교육학석사학위논문

형식적 증명에 대한 수준별 지도 방안 연구

2017년　2월

서울대학교 대학원

수학교육과

김　채　영

형식적 증명에 대한 수준별 지도 방안 연구

지도교수 김 서 령

이 논문을 교육학석사 학위논문으로 제출함
2016 년 11월

서울대학교 대학원
수학교육과
김 채 영

김채영의 교육학석사 학위논문을 인준함
2016년 12월

위 원 장 이 경 화 (인)

부위원장 유 연 주 (인)

위 원 김 서 령 (인)

국문초록

형식적 증명에 대한 수준별 지도 방안 연구

수준별 수업은 학생의 능력과 특성을 고려한 수업 방법 중 하나이다. 따라서 수준별 수업은 학습 내용 특성, 학생의 인지 수준 등을 고려하여 유연하게 적용하여야 한다. 그러나 지금까지의 우리나라 수준별 수업은 학급으로 구분하여 적어도 두세 달 동안은 고정적으로 유지되어 운영되어 왔다. 실제로 이러한 수준별 수업의 효과에 있어서 긍정적인 연구결과도 있지만 부정적인 연구결과 역시 많이 있다. 본 연구는, 수준별 수업이 필요한 상황과 방법에 대한 분석이 필요하다는 문제의식으로부터 출발하였다. 교과내용에 따라 필요한 경우에만 수준별 수업을 실시할 수 있고 학생들의 의견을 존중하여 집단을 나눌 수 있다는 점에서, 학급 내 수준별 수업이 기존 수준별 수업의 단점을 보완하고 그 취지를 살릴 수 있다는 가설을 설정하였다. 이 가설을 검증하기 위하여 형식적 증명을 다루고 있는 근의 공식을 수준별 수업의 주제로 택하여 실험을 하였다.

수학적 증명은 몇 가지 구체적인 상황을 관찰하여 추측하는 것이 아니라 수학적 추론을 통해 가정을 만족하는 모든 경우에 명제가 성립함을 보이는 것이기 때문에 일반화를 할 수 있는 사고 능력이 중요하다. 특히 형식적 증명은 추론과정에서 일반화를 할 뿐만 아니라 표현에 있어서도 문자와 같이 일반성을 내포하는 언어를 사용한다. 기존의 증명 수준 이론들에 따르면 각각의 사례를 관찰하는 수준과 사례를 통해 일반성을 인식할 수 있는 수준, 그리고 형식적 증명을 할 수 있는 수준을 서로 구분할 수 있으며, 적절한 교수가 없이는 낮은 수준에 있는 학생이 더 높은 수준의 증명을 이해하기 어렵다. 따라서 학생의 일반화 능력에 따라 근의 공식 유도를 차별화하여 지도해야할 필요가 있다.

본 연구는 먼저, 증명 수준 이론을 토대로 학습지를 세 수준으로 구분하여 제작하고 예비 실험을 실시하였으며, 그 결과를 바탕으로 학습지를 보완하여 본 수업 실험을 실시하였다. 본 수업 실험에서 학생들은 자신의 선행 학습내용 이해 정도와 문자 이해 수준을 바탕으로 스스로 학습지를 선택하였고, 같은 학습지를 선택한 학생들끼리 모여 근의 공식 유도 내용을 학습하였다. 실험 결과

학생들은 학습지 활동에 적극적으로 참여하였으며, 수업 후에는 각자의 표현을 사용하여 근의 공식의 의미를 설명할 수 있었다. 또한 교사는 수준별 학습지 활동 시간에 도움이 필요한 학생에게 좀 더 집중하여 지도할 수 있었다. 추가적인 인터뷰를 통해 학생들이 자신의 수준에 맞는 학습지 활동에 만족함을 확인할 수 있었다.

주요어 : 학급 내 수준별 수업, 형식적 증명, 일반화 수준, 이차방정식의 근의 공식
학 번 : 2015-21601

목차

표 목차

그림 목차

Ⅰ. 서론

학생들은 서로 다른 개성만큼이나 서로 다른 학습 특성을 가지고 있다. 학습과 관련된 인지 능력, 학습 준비도, 학습 동기 및 학습행동 등 여러 가지 상황을 고려하여 학생에게 맞는 수업을 제공하는 것이 가장 이상적이다. 수준별 수업은 학습자의 준비도와 인지능력을 고려하여 유연하게 적용할 수 있는 수업 방법 중의 하나이다. 그러나 우리나라 수준별 수업은 대체로 성적에 따라 학급을 구분하여 적어도 두세 달 동안 지속되는 고정적인 형태로 운영되어 왔다. 실제로 이와 같은 수준별 수업의 효과에 대한 일관된 연구 결과를 찾아보기는 힘들며, 수준별 수업에 대한 연구자의 관점에 따라 서로 다른 결과들이 보고된다(Kulik & Kulik, 1992; Oakes, 1992; Slavin, 1987; Tieso, 2003). 이는 수학 교과에서도 마찬가지인데 수준별 수업이 인지적 측면에 효과가 있다는 주장하는 연구들이 있는 반면(김선희, 2015; 김희란, 이수정, 김혜영, 2015), 전혀 효과가 없거나 오히려 부정적인 효과가 있다고 주장하는 연구들도 있다(양정호, 2006; 황혜정, 1998; Linchevski & Kutscher, 1998). 또한 정의적 측면에서도 서로 엇갈린 연구 결과들을 확인할 수 있다(남현우, 이기택, 2002; 정수현, 2013; Hallinan & Sorensen, 1985). 이러한 연구들을 자세히 살펴보면 어떤 교과 내용에 대해 어떠한 방식으로 수준별 수업을 실시하였는지와 같은 수업 상황에 대한 설명이 없는 경우가 많다. 즉, 수준별 수업을 상황에 따라 적용할 수 있는 여러 가지 수업 방법 중 하나로 보기보다는 고정적인 수업 방식으로 본 것이다. 모든 경우에 효과적인 하나의 수업 방법은 없으며 교사는 학생들의 인지 수준과 준비도, 학습 내용, 학습 환경 등을 고려하여 상황에 맞는 적절한 수업 방법을 선택해야 한다. 따라서 수준별 수업이 필요한 상황과 방법에 대한 구체적인 분석이 필요하다.

이 논문에서는 기존의 수준별 수업의 단점을 보완하고 취지를 살릴 수 있는 방법으로 학급 내 수준별 수업에 대해 살펴보고, 이를 적용할 교과 내용의 예로 형식적 증명을 다루고 있는 근의 공식을 주제로 택하여 수업 실험을 실시하였다. 이 연구에서는 교과내용과 학생의 학습 준비도에 따라

동질집단편성이 필요하다는 것을 가정하고 있으며, 동질집단 수준별 수업이 필요한 상황과 적절한 방법을 구체화함으로써 수준별 수업의 가치를 재인식하고 시행 방법의 개선에 기여하고자 한다.

연구 문제는 다음 두 개의 질문으로 요약될 수 있다.

첫째, 근의 공식을 수준별로 지도해야하는 이유는 무엇인가?

둘째, 실제 수업을 어떻게 실시할 것인가?

이를 위해 제Ⅱ장에서는 수준별 수업에 대한 선행연구들을 통해 수준별 수업의 문제점을 살펴보고, 교과내용에 따라 필요한 경우에만 수준별 수업을 실시할 수 있고 학생들의 의견을 존중하여 집단을 나눌 수 있다는 점에서, 기존 수준별 수업의 문제점을 보완할 수 있는 방안으로 학급 내 수준별 수업을 제안한다. 그리고 Branford의 증명 수준 이론, Miyazaki의 증명 수준 이론, van Hiele의 기하 수준 이론으로부터 일반화의 수준이 구분될 수 있으며 이 수준들이 위계적이고 순차적임을 확인한다. 이로부터 형식적 증명의 핵심적인 표현 수단인 문자 이해 수준으로부터 증명과 관련하여 학생들이 어떤 어려움을 겪는지 살펴본다.

제Ⅲ장에서는 앞에서 살펴본 내용들을 바탕으로 형식적 증명을 수준별로 지도해야하는 이유를 설명한다. 그리고 증명 수준 이론을 바탕으로 중학교 3학년 이차방정식의 근의 공식 단원에서 수준별 학습지를 개발한다. 이를 이용하여 수업을 실시하고, 학생들의 반응과 인터뷰 내용 분석을 통해 형식적 증명의 수준별 지도 효과를 확인한다.

마지막으로 제Ⅳ장에서는 지금까지의 논의를 정리 종합하는 것으로 결론을 대신한다.

Ⅱ. 이론적 배경

2.1 수준별 수업

2.1.1 수준별 수업의 효과에 대한 선행연구

수준별 수업은 학생의 능력에 근거하여 이질집단 또는 동질집단으로 구성하는 모든 수업을 총칭한다고 할 수 있으나, 흔히 우리나라에서는 능력에 따른 동질집단편성의 의미로 사용되고 있다. 기본적으로 수업을 계획할 때는 학생의 수준을 고려해야하기 때문에 여기에서는 '수준별 수업'을 동질집단편성의 의미로 사용하고, 이질집단편성과는 구분하도록 한다.

동질집단편성에 대한 찬반 논쟁은 오래전부터 있었지만, ~~아직도~~ 그 효과에 대해 의견이 일치하지 않고 있다. 동질집단편성에 대한 찬반 논리를 살펴보면 <표 Ⅱ-1>과 같다. 동질집단편성을 찬성하는 쪽은 주로 학생의 수준에 맞는 적절한 수업을 제공함으로써 효율적인 학습을 할 수 있다는 점을 강조한다. 학업 능력이 우수한 학생에게는 심화나 속진을 통해 지적 욕구를 충분히 만족시켜줄 수 있고, 도움이 필요한 학생에게는 자신의 학습 속도에 맞추어 생각하고 연습할 시간을 줄 수 있다. 각자 자신의 능력에 맞게 조절된 수업을 통해 역량을 충분히 발휘하여 수업에 참여할 수 있도록 하는 것이다. 반면에 동질집단편성에 반대하는 쪽은 낮은 수준의 학생들이 인지적, 정의적 피해를 보는 불평등한 교육이라고 주장한다.

동질집단편성에 대한 비판을 좀 더 자세히 살펴보면, 첫째, 낮은 단계의 학생들에 대한 교사의 낮은 기대감이 질 낮은 교수로 이어진다는 것이다. 낮은 단계의 수업은 수업 시간의 대부분이 학생들의 행동을 통제하는데 사용되거나, 단순 반복 연습과 같은 수업 내용이 주를 이루며, 심지어 구어적 상호작용의 특성과 질이 상위 단계에서 사용되는 것과 근본적으로 다르다는 것이다(Gamoran, 1993). 그리고 혼합 능력 집단에 있을 때보다 학습량이 더 적다는 연구 결과들도 있다(Gamoran, 1993; Linchevski & Kutscher, 1998; Oakes, 1992). 즉, 능력이 같지만 높은 계열에 배치된 학생들의 성취도는 낮은 계열에 배치된 학생들보다 더 낫고 이는 능력별

집단에 배치하는 것만으로도 학생들 사이의 격차를 증가시킬 수 있다는 것을 뒷받침한다. 둘째, 동질집단편성이 차별적이고 불공정하며, 낮은 단계 학생들의 자아 존중감에 부정적인 영향을 미친다는 의견도 있다(Oakes, 1992). 마지막으로 학교 현장에서는 수준별 수업 집단 편성을 위해 학생 개개인의 능력과 수준을 수치화된 교과목 점수로 편이하게 해석하여, 결국 점수에 의한 우열반 편성의 형태와 다를 바가 없다는 비판도 있다(이인호, 2005).

<표 Ⅱ-1> 동질집단편성에 대한 찬반 논리

찬성	반대
• 동질집단편성은 능력이 비슷한 학생들에게 교사가 수업의 초점을 맞출 수 있도록 하기 때문에 지도가 용이하고, 학생들은 자신의 수준에 맞는 수업을 받을 수 있게 하기 때문에 학생들에게도 도움을 준다(박경미, 1998; Kulik & Kulik, 1992; Tieso, 2003). • 이질집단으로 편성을 하면 상 수준 학생들은 다른 학생을 도와주는데 시간을 보내게 되어 비효율적이다(김대석, 조호제, 2013; Robinson, 1990). • 이질집단편성에서 중 수준 학생들은 이질집단편성의 '가르치는 학습자와 가르침을 받는 학습자'의 관계에서 역할의 불안정과 그에 따른 참여 기회가 상실되기 때문에 동질집단편성이 더 효과적이다(김선희, 2015; Ireson & Hallam, 2001).	• 동질집단편성은 학생들에게 전혀 도움을 주지 못할 뿐만 아니라 비주류 학생들이 낮은 수준의 집단에 계속 머물도록 하고 질 낮은 교육을 받도록 조장한다(Gamoran, 1993; Oakes, 1992). • 학생들을 정확하게 능력에 따라 배치하는 것은 불가능하며, 잘못 배치되었을 경우에 학생이 받을 수 있는 피해가 크다(김달효, 2006; 이인호, 2005; Linchevski & Kutscher, 1998). • 하 수준 학생들은 이질집단에 속해 있을 때보다 동질집단에 속해 있을 때 학습량이 더 적다(Oakes, 1992). • 동질집단편성은 학생들의 자아 존중감에 부정적인 영향을 미친다(김달효, 2006; Hallinan & Sorensen, 1985).

그러나 낮은 수준의 수업의 문제점으로 지적된 내용들이 모두 동질집단편성 때문이라고 단정 짓기는 어렵다. Slavin(1990)은 수업 시간에 다루는 학습의 양으로 수업의 질을 비교하는 것은 적절하지 않다고 하였다. 교사

가 수준이 낮은 집단에서 수업 내용을 덜 다루는 것은 질이 낮은 것이 아니라, 수업의 속도를 적절히 조정한 것일 수 있다. 그리고 낮은 수준의 수업에서 과제와 관련 없는 내용이 더 많아 보이는 것은 교사의 낮은 기대 때문이 아니라, 낮은 수준의 학생들이 (어떤 집단에 속해 있든) 좀 더 과제 외(task-off) 행동을 보이기 때문일 수 있다.

이렇게 동질집단편성에 대한 논쟁이 팽팽한 만큼, 수준별 수업의 효과에 대한 연구결과도 상이하다. 수학 교과에서 수준별 수업의 효과에 대해 조사한 선행연구들을 인지적 측면과 정의적 측면에서 살펴보면 다음과 같다.

첫째, 인지적 측면과 관련한 연구결과와 이에 대한 해석이 매우 상반되고 있다. 김희란 외(2015)는 중학생 1492명을 대상으로 3년간 의 수학 성취도를 살펴본 결과, 한 번이라도 수준별 수업을 받은 학생들의 성취도가 수준별 수업을 전혀 받지 않은 학생들보다 더 높다고 하였다. 다만 수준별 수업의 지속 기간이 길수록 효과적이라고 할 수는 없으며, 그 이유는 학년이 올라감에 따라 수학을 포기하는 학생이 많아지기 때문이라고 분석하였다. 김선희(2015)는 수학과 수준별 수업에 대한 연구들을 메타분석을 한 결과, 수준별 수업이 인지적 영역에 미치는 효과크기가 모두 중간 효과크기를 나타내었다고 하였다. 세부적으로는 학교 급에 따라 초등학교와 중학교는 효과크기가 중간크기 중 비교적 큰 편이었고, 고등학교는 중간정도였다. 집단 수준에 따라서는 상 수준에서는 작은 효과크기, 중 수준과 하 수준에서는 큰 효과크기가 나왔다. 즉, 수준별 수업이 초·중·고에서 모두 효과가 있었으며, 특히 중 수준과 하 수준 집단에 속한 학생들에게 더 유의한 효과가 있다는 것이다. 반면에, 남현우와 이기택(2002)은 학급 내 수준별 소집단 협동학습의 효과에 대해 조사하였는데, 동질집단편성과 이질집단편성 여부가 인지적 영역에 미치는 효과크기의 차이는 유의하지 않고, 다만 동질 하위 집단의 경우 동질 상위 집단 보다 유의미한 성취도 향상을 보였다고 하였다. 하 수준 학생들의 학업성적이 상 수준 학생들보다 유의하게 향상되었다는 결과는 Gamoran(1993)과 Linchevski & Kutscher(1998)의 연구와는 상반된다. 그리고 황혜정(1998)과 양정호(2006)는 수준별 수업이 학생들의 수학 학업성취에 효과가 없다고 하였다.

둘째, 정의적 문제와 관련하여 김선희(2015)는 수준별 수업이 중간 효과크기를 가진다고 하였다. 학교 급에 따라서는 초등학교에서 중간 효과크기, 중·고등학교에서 작은 효과크기가 나타났으며, 집단 수준에 따라서는 중 수준은 중간 효과크기, 상·하 수준은 작은 효과크기가 나타났다. 고은자(2004), 정수현(2013)은 수학 수준별 수업이 정의적 측면에 부정적인 영향을 미친다고 하였고, 성열관(2008)은 통계적으로 유의하지는 않지만 학생들의 자아효능감에 부정적인 영향을 미치는 것으로 보고하였다.

이와 같이 혼란스러운 결과가 보고되는 이유 중의 하나는 수준별 수업이 이루어지는 상황을 고려하지 않고, 수준별 수업을 하나의 고정된 수업방식으로만 간주했기 때문이다. 항상 효과가 있는 단 하나의 수업 방식이라는 것은 존재할 수 없다. 학습 내용과 학생의 특성, 환경 요소 등을 고려하여 그에 적합한 수업 방식을 택해야 하고, 수준별 수업은 그 중 하나의 방식이다.

우리나라에서는 제7차 교육과정에서 정책적으로 수준별 교육과정을 도입하였으며, 수학은 단계형 수준별 교과로 분류되었다. 제7차 교육과정이 아니더라도 학교현장에서 수준별 수업이 이루어지는 경우는 주로 수학 교과에 대해서다. 그렇다면 수학 교과에서 유독 수준별 수업을 실시하는 이유는 무엇일까? 수학에서 수준별 수업이 필요하다고 주장하는 근거는 두 가지로 요약될 수 있다. 첫째, 수학은 위계성이 높은 학문이기 때문에 선수학습이 제대로 이루어지지 않을 경우 다음 내용을 습득하는데 어려움이 있다(김희진, 서종진, 표용수, 2011; 전화춘, 2007; 황혜정, 1998). 둘째, 수학은 다른 교과에 비하여 학습 능력과 수준차이가 매우 크다(김대석, 조호제, 2013; 박선화, 2005). 이러한 교과 특성으로 인해 이념적으로는 수준이 다양한 학생이 함께 하는 수업을 지지하는 교사도 수학 수업에서는 그와 같은 수업 방식에 부정적인 태도를 보이기도 한다(Dar, 1985). 그러나 이러한 주장만으로는 어떤 경우에 수학 수준별 수업이 필요한지 알 수 없다. 수준별 수업 못지않게 이질집단편성에 따른 장점도 여러 연구를 통해 확인할 수 있기 때문이다(김성철, 2001; Linchevski & Kutscher, 1998). 따라서 학습내용의 특성에 따라 수준별 수업이 필요한 상황과 방

법을 좀 더 연구해야할 필요가 있다.

2.1.2 수준별 수업의 유형과 특징

미국에서 가장 잘 알려진 학급 간 수준별 이동 수업은 1954년 Cecil Floyd에 의해 개발된 Joplin plan이다(Tieso, 2003). Joplin plan은 초등 학생을 대상으로 읽기(reading)수업에 대해 수준별 수업을 실시하였다. 읽기 시간에 4, 5, 6학년 학생들은 자신의 읽기 수준에 따라 서로 다른 교실에서 수업을 받았다. 높은 수준의 학생들은 6, 7, 8학년의 교재를 사용하였고, 중간 수준의 학생들은 5, 6, 7학년 교재, 낮은 수준의 학생들은 4, 5, 6학년 교재를 사용하였다. 읽기 수업 시간 외에 학생들은 다시 자신의 교실로 돌아가서 수업을 받았다.

우리나라의 경우 학생들의 학습 능력 수준과 요구에 대응하는 차별적, 선택적 교육이라는 기치아래 제7차 수학과와 영어과 교육 과정에서 단계형 수준별 수업이 도입되었다. 단계형 수준별 교육과정에 따르면, 학년이 올라감에 따라 자동으로 그 학년에 해당하는 수학 내용을 학습하는 것이 아니라, 각 단계의 말에 이수자격 시험을 치르고, 그 결과에 따라 재이수(또는 특별 보충 과정 이수)나 진급을 하게 된다(박경미, 1998). 그러나 Jopin plan과는 달리 속진을 허용하지 않는다. 그리고 제도의 이상과 교육 현장의 괴리로 인해 재이수와 특별 보충 과정은 이루어지지 않았고, 주로 두 개 이상의 학급을 통합하여 수준별 반을 편성한 후 학급 간 이동을 하는 수준별 이동수업이 실시되었다. 학급 간 수준별 이동수업에서도 속진은 불가하고, 심화된 내용을 학습하는 방식으로 이루어졌다(박경미, 1998).

학급 내 수준별 수업은 학급 내에서 특정 활동과 목적을 위해 소집단을 구성하는 방법이다(Kulik & Kulik, 1992). 일반적으로 학급 내 수준별 수업은 교사가 전체 학급에 학습 목표를 제시한 다음 학생들의 수행수준이나 흥미 등에 근거하여 학생을 소집단에 배치하는 방식으로 이루어진다. Kulik & Kulik은 학급 내 수준별 수업의 특징을 두 가지로 설명하였다. 첫째, 학급 내 수준별 수업을 성공적으로 시행하기 위해서 교사는 반드시 교수를 차별화해야 한다. 학생을 소집단으로 배치한 다음 동일한 학습 자

료를 제시하고, 동일한 결과를 산출하게 하는 것은 적절하지 않다. 둘째, 학생들은 하루 종일 본인의 학급에 머무르게 된다. 그렇기 때문에 학교 현장에서는 학급 간 수준별 수업을 할 때 동교과 교사를 같은 교시에 수업을 배정해야하는 문제점을 완화시킬 수 있다. 그리고 이인호(2005)는 우리나라 학교 교육이 학급을 단위로 하여 이루어지기 때문에 수업 활동도 학급을 단위로 하는 것이 가장 효과적이라고 하였다.

Sorenson & Hallinan(1986)은 능력별 집단화에 대한 논쟁에 깔려있는 핵심 주제 중의 하나가 학생들의 학습 기회라고 하였다. 그들은 학생들의 능력과 노력이 학습 기회를 활용하는 방법을 결정하는 것으로 보았다. 이러한 관점에서 학급 내 수준별 수업의 혜택을 두 가지 제시하였다. 첫째, 교수 집단에서 능력이 부족한 학생이 있을 때 교사들은 학생들의 주의를 집중시키고 유지할 수 있는 시간을 더 쉽게 가질 수 있다. 둘째, 교사는 소규모 동질집단 내에서 교수 방법과 교수 자료를 학생들에게 더욱 잘 조정할 수 있었다. 학생들이 소집단으로 배치되면 교수 시간이 실제적으로 줄어들지만, 집단 내에서 발생하는 학습의 양과 유형은 짧아진 교수 시간을 보상할 만큼 충분하다고 하였다. Sorenson & Hallinan의 주장을 요약하자면, 학생의 준비도와 소질에 맞게 조정된 교수 자료를 사용함으로써 학생들이 자신의 지적 자원을 더욱 효과적으로 사용할 수 있게 한다는 것이다.

Slavin(1987)에 의하면 학급 내 수준별 수업은 필요에 따라 언제든 구성과 해체가 가능한 유연한 집단 편성(flexible grouping)이라는 장점이 있다. Tieso(2003)는 집단화의 효과에 대해 살펴본 결과, 다양한 연구에서 일관되지 않은 결과가 나왔지만, 특정 기술이나 내용에 근거한 일시적인 능력별 집단화 형태가 학생들의 성취에 유의한 효과가 있다는 것에는 대부분의 연구 결과가 일치한다는 것을 확인하였다.

학급 내 수준별 수업이 잘 이루어지기 위해서는 교사의 준비가 필요하다. 학생의 준비도에 따라 적절한 과제를 개발하고 학생 행동을 관리할 수 있는 새로운 학급 관리 방식을 교사가 배워야 한다(Tomlinson, 2005). 이러한 준비에 대한 부담으로 인해 차별적인 학습 과제를 사용하려는 많은 교

사들은 낮은 수준의 학생들을 위한 반복연습에 집중한다. 그러나 반복연습은 교실 관리를 용이하게 할 수도 있지만, 학생들이 더 높은 수준의 개념과 방법으로 학습할 기회를 빼앗는 것이다(Tieso, 2003). 그러므로 학급 내 수준별 수업이 성공적으로 이루어지기 위해서는 학습 내용에 대한 분석과 이에 따른 학습지를 세심하게 설계해야할 필요가 있다.

2.1.3 개별화 수업으로서의 수준별 수업

교육은 학생이 가진 잠재성을 최대한으로 발휘할 수 있도록 지원하는 계획된 활동이다. 이러한 점에서 수업을 계획할 때에 학생들의 흥미와 적성, 능력 등을 고려해야 한다는 것은 당연하다. 현재 우리나라에서는 문화적으로 다양한 학생들이 지속적으로 증가하고 있다. 또한 인간의 학습에 대한 새로운 인지연구들은 학생들이 각기 독특한 학습 선호와 강점을 가진 지능이 있음을 시사한다. 그리고 급속한 사회적·기술적 변화가 학습 방법에 영향을 미치고 있다. 이렇듯 과거 그 어느 때보다 더 많은 요인들이 교실이 변화하도록 지속적으로 영향을 미치고 있다. 이와 같은 다양성에 대처하고 학생 개개인의 잠재 능력을 발휘할 수 있는 학습기회를 제공하기 위해 개별화 수업이 제안되었다. 개별화 수업(differentiated instruction)은 학생들의 인지능력, 관심사, 개성의 차이뿐만 아니라 학습양식, 학습능력, 학습 환경 등의 차이까지도 반영한 수업이다(Tomlinson, 2005). 개별화 수업은 구성주의적 철학과 Gardner의 다중지능이론과 같은 지능의 다양한 접근을 바탕으로 발전하였고, 다음과 같은 내용을 전제로 한다.

• 학생들은 학습 특성(learning profiles)이 서로 다르다.
• 학생들이 능동적인 학습자, 결정권을 가진 학습자, 문제해결사로서 역할을 하는 교실이 획일적인 교육과정에 의해 지도되고, 학생들이 정보의 수동적인 수용자로 간주되는 교실보다 자연스럽고 효율적이다.(황윤한, 조영임, 2005, p.72)

학생들마다 학습 특성이 다르다는 가정은 학습활동과 학습 자료들을 학

생들이 도전할 수 있도록 그들의 학습 준비도 수준의 차이에 따라 난도를 다양화하고, 학생들의 흥미와 관심사에 따라 학습 주제를 다양화하며, 학생들이 선호하는 학습 방법에 따라 다양화해야 한다는 것을 시사한다(황윤한, 조영임, 2005).

개별화 수업은 주로 능력이 서로 다른 이질적인 집단을 편성하는 경우가 많지만, 학생들의 준비도 수준 내에서 동질성을 이루는 집단 편성을 하는 경우가 있다(황윤한, 조영임, 2005). 이러한 집단 편성은 상황을 고려하여 필요에 따라 구성할 수 있는 유연한 집단 편성(flexible grouping)이라고 부르기도 한다. 그러나 이것이 전통적인 수준별 수업의 또 다른 이름이라고 보기는 어렵다. 개별화 수업에서 집단 편성은 필요에 따라 구성했다가 해체할 수 있는 일시적이고 유연한 성질을 가진다. 그리고 집단에 학생을 배치할 때 학업성적뿐만 아니라 기능이나 흥미 중심으로 할 수도 있다. 또한 학생 배치가 교사에 의해 이루어질 수도 있고, 학생들의 선택에 따라 이루어질 수 있다(황윤한, 조영임, 2005; Tomlinson, 2005). 반면에 전통적인 수준별 수업은 집단 편성이 대체로 고정적이고, 주로 성적에 의해서만 학생배치가 이루어지며, 그렇기 때문에 학생이 집단을 선택할 수 없는 경우가 대부분이다. 이러한 특성들로부터 집단 간 상호작용에서도 차이가 있음을 짐작할 수 있다. 개별화 수업에서는 동질집단편성을 하더라도 집단 내외 모두 상호작용을 할 수 있도록 고려하지만, 전통적인 수준별 수업은 집단 내에서만 상호작용이 일어난다. 따라서 개별화 수업으로서의 수준별 수업은 필요에 따라 동질집단을 편성하여 학생의 능력에 적합한 수업을 한다는 취지는 살리면서 전통적인 수준별 수업의 문제점을 보완할 수 있다는 점에서 더 효과적인 수업 방식이라고 볼 수 있다.

이와 같은 맥락에서 수준별 수업의 방법에 대해 생각해보면 학급 내 수준별 수업이 학급 간 수준별 수업보다 개별화 수업에 적합한 수업 방법이라고 할 수 있다. 수준별 수업에 대한 비판은 주로 낮은 수준 학생들의 학업과 정서적 측면에 대한 것이고, 이는 유동적인 학급 내 수준별 수업을 통해 보완가능하기 때문이다.

학급 간 수준별 수업은 집단 편성이 가시적이고 지속되는 기간이 길기

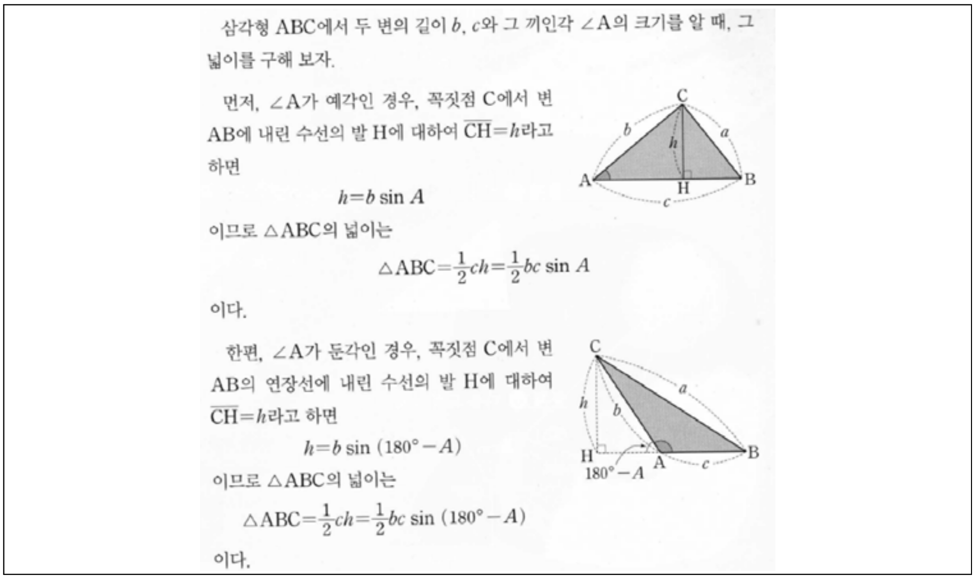
때문에 수준별 학급마다 교사와 학생 사이의 상호작용이 다르거나 학생들 사이에 위화감이 생길 수도 있다. 반면에 학급 내 수준별 수업은 개별화 맥락에서 과제에 따라 필요한 경우에만 실시하고, 학습 목표를 전체가 공유하며, 집단 내뿐만 아니라 집단 간에도 상호작용이 일어나기 때문에 그런 문제점들을 예방할 수 있다. 특히, 학급 내 수준별 수업은 학생들이 스스로 수준을 선택하도록 할 수 있다는 장점이 있다. 이것은 가시적인 반편성에 따른 위화감을 줄이고 학습자의 학습동기를 증진시키는데 도움이 된다. 소연희, 김성일(2005)은 자기 효능감 수준에 따른 과제 선택의 효과가 낮은 수준의 학생들에게 도움이 될 수 있음을 보여주었다. 학생들이 직접 과제를 선택하도록 했을 때, 자기 효능감이 높은 학습자들은 선택권 제공 여부에 상관없이 과제 흥미가 높은 반면, 효능감이 낮은 학습자는 자신이 선택할 수 있는 조건에 대한 과제 흥미가 높았다. 그리고 전반적으로 선택할 과제의 난도가 높은 경우에는 선택의 효과가 없었지만, 난도가 낮을 경우에는 직접 선택한 과제에 대한 흥미가 높다고 보고하였다. 노영순, 윤희송(2000)은 수준별 학습 과제를 구안하여 학생들이 스스로 과제를 선택하여 해결하도록 하였다. 그 결과 수학과 학업 성취도에서 전체적으로 유의한 변화를 보였으며 특히, 하위그룹의 학생들에게 긍정적이었다. 그리고 수학에 대한 흥미를 크게 높이지는 못하였으나 학습태도 신장에는 효과적이었다. 이와 같은 결과들을 학급 내 수준별 수업과 연결하여 생각해보면 학생이 자기 수준에 적절한 과제를 선택했을 경우, 과제 흥미가 높아져서 학습 효율이 증진될 수 있고, 이러한 효과는 효능감이 낮은 학생에게 더 클 것이라고 예상할 수 있다.

2.2 형식적 증명

수학 수업에서 수준별 지도가 필요한 상황의 예로 형식적 증명에 대해 살펴보고자 한다. 증명은 수학적 추론 능력을 향상시키고 반성적 사고를 개발할 수 있는 중요한 주제임에도 불구하고(서동엽, 1995), 학생들은 증명을 쓰는 것은 물론 이해하는 것도 어려워한다(나귀수, 1998; 서동엽,

2006; 장혜원, 강정기, 2014; Balacheff, 1988; Clements & Battista, 1992). 지금까지의 증명 교육은 주로 Euclid기하 중심으로 이루어졌으며, 연역적 추론, 증명의 엄밀함, 형식적 표현 등을 강조하였다. 그러나 이와 같은 증명 교육은 증명을 받아들일 준비가 충분히 되지 않은 학생들에게 제시할 경우 수학적 이해를 저해하고 사고를 메마르게 할 위험성이 크다는 점에서 예부터 많은 비판을 받아왔다. Thom(1971)은 어떤 정리의 진실 됨에 대한 신념의 최후의 판단은 직관에 의하며, 증명의 타당성을 평가하려면 증명에 포함된 기호의 의미와 그들을 결합하는 방법을 정확히 이해하면 충분하다고 하였다(우정호, 2006 : 327에서 재인용). Hanna(1983)는 수학적 활동에서 증명은 어떤 정리를 정당화하기 위한 수단일 뿐이며, 수학자들의 사회에서는 대체로 어떤 정리의 증명보다도 정리 그 자체의 의미와 가치를 더 중요하게 생각한다는 점을 들어, 엄밀한 증명이 수학적 활동의 가장 중요한 특징은 아님을 밝히고 있다. 엄밀함과 논리성을 중시했던 절대주의 수리철학관이 준경험적 수리철학에게 자리를 내어주면서, 정리의 의미와 증명의 아이디어 파악 및 증명 과정의 직관적 이해와 개관 가능성을 강조하는 방향으로 증명 교육의 흐름이 변화하였다(나귀수, 1998). 우리나라 교육과정에서도 2009 개정 수학과 교육과정부터 증명을 '이해'와 '설명'으로 약화시키고, 다양한 활동을 통해 증명의 필요성과 아이디어를 이해할 시간을 충분히 가지도록 권고하고 있다.

그럼에도 불구하고 수학교육자들은 학교 수학에서 형식적 증명을 완전히 포기하지 못하였으며, 예전과 비교하여 많이 줄어들기는 하였지만 여전히 교과서에도 형식적 증명이 제시되어 있다(그림 Ⅱ-1). 1959년 Royaumont 세미나에서 Euclid 기하를 비판하고 이를 대신할 선형대수적 접근이 제안되었지만, 동시에 Euclid 기하는 연역적 사고 방법을 훈련시키는 주요한 분야이기 때문에 완전히 삭제해서는 안 된다는 주장도 있었다(우정호, 2006: 319). 우정호(2006)도 일상적인 사고로부터 형식화된 사고로의 전이는 기하학적 사고를 통해 자연스럽게 일어나기 때문에, 수학적 사고의 정상적인 발달을 위해 Euclid기하 교육을 제거하는 것은 중대한 교육적 오류라고 지적하였다.



삼각형 ABC에서 두 변의 길이 b, c와 그 끼인각 $\angle A$의 크기를 알 때, 그 넓이를 구해 보자.

먼저, $\angle A$가 예각인 경우, 꼭짓점 C에서 변 AB에 내린 수선의 발 H에 대하여 $\overline{CH}=h$라고 하면

$$h=b\sin A$$

이므로 $\triangle ABC$의 넓이는

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}ch=\frac{1}{2}bc\sin A$$

이다.

한편, $\angle A$가 둔각인 경우, 꼭짓점 C에서 변 AB의 연장선에 내린 수선의 발 H에 대하여 $\overline{CH}=h$라고 하면

$$h=b\sin(180°-A)$$

이므로 $\triangle ABC$의 넓이는

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}ch=\frac{1}{2}bc\sin(180°-A)$$

이다.

[그림 Ⅱ-1] 교과서에 제시된 형식적 증명의 예

위의 논의를 종합해보자면 학교수학에서 증명 지도를 할 때 학생들이 증명의 아이디어를 탐색할 시간을 충분히 가지고 이해할 수 있도록 하되, 가능하다면 형식적 증명을 통해 과학과는 구분되는 수학적 추론의 특징을 할 수 있도록 해야 한다는 것이다. 그렇다면 귀납적 관찰에서 형식적 증명에 이르기까지 학생들은 어떤 사고과정을 거치게 되는가? 그리고 형식적 증명의 주요 표현 수단인 문자사용과 관련해서는 학생들이 어떤 어려움을 겪는지 살펴보고자 한다.

2.2.1 증명 수준 이론

(1) 전형식적(preformal) 증명

Branford는 증명의 수준을 실험적(experimental) 증명, 직관적(intuitional) 증명, 과학적(scientific) 증명의 세 범주로 구분하였다. 첫 번째 단계인 실험적 증명은 주로 감각에 의존하며 전 과정이 '구체적인' 단위로 측정되어 사례들을 나열하는 정당화의 수준이다. 그렇기 때문에 실험적 증명은 보편적이고 일반적인 것은 입증할 수 없지만, 원칙이나 일반적인 사실을 제안하는 기능은 할 수 있기 때문에 논의할 새로운 대상을

개발하는 생산적인 역할을 수행한다는 점에서 중요성을 가진다. 두 번째 단계인 직관적 증명은 일반적이고 보편적인 사실을 입증하지만 암암리에 필요할 때마다 감각적 경험에 의존하는 단계이다. 실험적 증명과는 달리, 직관적 증명에서는 감각 외에도 개념과 창조적인 통찰이 작용하기 때문에 보편성과 일반성을 어느 정도 확보하는 것이 가능하다고 할 수 있다. 세 번재 단계인 과학적 증명은 일반성이 확보된 사실들이 상호적으로 연결되는 체계화를 의미하는데, 공리나 다른 기본적인 정리들로부터 논리적인 추론만을 사용하여 완전하게 연역하는 수학적 증명이 여기에 해당한다(홍진곤, 권석일, 2004: 382에서 재인용).

Wittmann은 Branford가 제시한 증명에서 '증명이 아닌 것'과 '증명'의 구획은 실험적 증명과 직관적 증명 사이에서 이루어져야 한다고 하였다(홍진곤, 권석일, 2004: 382에서 재인용). 즉, 증명인 것과 아닌 것을 구별하는 일차적인 기준은, 그것이 형식적이고 연역적인 체계를 갖추고 있는가하는 점보다 그것이 '일반적이고 보편적인' 정당화에 도달하고 있는가 하는 점이 우선되어야 한다는 것이다.

홍진곤과 권석일(2004)은 Branford와 관련 선행연구들을 바탕으로 전형식적 증명을 다음과 같이 정의하였다.

- 특수한 사례만이 아니라 일반적이고 보편적인 사실을 정당화한다.
- 증명의 대상은 완전히 형식적으로 추상화되지 않아서 감각으로 지각할 수 있다.
- 증명에 사용되는 언어는 형식적 증명에서 기능하는 논리적 언어를 제외한, 일상 언어나 구체적으로 조작 가능한 그림 등의 대상이 사용된다.

이러한 전형식적 증명은 형식적 증명의 언어를 사용할 수 없는 학생들에게도 그들이 조작할 수 있는 대상만으로 일반성을 확보한 내용의 정당화가 이루어질 수 있다는 점에서 교수학적 가치가 있다. 또한 형식적 언어를 사용할 수 있는 학생들에게도 증명의 아이디어나 정리의 의미를 파악하는 단계에서 학습을 돕는 역할을 할 수 있다.

(2) Miyazaki의 증명 수준 이론

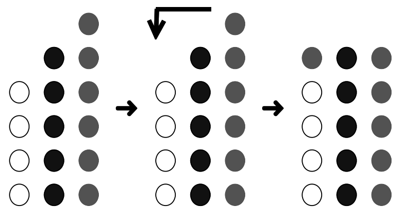
Miyazaki(2000)는 Balacheff의 이론을 바탕으로 증명 수준 이론을 구분하였다.

먼저 Balacheff의 이론을 간략히 살펴보면, Balacheff는 세 개의 축에 기초하여 증명의 수준을 세 단계로 설정하였다. 개념의 특성(nature of conceptions), 형식화(formulation), 비준(validation)이 축이 되고, 이를 기준으로 증명을 수준을 실용적 증명(pragmatic proofs), 지적 증명(intellectual proofs), 논증(demonstration)으로 구분하였다. 가장 낮은 수준인 '실용적 증명'은 "실제 행동이나 보여주기를 통한 것"으로 순박한 경험적 방법(naive empiricism)과 결정적인 실험(crucial experiment)을 포함한다. 예를 들어, "다각형의 대각선의 개수는 $\frac{n(n-3)}{2}$이다"라는 추측을 증명할 때, 20각형에 대해 참이라면 임의의 경우에도 추측이 참일 것이라는 생각에 근거하여 학생들은 짝을 지어 20각형에 대해 추측이 참임을 확인한다. 이것은 '결정적인 실험'하에 나온다. 중간 수준인 '지적 증명'은 "행동이 관여하지 않고 질문에 있는 성질들의 공식이나 그들 사이의 관계에 기초하는 것"으로, 두 가지 유형의 증명, 즉, 포괄적인 예(generic example)와 사고 실험(thought experiment)을 포함한다. 예를 들어, 학생이 각 꼭짓점이 $n-3$개의 대각선을 가지는 이유와 $n(n-3)$을 2로 나누는 이유를 설명하는 것이다. 이것은 '사고 실험'하에 나온다. 가장 높은 수준인 '논증'은 이론에서 조직되고, 정의, 정리, 연역 규칙의 정당성을 사회적으로 공유한 공동체에 의해 인정받아야 하는 지식의 구체적인 상태를 요구한다(Miyazaki, 2000: 49에서 재인용).

Miyazaki(2000)는 Balacheff의 아이디어를 토대로 '내용(contents)'과 '표현(representation)', '학생의 사고 과정(students' thinking)'을 기준으로 증명의 수준을 구분하였다. 먼저 내용의 축에는 '귀납 추론'과 '연역 추론'으로 나누고, 표현의 축에는 '논증의 기능적 언어'와 '그림이나 조작 가능한 대상 등 다른 언어'로 나누어 증명의 기본 수준을 네 가지로 설정하였다(증명 A, 증명B, 증명C, 증명D). 증명 A는 논증의 기능적 언어를 사용하는 연역 추론, 증명 B는 조작 가능한 대상을 이용한 연역 추론, 증명

C는 조작 가능한 대상을 이용한 귀납 추론, 증명 D는 논증의 기능적 언어를 이용한 귀납 추론이다. “연속된 세 수의 합은 가운데 숫자의 세 배이다”라는 명제에 대한 각 증명의 예를 살펴보면, 증명 A는 가장 높은 수준으로 ‘$n-1$, n, $n+1$을 연속된 세 수라고 하자. $(n-1)+n+(n+1)=3n$’과 같이 가정에서부터 증명해야 하는 명제까지 연역 추론으로 구성된다. 그리고 논증의 기능적 언어에 해당하는 대수적 형식 언어로 표현된다. 증명 B는 [그림Ⅱ-2]의 (a)와 같이 구체적인 사물을 조작하지만 그 변형 과정에는 가정으로부터의 연역 추론이 포함된다. 구체적인 사례를 이용하기는 하지만 연역추론을 한다는 점에서 어느 정도 일반성과 보편성을 가질 수 있기 때문에 Branford의 구분 중 직관적 증명과 관련이 깊은 것으로 보인다. 증명 C는 귀납 추론으로 이루어져 있고, 숫자(‘9’, ‘577’ 등)와 연산 기호(‘+’, ‘•’ 등), 관계 기호(‘=’), 연산이나 수학의 용어(‘연속하는 숫자들’)로 표현된다(그림Ⅱ-2(b)). 등호 표시는 논증의 기능적 언어로 사용

(a)



구슬 4개, 5개, 6개로 된 세 줄을 만든다. 구슬 6개인 줄에서 가장 위의 구슬을 4개인 줄로 이동하면, 각 줄에 놓인 구슬의 수는 모두 5개로 같아진다.

(b) $3+4+5=3 \cdot 4$, $7+8+9=3 \cdot 8$, $569+570+571=3 \cdot 570$
따라서 연속된 세 수의 합은 가운데 수의 세 배이다.

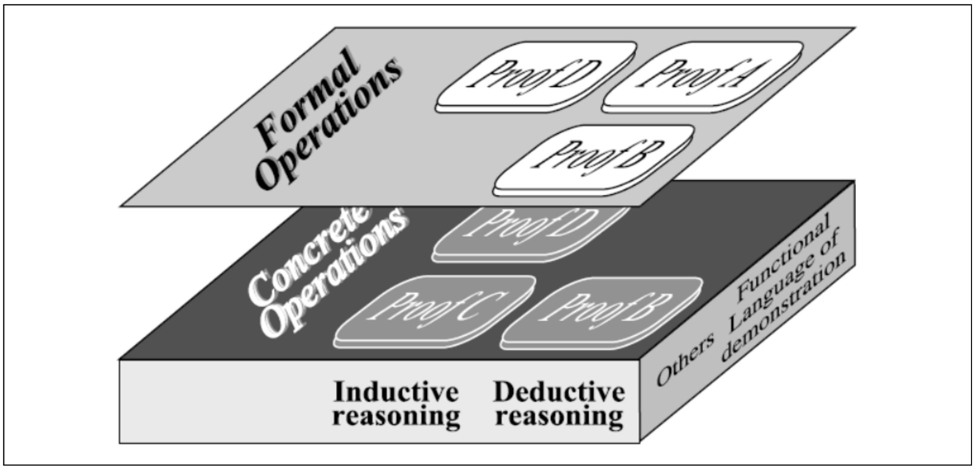
(c) $a+b+c=3b$(a, b, c는 연속된 세 수)
$e+f+g=3f$(e, f, g는 연속된 세 수)
$i+j+k=3j$(i, j, k는 연속된 세 수)
따라서 연속된 세 수의 합은 가운데 수의 세 배이다.

[그림Ⅱ-2] 각 수준별 증명의 예(Miyazaki, 2000: 54-55)

된 것이 아니라 단지 산술의 결과를 나타내는 기호로서 사용되었다. 증명 D에서 서로 다른 기호는 서로 다른 숫자를 나타낸다(그림Ⅱ-2(c)). 기호를 배열하는 규칙은 맞지만, 문장을 배열하거나 축약하는 규칙을 사용한 증명

은 아니다.

여기에 학생이 추론 과정에서 구체적 조작을 이용하는지, 형식적 조작을 이용하는지에 따라 증명 수준을 이론적으로 총 8가지로 구분할 수 있지만, 증명 A와 증명 D는 ‘구체적 조작에서의 증명 X’와 ‘형식적 조작에서의 증명 X’와 같이 구분하지 않는다. 결과적으로 총 6가지의 증명 수준이 있으며, Miyazaki는 ‘증명 C → 구체적 조작에서의 증명 B → 형식적 조작에서의 증명 B → 증명 A’의 순서로 지도할 것을 제안하였다. 특히, ‘구체적 조작에서의 증명 B’와 ‘형식적 조작에서의 증명 B’의 차이를 이해하는 것이 증명의 수준 상승에 중요한 역할을 할 수 있다고 하였다.



[그림Ⅱ-3] 증명의 여섯 수준(Miyazaki, 2000: 64)

‘구체적 조작에서의 증명 B’는 Balacheff가 말한 포괄적 예에 해당한다. ‘구체적 조작에서의 증명 B’는 활동에서 연역적 추론을 하고, ‘형식적 조작을 이용한 증명 B’를 통해 ‘증명 A’로 성장한다. 포괄적 예는 귀납 관찰에서 연역 추론으로 발전하는 중간 단계가 될 수 있으며, 개별 사례들의 불변성을 인식하고 일반화할 수 있는 계기가 될 수 있다는 점에서 중요한 의미를 가지고 있다고 생각한다. 이 연구가 주는 시사점은 추론의 방식과 더불어 표현의 방법(논증 언어, 그림이나 조작 가능한 대상)이 학생의 증명 수준에서 중요한 역할을 할 수 있다는 것이다.

(3) van Hiele의 기하 사고 수준 이론

증명 수준에 대한 대표적인 이론으로 van Hiele의 기하적 사고 수준을 꼽을 수 있다. 그는 아동의 기하 사고 수준이 다음과 같은 다섯 수준으로 구분된다고 하였다.

- 제 0 수준 : 주변 대상을 모양에 의해 파악하는 단계로 기본적인 도형을 그 구성 요소에 대한 명확한 고려 없이 전체로서의 시각적 외관에 의해 판별한다.
- 제 1 수준 : 주변 대상의 정리 수단이었던 모양이 연구의 대상이 되어 도형의 구성 요소와 성질에 대한 비형식적인 분석을 통해 도형을 파악한다.
- 제 2 수준 : 도형의 성질과 도형 사이의 관계가 연구의 대상이 되고 명제가 정리 수단이 된다. 도형의 여러 가지 성질 및 도형 사시의 관계를 파악하고 정의를 이해한다. 그러나 도형의 성질을 논리적으로 증명하지는 못한다.
- 제 3 수준 : 명제가 연구의 대상이 되며 명제 사이의 논리적 관계가 정리 수단으로 등장하여 공리, 정의, 정리, 증명의 의미와 역할을 이해하며 전체 기하의 연역 체계를 파악한다. 그러나 엄밀한 증명의 필요성을 깨닫지 못하며 다른 공리 체계의 가능성을 이해하지 못한다.
- 제 4 수준 : 기하학 체계 그 자체가 연구의 대상이 되어 여러 가지 공리 체계를 비교할 수 있고, Hilbert 류의 기하의 형식적 엄밀성을 파악한다.(우정호, 2006, p.310)

van Hiele 이론의 특징은 첫째, 학습은 불연속적인 과정이며, 비약이 있다는 것이다. 이것은 증명의 사고 수준이 질적으로 차이가 있는 이산적이라는 것을 나타낸다. 둘째, 수준은 순차적이고 위계가 있다. 높은 수준의 사고를 충분히 하기 위해서는 더 낮은 수준을 충분히 익혀야한다. 그리고 다음 수준으로의 진보는 생물학적 성숙보다는 교수에 더 많이 의존한다. 교사는 학습 자료의 수준을 낮추어 기계적인 암기를 하도록 할 수 있지만, 학생들은 수준을 건너뛰어 이해할 수 없다. 이해를 위해서는 특정한 교육 단계를 거쳐야 한다. 셋째, 한 수준에서 암시적으로 이해된 개념은 그 다

음 수준에서 명시적으로 이해된다. 넷째, 각 수준은 그 자신만의 언어를 가지며, 언어 구조는 수준의 이행의 결정적인 요소이다. van Hiele는 각 수준은 각자의 언어적 기호와 이 기호들을 연결하는 관계 체계가 있고, 이 관계는 어떤 한 수준에서는 '참'일 수 있지만 다른 수준에서는 참이 아닐 수 있다고 하였다. 이 때문에 서로 다른 수준에서 추리하는 두 사람은 서로를 이해할 수 없다(Clements & Battista, 1992).

van Hiele는 위의 수준 이론을 일반화하여 모든 수학 이해에 적용된다고 주장하면서 수학적 사고 수준을 시각적 수준, 기술적/분석적 수준, 추상적/관계적 수준, 형식적 연역 수준, 엄밀함의 수준으로 구분하였다(서동엽, 1995). 따라서 van Hiele의 증명 수준 이론이 문자식을 사용한 증명에 똑같이 적용되지 않는 부분이 있을 수도 있지만, 이로부터 알 수 있는 사실은 증명 사고에 수준이 있고, 각 수준에서 사고하는 방식이나 다음 단계로의 진보에 언어가 중요한 역할을 할 수 있다는 것이다. 그리고 van Hiele의 주장처럼 서로 다른 수준에서 추리하는 사람이 서로를 이해할 수 없다면, 다양한 수준을 가진 학생들에게 일률적으로 증명을 지도하는 것은 지양되어야 할 것이다.

2.2.2 문자 이해 수준

Küchemann(1981)은 영국의 13, 14, 15세 학생들을 대상으로 대수영역에서 문자의 사용에 따른 문자 이해 수준을 설정하였다. 그는 학생들의 대수 문제 풀이를 관찰하여 문자를 사용하는 방법을 총 여섯 가지로 나누었다.

첫 번째 유형은 문자의 수치화(Letter evaluated)이다. 이 유형의 학생은 처음부터 문자에 수치적 값을 할당한다. 미지수에 대한 구체적인 값을 찾도록 하는 문제와 관련이 있지만, 미지수를 조작하는 것은 아니다. 예를 들어, $a+5=8$에서 a의 값을 익숙하게 알고 있는 덧셈 식을 떠올리거나 5에서부터 8이 될 때까지 하나씩 세어나가는 방법으로 푸는 것이다. 두 번째 유형은 문자를 사용하지 않는 것(Letter not used)이다. 이 경우 학생들은 문자를 무시하거나, 문자의 존재를 인정하더라도 의미는 부여하지 않

는다. 예를 들어, $a+b=43$일 때, $a+b+2$의 값을 찾는 문제에서 $+2$에만 초점을 맞추어 단순히 43에 2만 더하여 답을 구한다. 이 때 문자에 대해 조작하거나 의미를 부여하는 과정은 없다. 세 번째 유형은 문자를 구체적인 대상으로 여기는 것(Letter used as object)이다. 이 것은 문자를 약칭이나 구체적인 대상 그 자체로 여기는 것이다. 이 유형의 학생들은 $2a+5a$를 apple 2개와 apple 5개를 합하여 7개가 된다는 과정을 거쳐 $7a$라고 답한다. 이와 같은 해석을 하는 학생들은 대상 그 자체와 수(number) 사이의 구분이 잘 되지 않아, '1 실링은 12펜스와 같다'는 관계를 $s=12p$로 쓰기도 한다. 네 번째 유형은 문자를 특정한 미지수로 생각하는 것이다. 앞의 세 유형은 모두 일반화된 산술을 회피하는 경우이지만, 이 경우는 다소 원시적이더라도 문자를 알려지지 않은 구체적인 숫자로 보며, 직접 문자를 조작할 수 있다. 예를 들어, '$3n$에 4를 더하라'와 같은 문제에 n을 미지수로 해석하여 $3n+4$라고 답할 수 있다. 다섯 번째 유형은 문자를 일반화된 수로 여기는 것(Letter used as a generalised number)이다. 이 유형의 학생들은 문자를 여러 가지 값을 나타내는 것으로 사용하거나 받아들일 수 있다. '$c+d=10$이고 c가 d보다 작은 경우, c에 대해 알 수 있는 것은?'이라는 문제에서 c가 다양한 값을 가질 수 있다는 것을 파악할 수 있다($c<5$, $c=1$, 2, 3, 4). 이를 이해하지 못한 학생은 $c=4$와 같이 하나의 값만 찾았다. 마지막으로 여섯 번째 유형은 문자를 변수로 사용하는 것(Letter used as a variable)이다. 이 유형의 학생들은 문자를 구체적이지 않은 값의 범위를 나타내는 것으로 보며, 두 집합 사이의 관계를 나타내는 것으로 본다.

일반적으로 처음 세 범주는 낮은 수준이다. 대수 학습이 이루어지는 초반에, 문제 구조가 간단한 경우, 문자를 구체적인 미지수로 사용해야 하는 경우가 있다. 그러나 대부분의 학생들(13-15세)이 이에 실패하였고 주로 낮은 수준의 세 범주 중에 하나로 문자의 의미를 해석하였다. 그리고 아주 적은 수의 학생들이 문자를 변수로 해석하는 높은 수준에 도달했다.

Küchemann은 문자를 특정한 미지수로 해석할 수 있느냐를 기준으로 문자의 이해 수준을 크게 두 가지로 나누었다. 즉, 첫 번째는 문자를 무시

하거나, 문자에 임의로 수치적인 값을 넣거나, 대상의 이름으로서 사용하는 것이고, 두 번째는 특정한 미지수나 일반화된 수로 문자를 사용하는 것이다. 각 분류는 문항의 복잡성의 인지적 요구에 따라 각각 둘로 나누어져, 문자 이해 수준은 총 4단계가 된다. 또한 Küchemann은 각 수준을 Piaget의 인지 발달 단계와 연결하였는데, 수준 1은 구체적 조작 단계 후기 이전, 수준 2는 구체적 조작 단계 후기, 수준 3은 형식적 조작 단계 초기, 수준 4는 형식적 조작 단계 후기와 대응한다고 하였다(표Ⅱ-2).

각 수준의 특징은 다음과 같다. 수준 1은 구조가 간단한 문제에서 문자를 구체적 대상으로 여기거나, 수치를 대입하거나 또는 아예 문자를 사용하지 않고 해결한다. 즉, 가장 낮은 수준의 문자사용인 첫 번째, 두 번째,

<표Ⅱ-2> Küchemann의 문자 이해 수준과 Piaget의 인지발달단계

구분 기준(문자 사용 방법)	문자 이해 수준	Piaget 인지발달 단계
문자 무시, 임의로 수치 부여, 대상의 이름	수준 1	구체적 조작 단계 후기 이전
	수준 2	구체적 조작 단계 후기
구체적인 미지수, 일반화된 수	수준 3	형식적 조작 단계 초기
	수준 4	형식적 조작 단계 후기

세 번째에 해당한다. 수준 2는 문자를 사용하는 유형은 수준 1과 다르지 않으나, 조금 더 복잡한 구조의 문제를 같은 방법으로 해결한다. 그리고 여러 개의 항으로 이루어진 식의 형태를 받아들일 수 있다. 즉, $3a+5b$를 $8ab$라고 고치지 않고 답으로 받아들인다. Collis는 이를 '완전성의 결여 수용'이라고 하였다. 수준 3은 문제 구조가 간단한 상황에서 문자를 구체적인 미지수로 사용한다. 이 수준의 학생들은 $8+g$와 같은 식을 문자를 숫자나 구체적인 대상으로 생각하지 않고도 의미 있는 것으로 여길 수 있다. 수준 4는 구조가 복잡한 문제에서 문자를 구체적인 미지수로 다룰 수 있을 뿐만 아니라, 일반화된 수나 변수로서 사용할 수 있다. 다시 한 번 정리하면, 문자를 구체적인 미지수로 사용할 수 있는지 여부에 따라 수준 1과 수준 2, 그리고 수준 3과 수준 4의 더 큰 수준으로 구분할 수 있다. 그리고 문제 구조의 복잡성에 따라 그 안에서 수준 1과 수준 2가 구분되고, 수준 3과 수준 4가 구분된다.

Küchemann이 13-15세 학생들을 대상으로 대수 시험을 실시한 결과 학생들 대부분이 수준 1과 수준 2에 해당하였다(각각 73%, 59%, 53%). 따라서 수업 시간에 구체적인 대상을 이용한 자료를 활용하여 더 높은 단계로 나아갈 수 있게 해야 한다고 주장하였다. 그리고 2년 뒤에 다시 한 번 시험을 실시하여 지능에 따른 수준 향상을 비교하였다. 그 결과 지능이 높을수록 높은 단계의 이해 수준의 비율이 높고, 수준이 향상되는 정도도 더 큰 것을 확인하였다(Hart, 1981). 이러한 결과를 바탕으로 Hart는 학생들을 연령에 따라 한 학급에서 지도하는 것은 바람직하지 않다고 주장하였다.

이후 Macgregor와 Stacey(1997)는 호주의 중학생 약 2000명을 대상으로 Küchemann의 문제를 각색하여 학생들의 문자 이해 실태를 조사하였다. 그 결과 학생들이 문자 이해에 어려움을 겪는 원인이 지능뿐만 아니라 직관과 추측, 학생들이 알고 있는 다른 기호 체계와의 유사성, 오해의 소지가 있는 학습 자료로 인한 잘못된 기초에도 원인이 있기 때문에, 적절한 지도에 의해 어느 정도는 극복이 가능하다고 하였다.

Hart의 주장처럼 학생들의 학습 능력이 전통적인 지능에 의해 결정되는 것은 아니겠지만, 학생들 마다 인지 발달의 속도에 차이가 있다는 증거는 될 수 있을 것이다. 그리고 학생들 간의 차이가 나타나는 원인은 Macgregor와 Stacey가 지적했던 것처럼 학생들의 직관, 선행 경험, 잘못된 교수 방법에서 찾는 것이 바람직할 것이다.

우리나라 학생들의 문자 이해 실태에 대한 연구도 다양하게 이루어졌다. 김남희(2001)는 학교수학에서 변수를 단순한 자리지기로 규정하고 있어, 다가이름으로서의 변수 사용이 의미 있게 지도되지 못하고 있는 점을 지적하였다. 이종희, 김부미(2003)는 중학교 3학년 학생들이 문자와 식, 방정식, 함수에 대한 문제 해결과정에서 미지수, 변수, 매개변수로 사용되는 문자의 의미를 어떻게 이해하고 있는지 조사하였다. 그 결과 문맥을 파악하여 언어로 표현하는 것보다 연산에 근거한 기호조작의 결과로 표현하는 것을 선호하는 경향이 있으며, 구문론적 조작 수준에 비해 의미를 이해하는 수준이 낮다고 하였다. 임만석(2007)은 중학교 2, 3학년 학생 182명을

대상으로 변수 개념 이해 실태를 조사하였다. 자리지기로서 변수의 의미를 이해하는지 측정하는 문항에서 중2, 중3 학생들이 각각 23.21%, 28.57%의 정답률을 보였고, 패턴을 일반화하는 변수의 의미를 이해하는지 측정하는 문항에서는 각각 0.89%, 1.43%의 정답률을 보였다. 매우 많은 학생들이 일반화의 의미로 문자를 이해하는 것을 어려워한다는 것을 알 수 있다. 강소희, 방정숙(2008)은 초등학교 6학년 학생 292명을 대상으로 문자 이해 실태 조사를 하였다. 그 결과 Küchemann의 문자 이해 수준 2 이하에 해당하는 학생이 32.9%, 수준 3이 40.1%, 수준 4가 18.8%의 결과를 나타내었다. 강정기(2014)는 중학교 3학년 학생들이 문자를 사용한 대수 문제 풀이의 일반성을 인식하는지 여부를 조사하고, 학생들의 이해를 높이기 위한 세 활동을 제시하였다. 일반성 인식 조사 결과 20명 중 70%의 학생들이 일반성 인식 결여를 나타내었다. 문자의 일반성에 대한 이해를 높이기 위한 활동으로는 구체적인 수를 직접 대입하여 결과가 동일함을 확인하기, 서로 다른 수를 각각 다른 문자로 나타내어 풀이하여도 해법이 동일함을 확인하기, 변수의 임의성 확인하기를 제시하였다. 그리고 4명을 대상으로 활동을 한 후 1명은 인식 전환 실패, 2명은 점진적 인식 개선, 1명은 급진적 인식 개선을 보였다고 하였다. 같은 활동을 하더라도 학생들마다 이해 속도에 차이가 있음을 알 수 있다.

위의 연구 결과들을 Küchemann의 문자 이해 수준에 비추어 해석해보면 우리나라의 많은 학생들이 수준 4(일반화와 변수로서의 문자)에 도달하지 못했음을 알 수 있다. 그리고 강소희, 방정숙(2008)의 연구는 초등학교 6학년 학생을 대상으로 한 것이지만, 중학교 3학년 학생들도 문자식 조작 기능에 비해 문자 이해 수준이 떨어진다는 연구 결과(이종희, 김부미, 2003)와 연결 지어 생각해보면, 문자 이해 수준 2 이하에 해당하는 중학생들도 상당수 존재할 것이라고 짐작할 수 있다. 교과서에는 수준 4에 해당하는 표현이 많다는 점을 고려해볼 때, 증명에서 문자를 사용하여 표현되는 내용을 학생들이 이해하는데 큰 어려움이 있을 것이다.

수학에서 많은 증명들이 문자를 이용하여 이루어진다. 이 때 사용되는 문자들은 Küchemann의 수준 4에 해당하는 일반성과 변수의 성격을 가진

다. 그러나 앞에서 언급한 연구들에 의하면 절반이 넘는 학생들이 그러한 의미를 이해하지 못한다는 것을 알 수 있다. Hart(1981)는 수준 3 후반이나 수준 4 전체에서 나타나는 수학 사고의 유형은 추상화와 문제 풀이의 전략 등을 다루는 것이고, 이것은 전문 수학자들에 의해 인식되는 것이라고 하였다. 반면에 초기 수준은 사회적 산술이나 수학적 소양의 형태로 여겨진다. 학생들은 나이가 들어감에 따라 수준이 향상되었지만, 학생에 따라 향상의 정도에 차이가 있었다(Hart, 1981). 즉, 같은 나이의 학생이라고 하더라도, 그들의 이해수준은 상이하며, 수준 4를 목표로 진행되는 수업에서 더 낮은 수준의 학생일수록 더 많은 양의 학습을 해야 한다는 것을 알 수 있다. 특히 문제의 구조가 복잡할수록 모든 학생들이 추상적이고 형식적인 표현을 하는 것은 불가능하다. 오히려 교실에서 절반의 학생들은 추상적인 내용에서 그들이 만들어 낼 수 있는 것이 없기 때문에 수업 내용을 무시할 것이다(Hart, 1981). 따라서 구조가 복잡한 증명을 지도할 때에는 학생들의 이해 수준을 고려하여 수준별로 지도해야 한다.

Ⅲ. 형식적 증명의 수준별 지도

3.1 형식적 증명의 수준별 지도의 필요성

앞에서 살펴본 증명 수준 이론들은 학생들이 증명을 할 때 어떤 방식으로 사고하는지, 귀납적 관찰에서 형식적 증명에 이르기까지 사고의 발전방향과 특징을 설명한다. 참인 명제를 접했을 때, 학생들은 구체적인 대상을 관찰하고 확인하는 것에서 시작하여, 점차 사례들 간의 공통점을 파악하고 활동들 사이의 관계를 연역적으로 추론하여 일반성을 인식한다. 나아가 일부 학생들은 형식적 언어를 사용하여 수학적 증명을 할 수 있게 된다. 활동들 사이의 관계를 연역적으로 추론하게 되더라도 그것을 표현하는 것은 별개의 문제가 될 수 있는데, 문자를 사용한 형식적 표현은 가장 높은 수준에 해당하는 것으로 조건을 만족하는 모든 경우에 대한 일반성과 추상성을 내포한다. 이러한 과정들은 위계적이고 순차적인 성격을 가진다. 특히 가장 마지막 단계로의 수준 상승이 가장 어렵고 격차가 큰 것으로 보인다. 귀납적 관찰과 수학적 증명 사이에는 논리적으로도 심리적으로도 큰 간극이 있을 뿐만 아니라 문자를 사용한 형식적 표현도 이해할 수 있어야 하기 때문이다. 우정호(2006)는 '수학적 증명은 학생들이 그 전까지 학습한 수학의 내용과 근본적인 수준의 차이가 있으며, 그에 대한 학습은 학생들의 수학에 대한 인식의 구조적 변화를 요구한다.'라고 하였다.

수학적 증명은 '증명된 정리의 가정을 만족하는 모든 경우는 참이다', '한두 가지 특별한 예를 확인하는 것으로는 정리를 증명할 수 없다'는 과학과 구분되는 수학적 사고를 발달시킬 수 있다는 교육적 가치를 가지고 있다(우정호, 2006). 하지만 증명에서 요구되는 일반적, 추상적 사고에 도달하는 것은 대부분의 학생들에게 매우 어려운 일이며, 앞에서 살펴본 증명 학습에 대한 선행연구들이 그 근거가 된다. 따라서 형식적 증명을 수행할 준비가 되지 않은 학생들에게는 전형식적 증명을 통해 증명의 일반성을 직관적으로 이해할 수 있는 기회를 제공하는 것과 함께, 형식적 증명의 수준으로 나아갈 수 있는 토대를 마련해 주어야 한다.

형식적 증명은 일반화하는 사고 과정뿐만 아니라 일반적이고 추상적인 형식 언어를 이용하여 표현해야 한다. 실제로 교과서에 있는 수학적 명제 대부분이 문자를 포함한 일반화된 형태로 쓰여 있다. 학생들이 전형식적 증명 활동을 하더라도 결국 문자를 사용한 일반적이고 추상화된 표현을 어느 정도 할 수 있도록 지도해야한다. 실제로 연구자가 교사로 학생을 지도할 때, 학생들이 정리에 대한 직관적인 아이디어를 대충 설명하는 것을 큰 어려움 없이 하면서도 막상 그것을 써보라고 했을 때는 주저하는 것을 흔히 보았다. 형식적 증명에서 형식적 언어를 사용하여 표현하는 것은 일반화하는 사고와 곧바로 연결되지 않을 수도 있기 때문에 증명지도를 할 때에는 사용하는 언어에 대한 지도도 필요하다.

3.2 형식적 증명의 수준별 수업의 실제

3.2.1 단원선정

수업 실험을 위한 단원으로 중학교 3학년 과정의 이차방정식의 근의 공식을 선정하였다. 완전제곱식을 이용한 이차방정식의 풀이과정을 문자를 사용하여 나타낸 결과가 근의 공식이다. 문자식을 사용한 형식적 증명은 현실에서 그에 대응하는 조작 가능한 대상을 찾는 것이 불가능한 경우가 많다. 기하의 경우 도형을 그리고 조작해봄으로써 명제를 시각적으로 확인해보는 것이 가능하지만, 대수에서의 문자식을 사용한 형식적 증명의 대부분은 그림이라는 보조수단을 사용할 수 없다. 예를 들어, '원의 중심과 현의 수직이등분선 사이의 관계'를 증명하기 전에 색종이를 접어보고 직접 길이를 비교해 본다거나, 그림을 그려볼 수도 있다. 반면에 '이차방정식의 근의 공식'을 유도하기 위해서는 '$x^2-6x-3=0$', '$3x^2+4x-2=0$'과 같이 계수가 결정된 특정한 식 외에 다른 마땅한 조작 가능한 대상이 없다. 이런 경우 도형이 직관적으로 관찰 가능한 것과는 대조적으로, 특정한 식을 조작하는 것 자체가 또 하나의 학습 요소이기 때문에 학생들에게는 어려움의 원인이 될 수 있다. 그리고 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에는 사용되는 문자의 수가 많고(a, b, c, x), 그 문자들의 의미는 두 가지 맥락으로 분류

된다. a, b, c는 다가이름으로서의 맥락을 갖는 일반화된 문자이고, x는 자리지기로서의 맥락을 갖는 미지수이다. 그리고 유도 과정에는 완전제곱식으로 고치기 위해 필요한 항을 찾는 가역적 사고가 필요하고, 분수 형태의 문자식이 나오는 등 문제의 구조가? 복잡하다. 이러한 점들을 고려했을 때 근의 공식을 유도하는 과정은 수준별로 지도하는 것이 적합하다고 할 수 있다.

근의 공식 유도에서 예상되는 어려움은 첫째, 공식의 일반성에 대한 인식 부족이다. 근의 공식은 어떤 이차방정식에도 적용할 수 있지만, 학생들은 인수분해를 이용한 풀이방법과는 다른 별개의 풀이방법으로 생각하는 경향이 있다. 실제로 연구자가 교사로 학생을 지도할 때, 인수분해가 가능한 이차방정식에 대해 근의 공식을 적용할 수 없다고 답하는 학생들을 종종 관찰할 수 있었다. 두 번째 어려움은 문자식 조작이다. 숫자로 사칙연산을 하면 계산 결과가 하나의 숫자로 나오는 반면에, 문자로 사칙연산을 하면 연산 기호로 연결된 문자식의 형태가 된다. 예를 들어, Küchemann의 문자 이해의 수준 1, 수준 2의 학생들은 '완전성의 결여 수용'이 불가능하기 때문에 b^2-4ac와 같은 식을 이해할 수 없다. 게다가 유도 과정에 분수 형태의 문자식이 포함되어 계산이 진행될수록 식이 더 복잡해진다. Skemp(2000)는 수학을 학습하는데 진전이 있으려면, 기본적인 과정들은 자동적으로 이루어져서, 학습하려는 새로운 아이디어에 집중할 수 있도록 자유로워지는 것이 필수적이라고 하였다. 문자식의 조작이 자동적으로 이루어지지 않는다면 근의 공식을 유도하는 과정에 계속적으로 집중할 수 없고, 이는 증명 과정의 이해를 저해하는 요소로 작용하게 된다. 세 번째 어려움은 완전제곱식의 사용이다. 근의 공식을 유도할 때는 완전제곱식으로 고치기 위해 처음에 없던 항을 양변에 더해야 한다. 보통 방정식을 풀 때는 양변에 같은 수를 나누거나 이항하여 정리하는 등 항의 수를 줄여가는 방향으로 진행된다. 그러나 이 경우에는 오히려 없던 것을 만들어서 양변에 더해야하는 것으로 일반적으로 방정식을 풀었던 것과는 다르며, 완전제곱식을 잘 사용하지 못하는 학생들에게는 상수항을 찾는 것도 어려운 일이다. 더군다나 문자를 사용하면 상수항이 분수의 형태가 되기 때문에

문자사용이 미숙한 학생들에게는 굉장히 어려운 작업이라고 할 수 있다. 이처럼 이차방정식의 근의 공식을 유도하는 과정은 수준에 따라 예상되는 어려움이 구분되고 그에 따라 사고를 발전시킬 수 있는 가능성이 달라지기 때문에 수준별 지도가 필요하다.

3.2.2 학습 준비도에 따른 수업 설계

수업의 전반적인 진행은 다음과 같이 이루어진다. 먼저 전체 교실 수업 상황에서 근의 공식에 대해 소개한다. 이때 공식만 언급하고 어떻게 이런 공식을 얻을 수 있는지에 대해 탐구하는 것이 수업의 목표임을 알린다. 그 후 자신의 선행학습 이해정도와 문자 이해 수준에 따라 학습지의 수준을 스스로 선택하고, 같은 학습지를 선택한 학생끼리 모여 학습지를 푼다. 활동이 끝나면 다시 각자의 자리로 돌아가 근의 공식 유도와 관련 내용을 수준별로 정리하는 시간을 갖는다. 이와 같은 수업 진행은 개별화 수업의 취지에 따른 것이다. 고전적인 수준별 수업이 능력별로 집단을 형성하고 집단 간 교류가 없는 반면, 개별화 수업에서는 필요에 따라 동질 집단을 운영하더라도, 학급 전체가 공동의 학습 목표를 인식하고 다른 집단과도 함께 공부할 수 있는 기회를 강조한다(황윤한, 조영임, 2005).

학습지 수준은 Branford와 Miyazaki의 증명 수준에 따라 크게 세 수준으로 구분하였다. 먼저 학습지A(하 수준)는 Branford의 실험적 증명, Miyazaki의 증명C에 해당한다. 이 수준의 학생들은 일반화 능력이 부족하여 각각의 예시들을 확인하기 때문에 문자를 사용한 형식적 증명을 구성하거나 이해하는데 어려움이 있다. 그리고 문자사용에 있어서도 문자를 무시하거나 또는 수치화하여 생각하기 때문에 문자로 표현된 공식의 사용이나 의미 이해에 어려움을 겪을 수 있다. 실제로 예비실험에서 하 수준에 해당하는 학생들은 문자를 사용하여 공식을 유도하는 과정을 전혀 수행하지 못했다. 이런 경우 학생들을 다음 수준으로 이행하도록 촉진하기 위해 활동 과정에서 공통성을 찾도록 하고, 발견한 공통점을 적용시킬 수 있는 상황의 범위를 확장하는 질문이 필요하다(Miyazaki, 2000). 따라서 학습지는 구체적인 예시들에서 활동한 작업의 공통성을 파악하고 다른 경우에도

1. 다음 이차방정식을 완전제곱식을 이용하여 풀어라.

(1) $x^2-3=0$　　(2) $(x+2)^2-3=0$

(3) $x^2+4x+1=0$

① 상수항을 우변으로 이항하면 $x^2+4x=-1$

② $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$이므로, 완전제곱식을 만들기 위해 양 변에 $\square$를 더하면

$$x^2+4x+\square=-1+\square$$

③ 좌변은 완전제곱식으로 고치고 우변은 정리하면 $(x+\square)^2=\square$

④ 제곱근을 구하면 $x+\square=\pm\square$

⑤ $\therefore x=\boxed{}$

(4) $2x^2+8x+2=0$

※ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$의 해는 $3x^2+18x+3=0$의 해를 구하는 것과 같은 방법으로 구할 수 있다.

$x^2+6x+1=0$	x^2의 계수로 나눈다.	$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$
$x^2+6x=-1$	상수항을 우변으로 이항하면	$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$
	좌변을 완전제곱식으로 만들기 위해 양 변에 $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$를 더하면	$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$
	좌변은 완전제곱식으로 고치고 우변은 정리하면	$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$
	제곱근을 구하면	$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$
$\therefore x=$		$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

2. 위에서 구한 답($x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$)을 이차방정식의 근의 공식이라고 한다. 주어진 이차방정식에서 a, b, c를 각각 찾고, 근의 공식을 이용하여 방정식을 풀어라.

(1) $2x^2+8x+5=0$ 에서

$a=\square$, $b=\square$, $c=\square$ 이고 이를 근의 공식에 대입하면, $x=\square$ 이다.

(2) $x^2-2x-4=0$

$a=\square$, $b=\square$, $c=\square$ 이고 이를 근의 공식에 대입하면,

(3) $-x^2+7x+6=0$

[그림 Ⅲ-1] A 유형 학습지 과제

확장하여 적용할 수 있다는 것을 인식하도록 구성하였다. 구체적으로 간단한 정수인 식을 완전제곱식을 이용하여 풀이하고, 근의 공식에 계수를 찾아 대입하여 풀이하는 문항을 만들었다(그림 Ⅲ-1). 그리고 교사가 같은 방법을 다른 경우에도 적용할 수 있는지 질문함으로써 증명의 아이디어를 이해할 수 있도록 하였다.

학습지B(중 수준)는 Branford의 직관적 증명, Miyazaki의 증명B에 해당한다. 이 수준의 학생들은 몇 가지 사례들을 통해 증명의 아이디어를 얻을 수 있지만, 형식적 언어를 사용하여 증명을 구성하는 데는 어려움이 있다. 그리고 예시를 통해 일반화의 가능성을 인지하는 것이기 때문에 문자사용 수준에 있어서 Küchemann이 구분한 문자이해수준에서 세 번째 수준에 해당하는 특징을 보일 것으로 예상하였다. 즉, 간단한 문제 상황에서 문자를 사용하지만 일반화된 의미로 사용하지 않거나, 복잡한 문제 상황에서는 수치를 넣어 확인해보는 더 낮은 단계로 생각할 수 있다. 예비실험에서 중 수준 학생이 형식적 증명에 사용된 문자의 의미를 잘 답변하지 못한 것에서 확인할 수 있었다. 이와 같이 대표적인 예를 통해 일반성을 인식하지만 증명은 불가능한 경우, Miyazaki(2000)는 학생들에게 사례들을 확인하는 것으로는 정당화할 수 없다는 것을 인식시키고, 형식적 표현의 필요성을 깨달을 수 있도록 지도해야 한다고 하였다. 또한 증명 과정에서 언어화(verbalization)가 서로 다른 관점 사이의 추론을 인식하는 단서가 될 수 있다고 하였다. 그 이유는 언어화를 통해 자신의 생각을 대상화하고 반영하게 되어 명제가 마음에서 명확해지기 때문이다. 따라서 학습지B(그림 Ⅲ-2)에서는 구체적인 이차방정식을 완전제곱식을 이용하여 풀이한 다음, 그 과정을 언어로 표현한 것을 참고하여 문자로 표현해보도록 구성하였다.

마지막으로 학습지C(상 수준)는 Branford의 과학적 증명, Miyazaki의 증명A에 해당하는 것으로 이 수준의 학생들은 증명의 일반성을 이해할 수 있고, 문자를 일반화된 의미로 받아들일 수 있다. 따라서 학생들이 문자를 사용해 스스로 공식을 유도해보고, 공식과 관련한 심화 탐구를 하도록 학습지를 구성하였다. 심화 탐구 문제는 중근을 가지는 이차방정식의 특성을 찾아보도록 하고, x의 계수가 짝수인 경우에 근의 공식을 유도하는 심화

1. 다음 이차방정식을 완전제곱식을 이용하여 풀어라.

(1) $(x-2)^2-5=0$ (2) $x^2-6x+3=0$ (3) $x^2-\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}=0$ (4) $2x^2-5x-1=0$

2. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$은 문제 1-(4)번과 같은 방법으로 구할 수 있다.

$2x^2-5x-1=0$		$ax^2+bx+c=0$
$x^2-\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}=0$	x^2의 계수로 나눈다.	$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$
$x^2-\frac{5}{2}x=\frac{1}{2}$	상수항을 우변으로 이항하면	$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$
$x^2-\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{4}\right)^2$ $=\frac{1}{2}+\left(\frac{5}{4}\right)^2$	좌변을 완전제곱식으로 만들기 위해 양 변에 $\left(\boxed{}\right)^2$ 을 더하면	$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\boxed{}\right)^2$ $=-\frac{c}{a}+\left(\boxed{}\right)^2$
$\left(x-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{33}{16}$	좌변은 완전제곱식으로 고치고 우변은 정리하면	
$x-\frac{5}{4}=\pm\frac{\sqrt{33}}{4}$	제곱근을 구하면	
$\therefore x=\frac{5\pm\sqrt{33}}{4}$		

3. 문제 2에서 구한 답을 이차방정식의 근의 공식이라고 한다. 근의 공식을 이용하여 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $x^2+3x-5=0$

$a=\boxed{}$, $b=\boxed{}$, $c=\boxed{}$ 이고, 이를 근의 공식에 대입하면,

(2) $3x^2-x-1=0$

[그림 Ⅲ-2] B 유형 학습지 과제

1. 완전제곱식을 이용하여 이차방정식 $2x^2+5x-1=0$을 풀어라.

2. 이차방정식의 일반적인 형태를 쓰고, 위와 같은 방법으로 이차방정식을 풀어라.

3. 문제 2에서 구한 답을 이차방정식의 근의 공식이라고 한다. 근의 공식을 이용하여 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $x^2-7x-7=0$ (4) $-3x^2+x=0$

4. 이차방정식이 중근을 가지는 조건을 설명하여라.

5. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 x의 계수가 짝수일 때, 근의 공식을 유도해보아라.

[그림 Ⅲ-3] C 유형 학습지 과제

과제를 제시하였다(그림Ⅲ-3). 그리고 정당화 과정을 서로 비교하고 확인해 봄으로써 확인하고 개선할 수 있도록 하였다.

중학교 3학년 학생 6명을 대상으로 2016년 10월 10일과 10월 21일에 예비 실험을 실시하여 난도 지각정도를 확인하였다. 6명의 학생들에게 세 유형의 학습지를 각각 20분 동안 풀게 하였다. 그 결과, 6명이 모두 C 유형이 가장 어렵다고 하였다. 다음으로 5명은 B 유형, A 유형 순서로 어렵다고 답하였고, 한 명의 학생이 A 유형, B 유형 순서로 어렵다고 답하였다. A 유형이 더 어렵다고 답한 학생은 A 유형 학습지에 빈 칸(네모)이 많기 때문에 더 어려운 것 같다고 하였다. 아마 이 학생은 빈 칸의 앞뒤로 제시되어 있는 정보를 힌트가 아니라, 문제 풀이를 위한 또 다른 조건으로 인식하여 그런 반응을 보인 것으로 생각된다. 6명의 학생이 난도에 대해 대부분 같은 의견인 것으로 보아, 학습지의 난도 조작은 제대로 이루어졌다고 볼 수 있다.

이 수업의 특징 중의 하나는 학생들이 스스로 학습지 유형을 선택하도록 한 것이었다. 구체적인 안내가 없이 선택을 하면, 학생들은 주제에 대한 자신의 역량을 고려하지 않고 평소 자신의 수학 성적이나 흥미에 따라 학습지를 고를 것이라 예상하였다. 학생들의 이러한 성향을 고려하여 학생들이 자신의 학습 준비도를 확인해 볼 수 있는 자료를 준비하였다. 첫 번째 자료는 완전제곱식을 알고 있는지 여부를 확인할 수 있는 문항지이다(그림Ⅲ-4). 근의 공식은 기본적으로 완전제곱식으로 식을 변형한 뒤 제곱근의 개념을 적용하는 것이기 때문에 이 내용을 이해하지 못하면 근의 공식 유도 과정을 이해하는 것이 불가능하다. 실제로 예비 실험 과정에서도 대부분의 학생들이 완전제곱식의 형태로 식을 변형하는 단계를 가장 힘들어했다. 두 번째 자료는 Küchemann이 학생들의 문자 수준 확인해 사용했던 문항을 이용하여 문자 이해 수준을 확인할 수 있는 문항지이다(그림Ⅲ-4). 왼쪽에서 오른쪽으로 갈수록 수준이 높아진다. 그리고 실수로 답을 틀릴 경우를 대비하여 수준 마다 두 문제씩 제시하였다. 즉, 같은 열에 위치한 문항은 같은 수준에 속한다. 예를 들어, '$2a+5b$를 간단히 하면?'이라는 문제와 '$a+b=43$일 때, $a+b+2$의 값은?'이라는 문제는 둘 다 수준 1에

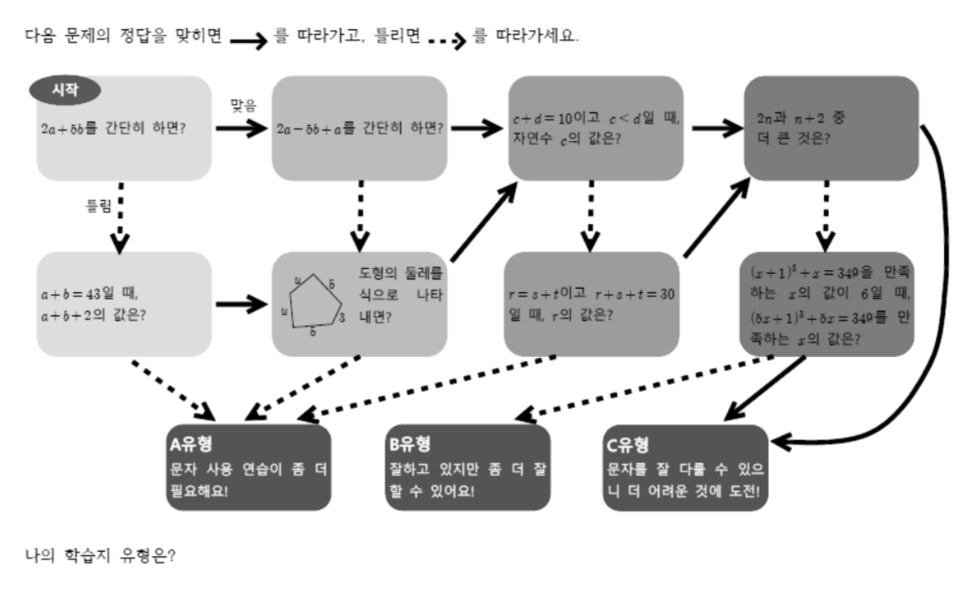
해당한다.

1. $a^2 - 14a + 49$를 인수분해 하여라.

2. 다음 식이 완전제곱식이 되도록 $\boxed{}$ 안에 알맞은 양수를 써넣어라.

(1) $a^2 + 16a + \boxed{}$　　　　(2) $x^2 - \boxed{}\,x + 100$

[그림 Ⅲ-4] 선수 학습 확인 자료



[그림 Ⅲ-5] 문자 이해 수준 확인 자료

3.2.3 수업 결과 및 논의

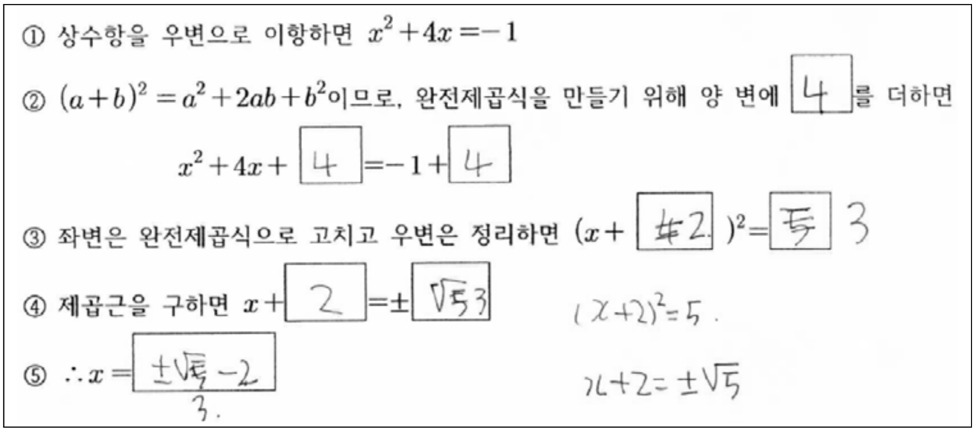
중학교 3학년 학생 15명을 대상으로 2016년 11월 15일에 수업을 실시하였다. 실험에 참여한 학생들은 모두 같은 반 학생들로 수학 성적이 다양하였다.

교육과정 상으로는 이차방정식의 근의 공식을 중학교 3학년 1학기에 학습한다. 그리고 교과서에는 이차방정식의 근의 의미, 인수분해를 이용한 이차방정식의 풀이, 제곱근을 이용한 이차방정식의 풀이를 소개한 다음 이차방정식의 근의 공식을 학습하는 순서로 전개된다. 그러나 예비 실험 단

계에서 상 수준을 제외한 나머지 학생들은 이차방정식의 근의 공식뿐만 아니라 인수분해나 완전제곱식을 이용한 풀이 방법도 모두 잊은 상태임을 확인하였다. 그래서 본 실험에 앞서 실험에 참여하는 학생들을 대상으로 이차방정식과 관련한 선수 학습 내용을 간략히 확인하고, 자신의 문자 수준을 확인하는 테스트를 하였다.

본 수업 실험에서는 먼저 이차방정식의 근의 공식을 학습할 것이라는 학습목표를 전체적으로 소개하고, 지난 시간에 실시하였던 문자 수준 테스트 결과를 나누어 주었다. 그 결과를 참고하여 학생들은 스스로 학습지 유형을 선택하도록 하였다. 15명 중 5명이 하 수준(학습지 A), 3명이 중 수준(학습지 B), 7명이 상 수준(학습지 C)을 선택하였다. 학습지를 해결하는 시간 동안 학생들은 주로 같은 유형의 학습지를 푸는 학생들끼리 모여서 학습하였고, 낮은 수준의 학생들은 필요에 따라 더 높은 수준의 학생에게 질문하였다. 수업이 끝난 뒤에는 수준별로 2명씩 총 6명의 학생과 인터뷰를 하였다.

실험 결과 학생들은 학습지 활동에 적극적으로 참여하였으며, 수업 후에는 각자의 고유한 표현을 사용하여 근의 공식의 의미를 설명할 수 있었다. 또한 교사는 수준별 학습지 활동 시간에 도움이 필요한 학생에게 좀 더 집중하여 지도할 수 있었다.


① 상수항을 우변으로 이항하면 $x^2+4x=-1$

② $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$이므로, 완전제곱식을 만들기 위해 양 변에 $\boxed{4}$를 더하면

$$x^2+4x+\boxed{4}=-1+\boxed{4}$$

③ 좌변은 완전제곱식으로 고치고 우변은 정리하면 $(x+\boxed{\cancel{4}2})^2=\boxed{\cancel{5}}$ 3

④ 제곱근을 구하면 $x+\boxed{2}=\pm\boxed{\sqrt{5}\,3}$

$(x+2)^2=5.$

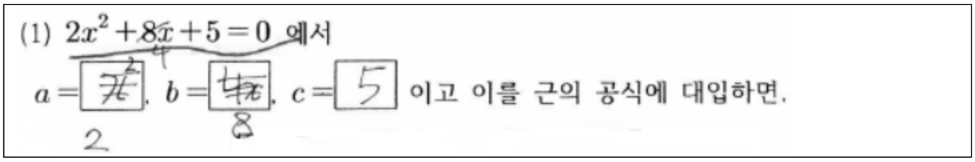
⑤ $\therefore x=\boxed{\pm\sqrt{5}-2}$

3.

$x+2=\pm\sqrt{5}$

[그림 Ⅲ-6] A 유형 학습지 1번 문항 응답

먼저 학습지 풀이에서 교사의 개입이 있었던 문항들을 분석해보면, 하 수준 학생들에게는 예상했던 대로 계수가 간단한 식을 푸는 것도 쉽지 않았다. 사전 수업에서 완전제곱식을 이용한 풀이를 간단히 학습했음에도 불구하고 학생들은 식을 변형하는데 어려움을 겪었다. 그런 경우 인수분해 공식 '$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$'을 알려주었는데, [그림 Ⅲ-6]에서 볼 수 있듯이 양 변에 더해야할 숫자인 '4'를 찾을 수 있었지만 좌변을 완전제곱식으로 고치지는 못하였다. 공식에서 좌변의 'b^2'이 우변의 괄호에서 'b'를 제곱하여 나온 것임을 깨닫지 못하고 'x^2+4x+4'를 '$(x+4)^2$'으로 인수분해 한 것이다. 5명 중 4명이 이와 같은 답변을 하였다. 그러나 $(x+4)^2$을 전개한 결과를 통해 인수분해가 잘못 된 것임을 확인시키고, 처음에 제시한 인수분해 공식의 형태에 다시 주목하게 하자 제대로 된 완전제곱식을 얻었다. 추가적으로 계수가 간단한 다른 식을 제시하였을 때 올바르게 인수분해 하였다. 또한 학생들은 다른 이차방정식들을 풀어보면서 절차가 반복된다는 느낌을 받았으며, 그 절차를 다른 식에도 적용할 수 있다는 것을 깨달았다. 인터뷰에서 숫자가 다른 이차방정식을 어떻게 풀 수 있냐는 질문에 한 학생은 "숫자가 달라도 이런 방법으로 풀 수 있어요."라고 답한 것을 볼 때, 각 식에서 실시한 절차들의 공통점을 인식한 것으로 생각된다.


(1) $2x^2+8x+5=0$ 에서

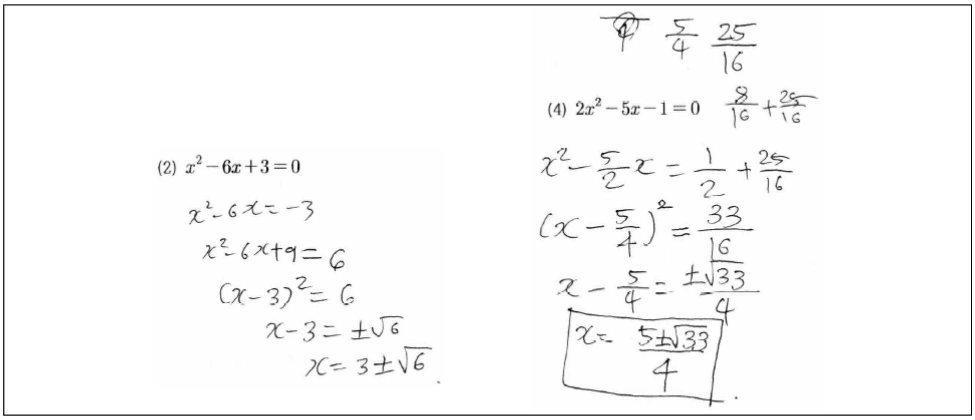
$a=\boxed{\cancel{x^2}}$ 2, $b=\boxed{\cancel{4x}}$ 8, $c=\boxed{5}$ 이고 이를 근의 공식에 대입하면.

[그림 Ⅲ-7] A 유형 학습지 2번 문항 응답

또한 하 수준 학생들은 제대로 된 항의 개념을 가지고 있지 않았으며, 주어진 방정식에서 근의 공식의 a, b, c에 해당하는 계수를 찾는 것도 헷갈려했다. [그림 Ⅲ-7]에서 처음에 x의 계수 8을 2로 나누어 4라고 쓴 것을 볼 수 있는데, x^2의 계수인 2로 나눈 것으로 보인다. 그러나 상수항 5는 2로 나누어떨어지지 않기 때문에 나누지 않았다. 그러고 나서 x^2의 계수인 a의 자리에 'x^2'을, x의 계수인 b 자리에 '$4x$'를 썼다. 식

'$ax^2+bx+c=0$'에서 a, b, c가 각각 지칭하는 대상을 파악하지 못하고 단지 위치에 따라 쓴 것으로 보인다. 하지만 한 번의 교정으로 계수를 쉽게 구분하였으며, 인터뷰에서 다른 식을 예로 들어 계수에 대해 질문했을 때도 올바르게 답하였다.

 중 수준의 학습지는 각 단계를 언어화(verbalization)하여 학생들이 각 단계에서 이루어지는 조작을 인식하고, 그것을 문자로 일반화하도록 유도하는 것이 목적이었다. 이 수준의 학생들은 구체적인 식을 이용한 풀이에는 어려움을 겪지 않았으나, 문자를 이용하여 유도 과정을 쓰는 데는

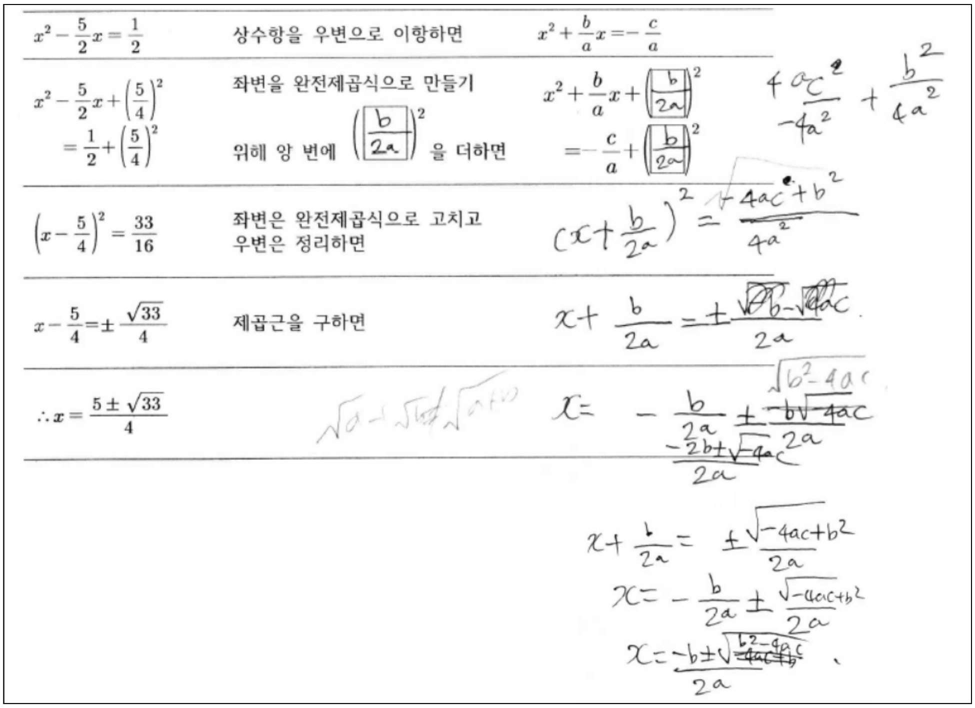


[그림 Ⅲ-8] B 유형 학습지 1번 문항 응답

어려움이 있었다. 계수가 유리수인 식의 단계와 언어로 표현된 단계를 대응시키고 본인이 무엇을 수행해야 하는지에 대해서도 알고 있었지만 문자식을 정리하는데 미숙하였다. 한 학생은 '$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=$'까지 써놓고 분수 형태의 문자식을 어떻게 정리해야할지 몰라 교사에게 질문하였다. [그림 Ⅲ-9]를 보면 $-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$을 간단하게하기 위해 통분을 할 때 '$\frac{c^2}{-4a^2}+\frac{b^2}{4a^2}$'으로 썼다가 교사의 지도에 의해 '$\frac{4ac}{-4a^2}+\frac{b^2}{4a^2}$'으로 수정한 것을 확인할 수 있다. 또한 제곱근을 구하는 단계에서 분자의 각 항 마다 제곱근을 씌운 것을 알 수 있다. 마지막으로 x값을 구하는 단계에 까지 이르렀으나 근의 공식이 다르게 나오자 주변에 있던 상 수준의 학생의 도움을 요청하

였고, 그 학생의 도움으로 과정을 수정하였다.

이 학생은 문자 이해 수준 확인 자료에서 C 유형 학습지 결과가 나왔지만, 본인이 B 유형을 선택한 경우였다. 아마도 Collis와 Halford가 지적한 것처럼 문제 구조의 복잡성이 난도에 영향을 미친 것으로 생각된다(Küchemann, 1981: 103에서 재인용). 문자 이해 수준 확인 자료의 문항들은 문자의 의미를 이해하여 문제를 해결할 수 있는지 여부에 초점을 두기 때문에 '수준 4'에 해당하는 문항일지라도 문항의 길이가 짧고, 사용되는 변수도 한 가지 뿐이다. 그러나 근의 공식 유도는 과정이 길고, 사용되는 문자의 수도 많다는 점에서 문자의 사용과 의미 이해를 더욱 어렵게 만들었을 것이다. 즉, 사례의 학생 같은 경우 문자의 의미보다는 문자식을 조작하는 것에 익숙하지 않은 경우라고 볼 수 있다. 그리고 그런 기능적 요소가 증명이 어렵다고 느끼게 만드는 원인이 될 수 있음을 암시한다.



$x^2-\frac{5}{2}x=\frac{1}{2}$	상수항을 우변으로 이항하면	$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$
$x^2-\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{1}{2}+\left(\frac{5}{4}\right)^2$	좌변을 완전제곱식으로 만들기 위해 양 변에 $\left(\boxed{\frac{b}{2a}}\right)^2$ 을 더하면	$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\boxed{\frac{b}{2a}}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\boxed{\frac{b}{2a}}\right)^2$
$\left(x-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{33}{16}$	좌변은 완전제곱식으로 고치고 우변은 정리하면	$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{-4ac+b^2}{4a^2}$
$x-\frac{5}{4}=\pm\frac{\sqrt{33}}{4}$	제곱근을 구하면	$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$\therefore x=\frac{5\pm\sqrt{33}}{4}$		$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{-4ac+b^2}}{2a}$

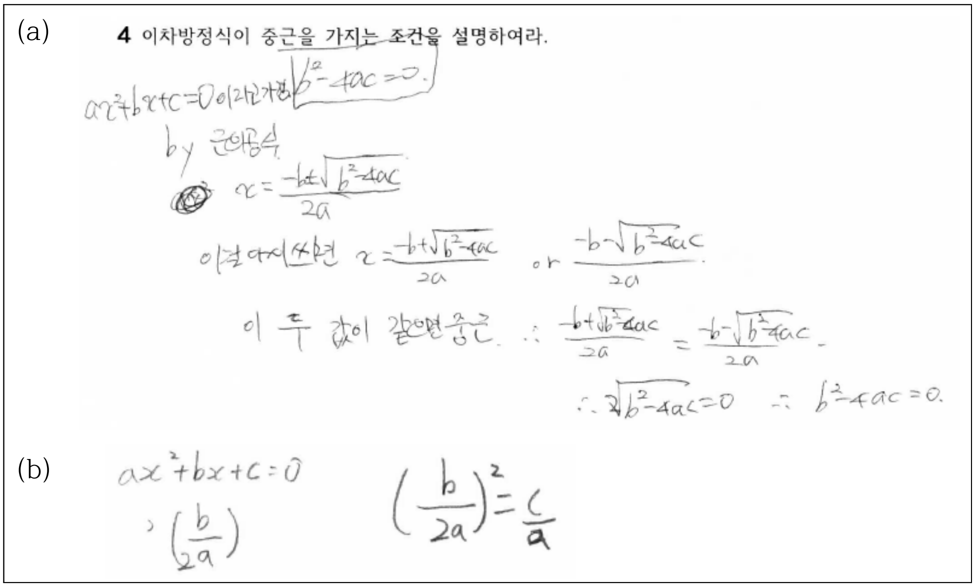
$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{-4ac+b^2}}{2a}$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

[그림 Ⅲ-9] B 유형 학습지 2번 문항 응답

상 수준의 학생들은 문자를 사용하여 근의 공식을 유도하는데 큰 어려움

이 없었다. 그리고 이차방정식이 중근을 가지는 조건을 묻는 문항에도 문자식을 사용하여 연역적으로 설명하였다. [그림 Ⅲ-10] (a)의 응답은 ‘두 근이 같은 경우 중근’이라는 개념을 정확하게 사용하여 근의 공식에서 두 결과가 같다고 두고 식을 정리하여 결론을 얻었다. (b)의 응답은 ‘완전제곱식이면 중근을 갖는다.’는 개념을 이용하여 근의 공식을 유도하는 과정에서 상수항이 완전제곱식으로 만들기 위해 필요한 항과 같아야 한다고 설명하였다. 두 경우는 식을 정리하면 결국 같은 결과이지만, 사용된 아이디어는 서로 달랐다.



[그림 Ⅲ-10] C 유형 학습지 4번 문항에 대한 두 학생의 응답

인터뷰에서 상 수준 학생들에게는 문자를 이용하여 표현하는 이유, 즉, 형식적 증명을 해야 하는 이유에 대해서도 질문하였다. 학생들은 계수가 숫자인 구체적인 식의 경우 숫자가 바뀔 때마다 과정을 반복해야하지만, 문자를 이용하여 나타내면 결과에 해당하는 숫자를 대입하여 더 쉽게 풀 수 있다고 하였다. 이와 같은 대답으로부터 증명에 사용된 문자 ‘a’, ‘b’, ‘c’의 일반성을 학생들이 파악하였음을 알 수 있다.

교사 : 완전제곱식을 이용해서 방정식을 잘 풀 수 있는데, 왜 문자를 이용

해서 쓰는 걸까?

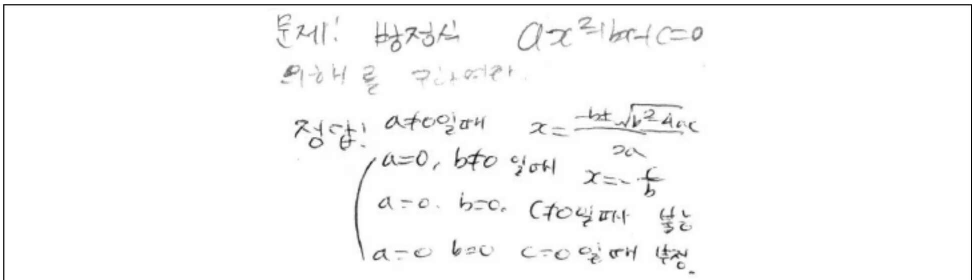
학생 X : 더 쉽게 풀 수 있어요. 공식을 보면 다른 식도 풀 수 있잖아요. 'a' 자리에 해당하는 숫자를 대입해서 비슷하게 풀면 답이 나올 것 같아요.

학생 Y : 시간 절약? 완전제곱식으로 만드는데 시간이 오래 걸리는데, 계수가 정수가 아니면 완전제곱식으로 만드는데 시간이 오래 걸리고, 문자로 쓰면 공식을 쓸 수 있으니까.

교사 : 그럼 문자를 쓰지 않으면 공식을 알 수 없을까?

학생 Y : 문자를 쓰면 공식 만드는 방법을 알 수 있어요. 그러니까 훨씬 보기 쉽게 이런 과정을 통해서 지금까지 완전제곱식을 만들었던 걸 볼 수 있어요.

학생 X : 'a', 'b', 'c' 하면 항상 성립하잖아요. 저렇게(숫자 계수) 하면 이렇게 되는지 모르는데, 이렇게(문자) 하면 딱 한 번에 공식, 이거 'a'는 뭐 이렇게 딱 대입하면 되는데, 이렇게 설명하면(숫자 계수) 다음에 숫자 바뀌면 또 똑같이 과정 써야 되니까, 힘드니까. 수학을 잘 못하는 아이들은 좀 어려울 수 있겠지만….



[그림 Ⅲ-11] 학생이 만든 문제

상 수준 중 한 학생은 교사의 지시가 없었음에도 불구하고 학습지의 남은 공간에 본인이 직접 만든 문제를 썼다. 이차방정식의 근의 공식을 유도

하는 문제에서 $a \neq 0$이라는 조건을 제거하여 더욱 일반적인 경우에 대해 풀이하였다. 그리고 본인이 예상하는 오답도 적어두었다. 또한 인터뷰 때 이 학생은 더 어려운 추가 문제가 있었으면 좋겠다고 하였다. 이와 같은 반응은 동일한 학습 자료로 상 수준 학생들의 지적 욕구를 만족시키기에 한계가 있음을 확인하는 근거라고 할 수 있겠다.

학생들이 학습지를 푸는 동안 교사는 순회 지도를 하며 개별적으로 질문을 하는 학생이나, 어려움을 겪고 있는 학생들을 중심으로 지도하였다. 그러다보니 자연스럽게 상 수준 학생들보다는 하 수준이나 중 수준 학생들을 지도하는 시간이 더 많았다.

상 수준 학생들은 교사에게 질문하기 보다는 학습지를 해결한 다음 서로의 답을 비교하여 확인하였다. 그 후 다른 수준의 친구가 어려워하는 부분을 알려주거나, 앞에서 보았듯이 문제의 조건을 변형시켜보는 등 자율적으로 심화된 활동을 하였다. 중 수준과 하 수준 학생들은 처음에 같은 학습지를 푸는 친구들과 함께 논의하다가 잘 해결되지 않으면 더 잘하는 학생에게 질문하기도 하였다. 다만, 하 수준 학생들은 지금까지의 수학 학습 실패 경험 때문인지, 본인들의 계산 결과에 대한 확신을 갖지 못하고 더 높은 수준의 학생에게 답을 확인하려는 경향이 있었다.

인터뷰에서 학습지 유형 선택에 대한 질문도 하였다. 학생들에게 세 유형의 학습지를 모두 보여주고, 다시 선택할 수 있다면 어떤 학습지를 선택하겠냐는 질문에 모든 학생들이 처음과 같은 학습지를 선택하겠다고 대답하였다. 그리고 만약 본인이 선택한 학습지보다 더 쉽거나 혹은 어려운 학습지를 풀도록 했다면 어떠하였을지 질문하였다. 하 수준의 학생들의 경우 더 어려운 학습지를 했다면 아마 잘 몰라서 친구의 답을 베꼈을 것이라고 하였고, 상 수준의 학생들은 학습지를 빨리 끝내고 수학 숙제를 했을 것이라고 하였다. 다음은 문자 이해 수준 확인 자료 결과는 A 유형이 나왔지만, B 유형 학습지를 선택한 학생과의 인터뷰 내용이다.

교사 : 다른 학습지도 볼까? 다시 선택한다고 하면, 세 가지 학습지 중에서 어떤 걸 선택할 것 같아?

학생 : B요.

교사 : 왜?

학생 : C는 너무 쉬워요. 제가 잘 할 수 있으니까. 그런데 A는 너무 어렵고…. 저한테는 B가 적당한 것 같아요.

학습지 난도 선택과 본인의 수행 능력에 대한 학생들의 응답으로부터 수준별 수업의 긍정적 효과를 확인할 수 있다. 학생들은 본인의 능력에 적합하다고 생각되는 학습지를 선택하여 주어진 시간 동안 열심히 수업에 참여하였으며, 각자 나름의 방식대로 근의 공식에 대한 의미도 설명할 수 있었다.

Ⅳ. 요약 및 결론

내용의 위계성이 강하고 학생간의 수준 차이가 큰 수학 교과에서 수준별 수업은 이에 대처할 수 있는 수업방법 중의 하나이다. 그러나 우리나라에서는 대부분 시험 성적에 따라 일괄적으로 반을 구분하여 일정기간 고정적으로 유지되는 형태로 운영되어왔다. 이와 같은 수준별 수업에 대해 많은 비판이 있었고, 그 효과에 대해서도 일관되지 않은 결과들이 보고되었다. 본 연구는 기존 수준별 수업의 문제점을 보완하면서 취지는 살릴 수 있는 수업방법에 대해 탐색하고, 이차방정식의 근의 공식을 주제로 수업을 실시하였다.

제Ⅱ장에서는 수준별 수업에 대한 선행연구들을 통해 기존 수준별 수업의 문제점을 진단하고 이를 보완할 수 있는 방법으로 학급 내 수준별 수업을 제안하였다. 그리고 이차방정식의 근의 공식 지도의 수준별 지도와 관련하여 증명 수준 이론에 대해 살펴보았다. 제Ⅲ장에서는 Ⅱ장에서 살펴본 내용을 바탕으로 형식적 증명을 수준별로 지도해야 하는 이유를 설명하였다. 증명 수준 이론을 토대로 이차방정식의 근의 공식 단원에서 수준별 학습지를 설계하고, 실재 수업을 통해 그 효과를 확인하였다. 각 장의 세부적인 결과를 정리하면 다음과 같다.

제Ⅱ장에서는 수준별 수업과 증명 수준 이론 및 문자 수준 이론에 대해 살펴보았다. 동질집단편성으로서의 수준별 수업에 대한 찬반 논쟁은 여전히 합의점이 보이지 않고 있다. 같은 맥락에서 수준별 수업이 수학 교과에 미치는 인지적, 정의적 측면의 영향에 대해서도 연구자마다 다양하게 나타난다. 과거 동질집단 수준별 수업은 계열화(tracking)와 동일시되어 고정적이고 불평등한 교육이며, 특히 낮은 수준의 학생들에게 차별적인 교육이라는 비판을 받았다. 그러나 차별과 분류의 시각이 아닌, 학생들의 능력과 수준에 맞는 개별화된 수업을 제공한다는 점에서 수준별 수업은 필요에 따라 선택할 수 있는 유연한 집단 편성 방법 중의 하나이다. 학급 내 수준별 수업은 이러한 수준별 수업의 장점을 유지하고 기존의 단점을 보완할 수 있다. 학급 내 수준별 수업은 학습 내용에 따라 필요한 경우에만 실시

할 수 있는 유연한 집단편성이고, 학생이 스스로 과제를 선택하게 할 수 있기 때문에 기존 수준별 수업의 문제점을 보완할 수 있다.

증명 수준과 관련된 선행연구로는 Branford의 증명 구분과 Miyazaki의 증명 수준 이론, van Hiele의 기하 사고 수준 이론에 대해 살펴보았다. Branford는 증명의 수준을 실험적 증명, 직관적 증명, 과학적 증명의 세 범주로 구분하였다. 수학에서 말하는 엄밀한 증명은 과학적 증명에 해당하지만, 학교 수학에서는 일반적이고 보편적인 정당화의 성격을 가지고 있다는 점에서 직관적 증명부터 증명으로 간주될 수 있다고 하였다. Miyazaki는 '내용'과 '표현', '학생의 사고 과정'을 축으로 증명의 수준을 여섯 단계로 구분하였다. 특히 학생의 증명 사고 수준 발달에 중요한 역할을 하는 증명 B는 '구체적 조작에서의 증명 B'와 '형식적 조작에서의 증명 B'로 나누어지며, 구체적 조작에서의 증명 B에서 형식적 조작에서의 증명 B로의 수준 상승은 언어화를 통해 이루어진다. 구체적 조작에서의 증명 B는 Balacheff가 말한 포괄적 예에 해당하는 개념이며, 귀납 관찰에서 연역 추론으로 발전하는 중간 단계가 될 수 있는 것으로 보인다. 증명 B는 Branford의 직관적 증명과 관련된 것으로 보이며, 귀납적 사고에서 연역적이고 형식적 사고로 진행하기 위한 중간 단계로 중요한 의미를 가진다. Miyazaki의 이론은 증명에서 추론의 방식과 더불어 표현의 방법이 수준 상승에 중요한 역할을 할 수 있다는 점을 시사한다. van Hiele는 아동의 기하 사고 수준을 다섯 단계로 구분하고, 각 수준은 질적으로 차이가 있는 불연속적이고 위계적인 특성을 가지고 있다고 하였다. 그리고 각 수준은 그 단계 고유의 언어적 기호와 이를 연결하는 관계 체계가 있기 때문에, 서로 다른 수준에서 추리하는 두 사람은 서로를 이해할 수 없다고 하였다. 이와 같은 증명 사고의 특성을 미루어 볼 때, 사고 수준이 충분히 발달한 학생과 그렇지 않은 학생 사이 상호작용을 통해 증명 학습을 하는 것이 효과가 없을 수 있다는 시사점을 얻을 수 있었다.

van Hiele와 Miyazaki의 이론에서 증명의 수준 상승에는 언어도 중요한 역할을 한다는 것을 확인할 수 있었다. 형식적 증명에서 가장 중요한 표현 수단은 문자이다. 문자에 대한 이해 없이는 증명을 구성하는 것은 물론이

고, 증명을 읽고 정리를 이해하는 것도 어렵다. 따라서 Küchemann의 문자 이해 수준을 중심으로 학생들이 문자 이해에 겪는 어려움에 대해 살펴보았다. Küchemann은 문자 이해 수준을 총 4 단계로 구분하였고, 형식적 증명에서 사용되는 문자는 수준 3 이상의 의미를 가진다. 그러나 학생들의 문자 사용에 대한 다양한 연구들을 살펴보면, 학생들의 문자 이해 수준은 수준 2 또는 수준 3에 머물러 있는 경우가 많았다. 즉, 형식적 증명에 나타나는 문자의 의미를 이해하지 못하는 학생이 더 많다는 것이다.

제Ⅲ장에서는 Ⅱ장에서 살펴본 선행연구들을 바탕으로 근의 공식을 수준별로 지도해야할 필요성에 대해 설명하고, 증명 수준 이론을 토대로 학습지를 설계하여 수업을 실시한 결과를 분석하였다. 앞에서 살펴본 증명 수준 이론을 통해 알 수 있는 것은 첫째, 귀납 추론에서 형식적 증명으로 발달하는 과정을 위계적이고 순차적인 단계로 구분할 수 있다는 것이다. 둘째, 형식적 단계로 넘어가는 단계에서는 구체적인 예에서 일반성을 파악할 수 있는 것이 중요하다. 셋째, 증명 사고의 수준 상승에는 언어가 중요한 역할을 한다. 이와 같은 각 요소들은 학생들의 수준 차이를 분명하게 구분하고, 증명 학습의 성공 여부에 결정적인 역할을 한다. 따라서 형식적 증명을 할 수 있는 학생과 그렇지 못한 학생을 구분하여 수준별로 지도해야 한다. 형식적 증명을 수행할 수 있는 학생들에게는 과학과 구분되는 수학적 사고를 발달시킬 수 있도록 하고, 형식적 증명을 수행할 준비가 되지 않은 학생들에게는 전형식적 증명을 통해 증명의 아이디어를 직관적으로 이해할 수 있는 기회를 제공하는 것과 함께, 일반화의 아이디어를 통해 형식적 증명의 수준으로 나아갈 수 있는 토대를 마련해 주어야 한다.

중학교 3학년 과정에 나오는 이차방정식의 근의 공식은 기하와 달리 조작 가능한 눈에 보이는 대상을 찾는 것이 불가능하다. 또한 유도 과정에 사용되는 문자가 많고, 분수 형태와 여러 항으로 이루어진 문자식을 조작해야한다는 점에서 매우 어려운 증명 중의 하나라고 볼 수 있다. 수업의 전반적인 흐름은 '근의 공식을 이용한 이차방정식의 풀이'라는 학습 목표를 학급 전체가 공유하고, 근의 공식을 유도하는 부분을 수준별로 나누어 학습지를 이용하여 학습한 뒤 마지막엔 학급 전체로 학습한 내용을 정리

한다. 학습지는 세 수준으로 제작하였으며, 하 수준(A 유형)은 계수가 간단한 정수인 경우에 대해 완전제곱식을 이용하여 방정식의 해를 찾아보고, 제시된 근의 공식에 계수를 대입하여 해를 구하는 내용으로 이루어졌다. 중 수준(B 유형)은 문자를 이용한 유도 과정을 일부분 제시하고, 계수가 정수인 경우의 풀이를 참고하여 나머지 부분을 완성할 수 있도록 하였다. 상 수준(C 유형)은 이차방정식의 일반적인 형태를 쓰고 처음부터 끝까지 스스로 문자를 이용하여 유도해보고, 이와 관련된 심화 탐구를 할 수 있도록 하였다. 문자를 이용한 유도 과정을 학습지의 수준은 학생들이 직접 선택하도록 하였으며, 본인의 학습 준비도에 근거하여 선택할 수 있도록 선수 학습 확인 자료와 문자 이해 수준 확인 자료를 제공하였다.

수업 결과, 학생들은 본인이 선택한 학습지의 수준에 대해 만족했으며, 적절한 도전감을 얻었다. 하 수준 학생들의 경우 완전제곱식을 이용한 풀이를 완전히 일반화했다고 할 수는 없지만, 같은 방식으로 다른 식을 풀 수 있다는 것을 깨달았다는 점에서 개별적인 사례 관찰에서 조금 더 발전했다고 볼 수 있다. 그리고 중 수준의 학생들은 쉽지는 않았지만 문자 표현을 통해 형식적 증명을 시도하였다. 상 수준의 학생들은 심화 문제에서 다양한 응답을 보여주었으며, 도전감을 제공하는 심화 학습을 통해 수학적 능력을 더욱 발휘할 수 있었다. 그리고 증명의 일반성을 파악하는데도 성공하였다. 이와 같은 결과는 수준별 지도의 필요성을 확인할 수 있게 하였다. 한편, 학습지 활동시간에 같은 유형의 학습지를 푸는 학생들끼리 함께 풀이하도록 권고하였다. 그 결과 학생들은 주로 같은 유형의 학습지를 푸는 친구들과 서로 논의하였는데, 낮은 수준의 학생들은 더 높은 수준의 학생들에게 질문하기도 하였다. 그러나 계산 결과를 확인하거나 구체적인 식 조작 방법을 교정 받는 종류의 상호작용일 뿐, 증명의 아이디어를 교류하거나 표현 방법에 대해 논의하는 상호작용은 아니었다.

학생들 개별의 능력을 최대한 발휘할 수 있게 하는 수업은 매우 중요하다. 학습 내용, 학생들의 학습 특성, 학습 환경 등에 따라 적절한 수업 방식을 선택해야 하고, 학급 내 수준별 수업은 기존 수준별 수업의 문제점을 보완하면서 학습 준비도에 따른 수업을 제공할 수 있다. 학생들의 학습 준

비도에 차이가 나는 교과내용 중 하나로 이차방정식의 근의 공식을 예로 들 수 있다. 근의 공식의 형식적 증명과 관련하여 증명 수준 이론을 살펴보면, 증명은 사고 수준에 단계를 설정할 수 있으며, 각 수준 마다 사고방식과 표현 방식에 차이가 있기 때문에 수준별 지도가 더욱 필요한 학습 내용이라는 것을 알 수 있다. 본 논문에서는 학급 내 수준별 수업을 형식적 증명 수업에 적용한 사례를 살펴보았지만, 앞으로 다른 수학 학습 내용에서도 학습 내용과 관련한 교육 심리적 특성, 학습 준비도, 학습 동기 및 학습행동 등 수준별 수업이 필요한 요소가 있는지 분석하여 효과적인 수업이 이루어질 수 있도록 해야 할 것이다. 이러한 연구로부터 수학 학습 내용 특성에 따라 수준별 수업과 협동학습, 전체 수업을 선택할 때 고려해야할 요소들을 추출하고, 효과적인 수학 수업을 하는데 도움이 될 것이다.

참고문헌

강소희, 방정숙(2008). 초등학교 6학년 학생들의 문자 이해에 대한 실태 조사. **학교 수학, 10**(2), 139-154.

강정기(2014). 대수 해법 일반성 인식에 관한 연구: 이차방정식 문항을 중심으로. **수학교육 논문집, 28**(1), 155-178.

고은자(2004). **초등학교 수학과에서 수준별 이동 수업이 학업성취 및 학습 태도에 미치는 효과**. 공주대학교 석사학위논문.

김남희(2001). 제7차 수학과 교육과정 [7-가] 단계의 변수 개념 지도에 관한 교수학적 논의. **수학교육연구, 11**(1), 67-87.

김달효(2006). **능력별 집단편성의 비판적 이해**. 서울 : 시그마프레스.

김대석, 조호제(2013). 수준별 수업이 학업성취도에 미치는 영향: 수학교과 수준별 이동수업을 중심으로. **교육문제연구, 26**(2), 1-24.

김선희(2015). 수학과 수준별 수업의 효과에 대한 메타분석. **한국수학교육학회지 시리즈 A 학교수학, 54**(4), 335-350.

김성준(2004). **대수의 사고 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색**. 서울대학교 박사학위 논문.

김희란, 이수정, 김혜영(2015). 중학생의 수준별 수업과 학업성취에 관한 종단 연구. **교육과정연구, 33**(1), 41-64.

김희진, 서종진, 표용수(2011). 대학 입학예정자를 위한 기초수학 수준별 학습지도 방안. **한국학교수학회논문집, 14**(3), 339-354.

나귀수(1998). **증명의 본질과 지도 실제의 분석 : 중학교 기하 단원을 중심으로.** 서울대학교 박사학위 논문.

(2014). 수학 교사의 증명과 증명 지도에 대한 인식 : 대학원에 재학 중인 교사를 중심으로. **한국수학교육학회지 시리즈 E 수학교육 논문집, 28**(4), 513-528.

남현우, 이기택(2002). 학급내 수준별 소집단 협동학습이 수학과 학업성취도 및 태도에 미치는 효과. **인문과학논총, 10**, 47-68.

노영순, 윤희송(2000). 수준별 과제 학습지의 구안과 학습자 자신의 선택

에 의한 자기 주도적 학습이 수학과 학업성취에 미치는 영향. **수학교육, 39**(1), 11-20.

류희찬, 류성림, 이경화, 신보미, 강순모, 윤옥교, 김명수, 조성오, 천태선, 김철호(2012). **중학교 수학 3**. 서울 : 천재교과서.

박경미(1998). **제7차 교육과정에서 수학과 수준별 교육과정 운영 방안 및 교수-학습 자료**. 한국교육과정평가원 세미나 자료집 ORM 98-4-3. 한국교육과정평가원.

박선화(2005). 수준별 수업 활성화 방안 연구. **수학.영어과 교육과정 개정 시안 및 수준별 수업 활성화 방안 공청회**, 3-36. 한국교육과정평가원.

서동엽(1995). 증명 지도의 목표와 수준에 대한 소고. **수학교육학연구 5**(1), 203-215.

(2006). 수학의 형식과 대상에 따른 수학적 추론 지도 수준. **수학교육학연구 16**(2), 95-113.

서울대학교교육연구소(1998). **교육학 대백과사전**. 서울 : 하우동설.

성열관(2008). 수준별 교육과정의 감화된 의미로서 영어, 수학 이동수업의 효과성 검토. **교육과정연구, 26**(2), 167-189.

소연희, 김성일(2005). 자기효능감 수준에 따른 과제선택이 과제흥미에 미치는 효과. **교육학연구, 43**(4), 195-220.

양정호(2006). 학업성취에 대한 수준별 수업의 효과: 한국교육종단연구의 위계적 선형모형 분석. **제1회 한국교육종단연구 학술대회 논문집**, 3-20.

우정호(2006). **학교수학의 교육적 기초**. 서울 : 서울대학교출판부.

이인호(2005). 수준별 이동수업 반대 토론. **수학.영어과 교육과정 개정 시안 및 수준별 수업 활성화 방안 공청회,** ORM 2005-41(61-76). 한국교육과정평가원.

이종희, 김부미(2003). 중학생들의 매개변수개념 분석과 교수-학습방안 탐색. **학교수학, 5**(4), 477-506.

임만석(2007). **중학교 2, 3학년 학생들의 변수 개념에 대한 이해 실태 분**

석. 한국교원대학교 석사학위 논문.

장혜원, 강정기(2014). 문자식을 포함한 대수 증명에 대한 중학교 3학년 학생들의 이해 연구: 문맥과 문자식, 어느 것을 보는가. **수학교육학 연구, 24**(3), 359-374.

전화춘(2007). CIPP 평가모형을 적용한 초등학교 특별보충과정 평가 - 부산광역시 초등학교를 중심으로. **한국초등교육연구 20**(1), 181-210.

정수현(2013). **수준별 이동수업에서 협동학습이 학업성취도와 수학학습태도에 미치는 영향**. 목포대학교 교육대학원 석사학위논문.

조성현, 김홍찬(2009). 언어적 관점에서의 수학적 용어와 기호 사용에 관한 지도 연구. **교과교육연구, 2**(1), 59-81.

황윤한, 조영임(2005). **개별화 수업 : 이해와 적용**. 서울: 교육과학사.

황혜정(1998). 현행 수준별 수업 분석에 기초한 수준별 교육과정의 성공을 위한 처방. **수학교육학연구 8**(1), 183-197.

홍진곤, 권석일(2004). 전형식적 증명의 교수학적 의미에 관한 고찰. **수학교육, 43**(4), 381-390.

Adam Gamoran(1993). Alternative uses of ability grouping in secondary schools: can we bring high-quality instruction to low-ability classes?. *American Journal of Education, 102*(1), 1-22.

Balacheff N.(1988). Aspects of proof in pupil's practice of school mathematics. In Pimm D.(Eds.). *Mathematics, teachers and children*. London : Hodder & Stoughton, 216-235.

Carol L. Tieso(2003). Ability grouping is not just tracking anymore. *Roeper review, 26*(1), 29-36.

Clements, D. H. and Battista, M. T.(1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws(Eds.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 420-464.

Dar, Y.(1985). Teachers' attitudes toward ability grouping: educational considerations and social and organizational

influences. *Interchange, 16*(2), 17-38.
Dietmar Küchemann(1981). Algebra. In K. M. Hart, M. L. Brown, D. E. Küchemann(Eds.). *Children's understanding of mathematics: 11-16*(102-119), John Murray.
Hanna, G.(1983). *Rigorous proof in mathematics education.* Toronto: OTSE Press.
Ireson, J. and Hallam, S.(2001). *Ability grouping in education*. London : SAGE.
Jeannie Oakes(1992). Can tracking research inform practice? technical, normative, and political considerations. *Educational Researcher 21*(4), 12-21.
Kathleen Hart(1981). Implications for teaching. In K. M. Hart, M. L. Brown, D. E. Küchemann(Eds.). *Children's understanding of mathematics: 11-16*(102-119), John Murray.
Kulik, J. A. & Kulik, C-L. C.(1992). Meta-analytic findings on grouping programs. *Gifted Child Quarterly, 36*(2), 73-77.
Liora Linchevski and Bilha Kutscher(1998). Tell me whom you're learning, and I'll tell you how much you've learned: mixed-ability versus same-ability grouping in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(5), 533-554.
Lou, Y., Philip C. Abrami, John C. Spence, Catherine Poulsen, Bette Chambers and Sylvia d'Apollonia(1996). Within-class grouping : a meta-analysis. *Review of Educational Research 66*(4), 423-458.
Hallinan, Maureen T. and Sørensen, Aage B.(1985). Ability Grouping and Student Friendships. *American Educational Research Journal, 22*(4), 485-499.
Mikio Miyazaki(2000). Levels of proof in lower secondary school

mathematics : as steps from an inductive proof to an algebraic demonstration. *Educational Studies in Mathematics 41*, 47-68.

Mollie Macgregor and Kaye Stacey(1997). Students' understanding of algebraic notation: 11-15. *Educational Studies in Mathematics, 33*, 1-19.

Otte, M.(1994). Mathematical knowledge and the problem of proof. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 229-321.

Robinson, A.(1990). Cooperation or exploitation? The argument against cooperative learning for talented students. *Journal for the Education of the Gifted, 14*(1), 9-27.

Semadeni, Z.(1984). Action proofs in primary mathematics teaching and in teacher training. *For the Learning of Mathematics, 4*(1), 32-34.

Skemp, Richard R.(2008). **수학학습 심리학**, 황우형 역. 서울 : 사이언스 북스.

Slavin, Rovert E.(1987). Ability grouping and student achievement in elementary schools : a best-evidence synthesis. *Review of Educational Research, 57*(3), 293-336.

(1990). Achievement effects of ability grouping in secondary schools: a best-evidences synthesis. *Review of Educational Research, 60*(3), 471-499.

Sørensen, Aage B. and Hallinan, Maureen T.(1986). Effects of ability grouping on growth in academic achievement. *American Educational Research Journal, 23*(4), 519-542.

Tomlinson, C. A.(2005). *How to differentiate instruction in mixed-ability classrooms*(2nd ed.). N.J.: Pearson Merrill Prentice Hall.

ABSTRACT

Study on differentiated instruction strategies of formal proof

Kim, Chae Yeong
The Graduate School
Seoul National University

Ability grouping is a teaching method which considers ability and characteristics of students. Thus ability grouping should be applied with flexibility, considering contents of the curriculum and cognitive levels of students. However, in Korea, ability grouping is mainly applied through forming leveled classrooms and maintaining this initial classification for two to three months. Whether ability grouping has positive effects on students is controversial, as many research results showing positive effects but other research results telling a completely different story. This study starts from recognizing problems, faced as applying ability grouping to real classrooms, and necessity of analysis of situations and methods that need ability grouping to solve these problems. We set a hypothesis that within-class ability grouping can supplement the shortcomings of current ability grouping and keep the intent of existing ability grouping because within-class ability grouping can be applied when it is necessary and

appreciate opinions of students in grouping process. To examine this hypothesis, we conduct an experimental lesson with quadratic formula, which deals with formal proof, as its subject.

Thinking ability that enables generalization is important in mathematical proofs since mathematical proofs are not guesses based on some observed cases but justifications of truth for all the cases that satisfy given conditions through mathematical reasoning. In particular, formal proofs not only need generalization in its reasoning but also use a language that contains generalization in its nature such as symbols. Existing theories classify levels of proof as follows: the level of observing each case, the level of seeing the general in the particular, the level of formal proof. Moreover, the theories say that it is difficult for low-level students to understand a high-level proof. Therefore, it is necessary to differentiate teaching method according to generalization ability of students.

Firstly, in this study, we designed three levels of learning materials based on the levels of proof. With these learning materials, we conducted a preliminary experiment. Based on outcomes of the preliminary experiment, we modified the learning material and execute main experimental lesson. In the main lesson, each student chose a learning material by himself/herself based on the degree of understanding about prerequisites and variables. The students who chose the same learning material formed a group and studied derivation of the quadratic formula. During the main lesson, students actively participated in the group activity of deriving quadratic formula and they could explain the meaning of quadratic formula with their own expression. Furthermore, a teacher could focus on the students

who need help when other students were working on leveled learning materials. Finally, through additional interviews, we can confirm that students were more satisfied when the level of learning material matched his/her own level.

keywords : within-class ability grouping, formal proof, level of generalization, root's formula of a quadratic equation

Student Number : 2015-21601