



저작자표시-비영리-동일조건변경허락 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.
- 이차적 저작물을 작성할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.



비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.



동일조건변경허락. 귀하가 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공했을 경우에는, 이 저작물과 동일한 이용허락조건하에서만 배포할 수 있습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#)

공학석사학위논문

개선된 다단계 부구조화 기법을 이용한
대형구조물의 재해석 방법

Reanalysis Method based Enhanced Multi-Level
Substructuring Scheme for Large-Scale Structures

2013 년 8 월

서울대학교 대학원

기계항공공학부

이 동 진

공학석사학위논문

개선된 다단계 부구조화 기법을 이용한
대형구조물의 재해석 방법

Reanalysis Method based Enhanced Multi-Level
Substructuring Scheme for Large-Scale Structures

2013 년 8 월

서울대학교 대학원

기계항공공학부

이 동 진

초록

유한요소법(FE)에서 대형 모델의 동적 해석 시 계산 효율 향상을 위해 부분구조합성법(Component Mode Synthesis, CMS)이 사용될 수 있다. 최근 새로운 부분구조합성법으로 개선된 다단계 부구조화 기법(Enhanced Multi-Level Substructuring Scheme, EMLS)이 제안되었다. 이 방법은 기존 고정경계 기반 부분구조합성법인 Craig-Bampton 방법보다 시스템 크기를 더 작게 축소할 수 있는 동시에 더 넓은 주파수 대역에서 정확한 해를 구할 수 있다. 본 연구에서는 개선된 다단계 부구조화 기법을 시스템 변형에 따른 반복적 해석 과정에 사용하였고 계산 효율을 극대화하기 위해 재해석 방법을 도입하였다. 이러한 개선된 다단계 부구조화 기법을 이용한 재해석 방법의 적절성과 계산 효율을 확인하기 위해 비행기 날개 구조 모델을 이용하여 크기 최적화 문제를 해결하였다.

.....
keywords : 부구조화 기법, 모델 차수 축소, 고유치 문제, 재해석 방법

Student Number : 2011-24065

TABLE OF CONTENTS

초록	i
LIST OF FIGURES	iii
LIST OF TABLES	
i	v
1. 서론	1
2. 부구조화 기법.....	4
2.1. 부구조화 기법.....	4
2.2. 개선된 다단계 부구조화 기법.....	5
3. 재해석 방법	12
3.1. 재해석 방법.....	12
3.2. 재해석 방법의 개선된 다단계 부구조화 기법 적용.....	14
4. 수치 예제	15
5. 결론	24
참고문헌	25
부록.....	27
Abstract	34

LIST OF FIGURES

Figure 1 Introduction of substructuring scheme for basis system with reanalysis method for perturbed system using aircraft model.....	3
Figure 2 Substructures from hierarchical. Figure 2-(a) : Substructures are divided in 2 Level, Figure 2-(b) : Internal regions are expressed in being merged symbol I for simplifying matrix notation.....	6
Figure 3 Configuration of box beam.....	16
Figure 4-(a) 1 st eigenmode errors for varying designs.....	17
Figure 4-(b) 2 nd eigenmode errors for varying designs.....	17
Figure 4-(c) 3 rd eigenmode errors for varying designs.....	18
Figure 4-(d) 4 th eigenmode errors for varying designs.....	18
Figure 5 Configuration of wing box consisted of ribs, spars and surfaces with 10 design variables.....	21
Figure 6 Converged result of the objective function at each iteration (FULL : Full system, ECB : conventional method, EMLS update : proposed method).....	22
Figure 8 Percentage error of converged value in design variables in comparison with full system (ECB : conventional mehtod, EMLS update : traditional method).....	23
Figure 9 Bar connected spring model.....	30
Figure 10 Bar connected with spring element showing PDOFs (+) and SDOFs (x) : (a) Selected N5 as PDOFs with N4 and (b) Selected N5 as SDOFs with N2.	31

LIST OF TABLES

Table 1 Converged values in objective function at each iteration with methods (unit : kg).....	22
Table 2 Converged value in design variables at each method with percentage error in comparison of full system (FULL : full system, ECB : conventional method, EMLS update : proposed method).....	24
Table 3 Comparison of 1st Eigenvalue between from full system and from reduced system at Fig. 10(a) and (b) with relative error.....	33

1 서론

유한요소법을 이용한 구조물 해석은 계산의 편리성과 효율성으로 산업계 전반에 걸쳐 사용되고 있다. 계산 자원의 발달에 힘입어 유한요소법의 적용 분야는 멀티 피직스, 다중 스케일 등 다양한 분야로 확대되고 있는 추세이다. 그러나, 해석 모델의 형상이 복잡·대형화 되고 해석의 높은 정확성이 요구됨에 따라 계산 자원은 이의 발전 속도를 넘어서고 있다. 이러한, 한계를 극복하기 위해 축소 시스템 기법(Reduced system method)이 사용될 수 있다. 축소 시스템 기법은 시스템을 등가의 작은 시스템으로 줄여 사용하는 방법이다. 그리고 모드 기반의 축소 시스템 기법인 모델 차수 축소(Reduced Order Modeling, ROM) 중 부구조화 기법(Sub-structuring scheme)이 적용된 부분구조합성법(Component Mode Synthesis, CMS)이 있다. 부분구조합성법은 대형 구조물의 동적 해석 시 계산의 효율성과 정확성에서 매우 중요한 해석 방법이다[1]. 대표적인 방법으로 Craig-Bampton 방법이 있다[3]. 이 방법은 부구조물의 내부 영역에 고정 경계 노말 모드(Fixed interface normal mode)를 적용하고, 경계의 각 자유도 별 단위 크기의 변화에 따른 내부 영역의 모드를 정적 구속 모드(Static constraint mode)로 표현하여 시스템을 축소한다. 이 방법은 Nastran 과 Ansys 와 같은 상용 패키지에 널리 사용될 정도로 방법의 안정성과 계산 효율성이 검증되었다. 그러나, 경계 영역에 대한 정보를 그대로 축소 시스템에 가져오기 때문에 경계 영역의 크기가 커지게 되면 축소 시스템의 크기 역시 커지는 계산 효율 상의 한계점을 가지고 있다. 1998 년 부구조물을 계층성에 따라 구성함으로써 경계영역 정보를 축소할 수 있는 획기적인 방법이 Bennighof 와 그 연

구진에 의해 제안되었다[7]. 특히, 이 방법은 부구조물 생성시 자동 분할 법을 적용하여 계산의 효율과 편리성을 도모하였다. 최근에는 Baek 과 Cho 에 의해 내부 영역과 경계 영역 간의 간섭 모드에 질량 효과를 고려한 개선된 다단계 부구조화 기법(Enhanced Multi-Level Substructuring scheme, EMLS)이 제안되었다[1]. 경계 영역의 단위 크기 변화에 따른 내부 영역의 모드를 quasi-static mode 로부터 유도하여 질량 효과를 고려하였고 기존의 방법과는 달리 가속도 항을 시스템에 추가적 확장 공간에 배열하여 ill-condition 발생을 확연히 감소시켰다. 이때의 모드를 동적 구속 모드(Dynamic constraint mode)라고 지칭한다. 고유 주파수 해석에서 기존 방법 보다 고차 영역에서 정확하며 부구조물 간에 계층성을 고려하여 내부·경계 간섭 모드를 내부 영역과 마찬가지로 축소할 수 있다. 본 연구의 목표는 개선된 다단계 부구조화 기법을 섭동이 발생하는 시스템의 반복적 해석 과정에 적용하여 계산 효율을 높이는 것이다(그림 1 참조). 이를 위해 G. Masson 에 의해 제안된 재해석 방법[2]을 개선된 다단계 부구조화 기법에 적용하였다. 특히, 본 연구의 개선된 다단계 부구조화 기법을 기반한 재해석 방법을 반복적 해석 과정의 한 예로 고유 주파수 값을 구속 조건으로 하는 최적화 문제에 적용하였다. 본 연구에서 제안하는 방법이 계산 시간을 절감하는 동시에 기존 방법보다 정확도가 높음을 확인하였다.

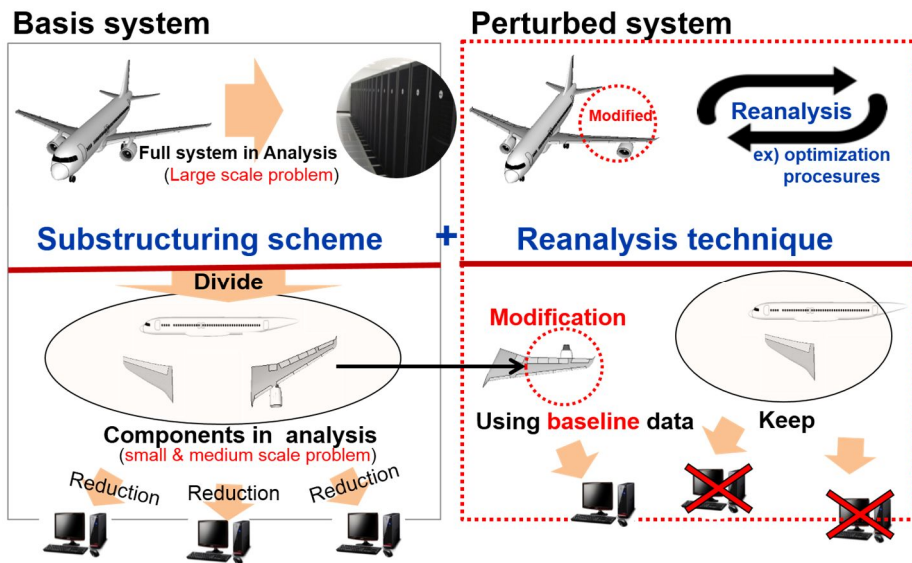


Figure 1 Introduction of substructuring scheme for basis system with reanalysis method for perturbed system using aircraft model

2 부구조화 기법

2.1 부구조화 기법

부구조화 기법(Substructuring scheme)은 모드 기반 축소 시스템 기법인 모델 차수 축소(Reduced Order Model, ROM)의 한 갈래로 대표적인 방법으로 부분구조합성법(Component Mode Synthesis, CMS)이 있다[1]. 이 방법은 대형 시스템을 부구조물로 영역 분할 후 각 구조물에 대해 모델 차수 축소를 한다. 이렇게 구성된 각 부구조물의 축소 시스템을 ‘super-element’ 단위로 선형조합을 통해 등가의 축소 시스템을 구성한다. 이를 통해 근사 해를 구함으로써 계산 효율을 높일 수 있는 방법이다. 부분구조합성법은 크게 부구조물을 고정 경계(Fixed interface)와 자유 경계(Free interface)로 가정하는 방법에 따라 구분된다. 본 연구에서는 고정 경계 기반 부분구조합성법을 다룬다. 대표적인 고정 경계 부분구조합성법으로 Craig-Bampton 기법이 있다. 이에 대한 수식적 표현은 다음과 같다. 우선, 시스템은 크게 내부 영역과 경계 영역으로 재배열할 수 있다. 이를 동적 해석 식에 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{I,I} & \mathbf{K}_{I,B} \\ \mathbf{K}_{I,B}^T & \mathbf{K}_{B,B} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_I \\ \mathbf{u}_B \end{Bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{I,I} & \mathbf{M}_{I,B} \\ \mathbf{M}_{I,B}^T & \mathbf{M}_{B,B} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_I \\ \mathbf{u}_B \end{Bmatrix} \quad (1)$$

식(1)의 아래 첨자 I, B 는 각각 내부 영역과 경계 영역을 나타낸다. 경계 영역에 단일 크기의 변화를 주었을 때 내부 영역의 간접 영향을 식(2)로 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{I,I} & \mathbf{K}_{I,B} \\ \mathbf{K}_{I,B}^T & \mathbf{K}_{B,B} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Psi \\ \mathbf{I}_{B,B} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{B,B} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

이 식의 첫 번째 행로부터 정적 구속 모드(Static constraint mode)를 구한다. 내부 영역에 대해서는 고정 경계를 가정한 노말 모드를 적용한다. 이는 고정 경계 노말 모드(Fixed interface normal mode)로 식(3)에서 계산할 수 있다.

$$[\mathbf{K}_{I,I}]\{\Phi_i\} = \lambda[\mathbf{M}_{I,I}]\{\Phi_i\}, i = 1, \dots, n_I \quad (3)$$

차단 주파수 전략을 사용하여 기저 벡터를 선정한다. 이렇게 계산한 축소 기저와 정적 구속 모드를 식(4)의 변환 행렬로 구성한다.

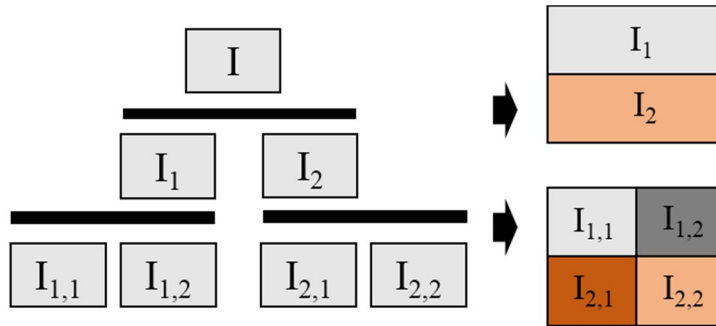
$$\mathbf{T}_{CB} = \begin{bmatrix} \Phi_i & \Psi \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{B,B} \end{bmatrix} \quad (4)$$

식(4)의 변환행렬을 식(5) 과정을 통해 전체 시스템을 등가의 축소 시스템으로 구성할 수 있다.

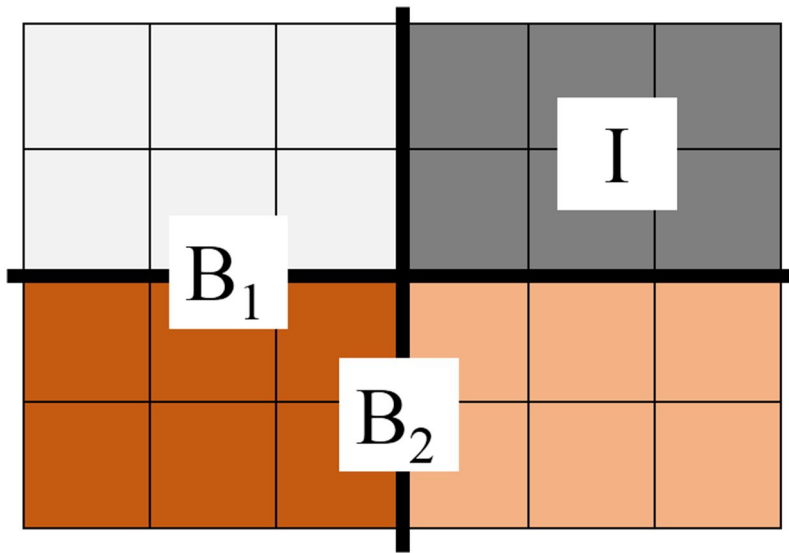
$$\mathbf{K}_R = \mathbf{T}_{CB}^T \mathbf{K} \mathbf{T}_{CB}, \mathbf{M}_R = \mathbf{T}_{CB}^T \mathbf{M} \mathbf{T}_{CB} \quad (5)$$

2.2 개선된 다단계 부구조화 기법

구조물을 그림 2-(a) 와 같이 계층성을 이용하여 부구조화할 수 있다. 이에 대한 개념도는 다음과 같다.



(a) Substructures with hierarchical



(b) Simplified schematic on substructures with hierarchical

Figure 2 Substructures from hierarchical. Figure 2-(a) : Substructures are divided in 2 Level, Figure 2-(b) : Internal regions are expressed in being merged symbol I for simplifying matrix notation

부구조물 사이의 경계에 대한 계층 구조를 고려하여 나는 고유 주파수 문제의 시스템 행렬은 식(6)으로 재배열 된다. 여기서 아래 첨자 I 는 부구조의 내부영역을 나타내며, B1, B2 는 경계 영역에서 계층성에 의한 하위, 상위 레벨을 나타낸다.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{I,I} & \mathbf{K}_{I,B_1} & \mathbf{K}_{I,B_2} \\ \mathbf{K}_{I,B_1}^T & \mathbf{K}_{B_1,B_1} & \mathbf{K}_{B_1,B_2} \\ \mathbf{K}_{I,B_2}^T & \mathbf{K}_{B_1,B_2}^T & \mathbf{K}_{B_2,B_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_I \\ \mathbf{u}_{B_1} \\ \mathbf{u}_{B_2} \end{Bmatrix} \\ & = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{II} & \mathbf{M}_{I,B_1} & \mathbf{M}_{I,B_2} \\ \mathbf{M}_{I,B_1}^T & \mathbf{M}_{B_1,B_1} & \mathbf{M}_{B_1,B_2} \\ \mathbf{M}_{I,B_2}^T & \mathbf{M}_{B_1,B_2}^T & \mathbf{M}_{B_2,B_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_I \\ \mathbf{u}_{B_1} \\ \mathbf{u}_{B_2} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

식(7)의 변환 행렬 관계 식을 통해 부 구조물의 내부 영역과 경계 영역의 간섭 영향을 모드로 변환할 수 있다. 식(7)에서 사용하는 변환 행렬의 정적 구속 모드 와 동적 구속 모드를 나타낸다.

$$\begin{aligned} & \mathbf{T}_1^T \mathbf{K} \mathbf{T}_1 \mathbf{x} = \lambda \mathbf{T}_1^T \mathbf{M} \mathbf{T}_1 \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{u} \\ & \text{where } \mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \Psi_{I,B_1}^s & \Psi_{I,B_2}^s & \Psi_{I,B_1}^d & \Psi_{I,B_2}^d \\ 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

기존 고정 경계 부 구조화 기법에서는 정적 구속 모드를 이용하여 경계 영역과 내부 영역 간의 간섭 영향을 정적 모드로 표현하였지만, 개선된 다단계 부 구조화 기법에서는 동적 구속 모드를 적용하여 가속도 항을 선형 의존성 관계로 독립된 공간에 추가로 확장하여 적용한다[1]. 정적, 동적 구속 모드에 대한 수식은 식(8)과 같다.

$$\begin{aligned}\Psi_{I,B_j}^s &= -\mathbf{K}_{I,I}^{-1}\mathbf{K}_{I,B_j} \\ \Psi_{I,B_j}^d &= \mathbf{K}_{I,I}^{-1}(\mathbf{M}_{I,B_j} - \mathbf{M}_{I,I}\mathbf{K}_{I,I}^{-1}\mathbf{K}_{I,B_j})\mathbf{W}_{B_j,B_j}, \quad j=2,3\end{aligned}\quad (8)$$

식(8)의 \mathbf{W}_{B_j,B_j} 는 고유 주파수에 대한 미지 항이다. 미지의 고유 주파수를 다음과 같이 가중치를 고려하여 강성과 질량의 차이에서 발생할 수 있는 ill-condition 을 차단한다. 가중치로는 경계 영역의 강성 대 질량 비로 표현할 수 있다. 식(9)는 구속 모드에 의해 변환된 시스템을 나타낸다. 이때 시스템 강성 행렬의 내부 영역은 분절화된다.

$$\begin{aligned}& \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{I,I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{K}}_{I,B_1} & \widehat{\mathbf{K}}_{I,B_2} \\ & \widetilde{\mathbf{K}}_{B_1,B_1} & \widetilde{\mathbf{K}}_{B_1,B_2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & \widetilde{\mathbf{K}}_{B_2,B_2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \text{symm.} & & \mathbf{A}_{B_1,B_1} & \mathbf{A}_{B_1,B_2} \\ & & & & \mathbf{A}_{B_2,B_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_I \\ \mathbf{u}_{B_1} \\ \mathbf{u}_{B_2} \\ \mathbf{v}_{B_1} \\ \mathbf{v}_{B_2} \end{Bmatrix} \\ & = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{I,I} & \widetilde{\mathbf{M}}_{I,B_1} & \widetilde{\mathbf{M}}_{I,B_2} & \widehat{\mathbf{M}}_{I,B_1} & \widehat{\mathbf{M}}_{I,B_2} \\ & \widetilde{\mathbf{M}}_{B_1,B_1} & \widetilde{\mathbf{M}}_{B_1,B_2} & \widehat{\mathbf{M}}_{B_1,B_1} & \widehat{\mathbf{M}}_{B_1,B_2} \\ & & \widetilde{\mathbf{M}}_{B_2,B_2} & \widehat{\mathbf{M}}_{B_2,B_1} & \widehat{\mathbf{M}}_{B_2,B_2} \\ & \text{symm.} & & \mathbf{B}_{B_1,B_1} & \mathbf{B}_{B_1,B_2} \\ & & & & \mathbf{B}_{B_2,B_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_I \\ \mathbf{u}_{B_1} \\ \mathbf{u}_{B_2} \\ \mathbf{v}_{B_1} \\ \mathbf{v}_{B_2} \end{Bmatrix}\end{aligned}\quad (9)$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{M}}_{I,B_j} &= \mathbf{M}_{I,B_j} + \mathbf{K}_{I,I} \Psi_{I,B_j}^s, \quad \widetilde{\mathbf{K}}_{B_i,B_j} = \mathbf{K}_{B_i,B_j} + \mathbf{K}_{I,B_i}^T \Psi_{I,B_j}^s, \\ \widehat{\mathbf{K}}_{I,B_j} &= \mathbf{K}_{I,I} \Psi_{I,B_j}^d, \quad \mathbf{A}_{B_i,B_j} = (\Psi_{I,B_i}^d)^T \mathbf{K}_{I,I} \Psi_{I,B_j}^d, \\ \widehat{\mathbf{M}}_{I,B_j} &= \mathbf{M}_{I,I} \Psi_{I,B_j}^d, \quad \widehat{\mathbf{M}}_{B_i,B_j} = \mathbf{K}_{I,B_i}^T \Psi_{I,B_j}^d + (\Psi_{I,B_i}^s)^T \mathbf{K}_{I,I} \Psi_{I,B_j}^d, \\ \widetilde{\mathbf{M}}_{B_i,B_j} &= \mathbf{M}_{B_i,B_j} + \mathbf{M}_{I,B_i}^T \Psi_{I,B_j}^s + (\Psi_{I,B_i}^s)^T \mathbf{M}_{I,B_j} + (\Psi_{I,B_i}^s)^T \mathbf{M}_{I,I} \Psi_{I,B_j}^s, \\ \mathbf{B}_{B_i,B_j} &= (\Psi_{I,B_i}^d)^T \mathbf{M}_{I,I} \Psi_{I,B_j}^d, \quad (i, j = 2, 3)\end{aligned}$$

식 (9)의 내부 영역에서 분절화된 고유치 문제는 식 (10)과 같다.

$$\mathbf{K}_{1,1}\tilde{\mathbf{u}}_1 = \lambda \mathbf{M}_{1,1}\tilde{\mathbf{u}}_1 \quad (10)$$

식(10)에서 모멘트 결합 선정방법[9]을 적용하여 축소기저를 구한다.
식(11)의 과정을 거쳐 시스템을 축소할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1^T \mathbf{T}_1^T \mathbf{K} \mathbf{T}_1 \mathbf{R}_1 \bar{\mathbf{x}} &= \lambda \mathbf{R}_1^T \mathbf{T}_1^T \mathbf{M} \mathbf{T}_1 \mathbf{R}_1 \bar{\mathbf{x}}, \quad \bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{T}_1 \mathbf{R}_1)^{-1} \mathbf{u} \\ \text{where } \mathbf{R}_1 &= [\Phi_1 \quad \mathbf{I} \quad \mathbf{I} \quad \mathbf{I}] \end{aligned} \quad (11)$$

식(11)을 통해 축소된 시스템 행렬은 식 (12)와 같다.

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccccc} \mathbf{K}_{1,1}^R & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{K}}_{1,B_1}^R & \widehat{\mathbf{K}}_{1,B_2}^R \\ & \tilde{\mathbf{K}}_{B_1,B_1} & \tilde{\mathbf{K}}_{B_1,B_2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & \tilde{\mathbf{K}}_{B_2,B_2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \text{symm.} & & \mathbf{A}_{B_1,B_1} & \mathbf{A}_{B_1,B_2} \\ & & & & \mathbf{A}_{B_2,B_2} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{u}_{B_1} \\ \mathbf{u}_{B_2} \\ \mathbf{v}_{B_1} \\ \mathbf{v}_{B_2} \end{Bmatrix} \\ & = \lambda \left[\begin{array}{ccccc} \mathbf{M}_{1,1}^R & \tilde{\mathbf{M}}_{1,B_1}^R & \tilde{\mathbf{M}}_{1,B_2}^R & \widehat{\mathbf{M}}_{1,B_1}^R & \widehat{\mathbf{M}}_{1,B_2}^R \\ & \tilde{\mathbf{M}}_{B_1,B_1} & \tilde{\mathbf{M}}_{B_1,B_2} & \widehat{\mathbf{M}}_{B_1,B_1} & \widehat{\mathbf{M}}_{B_1,B_2} \\ & & \tilde{\mathbf{M}}_{B_2,B_2} & \widehat{\mathbf{M}}_{B_2,B_1} & \widehat{\mathbf{M}}_{B_2,B_2} \\ & \text{symm.} & & \mathbf{B}_{B_1,B_1} & \mathbf{B}_{B_1,B_2} \\ & & & & \mathbf{B}_{B_2,B_2} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{u}_{B_1} \\ \mathbf{u}_{B_2} \\ \mathbf{v}_{B_1} \\ \mathbf{v}_{B_2} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{1,1}^R &= \Phi_1^T \mathbf{K}_{1,1} \Phi_1, \quad \mathbf{M}_{1,1}^R = \Phi_1^T \mathbf{M}_{1,1} \Phi_1, \\ \tilde{\mathbf{M}}_{1,i}^R &= \Phi_1^T \tilde{\mathbf{M}}_{1,i}, \quad \widehat{\mathbf{K}}_{1,i}^R = \Phi_1^T \widehat{\mathbf{K}}_{1,i}, \quad \widehat{\mathbf{M}}_{1,i}^R = \Phi_1^T \widehat{\mathbf{M}}_{1,i}, \quad i=1,2 \end{aligned}$$

경계 영역의 시스템 축소를 위하여 계층성으로 구분된 경계 영역에 식 (13)과 같은 정적 구속 모드를 적용하여 시스템을 분절화 한다. 이때에 정적 구속 모드 $\Psi_{B_1,B_2} = -\tilde{\mathbf{K}}_{B_1,B_2}^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_{B_1,B_2}$ 를 적용한다.

$$T_B^T (R_1^T T_1^T K T_1 R_1) T_B y = \lambda T_B^T (R_1^T T_1^T M T_1 R_1) T_B y, \quad y = (T_1 R_1 T_B)^{-1} u$$

$$\text{where } T_B = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & \Psi_{B_1, B_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (13)$$

식 (13) 을 통해 분절화된 시스템 행렬은 식 (14) 와 같다.

$$= \lambda \begin{bmatrix} K_{I,I}^R & 0 & 0 & \widehat{K}_{I,B_1}^R & \widehat{K}_{I,B_2}^R \\ & \widetilde{K}_{B_1,B_1} & 0 & 0 & 0 \\ & & \overline{K}_{B_2,B_2} & 0 & 0 \\ \text{symm.} & & & A_{B_1,B_1} & A_{B_1,B_2} \\ & & & & A_{B_2,B_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ \tilde{u}_{B_1} \\ u_{B_2} \\ v_{B_1} \\ v_{B_2} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} M_{I,I}^R & \widetilde{M}_{I,B_1}^R & \overline{M}_{I,B_2}^R & \widehat{M}_{I,B_1}^R & \widehat{M}_{I,B_2}^R \\ & \widetilde{M}_{B_1,B_1} & \overline{M}_{B_1,B_2} & \widehat{M}_{B_1,B_1} & \widehat{M}_{B_1,B_2} \\ & & \overline{M}_{B_2,B_2} & \widehat{M}_{B_2,B_1} & \widehat{M}_{B_2,B_2} \\ \text{symm.} & & & B_{B_1,B_1} & B_{B_1,B_2} \\ & & & & B_{B_2,B_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ \tilde{u}_{B_1} \\ u_{B_2} \\ v_{B_1} \\ v_{B_2} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \overline{K}_{B_2,B_2} &= \widetilde{K}_{B_2,B_2} + \Psi_{B_1,B_2}^T \widetilde{K}_{B_1,B_2} \\ \overline{M}_{I,B_2}^R &= \widetilde{M}_{I,B_2}^R + \widetilde{M}_{I,B_1}^R \Psi_{B_1,B_2}, \quad \overline{M}_{B_1,B_2} = \widetilde{M}_{B_1,B_2} + \widetilde{M}_{B_1,B_1} \Psi_{B_1,B_2} \\ \overline{M}_{B_2,B_2} &= \widetilde{M}_{B_2,B_2} + \Psi_{B_1,B_2}^T \widetilde{M}_{B_1,B_2} + \widetilde{M}_{B_1,B_1} \Psi_{B_1,B_2} + \Psi_{B_1,B_2}^T \widetilde{M}_{B_1,B_1} \Psi_{B_1,B_2} \\ \widehat{M}_{B_2,B_1} &= \widehat{M}_{B_2,B_1} + \Psi_{B_1,B_2}^T \widehat{M}_{B_2,B_2}, \quad \widehat{M}_{B_2,B_2} = \widehat{M}_{B_2,B_2} + \Psi_{B_1,B_2}^T \widehat{M}_{B_1,B_2} \end{aligned}$$

경계 영역 해당 시스템 부분을 내부 영역과 마찬가지로 식 (15) 와 같이 분절된 고유치 문제를 추출할 수 있다.

$$\begin{aligned} \widetilde{K}_{B_1,B_1} \tilde{u}_{B_1} &= \lambda \widetilde{M}_{B_1,B_1} \tilde{u}_{B_1} \\ \overline{K}_{B_2,B_2} u_{B_2} &= \lambda \overline{M}_{B_2,B_2} u_{B_2} \end{aligned} \quad (15)$$

이로부터 계산된 고유 모드는 식(16)과 같다.

$$\tilde{\mathbf{u}}_{B_1} = \Phi_{B_1} \mathbf{q}_{B_1}, \quad \mathbf{u}_{B_2} = \Phi_{B_2} \mathbf{q}_{B_2} \quad (16)$$

마찬가지로 cut-off 주파수 전략으로 각각에 대해 변환 행렬 식(17)을 통해 경계 영역을 축소할 수 있다. 그리고 최종 식(18)로 시스템을 구성한다.

$$\mathbf{R}_{B_1} = \text{diag} \left[\mathbf{I} \quad \Phi_{B_1} \quad \mathbf{I} \quad \Phi_{B_1} \quad \mathbf{I} \right] \quad (17)$$

$$\mathbf{R}_{B_2} = \text{diag} \left[\mathbf{I} \quad \mathbf{I} \quad \Phi_{B_2} \quad \mathbf{I} \quad \Phi_{B_2} \right]$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{I,I}^R & 0 & 0 & \widehat{\mathbf{K}}_{I,B_1}^{RR} & \widehat{\mathbf{K}}_{I,B_2}^{RR} \\ & \tilde{\mathbf{K}}_{B_1,B_2}^R & 0 & 0 & 0 \\ & & \bar{\mathbf{K}}_{B_2,B_2}^R & 0 & 0 \\ \text{symm.} & & & \mathbf{A}_{B_1,B_1}^R & \mathbf{A}_{B_1,B_2}^{RR} \\ & & & & \mathbf{A}_{B_2,B_2}^R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_I \\ \mathbf{q}_{B_1} \\ \mathbf{q}_{B_2} \\ \mathbf{r}_{B_1} \\ \mathbf{r}_{B_2} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{I,I}^R & \tilde{\mathbf{M}}_{I,B_1}^{RR} & \bar{\mathbf{M}}_{I,B_2}^{RR} & \widehat{\mathbf{M}}_{I,B_1}^{RR} & \widehat{\mathbf{M}}_{I,B_2}^{RR} \\ & \tilde{\mathbf{M}}_{B_1,B_1}^R & \bar{\mathbf{M}}_{B_1,B_2}^{RR} & \widehat{\mathbf{M}}_{B_1,B_1}^{RR} & \widehat{\mathbf{M}}_{B_1,B_2}^{RR} \\ & & \bar{\mathbf{M}}_{B_2,B_2}^R & \widehat{\mathbf{M}}_{B_2,B_1}^{RR} & \widehat{\mathbf{M}}_{B_2,B_2}^{RR} \\ \text{symm.} & & & \mathbf{B}_{B_1,B_1}^R & \mathbf{B}_{B_1,B_2}^{RR} \\ & & & & \mathbf{B}_{B_2,B_2}^R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_I \\ \mathbf{q}_{B_1} \\ \mathbf{q}_{B_2} \\ \mathbf{r}_{B_1} \\ \mathbf{r}_{B_2} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{K}}_{B_1, B_1}^R &= \Phi_{B_1}^T \tilde{\mathbf{K}}_{B_2, B_2} \Phi_{B_1}, \bar{\mathbf{K}}_{B_2, B_2}^R = \Phi_{B_2}^T \bar{\mathbf{K}}_{B_2, B_2} \Phi_{B_2}, \widehat{\mathbf{K}}_{I, B_1}^{RR} = \widehat{\mathbf{K}}_{I, B_1}^R \Phi_{B_1}, \\
\mathbf{A}_{B_1, B_1}^R &= \Phi_{B_1}^T \mathbf{A}_{B_1, B_1} \Phi_{B_1}, \widehat{\mathbf{K}}_{I, B_2}^{RR} = \widehat{\mathbf{K}}_{I, B_2}^R \Phi_{B_2}, \mathbf{A}_{B_1, B_2}^{RR} = \Phi_{B_1}^T \mathbf{A}_{B_1, B_2} \Phi_{B_2}, \\
\mathbf{A}_{B_2, B_2}^R &= \Phi_{B_2}^T \mathbf{A}_{B_2, B_2} \Phi_{B_2}, \tilde{\mathbf{M}}_{I, B_1}^{RR} = \tilde{\mathbf{M}}_{I, B_1}^R \Phi_{B_1}, \tilde{\mathbf{M}}_{B_1, B_2}^R = \Phi_{B_1}^T \tilde{\mathbf{M}}_{B_1, B_1} \Phi_{B_1}, \\
\bar{\mathbf{M}}_{I, B_2}^{RR} &= \bar{\mathbf{M}}_{I, B_2}^R \Phi_{B_2}, \bar{\mathbf{M}}_{B_1, B_2}^{RR} = \Phi_{B_1}^T \bar{\mathbf{M}}_{B_1, B_2} \Phi_{B_2}, \bar{\mathbf{M}}_{B_2, B_2}^R = \Phi_{B_2}^T \bar{\mathbf{M}}_{B_2, B_2} \Phi_{B_2}, \\
\widehat{\mathbf{M}}_{I, B_1}^{RR} &= \widehat{\mathbf{M}}_{I, B_1}^R \Phi_{B_1}, \widehat{\mathbf{M}}_{B_1, B_1}^{RR} = \Phi_{B_1}^T \widehat{\mathbf{M}}_{B_1, B_1} \Phi_{B_1}, \widehat{\mathbf{M}}_{B_2, B_1}^{RR} = \Phi_{B_2}^T \widehat{\mathbf{M}}_{B_2, B_1} \Phi_{B_1}, \\
\mathbf{B}_{B_1, B_1}^R &= \Phi_{B_1}^T \mathbf{A}_{B_1, B_1} \Phi_{B_1}, \widehat{\mathbf{M}}_{I, B_2}^{RR} = \widehat{\mathbf{M}}_{I, B_2}^R \Phi_{B_2}, \widehat{\mathbf{M}}_{B_1, B_2}^{RR} = \Phi_{B_1}^T \widehat{\mathbf{M}}_{B_1, B_2} \Phi_{B_2}, \\
\widehat{\mathbf{M}}_{B_2, B_2}^{RR} &= \Phi_{B_2}^T \widehat{\mathbf{M}}_{B_2, B_2} \Phi_{B_2}, \mathbf{B}_{B_1, B_2}^{RR} = \Phi_{B_1}^T \mathbf{A}_{B_1, B_2} \Phi_{B_2}, \mathbf{B}_{B_2, B_2}^R = \Phi_{B_2}^T \mathbf{B}_{B_2, B_2} \Phi_{B_2}
\end{aligned}$$

3 재해석 방법

3.1 재해석 방법

고정경계 기반의 모델 차수 축소 법에서 부 구조물의 축소 기저는 고유 벡터를 계산하는 과정으로 높은 계산 비용을 차지한다. 구조 변화에 따른 반복적인 해석 수행 시 계산 비용을 낮추기 위해 baseline 에서 계산한 축소 기저를 섭동이 발생한 구조물에 사용하는 재해석 방법이 사용될 수 있다. 그러나 사용되는 축소 기저가 변화된 구조를 정확히 표현하지 못하기 때문에 정확성이 낮아지는 문제가 발생한다. 이를 해결하기 위해 구조물에 대한 변량을 잔류 응력으로 가정하여 계산한 정적 기저를 초기 계산 값의 축소 기저에 확장하여 사용하는 방법이 제안되었다. Masson 에 의해 발표된 이 방법은 enriched ritz 접근법으로 기존 모델 차수 축소 법과 함께 사용으로 허용 범위에서의 정확성을 만족하는 것으로 알려졌다. 다음은 enriched ritz 접근법의 수식적 표현을 나타낸다. 우선, 식(19)는 섭동이 발생한 부구조물의 내부 영역에 대한 고유 주파수 문제이다.

$$[(\mathbf{K}_{II} + \Delta\mathbf{K}_{II}) - \mathbf{w}_j^2(\mathbf{M}_{II} + \Delta\mathbf{M}_{II})]\{\Phi_I\}_j = 0 \quad (19)$$

위의 수식으로부터 시스템 변량을 잔류 응력으로 가정하고 다음 식 (20)으로 재배열 할 수 있다.

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_{II} - \mathbf{w}_j^2\mathbf{M}_{II}]\{\Phi_I\}_j &= \mathbf{F}_\Delta(\mathbf{w}_j), \\ \text{where } \mathbf{F}_\Delta(\mathbf{w}_j) &= -[\Delta\mathbf{K}_{II} - \mathbf{w}_j^2\Delta\mathbf{M}_{II}]\{\Phi_I\}_j \end{aligned} \quad (20)$$

식 (20)의 고유 주파수와 고유 벡터는 미지 항이다. 이를 식 (20)와 같이 baseline 시스템에서 구한 값으로 대략화한다. 그리고 정적 해석을 통한 기저를 구한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_D &= \mathbf{K}_{II}^{-1}[\tilde{\mathbf{F}}_\Delta(\mathbf{w}_1)\tilde{\mathbf{F}}_\Delta(\mathbf{w}_2)\dots\tilde{\mathbf{F}}_\Delta(\mathbf{w}_{nc})] \\ \text{where } \tilde{\mathbf{F}}_\Delta(\mathbf{w}_j) &= -[\Delta\mathbf{K}_{II} - \{\mathbf{w}_j^0\}^2\Delta\mathbf{K}_{II}]\{\Phi_I^0\}_j \end{aligned} \quad (21)$$

식 (21)의 정적 해석의 기저를 baseline 시스템의 축소 기저에 확장하여 섭동이 발생한 시스템의 추가적 동적 계산 없이 사용할 수 있다. 그러나, 식 (21)의 정적 해석의 기저는 열로 배열된 벡터 간의 선형적 독립성이 보장이 되지 않는다. 따라서, 추가로 SVD(Singular Value Decomposition)을 이용하여 처리를 한다[8]. 이렇게 완성한 변화된 시스템 내부 영역의 축소 기저는 다음과 같이 표현된다.

$$\Delta\Phi_I \approx \begin{bmatrix} \Phi_I & \tilde{\mathbf{R}}_D \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

3.2재해석 방법의 개선된 다단계 부구조화 기법 적용

개선된 다단계 부구조화 기법은 고정 경계 모드 합성법으로 내부영역의 축소기저 계산에 많은 시간이 소요된다. 이를 재해석 기법을 적용하여 섭동이 발생하는 반복적 계산 시에 상당히 계산효율을 높일 수 있다. 변량이 발생한 시스템 고유 주파수 문제는 다음과 같이 표현한다.

$$\Delta K = \lambda \Delta M \quad (23)$$

이 문제에서 섭동이 발생한 시스템 내부 영역의 축소 기저는 앞 절에서 설명한 재해석 기법을 적용하여 다음과 같이 표현한다.

$$\Delta R_1 = [\Phi_1 | \tilde{R}_D \quad I \quad I \quad I] \quad (24)$$

이를 개선된 다단계 부 구조화 기법의 최종 식에 적용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccccc} \langle \Delta K_{I,I}^{\tilde{R}} \rangle & 0 & 0 & \langle \Delta \tilde{K}_{I,B_1}^{\tilde{R}R} \rangle & \langle \Delta \tilde{K}_{I,B_2}^{\tilde{R}R} \rangle \\ & \Delta \tilde{K}_{B_1,B_2}^{\tilde{R}} & 0 & 0 & 0 \\ & & \Delta \tilde{K}_{B_2,B_2}^{\tilde{R}} & 0 & 0 \\ & \text{symm.} & & \Delta A_{B_1,B_1}^{\tilde{R}} & \Delta A_{B_1,B_2}^{\tilde{R}R} \\ & & & & \Delta A_{B_2,B_2}^{\tilde{R}} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \Delta \tilde{q}_I \\ \Delta q_{B_1} \\ \Delta q_{B_2} \\ \Delta r_{B_1} \\ \Delta r_{B_2} \end{Bmatrix} \\
 = \lambda & \left[\begin{array}{ccccc} \langle \Delta M_{I,I}^{\tilde{R}} \rangle & \langle \Delta \tilde{M}_{I,B_1}^{\tilde{R}R} \rangle & \langle \Delta \tilde{M}_{I,B_2}^{\tilde{R}R} \rangle & \langle \Delta \tilde{M}_{I,B_1}^{\tilde{R}R} \rangle & \langle \Delta \tilde{M}_{I,B_2}^{\tilde{R}R} \rangle \\ & \Delta \tilde{M}_{B_1,B_1}^{\tilde{R}} & \Delta \tilde{M}_{B_1,B_2}^{\tilde{R}R} & \Delta \tilde{M}_{B_1,B_1}^{\tilde{R}R} & \Delta \tilde{M}_{B_1,B_2}^{\tilde{R}R} \\ & & \Delta \tilde{M}_{B_2,B_2}^{\tilde{R}} & \Delta \hat{M}_{B_2,B_1}^{\tilde{R}R} & \Delta \hat{M}_{B_2,B_2}^{\tilde{R}R} \\ & \text{symm.} & & \Delta B_{B_1,B_1}^{\tilde{R}} & \Delta B_{B_1,B_2}^{\tilde{R}R} \\ & & & & \Delta B_{B_2,B_2}^{\tilde{R}} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \Delta \tilde{q}_I \\ \Delta q_{B_1} \\ \Delta q_{B_2} \\ \Delta r_{B_1} \\ \Delta r_{B_2} \end{Bmatrix} \quad (25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \Delta \mathbf{K}_{i,i}^{\tilde{R}} \rangle &= [\Phi_i | \tilde{\mathbf{R}}_D]^T [\Delta \mathbf{K}_{i,i}] [\Phi_i | \tilde{\mathbf{R}}_D], \quad \langle \Delta \mathbf{M}_{i,i}^{\tilde{R}} \rangle = [\Phi_i | \tilde{\mathbf{R}}_D]^T [\Delta \mathbf{M}_{i,i}] [\Phi_i | \tilde{\mathbf{R}}_D], \\ \langle \Delta \tilde{\mathbf{M}}_{i,i}^{\tilde{R}\tilde{R}} \rangle &= [\Phi_i | \tilde{\mathbf{R}}_D]^T \tilde{\mathbf{M}}_{i,i} \Delta \Phi_{B_i}, \quad \langle \hat{\mathbf{K}}_{i,i}^{\tilde{R}\tilde{R}} \rangle = [\Phi_i | \tilde{\mathbf{R}}_D]^T [\Delta \hat{\mathbf{K}}_{i,i}] \Delta \Phi_{B_i}, \\ \langle \hat{\mathbf{M}}_{i,i}^{\tilde{R}\tilde{R}} \rangle &= [\Phi_i | \tilde{\mathbf{R}}_D]^T [\hat{\mathbf{M}}_{i,i}] \Delta \Phi_{B_i}, \quad i=1,2 \end{aligned}$$

최종 식(25)에서 $\langle \dots \rangle$ 은 재해석 방법이 적용된 부분을 나타낸다. 본 방법으로 섭동이 발생한 시스템의 동적 해석을 반복적으로 수행 시 계산 효율과 방법의 적절성을 확인하기 위해 크기 최적 설계에 적용하였다. 이를 통하여 시스템 변형에 따른 내부 영역 축소 기저의 추가적 고유 벡터 계산 없이 정확한 해석을 할 수 있었다. 또한 제안 방법의 정확성 검증을 위해 간단한 상자 보 모델의 고유 주파수 정확성을 살펴보았다. 다음은 이에 대한 수치 해석 결과를 나타낸다.

4 수치 예제

4.1 상자 보 모델을 이용한 고유 주파수 문제의 정확성 비교

본 연구에서 제안하는 개선된 다단계 부 구조 기법에서 재해석 방법의 동적 계산의 정확성을 살펴보기 위해 그림(2)과 같은 간단한 상자 보 모델을 살펴보았다. 모델의 탄성 계수는 71.7GPa, 포아송 비는 0.33 그리고 밀도는 2810kg/m³ 이다. 상자 보의 지지대 두께를 설계 변수로 설정하였고, 이의 변화에 따른 고유 주파수의 정확성을 전체 시스템 해석 값 비교하여 살펴보았다.

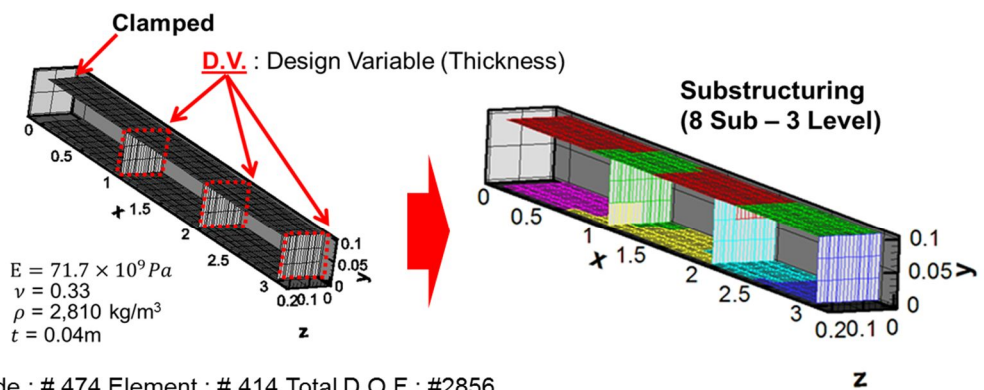


Figure 3 Configuration of box beam

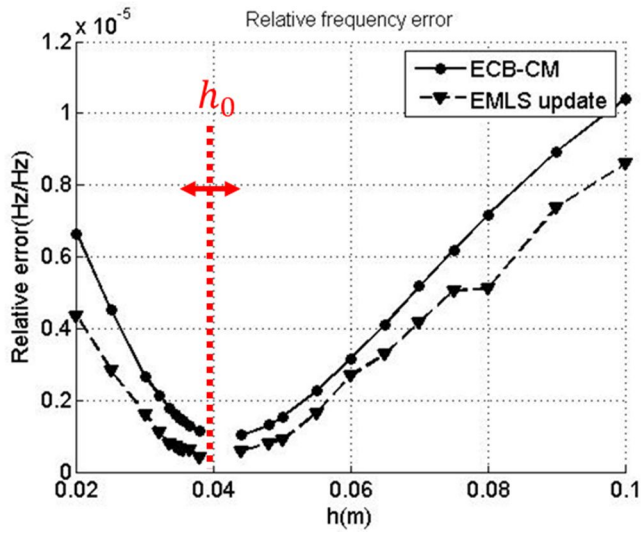


Figure 4-(a) 1st eigenmode errors for varying designs

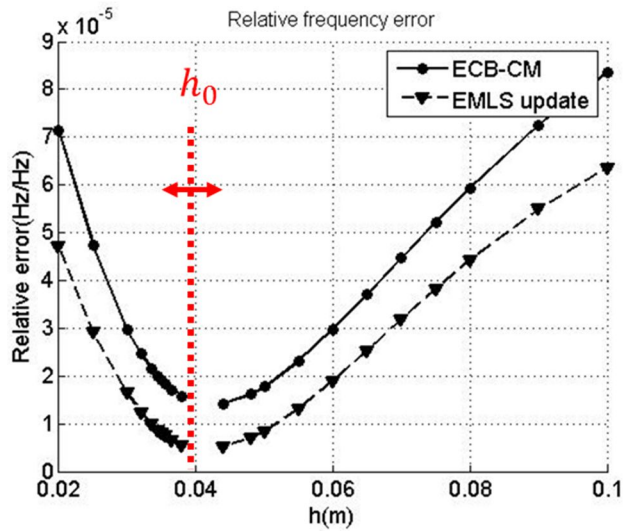


Figure 4-(b) 2nd eigenmode errors for varying designs

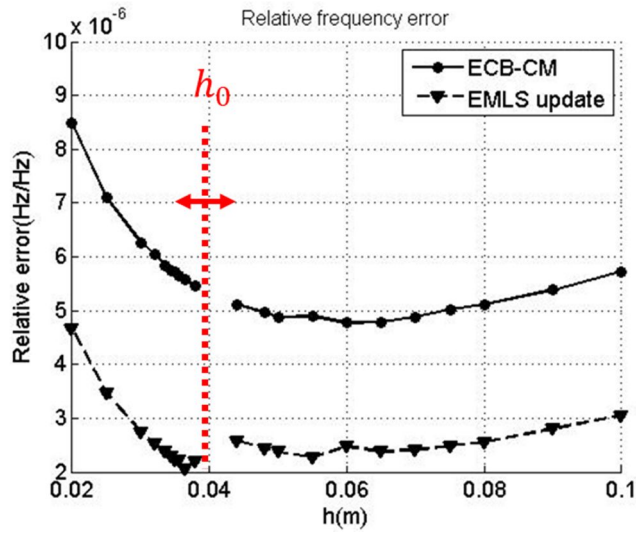


Figure 4-(c) 3rd eigenmode errors for varying designs

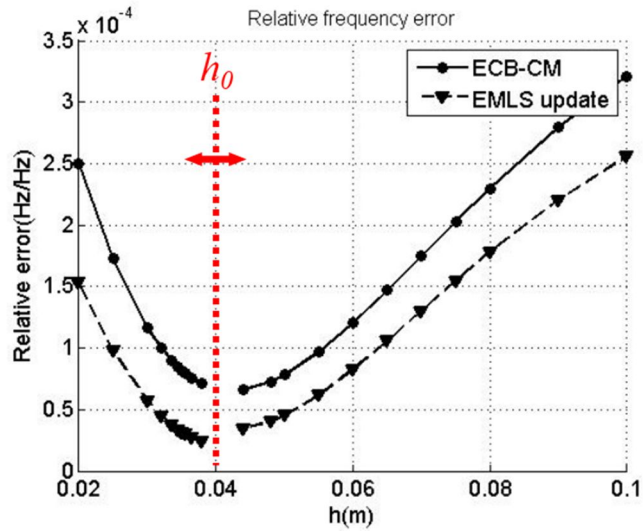


Figure 4-(d) 4th eigenmode errors for varying designs

그래프에서 ECB-CM 은 기존의 부구조화 기법에 적용한 재해석 방법이며, EMLS upgrade 는 본 연구에서 제안하는 재해석 방법을 적용한 개선된 다단계 부구조화 기법이다. 그래프에 표시된 h_0 을 baseline 으로 하여 가로축에서 나타내는 설계 변수의 두께 변화를 최대 2.5 배 주며 고유 주파수 상대 오차를 살펴보았다. 두 방법 다 허용 오차 내의 정확성을 만족하는 것을 확인하였다. 특히, 본 연구에서 제안하는 EMLS update 방법이 기존 방법 보다 23% 작은 크기의 축소 시스템 크기로 더 정확한 해를 얻을 수 있음을 확인하였다.

4.2 EMLS update 의 크기 최적 설계 문제 적용

섭동이 발생하는 구조의 반복적 계산 과정에서 본 연구에서 제안하는 방법의 효율성을 확인하기 위해 크기 크기 최적 설계를 수행하였다. 이를 위해 Figure 4 와 같이 스파(Spar), 립(Rib) 그리고 표면(Surface)로 구성된 초음속 날개 구조를 살펴보았다. 재료의 탄성 계수는 1.483GPa, 포아송 비는 0.33 이고 밀도는 176.25kg/m^3 이다. 총 10 개의 설계 변수 영역을 그림 6 에서처럼 설정하였다. 크기 최적 설계 문제는 다음과 같이 정의하였다.

- Objective : $\min_t Weight(t)$, t-thickness
- Constraint condition : $\lambda_1 < 154.4$ $\lambda_2 < 2040.0$ $\lambda_3 < 4274.5$

- Initial thickness : 50mm (Rib/Spar), 30mm (Skin)
- Upper/Lower thickness : 25/75mm (Rib/Spar), 15/45mm (Skin)

최적화 알고리즘으로 SLP(Sequential Linear Programming)를 사용하였고 고유 주파수에 대한 구속 조건의 민감도 계산에 SAM(Semi Analytical Method)를 적용하였다. 이를 수행한 목적 함수에 대한 수렴 값은 다음과 같다. 구속 조건의 고유 주파수 해석에서 전체 시스템(Full)을 이용할 시 목적 함수의 수렴 값은 685.567kg 이며 제안하는 방법으로 EMLS update 의 경우에는 685.597kg 으로 백분율 오차는 0.004% 이다. 기존 방법인 ECB 는 685.641kg 으로 0.01%의 백분율 오차를 가진다. 최종 설계 변수 값은 표 1 에서 확인할 수 있다. ECB, EMLS update 두 방법 다 허용 범위 오차 내의 정확성을 가진다. 그러나, 본 연구에서 제안하는 EMLS update 의 경우 0.4%내의 정확성으로 ECB 의 경우 1%내 보다 정확한 결과를 나타낸다. 축소 비율은 EMLS update 의 경우 19.82%로 기존 방법 29.09%에 비해 시스템을 더 작게 축소하여 계산 효율이 향상되었다. 실제로 전체 시스템을 이용하여 해석 시 한번 함수 호출 후 처리시간은 1102 초 인 반면, EMLS 이용 시 13 초 이고 재해석 방법을 적용한 EMLS update 의 경우 11 초이다. 기존 방법의 ECB 는 30 초 계산 시간이 소요된다. 본 연구에서 제안하는 EMLS update 가 기존 방법 ECB 보다 계산 효율성과 정확성 모두 높음을 확인하였다.

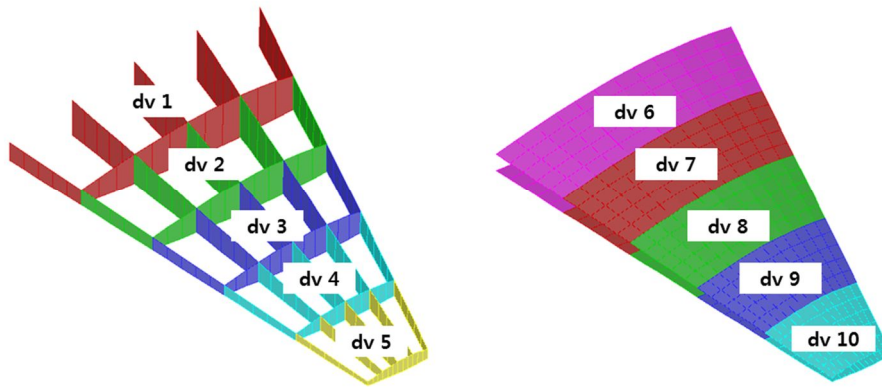


Figure 5 Configuration of wing box consisted of ribs, spars and surfaces with 10 design variables

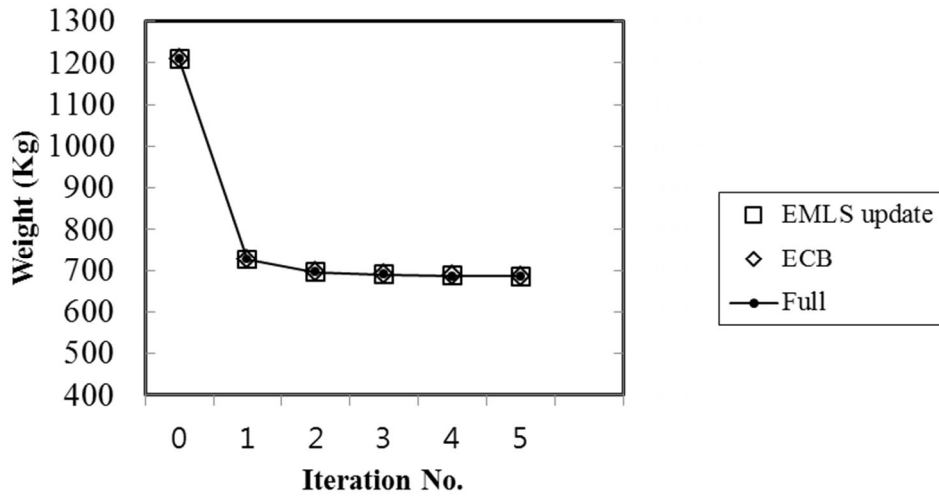


Figure 6 Converged result of the objective function at each iteration (FULL : Full system, ECB : conventional method, EMLS update : proposed method)

Table 1 Converged values in objective function at each iteration with methods (unit : kg)

Iter.	Full	CB	ECB	EMLS	EMLS update
0	1209.06	1209.06	1209.06	1209.06	1209.06
1	726.78	726.792	727.48	839.965	779.83
2	694.70	694.487	694.76	809.927	698.71
3	689.63	689.372	689.53	708.997	699.29
4	685.55	685.104	687.81	709.808	682.48
5	685.68	685.359	685.24	704.028	698.95

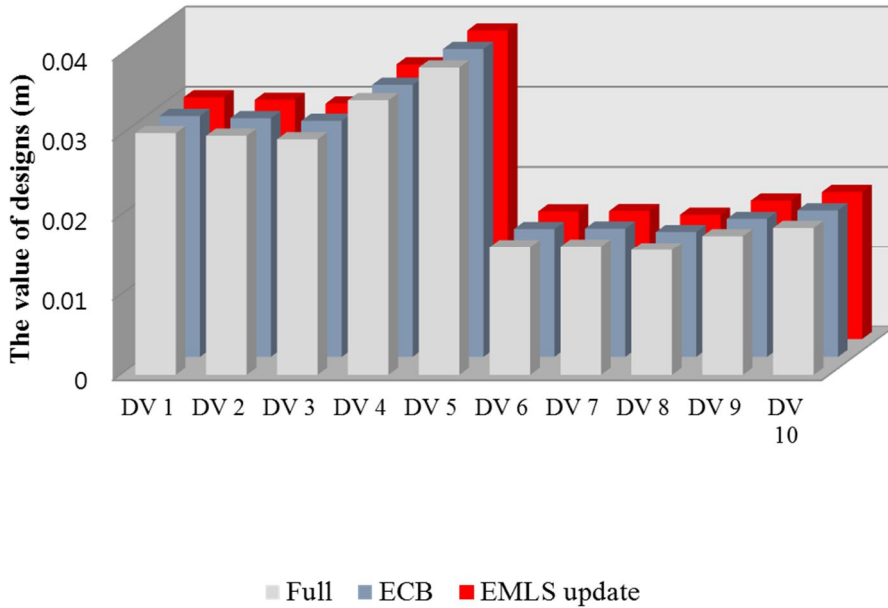


Figure 7 Converged value at design variables

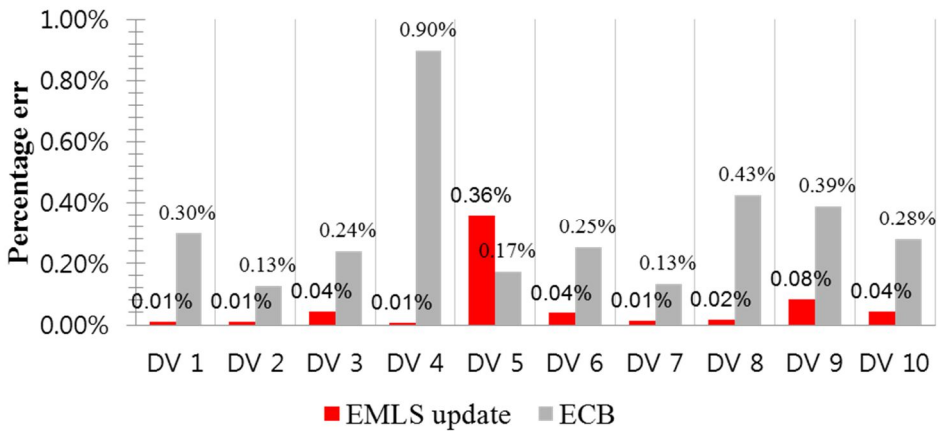


Figure 8 Percentage error of converged value in design variables in comparison with full system (ECB : conventional mehtod, EMLS update : traditional method)

Table 2 Converged value in design variables at each method with percentage error in comparison of full system (FULL : full system, ECB : conventional method, EMLS update : proposed method)

Design variable	FULL	ECB	Error	EMLS update	Error
no.	(m)	(m)	(%)	(m)	(%)
dv 1	0.0303	0.0302	0.3002	0.0303	0.0114
dv 2	0.0299	0.0299	0.1258	0.0299	0.0088
dv 3	0.0295	0.0296	0.2401	0.0295	0.0436
dv 4	0.0344	0.0341	0.8981	0.0344	0.0060
dv 5	0.0385	0.0385	0.1734	0.0386	0.3598
dv 6	0.0160	0.0161	0.2513	0.0160	0.0384
dv 7	0.0161	0.0161	0.1326	0.0161	0.0126
dv 8	0.0156	0.0157	0.4265	0.0156	0.0158
dv 9	0.0174	0.0173	0.3897	0.0174	0.0842
dv 10	0.0185	0.0184	0.2802	0.0184	0.0421

5 결론

본 연구는 새로운 부구조화 기법인 개선된 다단계 부구조화 기법에 재 해석 방법을 적용하여 반복적 해석이 필요한 과정에서 계산의 효율을 극대화 하였다. 재해석 방법으로 섭동이 발생한 부구조물의 추가적 고유 주파수 해석 없이 초기 축소 기저에 변화된 시스템의 정적 해석으로 구한 리츠 벡터를 확장적으로 이용하여 허용 오차 내의 정확성을 보장함을

확인하였다. 동시에 새로운 부구조화 기법을 이용하여 기존 방법 보다 계산 효율을 더욱 높일 수 있음을 확인하였다. 특히, 본 연구는 고정 경계 노말 모드를 기반한 부구조화 기법에 적용되며, 부구조물 내부 영역의 시스템 크기가 클수록 계산 효율을 높일 수 있다. 시스템 변화에 따른 반복적 해석의 예로 고유 주파수를 구속 조건으로 하는 크기 최적화 문제에 적용하여 본 연구 방법의 활용 가능성을 확인하였다. 또한 최적화 문제 외에 동적 해석을 반복적으로 수행하는 다양한 영역에서 사용될 수 있다.

참고 문헌

- [1] 백승민(2012), “대형 시스템의 동적 해석을 위한 다단계 부구조화 기법과 시스템 축소 기법 연구”, 서울대학교 대학원 기계항공공학부, 박사학위 논문
- [2] G. Masson, Component mode synthesis based on an enriched ritz approach for efficient structural optimization, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.296, 2006, pp.845-860.
- [3] Craig Jr RR. Coupling of substructures for dynamic analysis-an overview, AIAA-2000-1573, 2000.
- [4] Hurty WC. Vibrations of structural systems by component-mode synthesis, *Journal of the Engineering Mechanics Division (ASCE)* 1960; 86:51-69.
- [5] Suarez LE, Singh MP. Improved Fixed Interface Method for Modal Synthesis,

AIAA Journal 1992;30(12):2952-2958.

- [6] Shyu WH, Ma ZD, Hulbert GM. A new component mode synthesis method: Quasi-static mode compensation, *Finite Elements in Analysis and Design* 1997;24:271-281
- [7] Bennighof JK, Lehoucq RB. An automated multilevel substructuring method for eigenspace computation in linear elastodynamics, *SIAM Journal on Scientific Computing* 2004;25(6):2084-2106
- [8] A. Bouazzouni, Selecting a ritz basis for the reanalysis of the frequency response functions of modified structures, *Journal of Sound and Vibration*, 198(2):309-322, 1997.
- [9] Liao B, Bai Z, Gao W. The important modes of subsystems: A moment-matching approach, *Int. J. Numer. Meth. Engng* 2007; 70:1581-1597.
- [10] Cho M, Kim H. Element-Based Node Selection Method for Reduction of Eigenvalue problem, *AIAA Journal* 2004;42(8):1677-1684.
- [11] Kim H, Cho M. Two-level scheme for selection of primary degrees of freedom and semi-analytic sensitivity based on the reduced system, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2006;195(33-36):4244-4268.
- [12] Baek S, Cho M. The Transient and Frequency Response Analysis using the Multi-level System Condensation in the Large-scaled Structural Dynamic problem, *Structural Engineering and Mechanics* 2011;38(4):429-441.

부록 A

부록에서는 자유도 기반의 축소 시스템 기법에서 스프링이 연결된 시스템의 주자유도 선정 문제에 대한 내용을 다룬다. 축소 시스템 기법 중 자유도 기반 방법은 부자유도를 주자유도로 대략화하고 이를 변환 과정을 통해 시스템을 축소한다. 이때에 적절한 주자유도 선정은 해석의 정확성에 직접적인 영향 요인이다. 주자유도 선정에는 순차적 소거법, 에너지 판별 법 등 다양한 기법들이 있다. 그러나 특정 절점에 대해 측정을 할 필요가 있거나 시스템 해석에 큰 영향을 준다고 판단되는 경우 주자유도로 선정한다. 그러나 임의로 추가된 주자유도에 의해 오히려 해석의 정확성이 저해되는 경우가 발생한다. 이러한 추가적으로 선정 혹은 임의로 선정된 주자유도에 의해서 축소 시스템의 정확성이 급격히 낮아지는 원인을 수식적으로 증명하고 예제를 통해 검증한다.

A.1 축소 시스템 기법

비감쇠 시스템의 동적 평형식에서 주자유도(Primary degrees of freedom)와 부자유도(Secondary degrees of freedom)로 구성하면 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{pp} & \mathbf{K}_{ps} \\ \mathbf{K}_{ps}^T & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_p \\ \phi_s \end{Bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{pp} & \mathbf{M}_{ps} \\ \mathbf{M}_{ps}^T & \mathbf{M}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_p \\ \phi_s \end{Bmatrix} \quad (26)$$

두 번째 열로부터 자유도와 부자유도 관계식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(\mathbf{K}_{ps}^T - \lambda \mathbf{M}_{ps}^T) \phi_p + (\mathbf{K}_{ss} - \lambda \mathbf{M}_{ss}) \phi_s = 0 \quad (27)$$

이를 통해 전체 자유도를 주자유도에 대한 변환식으로 나타낼 수 있고 이는 다음과 같다.

$$\Phi = \begin{Bmatrix} \phi_p \\ \phi_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{t}(\lambda) \end{bmatrix} \phi_p = \mathbf{T}(\lambda) \phi_p \quad (28)$$

가장 기본적인 정적 시스템 축소는 식(28)의 변환 행렬에서 질량 효과 없이 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{t}_s = -\mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{ps}^T \quad (29)$$

동적 시스템 축소는 다음과 같이 식(27)을 주자유도로 전개한 변환 관계식에서 출발한다.

$$\mathbf{t}_D(\lambda) = -(\mathbf{K}_{ss} - \lambda \mathbf{M}_{ss})^{-1} (\mathbf{K}_{ps}^T - \lambda \mathbf{M}_{ps}^T) \quad (30)$$

식(30)은 테일러 급수에 의해 다음 식과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(\lambda) &= -\mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{ps}^T + \mathbf{K}_{ss}^{-1} (\mathbf{M}_{ps}^T - \mathbf{M}_{ss} \mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{ps}^T) \lambda \\ &\quad + \mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{M}_{ss} \{ \mathbf{K}_{ss}^{-1} (\mathbf{M}_{ps}^T - \mathbf{M}_{ss} \mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{ps}^T) \} \lambda^2 + \mathcal{O}(\lambda^3) \end{aligned} \quad (31)$$

식(31)에서 미지수인 고유치에 대해 첫째 항만을 고려하고 $\lambda \approx \mathbf{M}_s^{-1} \mathbf{K}_s$ 로 대략적으로 나타냄으로 식(32)과 같이 나타낼 수 있고 이를 IRS (Improved Reduced System) 기법으로 부른다.

$$\mathbf{t}_{IRS} = -\mathbf{t}_s + \mathbf{K}_{ss}^{-1} (\mathbf{M}_{ps}^T - \mathbf{M}_{ss} \mathbf{t}_s) \mathbf{M}_s^{-1} \mathbf{K}_s \quad (32)$$

A.2 주자유도 선정 방법

축소 시스템 기법을 이용한 해석의 정확성 보장을 위해서는 주자유도가 적절히 선정되어야 한다. 대표적인 주자유도 선정 방법으로 순차적 소거법이 있다. 이 방법은 시스템의 대각 항에 대해서 강성 대 질량 비가 가장 큰 값을 부자유도로 하나씩 소거한다. 목표 주파수 값에 이를 때까지 반복하여 부자유도로 하나씩 소거한 후 남은 자유도를 주자유도로 선정한다. 그 밖에 주자유도 선정 방법으로 에너지 판별 법과 요소 에너지 판별법 그리고 부구조화 기법을 적용한 방법 등이 있다.

A.3 자유도 선정에 따른 정확도 분석

주자유도 선정은 축소 시스템의 해석 신뢰성에 직접적 영향을 준다. 수치 해석적 의미 외에도 주자유도는 구조물의 동적 해석에서 최적의 센서 위치로써의 의미를 가진다. 위에 언급한 주자유도 선정 방법 외에 주자유도를 임의로 넣는 경우가 있다. 예를 들면, 물질 간의 특성이 변화하는 경계 등 해석에 큰 영향을 준다고 판단되는 절점이나 시스템에서 측정하고자 하는 관심 절점의 경우 주자유도로 선정한다. 그러나 이러한 경우 주자유도에서의 강성 차가 크면 해석의 정확성에 문제가 발생하며 이러한 원인을 스프링이 연결된 간단한 보 모델을 통해 살펴보고자 한다. 이는 그림 9와 같다. 각 보 요소의 강성과 질량은 서로 같다.

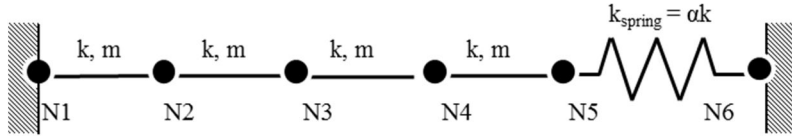


Figure 9 Bar connected spring model

위의 시스템에서 강성과 질량의 행렬은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K} &= k \times \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1+\alpha \end{bmatrix} \\
 \mathbf{M} &= m \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{33}$$

식(33)의 강성행렬 \mathbf{K} 의 α 는 스프링 강성 대 보의 강성 비를 나타낸다. 스프링과 보가 연결된 경계 점 $N5$ 는 일반적으로 물리적 특성이 변화는 경계 점이고 해석의 큰 영향이 주는 동시에 관측을 위한 절점으로 주자유도에 선정이 된다. 임의로 $N5$ 를 주자유도 선정함으로써 축소 시스템 상태에 어떠한 영향을 주는지 확인한다. $N5$ 주자유도 선정 여부 따라 다음 그림과 같이 나타내었다.

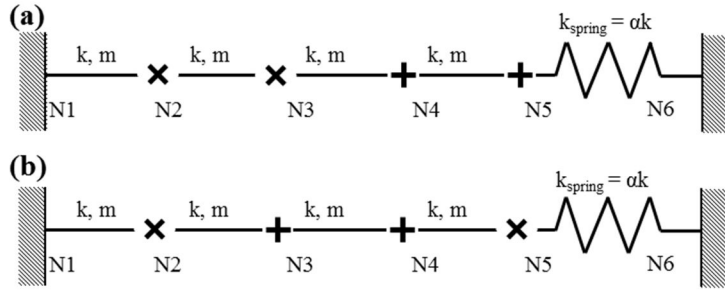


Figure 10 Bar connected with spring element showing PDOFs (+) and SDOFs (x) : (a) Selected N5 as PDOFs with N4 and (b) Selected N5 as SDOFs with N2.

스프링 강성에 따른 축소 시스템 행렬식의 변화를 살펴보기 위해 Guyan 의 정적 시스템 축소 방법을 적용한다. 그림 10 의 모델에서 N5 를 주자유도로 선정한 축소 시스템은 다음 식과 같다.

$$K_R = \begin{bmatrix} \frac{4k}{3} & -k \\ -k & k(1+\alpha) \end{bmatrix}, M_R = \begin{bmatrix} \frac{14m}{9} & 0 \\ 0 & \frac{m}{2} \end{bmatrix} \quad (34)$$

N5 을 부자유도로 선정했을 경우 축소 시스템은 다음과 같다.

$$K_R = \begin{bmatrix} \frac{3k}{2} & -k \\ -k & k\left(2 - \frac{1}{1+\alpha}\right) \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$M_R = \begin{bmatrix} \frac{5}{4}m & 0 \\ 0 & m\left(1 + \frac{1}{2(1+\alpha)^2}\right) \end{bmatrix}$$

N5 를 주자유도로 선정한 식(34)의 강성 시스템 K_R 을 살펴보면 α 값이 커짐에 따라 해당 행렬의 요소 값이 무한히 커짐을 확인할 수 있다. 반

면 N5 를 부자유도로 선정한 경우에는 α 값의 증가 여부에 상관없이 행렬 요소가 수렴 값을 가진다. 이렇게 수렴된 값을 가지는 시스템은 스프링 요소를 고정 경계 조건으로 대체한 축소 시스템과 일치하며 이와 관련된 식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \frac{3k}{2} & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \frac{3k}{2} & -k \\ -k & k\left(2 - \frac{1}{1+\alpha}\right) \end{bmatrix} \quad (36)$$

위의 구성된 축소 시스템 식(34)와 식(35)의 고유 주파수 값을 분석적 방법으로 계산하였다. 식(34)와 식(35)로부터 계산한 고유 주파수 값은 각각 식(37)와 식(38)으로 표현된다.

$$\lambda_{1,2} = \frac{(20 + 14\alpha)km \pm \sqrt{36 + 168(1 + \alpha)km + 4Ak^2m^2}}{14m^2} \quad (37)$$

where $A = 49\alpha^2 + 14\alpha + 28$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\left\{ 4 + \frac{1}{4(1+\alpha)} \left(\frac{3}{1+\alpha} - 5 \right) km \right\} \pm \sqrt{16 + \frac{2}{1+\alpha} \left(\frac{3}{1+\alpha} - 5 \right) km + Bk^2m^2}}{\frac{5}{2}m^2 \left(1 + \frac{1}{2(1+\alpha)^2} \right)} \quad (38)$$

$$\text{where } B = \left(\frac{9}{16(1+\alpha)^4} + \frac{15}{8(1+\alpha)^3} - \frac{55}{16(1+\alpha)^2} + \frac{15}{2(1+\alpha)} - 10 \right)$$

수치적 계산을 통한 계산 값은 표 3 에 나타내었다. 수치적 편의성을 위해 각 요소의 k, m 값을 각각 1 로 계산하였다.

Table 3 Comparison of 1st Eigenvalue between from full system and from reduced system at Fig. 10(a) and (b) as relative error

		1 st Eigenvalue		
α		Full	Reduced	Relative error
10^{-1}		0.198	0.211	0.062
N4,N5	10^0	0.407	0.491	0.205
as PDOFs	10^1	0.561	0.797	0.419
	10^2	0.583	0.851	0.459
	10^3	0.586	0.857	0.463
10^{-1}		0.198	0.204	0.026
N3,N4	10^0	0.407	0.421	0.033
as PDOFs	10^1	0.561	0.592	0.054
	10^2	0.583	0.617	0.058
	10^3	0.586	0.620	0.059

N5 를 주자유도로 포함하는 축소 시스템 계산에서 스프링 강성이 올라감에 따라 1 차 모드 고유치의 오차가 커짐을 확인할 수 있다. N5 가 부자유도로 선정된 경우에는 스프링 강성 변화 상관없이 정확성이 보장된다.

Abstract

Reanalysis Method based Enhanced Multi-Level Sub-Structuring Scheme for Large-Scale Structures

Dongjin Lee

Mechanical and Aerospace Engineering, Multiscale

Mechanical Design

The Graduate School

Seoul National University

FEM has still challenge in dynamic analysis of large-scale model when it comes to computational costs. For it, Component Mode Synthesis (CMS) can be solution. New CMS based fixed interface normal mode presented. It is Enhanced Multi-Level Sub-structuring Scheme(EMLS). EMLS has higher accuracy than traditional method such as Craig-Bampton method through using dynamic constraint mode and sub-structuring from hierarchical. For the repeated calculation with EMLS, reanalysis method was adapted. It makes reduction basis from static analysis instead of dynamic analysis. To prove its robustness and effectiveness, sizing optimization for wing box model was solved.

.....
**keywords : Sub-structuring scheme, Reduced Order Model, Eigenvalue problem,
Reanalysis Method**

Student Number : 2011-24065