kim, C., "Hierarchical multi-dimensional limiting strategy for correction procedure via reconstruction," Journal of Computational Physics, Vol. 308, 2016, pp. 57-80.
- 4) You, H., and Kim, C., "Subcell resolution for hierarchical multi-dimensional limiting strategy - interim progress," in Recent progress on numerical analysis of higher order methods & industrial mathematics related on computational fluid dynamics, NIMS, Daejeon, Korea, July 21-23.