



저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.



비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.



변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#)

공학석사학위논문

크리티컬 패스를 활용한 에너지-흐름
네트워크 문제의 해법 개발

Method development on energy-flow
networks by using critical pathes

2014년 8월

서울대학교 대학원

산업공학과

김 종 은

크리티컬 패스를 활용한 에너지-흐름
네트워크 문제의 해법 개발

Method development on energy-flow
networks by using critical pathes

지도교수 홍 성 필

위 논문을 공학석사 학위논문으로 제출함.

2014년 6월

서울대학교 대학원

산업공학과

김 종 은

김종은의 공학석사 학위논문을 인준함.

2014년 6월

위원장 박 종 현 (인)

부위원장 홍 성 필 (인)

위 원 이 경 식 (인)

초 록

서울대학교 대학원

산업공학과

김 종 은

에너지-흐름 네트워크 문제는 마디 간 에너지 차이가 호의 흐름을 발생시키는 네트워크 상에서 흐름균형, 에너지균형, 흐름 및 에너지 상하한 등의 제약조건을 만족시키면서 비용함수를 최소화하는 문제를 의미한다. 본 논문에서는 다양한 현실문제를 포함하는 에너지-흐름 네트워크 문제를 수리적으로 정의하고 그 문제가 NP-Hard에 속함을 보인다. 그리고 몇 가지 관찰을 통해 하한과 가능해를 동시에 제시하는 알고리즘을 제안한다. 몇 가지 문제에 적용한 결과 실험적으로는 대체로 하한과 아주 가까운 해를 출력한다는 사실을 확인했다.

주요어 : 에너지-흐름 네트워크, 상수도 관망 네트워크, 가스 공급망 네트워크, NP-Hardness

학번 : 2010 - 21095

목 차

국문 초록	i
1 서론	2
1.1 연구 배경 및 연구 목적	2
1.2 기존 연구	4
1.3 논문 구성	6
2 문제 정의 및 모형화	7
2.1 문제 정의	7
2.2 제약식과 목적함수	8
2.2.1 흐름균형	8
2.2.2 에너지균형	9
2.2.3 흐름 및 에너지 상/하한	9
2.2.4 목적함수	10
2.3 표기 및 기호 정리	11
2.4 최적화 모형	13
2.5 모형의 수리적 구조	13
3 관찰	18
3.1 에너지량 보존	18
3.2 크리티컬 패스(Critical Path)	21
4 해법	27
4.1 해법 개요	27
4.2 (1) 초기해 탐색	27

4.3	(2) 크리티컬 패스 탐색	30
4.4	(3) 크리티컬 패스의 손실에너지량 최소화	30
4.5	(4) 에너지 상한 제약식 보정	32
4.6	해법 요약	33
5	현실문제 응용 및 결과	34
5.1	실험 대상	34
5.2	실험 개요	36
5.3	실험 결과	36
6	결론 및 추후 연구 과제	38
	참 고 문 헌	39
	영문 초록	41

표 목차

2.1	에너지-흐름 네트워크 문제의 표기	11
2.2	에너지-흐름 네트워크의 기호	12
5.1	실험 네트워크 정보	36
5.2	평균 계산시간	36
5.3	목적함수 값과 하한과의 차이의 평균	36

그림 목차

2.1	에너지-흐름 네트워크 예	12
2.2	분할 문제를 다항변환한 에너지-흐름 네트워크 1	15
2.3	분할 문제를 다항변환한 에너지-흐름 네트워크 2	16
3.1	에너지-흐름 네트워크	19
3.2	마디를 추가한 에너지-흐름 네트워크	19
3.3	$cover(i, j)$	22
3.4	예제 네트워크	23
4.1	크리티컬 패스 탐색	30
4.2	크리티컬 패스 알고리즘	33

1. 서론

1.1 연구 배경 및 연구 목적

일상생활에서 늘 쓰이는 전기, 물, 천연가스는 각기 물질의 형태는 다르지만 공급지와 수요지를 잇는 네트워크를 통해 수송된다. 이들은 매우 많은 수요지에서 지속적으로 소비되기 때문에 수요를 예측하여 시간에 따라 적절히 공급지에서 공급하기 위해 애쓰고, 급격한 변화에 대비하기 위해 네트워크 중간중간에 저장장치(storage or buffer)를 두기도 한다. 또한 먼 거리로 보내기 위해서 전기는 전압, 물은 수두, 그리고 천연가스는 압력을 가하는데 수요지까지 이동하면서 손실되는 에너지를 고려하여 가해야 한다. 이 때, 손실되는 에너지는 물질의 흐름량의 k 제곱에 비례하여 증가하는데 $k = 1$ 인 special case는 수송 문제(transportation problem)와 같다. 따라서 관을 통해 물질을 수송하는 문제는 수송 문제를 포함하는 더 일반적인 형태의 문제라고 할 수 있다.

이렇게 관을 통해 에너지를 가한 물질을 보내는 네트워크를 에너지-흐름 네트워크라 하는데 이를 정의하면 마디 간 에너지 차이가 호의 흐름을 발생시키는 네트워크를 의미한다. 에너지-흐름 네트워크의 특징은 흐름균형(flow balance)과 에너지균형(energy balance)을 만족한다는 것이다. 흐름균형이란 네트워크에서 각 마디에서 들어오는 흐름과 나가는 흐름의 합이 같은 것을 의미하고, 에너지균형이란 각 호에서 양끝 마디의 에너지 차가 호에서 공급 혹은 손실되는 에너지와 같은 것을 의미한다.

에너지-흐름 네트워크 위에서 정의되는 문제를 에너지-흐름 네트워크 문제라고 하는데 보통 공급지에서 수요지까지 흐름을 수송하는데 드는 비용을 최소화하는 문제이다. 이러한 문제는 어떤 물질을 관을 통해 수송하는 대

부분의 문제에 적용이 되며, 대표적으로 상수도관망문제와 가스공급문제를 들 수 있다.

이러한 유형의 문제는 다양한 분야에 걸쳐 연구되어 왔으며, 모형화 된 문제는 대부분 정수변수나 비선형관계식을 포함하고 있다. 이를 해결하기 위한 주된 해법으로 successive linear programming(SLP)[5], piecewise linear programming(PLP)[7], generalized reduced gradient(GRG) method[9], simulated annealing(SA)[3]등을 사용하고 있다.

에너지-흐름 네트워크 문제를 해결하기 위해서는 다음 세 가지를 균형있게 고려해야 한다.

- 에너지-흐름 네트워크의 측면

에너지-흐름 네트워크는 공급/수요를 만족하면서 흐름이 경로를 따라 이동할 때 에너지가 손실되고, 가압장/감압장에서 에너지를 증가/감소시킬 수 있다는 측면을 함께 고려해야 한다.

- 대상이 되는 현실문제의 고유한 특성

수송하는 물질이 기체인지, 유체인지, 아니면 전기인지에 따라 적용되는 제약식의 종류와 형태가 조금씩 달라진다. 또한 이들을 수송하는 관망이 어떤 특징을 가지고 있는지도 고려하여 반영해야 한다.

- 최적화 문제로서의 관점

에너지-흐름 네트워크 문제는 각 마디와 호에 대응되는 에너지와 흐름량을 결정변수로, 네트워크에서 발생하는 에너지 비용을 목적함수로, 그리고 공급과 수요, 흐름과 에너지 관계에 따라 만족시켜야 하는 조건들을 제약조건으로 갖는 최적화 문제로 나타낼 수 있다.

1.2 기존 연구

에너지-흐름 네트워크 문제는 다양한 분야에 걸쳐서 연구되고 있다. 본 논문에서는 분야 별로 연구들을 분석하려 한다. 이에 앞서, 일반적으로 나타나는 모형의 형태를 짚고 넘어가려 한다.

우선, 변수는 크게 네트워크의 각 호에 대응되는 흐름변수와 각 마디에 대응되는 에너지변수를 갖는다. 이들 사이에서 대표적으로 나타나는 제약은 다음과 같다.

- 흐름균형: 각 마디를 기준으로 들어오는 흐름과 나가는 흐름의 양이 같다. 이 때, 해당 마디가 외부로부터 공급이 있거나, 수요가 있으면 이 흐름까지 포함해서 균형이 이루어진다.
- 에너지균형: 각 호를 기준으로 앞/뒤 마디의 에너지 차가 호에서 증가 혹은 감소되는 에너지와 같다.
- 흐름 및 에너지하한: 흐름과 에너지는 각각 상한과 하한을 가진다.

이 때, 에너지균형에서 의도적으로 에너지를 증가시킬 수 있는 호를 가압호라 하고, 의도적으로 감소시킬 수 있는 호를 감압호라 한다. 또한 마디 중에는 흐름을 일정기간 저장할 수 있는 탱크도 존재한다.

가스 분야의 에너지-흐름 네트워크 문제인 가스 공급망 문제는 수요지에서의 필요가스량과 요구압력(minimal guaranteed pressure)을 모두 만족시키면서 비용을 최소화하는 문제이다. 네트워크는 공급지, 수요지, 일반마디로 이루어진 마디집합과 가압장(compressor), 밸브, 일반호로 이루어진 호집합으로 구성된다. 제약은 크게 흐름균형, 비선형 흐름-압력 균형(nonlinear flow-pressure relations), 압력 상/하한으로 구성되어 있다. 특히, 비선형 흐름-압력 균형에서 마찰로 인한 에너지 손실량은 흐름의 제곱에 비례한다. 가압장과 밸브는 연구에 따라 포함하기도 하는데 on/off 여부에 따라 제약식

포함여부가 달라져 mixed integer model로 모형화된다. 목적함수는 가압장에서의 소비에너지를 최소화하거나[4], 가스구입비용을 최소화한다[1].

이 문제를 해결하기 위해 O'Neill et al.[5]의 연구에서는 successive linear programming(SLP)를 사용하였다. Wolf and Smeers[8]는 자신들이 개발한 piecewise linear programming(PLP)[7]를 사용하였고, Martin et al.[4] 역시 유사한 방법으로 제약식을 piecewise linear constraints로 표현하여 해법을 개발했다. 이렇게 비선형제약을 선형으로 근사한 해법들은 가능해를 보장하지 못한다는 단점을 가지고 있었는데 Mahlke et al.[3]의 연구에서 제약식을 조각선형화 한 문제를 branch-and-cut 알고리즘으로 푼 뒤, simulated annealing(SA) 기법을 활용해 가능해를 탐색하였다. 이렇듯 기존 연구는 비선형 형태의 흐름-압력 균형 제약을 선형화하는 형태로 해법을 개발하였다.

물 분야의 상수도 관망 문제도 에너지-흐름 네트워크 문제의 형태를 하고 있다. 네트워크는 공급지, 수요지, 일반마디로 이루어진 마디집합과 펌프, 밸브, 일반호로 이루어진 호집합으로 구성된다. 이 문제 역시 흐름균형, 에너지균형, 흐름 및 에너지 상/하한 제약을 포함한다. 상수도 관망 문제에서는 에너지단위를 수두(water head, m)를 사용한다. 에너지균형에서 마찰 에너지손실은 Hazen-Williams 공식을 많이 사용하는데, 수두차는 호의 흐름의 1.85 제곱에 비례한다.

이 문제를 해결하기 위해 Yu et al.[9]의 연구에서는 generalized reduced gradient(GRG) method를 사용하였다. 또한, 물 분야에는 상수도 관망(water distribution network, WDN)의 복잡한 수리학(hydraulic)적 관계를 다루기 위해 수리학 시뮬레이터를 많이 활용하였다. 시뮬레이터는 펌프와 밸브의 가동상태를 입력하면 수리학적 관계를 고려하여 각 수두와 흐름량을 출력해준다. 대표적으로 Brion and Mays[1]의 연구에서는 최적화 해법의 반복단계마다 펌프의 가동시간을 수리학 시뮬레이터 KYPIPE에 입력하여 나오는

해를 통해 개선방향을 구하였다.

1.3 논문 구성

본 논문은 총 6장으로 구성되어 있다. 2장에서는 여러 가지 현실문제를 포함하는 에너지-흐름 네트워크 문제를 정의하고, 문제의 최적화 모형을 제시한 뒤, 모형의 수리적 구조를 알아본다. 3장에서는 에너지-흐름 네트워크 문제에서 발견되는 몇 가지 관찰을 통해 해법 개발을 위한 분석을 한다. 4장에서는 모형의 해법을 설명하고, 5장에서는 해법을 현실문제에 적용한 실험 결과를 다루었다. 6장에서는 결론과 추후 연구 과제를 제시하였다.

2. 문제 정의 및 모형화

이 장에서는 에너지-흐름 네트워크 문제를 정의하고, 최적화 모형으로 표현한다. 그리고 그 문제가 NP-hard에 속함을 보인다.

2.1 문제 정의

에너지-흐름 네트워크 문제는 주어진 네트워크 상에서 공급/수요와 에너지 관계를 만족하면서 비용을 최소화하는 문제이다.

네트워크 $D = (N, A)$ 는 유향 네트워크이다. 마디 집합 N 은 흐름을 저장할 공간이 있는 탱크마디 집합 N_t 와 그렇지 않은 일반마디 집합 N_n 로 나뉘고, 호 집합 A 는 에너지를 의도적으로 증가시킬 수 있는 가압호 집합 A_p 와 의도적으로 감소시킬 수 있는 감압호 집합 A_d 와 흐름에 따라 에너지가 손실되는 일반호 집합 A_n 로 나뉜다.

- $D = (N, A)$,
- $N = N_n \cup N_t$,
- $A = A_n \cup A_p \cup A_d$.

문제의 주요 변수는 흐름변수와 에너지변수이고, 이 변수들은 다기간(multi-period)을 표현하기 위해 윗첨자 $t(t = 1, \dots, T)$ 를 사용한다. 흐름을 나타내는 변수는 네트워크의 각 호에 대응되어 f_{ij}^t 라 하고, 에너지를 나타내는 에너지변수는 각 마디에 대응되어 π_i^t 라 한다.

- 흐름 변수 f_{ij}^t ,
- 에너지 변수 π_i^t .

문제의 주된 제약은 세 가지로 구분할 수 있는데, (1)흐름균형, (2)에너지 균형, (3)흐름 및 에너지 상/하한이다. 에너지-흐름 네트워크 문제는 이 세 가지 제약을 만족하면서 비용을 최소화하는 문제이다.

다음 절에서는 세 가지 제약과 목적함수를 각각 살펴보도록 한다.

2.2 제약식과 목적함수

2.2.1 흐름균형

흐름균형은 최소비용네트워크 문제를 표현할 때 나타나는 제약과 동일한 제약으로 각 마디를 기준으로 들어오는 흐름과 나가는 흐름이 같다는 것이다. 이 때 들어오는 흐름과 나가는 흐름에는 외부로부터의 공급과 수요도 포함이 되고 각각 S_i^t 와 D_i^t 로 나타낸다. 총공급량과 총수요량의 합은 같게 주어진다. 탱크마디의 경우에는 탱크에서 저장되거나 저장되어던 흐름이 흘러나가는 것을 고려하여 제약식이 표현된다. 이 때 탱크의 저장량에 해당하는 변수는 b_i^t 이고, 이 변수는 탱크최대용량 \bar{b}_i 에 의한 상한을 가진다. 탱크는 초기 저장량 B_i^1 이 주어지며, 마지막시점의 저장량은 초기저장량과 같아야 한다. 정리하여 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sum_{j|(j,i) \in A} f_{ji}^t + S_i^t &= \sum_{j|(i,j) \in A} f_{ij}^t + D_i^t & \forall i \in N_n, \forall t, \\ \sum_{j|(j,i) \in A} f_{ji}^t + S_i^t &= \sum_{j|(i,j) \in A} f_{ij}^t + D_i^t + b_i^{t+1} - b_i^t & \forall i \in N_t, \forall t, \\ b_i^1 &= B_i^1 & \forall i \in N_t, \\ b_i^1 &= b_i^T & \forall i \in N_t, \\ 0 \leq b_i^t &\leq \bar{b}_i & \forall i \in N_t, \forall t. \end{aligned}$$

- 공급량과 수요량 S_i^t, D_i^t ,
- 탱크저장량 b_i^t ,
- 탱크초기저장량 B_i^1 ,
- 탱크최대용량 \bar{b}_i .

2.2.2 에너지균형

에너지균형은 각 호에서 증가 혹은 감소하는 에너지와 호의 양 끝 마디의 에너지차가 같다는 것이다. 호에서 증가/감소하는 에너지는 호의 특성에 따라 결정된다. 일반호에서는 흐름에 따라 발생하는 마찰에 의해 손실되는 에너지가 결정된다. 이 때 에너지 손실량은 마찰손실함수 $L_{ij}(f_{ij}^t)$ 로 표현하며, 이 함수는 볼록증가함수(nondecreasing convex function)이다. 볼록증가함수라는 성질은 흐름이 증가할수록 마찰이 점점 더 크게 증가하는 일반적인 현상을 고려할 때 충분히 이해가능하다. 실제 현실문제의 예를 살펴보면, 물이 수송되는 경우 손실함수는 $L_{ij}(f_{ij}^t) = \mu_{ij}(f_{ij}^t)^2$ 이고, 가스는 $L_{ij}(f_{ij}^t) = \mu_{ij}(f_{ij}^t)^{1.85}$, 전기는 $L_{ij}(f_{ij}^t) = \mu_{ij}f_{ij}^t$ 이다.

가압호는 현실문제에서의 가압장 또는 펌프장과 같은 설비를 의미한다. 실제 이러한 설비들은 on/off 모드 혹은 유한 개의 작동수준으로 동작해서 정확히 모형화하면 정수변수를 포함하는 형태가 된다. 하지만 실제 알고리즘을 개발할 때는 이를 그대로 적용하는 것은 시간적인 측면에서 매우 비효율적이므로 단순 부등호 제약의 형태로 완화하여 해를 구한 뒤, 후처리과정(post-processing)을 통해 on/off 여부 또는 작동수준을 결정한다. 가압호에 해당하는 밸브도 마찬가지로 정수변수를 포함하기도 하지만, 역시 같은 방식으로 완화해서 푼다. 정리하여 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \pi_i^t - \pi_j^t &= L_{ij}(f_{ij}^t) \quad \forall (i, j) \in A_n, \forall t, \\ \pi_i^t &\leq \pi_j^t \quad \forall (i, j) \in A_p, \forall t, \\ \pi_i^t &\geq \pi_j^t \quad \forall (i, j) \in A_d, \forall t. \end{aligned}$$

- 마찰손실함수 $L_{ij}(f_{ij})$,
- 마찰손실함수 예 : $\mu_{ij}(f_{ij}^t)^2$ (물), $\mu_{ij}(f_{ij}^t)^{1.85}$ (가스), $\mu_{ij}f_{ij}^t$ (전기).
- * μ_{ij} : 마찰손실계수.

2.2.3 흐름 및 에너지 상/하한

흐름 및 에너지 상/하한 역시 현실문제에 근거하여 존재하는 제약이다. 우

선 관망의 안정성을 위해 에너지 상/하한이 주어지는 문제가 많다. 관망 내에 과도한 압력이 가해질 경우관이 파열되거나 누수가 발생할 수 있기 때문에 각 관에는 일정수준의 압력에너지 상한 혹은 흐름 상한이 존재한다. 또한 물 같은 경우 고도가 높은 지역을 통과하기 위해서는 해당 지점에서의 물의 에너지가 고도에 해당하는 위치에너지보다 커야하기 때문에 에너지 하한 제약이 필요하다. 그리고 가스가 공급될 때 가스의 양 뿐 아니라 일정수준의 압력도 요구되는 경우가 있다. 이와 같은 현실제약들이 흐름과 에너지에 대한 상/하한 제약으로 표현된다. 정리하여 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \underline{\pi}_i &\leq \pi_i^t \leq \overline{\pi}_i \quad \forall i \in N, \forall t, \\ 0 &\leq f_{ij}^t \leq \overline{f}_{ij} \quad \forall (i, j) \in A, \forall t. \end{aligned}$$

2.2.4 목적함수

에너지-흐름 네트워크 문제의 목적함수는 가압호에서의 발생하는 비용을 최소화하는 것이다. 여러 현실문제들마다 비용함수의 형태가 조금씩 다르지만 가압호의 흐름이 클수록, 그리고 증가하는 에너지가 클수록 비용이 증가한다는 것은 동일하다. 이들 비용함수를 공통적으로 $g(f, \pi)$ 로 나타내자. 물과 가스를 수송하는 에너지-흐름 네트워크 문제에서의 비용함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \min g(f, \pi) &= \sum_t \sum_{(i,j) \in A_p} C_{ij}^t f_{ij}^t (\pi_j^t - \pi_i^t) && \text{(water),} \\ \min g(f, \pi) &= \sum_t \sum_{(i,j) \in A_p} C_{ij}^t f_{ij}^t \left(\left(\frac{\pi_j^t}{\pi_i^t} \right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} - 1 \right) (\kappa \simeq 1.4) && \text{(gas).} \end{aligned}$$

* κ 계수는 수송되는 가스의 종류에 따라 1.1 ~ 1.6의 값을 가진다.[2][6]

2.3 표기 및 기호 정리

에너지-흐름 네트워크 문제에서 사용되는 표기를 정리하면 다음과 같다.

표 2.1: 에너지-흐름 네트워크 문제의 표기

표기	설명
N	에너지-흐름 네트워크의 마디 집합, $N = N_n \cup N_t$.
N_t	마디에 흐름을 저장할 수 있는 탱크가 존재하는 마디들의 집합.
N_n	탱크가 없는 일반적인 마디들의 집합.
A	에너지-흐름 네트워크의 호 집합, $A = A_n \cup A_p \cup A_d$.
A_p	에너지를 의도적으로 증가시킬 수 있는 호들의 집합.
A_d	에너지를 의도적으로 감소시킬 수 있는 호들의 집합.
A_n	호의 고유한 특성과 흐름의 크기에 따라 에너지가 손실되는 호들의 집합.
f_{ij}^t	시점 t 일 때, 호 (i, j) 의 흐름의 크기를 나타내는 변수.
π_i^t	시점 t 일 때, 마디 i 의 에너지를 나타내는 변수.
b_i^t	시점 t 일 때, 마디 i 의 흐름 저장량을 나타내는 변수.
$L_{ij}(f_{ij}^t)$	호 (i, j) 의 마찰손실함수.
S_i^t	시점 t 일 때, 마디 i 의 공급의 크기를 나타내는 상수.
D_i^t	시점 t 일 때, 마디 i 의 수요의 크기를 나타내는 상수.
$\overline{f_{ij}}$	호 (i, j) 의 흐름 상한.
$\overline{\pi_i}$	마디 i 의 에너지 상한.
$\underline{\pi_i}$	마디 i 의 에너지 하한.
B_i^1	마디 i 의 탱크의 초기저장량.
$\overline{b_i}$	마디 i 의 탱크의 용량 상한.
$g(f, \pi)$	에너지-흐름 네트워크 문제의 비용함수.

에너지-흐름 네트워크를 나타내는 기호는 다음과 같다.

표 2.2: 에너지-흐름 네트워크의 기호

기호	설명
○	일반마디
□	탱크마디
○ → ○	일반호
○ → (회전) → ○	가압호
○ → (삼각형) → ○	감압호
S → ○	공급이 있는 마디
○ → D	수요가 있는 마디

위의 기호들을 사용하여 구성한 에너지-흐름 네트워크의 예이다.

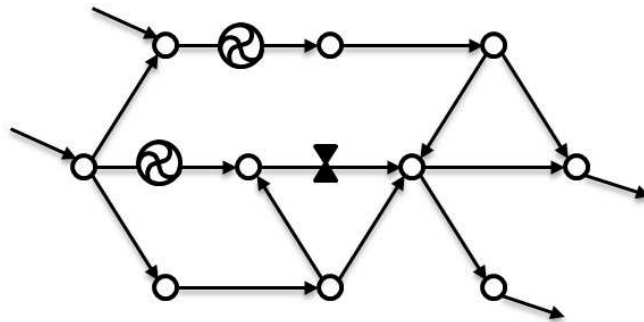


그림 2.1: 에너지-흐름 네트워크 예

2.4 최적화 모형

에너지-흐름 네트워크 문제의 최적화 모형은 다음과 같다.

문제 2.4.1 최적화 모형

$$\begin{aligned}
 \min \quad & g(f, \pi) \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{j|(j,i) \in A} f_{ji}^t + S_i^t = \sum_{j|(i,j) \in A} f_{ij}^t + D_i^t & \forall i \in N_n, \forall t, \\
 & \sum_{j|(j,i) \in A} f_{ji}^t + S_i^t = \sum_{j|(i,j) \in A} f_{ij}^t + D_i^t + b_i^{t+1} - b_i^t & \forall i \in N_t, \forall t, \\
 & b_i^1 = B_i^1 & \forall i \in N_t, \\
 & b_i^1 = b_i^T & \forall i \in N_t, \\
 & \pi_i^t - \pi_j^t = L_{ij}(f_{ij}^t) & \forall (i, j) \in A_n, \forall t, \\
 & \pi_i^t \leq \pi_j^t & \forall (i, j) \in A_p, \forall t, \\
 & \pi_i^t \geq \pi_j^t & \forall (i, j) \in A_d, \forall t, \\
 & \underline{\pi}_i \leq \pi_i^t \leq \bar{\pi}_i & \forall i \in N, \forall t, \\
 & 0 \leq b_i^t \leq \bar{b}_i & \forall i \in N_t, \forall t, \\
 & 0 \leq f_{ij}^t \leq \bar{f}_{ij} & \forall (i, j) \in A, \forall t.
 \end{aligned}$$

2.5 모형의 수리적 구조

에너지-흐름 네트워크 문제는 비선형 목적함수와 비선형 제약식을 가진 형태로 최적해를 찾는 것은 물론, 가능해를 구하는 것도 간단하지 않다. 이 문제가 NP-hard에 속한다는 것을 보임으로써 문제의 복잡성을 이해할 수 있다. 에너지-흐름 네트워크 문제는 최적화 문제(optimization problem)이기 때문에 다음과 같이 결정 문제(decision problem)의 형태로 바꾸어 증명을 해야 한다. 에너지-흐름 네트워크 문제의 결정 문제는 다음과 같다.

문제 2.5.1 에너지-흐름 네트워크 문제(결정 문제)

입력 : 에너지-흐름 네트워크 문제(최적화 문제), 실수 K .

질문 : 에너지-흐름 네트워크 문제의 최적 목적함수 값이 K 보다 작은가?

문제 2.5.1이 NP-hard에 속하는 것을 보이면 최적화 문제 역시 NP-hard에 속하는 것은 간단하게 보일 수 있으므로 여기서는 결정 문제에 대한 증명만 다루도록 한다.

Proposition 2.5.2 에너지-흐름 네트워크 문제(결정 문제)는 NP-hard에 속한다.

증명: 분할 문제로부터의 다항변환을 통해 에너지-흐름 네트워크 문제(결정 문제)가 NP-hard에 속함을 보이려고 한다. 분할 문제는 다음과 같이 정의된다.

문제 2.5.3 분할 문제

입력: n 개의 자연수 집합 $N = \{a_1, \dots, a_n\}$.

질문: 이 집합을 두 집합으로 분할하여, 각 집합에 속한 자연수의 합이 서로 같게 할 수 있는가?

분할 문제의 입력을 다음과 같은 에너지-흐름 네트워크로 변환하자. 네트워크를 구성하는 마디와 호는 다음과 같다.

- 마디 : 일반마디 $n + 1$ 개, 탱크마디 $2n$ 개,
- 호 : 일반호 $2n$ 개, 가압호 n 개.

네트워크는 우선 탱크마디 - 가압호 - 일반마디 - 일반호 - 탱크마디 순으로 이어지는 컴포넌트를 n 개 생성한다. 이를 각각 컴포넌트 1, ..., 컴포넌트 n 이라고 하자. 추가로 1개의 마디를 생성하고, 이를 마디 $*$ 라 하자. n 개의 컴포넌트의 각 일반마디로부터 마디 $*$ 로 향하는 일반호를 n 개 생성한다. 그러면 네트워크는 그림 2.2처럼 구성된다.

공급과 수요는 다음과 같이 부여한다. 우선 문제의 총 기간은 2이다. 그리고 모든 a_i 보다 충분히 큰 수 D 를 잡자. 공급은 각 컴포넌트에 대해 주어지는데, 컴포넌트 i 에 대해 컴포넌트가 시작하는 마디인 탱크마디로 첫 번째 기간에 $D + a_i$, 두 번째 기간에 0의 흐름이 공급된다. 수요 역시 각 컴포넌트

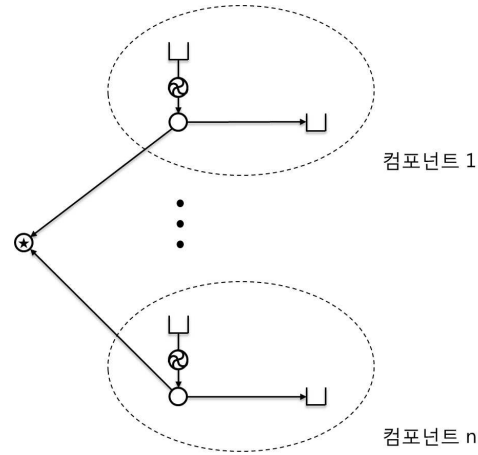


그림 2.2: 분할 문제를 다항변환한 에너지-흐름 네트워크 1

에 대해, 컴포넌트 i 가 끝나는 마디인 탱크마디에 첫 번째 기간에는 0, 두 번째 기간에는 D 만큼의 흐름 수요가 발생한다. 또한 마디 $*$ 에 대해서도 수요가 주어지는데 여기는 첫 번째 기간과 두 번째 기간 모두 $\sum a_i/2$ 만큼의 흐름 수요가 발생한다.

그리고 일반호의 마찰손실함수는 다음과 같이 주어진다.

- 각 컴포넌트 내의 일반호 : $L_{ij}(f_{ij}^t) = \frac{\pi}{D}(f_{ij}^t)^2$,
- 각 컴포넌트에서 마디 $*$ 로 향하는 일반호 : $L_{ij}(f_{ij}^t) = (f_{ij}^t)^2$.

모든 일반마디는 π (> 0)만큼의 에너지하한을 가지고 탱크마디는 에너지하한이 0이라고 하자. 또한 에너지상한은 모두 없다. 유량 상/하한은 모든 호에 대해 존재하지 않고, 모든 탱크의 용량은 무한하다고 하자. 마지막으로 목적함수는 각 가압호에서의 에너지증가량과 흐름의 곱의 합으로 하자. $g(f, \pi) = \sum_t \sum_{a \in A_p} f_{ij}^t (\pi_j^t - \pi_i^t)$ 이 모든 정보를 앞서 그림 2.2에 덧붙여 나타내면 그림 2.3과 같다.

간단히 이 문제를 요약하면, 각 컴포넌트의 탱크마디로 공급되는 흐름을 컴포넌트 말단의 탱크마디로 D 만큼 그리고 마디 $*$ 로 a_i 만큼 두 기간에 걸쳐 어떻게 공급하는 것이 가압호의 비용을 최소화할 것이냐 하는 문제이다. 이

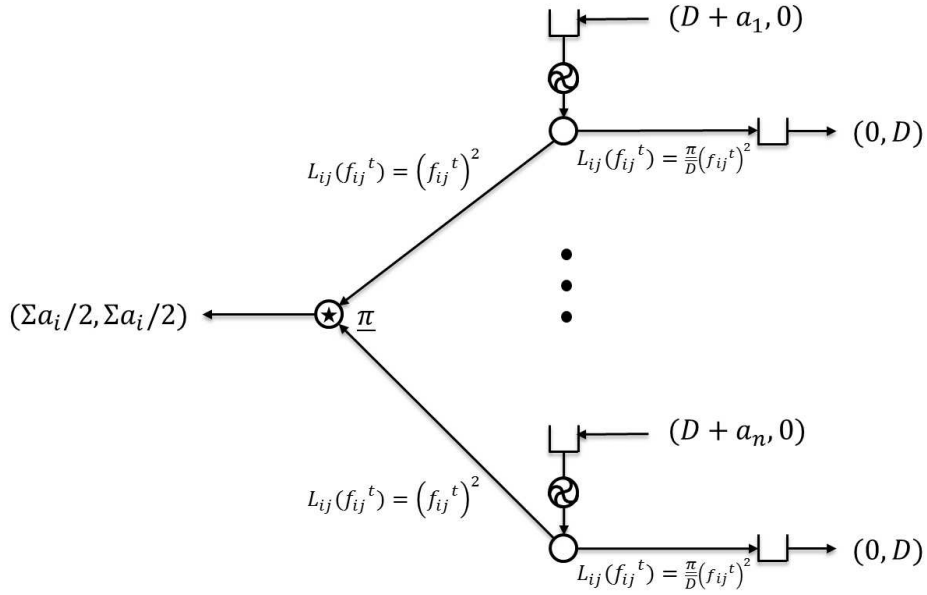


그림 2.3: 분할 문제를 다항변환한 에너지-흐름 네트워크 2

제 마지막으로 최적 목적함수와 비교할 값인 K 를 다음과 같이 설정하자.

$$K = \sum_{i \in N} (D\pi + a_i(\pi + a_i^2))$$

에너지-흐름 네트워크 문제(결정 문제)는 그림 2.3처럼 구성한 문제의 최적 목적함수 값이 K 보다 작거나 같으면 참, 그렇지 않으면 거짓인 문제이다.

먼저, 분할 문제가 참이면 에너지-흐름 네트워크 문제(결정 문제)가 참이라는 것을 보이자. 분할 문제가 참이면 N 의 원소를 총합이 같은 두 개의 집합 A, B 로 분할할 수 있다. 이 때, a_i 가 A 에 속하면, 컴포넌트 i 로 공급되는 흐름을 첫 번째 기간에는 a_i 만큼의 흐름을 마디 \star 로만 보내고, 두 번째 기간에는 D 만큼의 흐름을 컴포넌트 말단의 탱크로만 보낸다. 반대로 a_i 가 B 에 속하면, 흐름 역시 반대로 보낸다. 그러면 A 의 합과 B 의 합은 모두 $\sum a_i/2$ 이기 때문에 마디 \star 의 수요를 충족시키고, 각 컴포넌트의 말단 탱크마디 역시 수요를 충족시키게 된다. 또한 가압호에서 증가시키는 에너지는 가압호에 흐름이 a_i 만큼 흐를 때는 $\pi + a_i^2$ 이고, D 만큼 흐를 때는 π 을 증가시킨다. 그러면 모든 마디의 에너지하한을 만족하게 된다. 결국 이러한 해는 가능해가 되

고, 이 때 목적함수 값은 K 와 같다. 따라서 최적 목적함수 값은 K 보다 작거나 같으므로 에너지-흐름 네트워크 문제(결정 문제)가 참임을 알 수 있다.

반대로 에너지-흐름 네트워크 문제(결정 문제)가 참이면 분할 문제가 참이라는 것을 보이자. 이를 위해 앞서 증명에서 보인 가능해처럼 각 컴포넌트로 공급되는 흐름을 마디 $*$ 로 한 번, 말단 탱크마디로 한 번 나누어 보내는 것이 최적임을 보이려 한다.

컴포넌트 i 에서 마디 $*$ 로 두 기간에 걸쳐 $(x, a_i - x)$ 만큼 흐름을 보낸다고 하자. 그러면 컴포넌트 i 의 가압호에서 증가시킬 에너지는 첫 번째 기간에는 $\pi + x^2$, 두 번째 기간에는 $\pi + (a_i - x)^2$ 가 된다. 왜냐하면 컴포넌트의 말단 탱크마디로는 최대 흐름이 흐른다 하더라도 말단 탱크마디의 에너지하한과 마찰손실을 더한 값이 π 보다 작거나 같기 때문이다. 그러면 말단 탱크마디로 보내는 흐름은 두 기간 중 가압호의 에너지증가량이 작은 기간에 모두 D 를 보내는 것, 즉, $(D, 0)$ 또는 $(0, D)$ 의 형태로 보내는 것이 목적함수 값이 최소가 된다. 반대로 말단 탱크마디로 $(D, 0)$ 또는 $(0, D)$ 의 형태로 흐름을 보낸다면, 마디 $*$ 로는 반대로 $(0, a_i)$, $(a_i, 0)$ 의 형태로 흐름을 보내는 것이 목적함수 값이 최소가 된다. 결국, 컴포넌트의 말단 탱크마디의 수요와 마디 $*$ 의 수요를 한 기간에 한 번씩 충족시켜주는 것이 최적이라는 것이다. 이 때의 목적함수는 앞서 구했듯이 K 와 같다. 결국, 최적목적함수 값이 K 와 같다면, 각 컴포넌트에서 마디 $*$ 로의 흐름을 두 기간으로 쪼개지 않고도 두 기간의 수요를 정확히 충족시켰다는 것이고 그렇다면 최적해를 통해 분할문제가 참이 되게 하는 분할을 쉽게 구할 수 있다. □

3. 관찰

이 장에서는 에너지-흐름 네트워크 문제의 특징을 분석한다. 앞서 정의한 일반적인 모형 중에서 현실 문제에서 자주 나타나는 형태에 대한 분석을 통해 추후 해법을 개발할 근거를 도출해낸다.

3.1 에너지량 보존

에너지-흐름 네트워크는 전기 네트워크를 포함한다. 전기 네트워크의 성질 중 일부는 확장하여 보다 넓은 개념인 에너지-흐름 네트워크에서도 성립한다. 전기 네트워크에서 전위차와 전류의 곱으로 표현되는 전력은 다음과 같은 성질을 가지고 있다.: 네트워크 외부에서 유입되는 전력량은 네트워크 내부에서 손실되는 전력량과 네트워크 외부로 유출되는 전력량의 합과 같다. 이와 유사하게 에너지변화량과 흐름의 곱을 에너지량으로 정의하면, 에너지-흐름 네트워크에서도 동일한 법칙이 성립한다. 우선 다음과 같이 6가지 에너지량을 정의하자.

- (1) 유입에너지량 = $\sum_t \sum_{i \in N} S_i^t(\pi_i^t - 0)$.
- (2) 가압에너지량(가압호) = $\sum_t \sum_{(i,j) \in A_p} f_{ij}^t(\pi_j^t - \pi_i^t)$.
- (3) 손실에너지량(감압호) = $\sum_t \sum_{(i,j) \in A_d} f_{ij}^t(\pi_i^t - \pi_j^t)$.
- (4) 손실에너지량(일반호) = $\sum_t \sum_{(i,j) \in A_n} f_{ij}^t(\pi_i^t - \pi_j^t)$.
- (5) 저장에너지량 = $\sum_t \sum_{i \in N_t} (b_i^{t+1} - b_i^t)\pi_i^t$.
- (6) 유출에너지량 = $\sum_t \sum_{i \in N} D_i^t(\pi_i^t - 0)$.

Proposition 3.1.1 에너지량은 다음의 관계가 성립한다: 유입에너지량 + 가압에너지량 = 손실에너지량(감압호, 일반호) + 저장에너지량 + 유출에너지량.

증명: 에너지-흐름 네트워크가 그림 3.1과 같이 주어졌다고 하자.

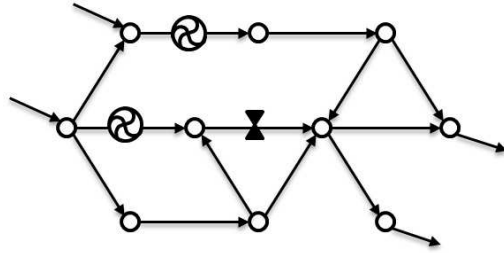


그림 3.1: 에너지-흐름 네트워크

에너지량은 외부로부터 유입/유출되는 것과 내부에서 증가/손실되는 것으로 나뉜다. 하지만 마디 하나를 추가하면 유입에너지량을 가압에너지량으로 유출에너지량을 손실에너지량으로 변환할 수 있다. 새로 마디 s 를 하나 추가하여 이 마디의 에너지 상한과 에너지 하한을 0으로 두고, 모든 공급마디로 나가는 호와 모든 수요마디로부터 들어오는 호를 그리면 다음과 같은 네트워크가 된다.

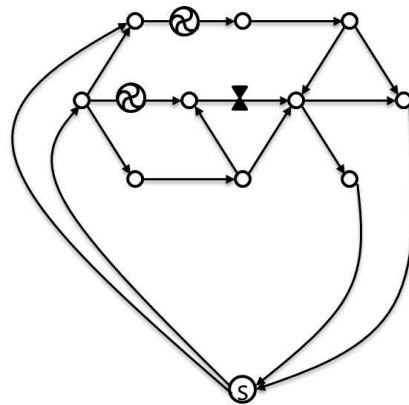


그림 3.2: 마디를 추가한 에너지-흐름 네트워크

기존 에너지-흐름 네트워크의 유입에너지량과 유출에너지량은 마디를 추가한 에너지-흐름 네트워크에서 가압에너지량과 손실에너지량과 동일하므로 그림 3.2의 네트워크에서 가압에너지량이 손실에너지량(감압호, 일반호)과 저장에너지량의 합과 같다는 것을 보이면 된다. 그런데 여기서 저장에너지량은 식을 전개하여 소거하면 $\sum_t \sum_{i \in N_i} (b_i^{t+1} - b_i^t) \pi_i^t = \sum_{i \in N_i} (b_i^T - b_i^1) \pi_i^t$ 이다. 탱크의 초기저장량과와 마지막 시점의 저장량이 동일하므로 $b_i^T - b_i^1 = 0$ 이 되어 저장에너지량은 0이 된다. 결국 가압에너지량과 손실에너지량(감압호, 일반호)가 같다는 것을 보이면 증명이 완성된다.

탱크의 초기저장량과 마지막저장량이 동일하기 때문에 모든 흐름은 마디 s 에서 출발하여 s 로 다시 들어온다. 결국 흐름을 최소단위로 나누면 각각의 흐름을 하나하나의 경로로 표현할 수 있다. 그 경로 내에서 에너지가 증가할수도 손실될수도 있지만 결국 마디 s 로 다시 들어오기 때문에 경로 내에서 증가한 에너지와 손실된 에너지는 같다. 결국 한 최소단위의 흐름에 대해 네트워크 내에서 증가한 에너지량과 손실된 에너지량은 동일하다는 것이다. 각 호의 가압에너지량 또는 손실에너지량은 이들 최소단위의 에너지량의 합으로 생각할 수 있으므로, 네트워크 내에서의 가압에너지량과 손실에너지량의 합은 같다. 이를 통해 에너지량 보존 법칙(유입에너지량 + 가압에너지량 = 손실에너지량(감압호, 일반호) + 저장에너지량 + 유출에너지량)이 성립한다는 것을 알 수 있다. □

성질 3.1.1를 바탕으로 논리를 조금 더 전개해 나가보자. 저장에너지량은 증명에서 보였듯 0이 된다. 외부에서 유입되는 흐름의 에너지는 문제에서 주어지고, 유출될 때 요구되는 에너지 또한 주어지므로 결국 유입에너지량과 유출에너지량은 상수가 된다. 결국, 가압에너지량과 감압호, 일반호에서의 손실에너지량 합은 상수차가 되어, 가압에너지량을 최소화하는 것과 손실에너지량을 최소화하는 것은 동일한 문제가 된다. 손실에너지량 중 일반호의 손실에너지량은 마찰손실함수를 이용해 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\sum_t \sum_{(i,j) \in A_n} f_{ij}^t (\pi_i^t - \pi_j^t) = \sum_t \sum_{(i,j) \in A_n} f_{ij}^t L_{ij}(f_{ij}^t).$$

Proposition 3.1.2 일반호의 손실에너지량은 볼록함수이다.

증명: 볼록함수의 합은 볼록함수이므로 $F(f_{ij}^t) = f_{ij}^t L_{ij}(f_{ij}^t)$ 가 볼록함수임을 보이는 것으로 증명은 충분하다. $F(f_{ij}^t)$ 의 이계도함수는 다음과 같다.

$$F''(f_{ij}^t) = 2L'_{ij}(f_{ij}^t) + f_{ij}^t L''_{ij}(f_{ij}^t)$$

마찰손실함수 L_{ij} 가 볼록증가함수이므로 $L'_{ij} \geq 0, L''_{ij} \geq 0$ 이고, f_{ij}^t 또한 문제의 제약에 의해 비음이다. $F''(f_{ij}^t) \geq 0$ 이므로 $F(f_{ij}^t)$ 가 볼록함수이고, 따라서 감압호의 손실에너지량은 볼록함수이다. □

가압에너지량은 가압호에 흐르는 흐름이 클수록, 증가하는 에너지가 클수록 증가하는 목적함수와 유사한 특징을 가지고 있고, 특히 상수도관망문제의 목적함수와는 계수만 다른 매우 흡사한 형태이다. 또한 일반적으로 일반호에 비해 감압호의 수가 적다. 따라서 비선형 형태의 목적함수 대신 일반호의 손실에너지량에 적절한 계수를 곱하여 더한 형태 $\sum_t \sum_{(i,j) \in A_d} K_{ij}^t f_{ij}^t L_{ij}(f_{ij}^t)$ 가 대안적인 목적함수로서의 타당성을 가진다.

3.2 크리티컬 패스(Critical Path)

이번에는 특정 네트워크 형태에서 발생하는 에너지-흐름 네트워크의 성질에 대하여 알아본다. 앞서 모형화 된 에너지-흐름 네트워크 문제는 일반적인 네트워크에 대해 정의하였지만, 실제 현실에서 나타나는 네트워크 형태를 고려하면 문제를 보다 효율적으로 해결할 수 있다. 현실에서는 나무 구조 혹은 나무 구조와 유사한 형태의 네트워크에서 문제가 정의되는 경우가 많다. 전력공급망에서 전력이 공급될 때, 발전소 - 1차 변전소 - 2차 변전소 - 3차 변전소 - 배전소와 같이 계층적인 경로를 거쳐 최종 수요지로 전달된다. 상수도관망 역시 취수원 - 1차 펌프장 - 2차 펌프장 - 3차 펌프장 - 배수지의 형태로 물이 전달된다. 이렇게 상위 계층에서 하위 계층으로 연결되는 네트워크

는 나무 구조 혹은 나무 구조와 유사한 형태를 하고 있다. 따라서 우리는 네트워크가 나무 구조라는 가정 하에 문제의 성질을 분석하여 효율적인 접근 방법을 알아본다.

네트워크가 나무 구조인 경우, 마디집합 N 은 가압호를 기준으로 다음과 같이 분할할 수 있다.

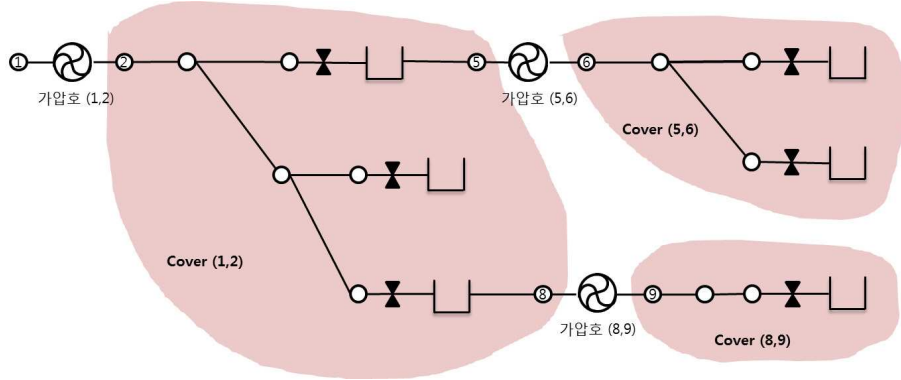


그림 3.3: $cover(i, j)$

각 마디는 역방향으로 가장 가까운 가압호에 의해 커버된다. 가압호 (i, j) 가 커버하는 마디집합은 $cover(i, j)$ 라고 정의한다.

정의 3.2.1 각 가압호 (i, j) 에 대해 마디 j 에서 임의의 마디 k 까지의 경로 중에 다른 가압호가 존재하지 않을 때, k 는 $cover(i, j)$ 에 속한다. 이러한 마디를 모두 모은 집합을 $cover(i, j)$ 라고 정의한다.

각 마디로 들어오는 흐름은 그 마디를 커버하는 가압호로부터 직접적으로 전달된다. 따라서 각 가압호 (i, j) 에서 발생하는 에너지비용은 $cover(i, j)$ 로의 흐름공급과 직접적으로 관련이 있다고 할 수 있다. 우리는 한 cover에 대한 관찰을 통해 유의미한 해법을 탐색하려 한다. 다음의 예를 보자.

가압호는 가압호가 커버하는 마디들의 에너지 하한을 모두 만족하도록 에너지를 증가시켜야 한다. 각 마디의 에너지 하한 제약식은 역방향 추론을 통해 가압호 다음 마디의 하한으로 바꾸어 표현할 수 있다. 예를 들어 마디 5의 에너지 하한 제약식 $\pi_5^t \geq \underline{\pi}_5$ 는 마디 2를 기준으로 표현하면 $\pi_2^t \geq$

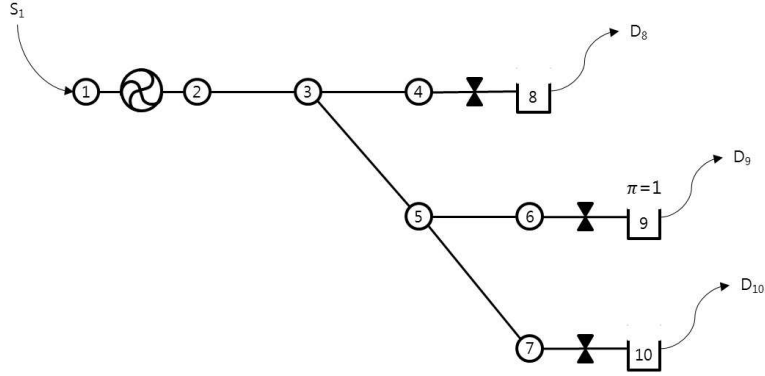


그림 3.4: 예제 네트워크

$\pi_5 + L_{3,5}(f_{3,5}^t) + L_{2,3}(f_{2,3}^t)$ 로 나타낼 수 있다. 이와 같이, 마디 k 가 $cover(i, j)$ 에 속할 때, 에너지 하한을 마디 j 를 기준으로 바꾼 하한을 LB_k^t 라 하자. 그러면 LB_k^t 는 다음과 같이 정의된다.

$$LB_k^t(f^t) := \pi_k + \sum_{(a,b) \in path_{j-k}} L_{ab}(f_{ab}^t), \quad (k \in cover(i, j)).$$

결국 가압호 (i, j) 에서 마디 j 는 $cover(i, j)$ 에 속한 모든 마디들의 $LB_k^t(f^t)$ 보다 커야하므로 에너지 하한 제약식은 다음과 같이 나타내어진다.

$$\pi_j \geq \max_{k \in cover(i, j)} \{LB_k^t(f^t)\}, \quad \forall t.$$

가압호 다음 마디의 에너지란 가압호에서 에너지를 얼마나 증가시키느냐와 관련이 있는데 목적함수인 비용최소화 측면에서 볼 때 하한보다 더 큰 값을 가질 이유가 없다. 따라서 위 부등식은 최적해에서 등식으로 성립하게 된다. 결과적으로 분석해보면 가압호 (i, j) 가 커버하는 마디들 중 LB 값이 가장 큰 마디를 제외하고 나머지 마디는 하한보다 높은 에너지값을 갖게 된다. 결국 LB 값이 가장 큰 마디의 하한을 맞추어주기 위해 나머지는 필요 이상의 에너지를 가진 상태로 해당 지점을 통과하는 것이다. 이것은 마치 물이 수송될 때, 경로에 언덕이 존재하는 경우 가장 고도가 높은 지점만 넘게끔 에너지를 가하면 나머지 지점은 자연스럽게 통과하는 것과 같은 이치이

다. 결국 가압호에서 에너지를 얼마나 증가시킬 것인가는 LB 값이 가장 큰 마디까지 경로를 유심히 살펴볼 필요가 있다. 가압호에서 이러한 마디까지의 경로를 **크리티컬 패스(Critical Path)**라 하고 뒤에 해법에서 자세히 다루도록 하겠다.

앞서 변형한 하한 제약식을 기존 목적함수에 대입하여 다음과 같이 변환할 수 있다. 이를 $g'(f, \pi)$ 라 하자.

$$g'(f, \pi) = \sum_t \sum_{(i,j) \in A_p} C_{ij}^t f_{ij}^t (\max_{k \in \text{cover}(i,j)} \{LB_k^t(f^t)\} - \pi_i) \quad (\text{water})$$

$$g'(f, \pi) = \sum_t \sum_{(i,j) \in A_p} C_{ij}^t f_{ij}^t \left(\left(\frac{\max_{k \in \text{cover}(i,j)} \{LB_k^t(f^t)\}}{\pi_i^t} \right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} - 1 \right) \quad (\text{gas})$$

변형된 목적함수 $g'(f, \pi)$ 는 각 커버 별로 임의의 크리티컬 패스를 정함으로써 하한을 구할 수 있다. $\text{cover}(i, j)$ 에 대해 임의의 마디 k_{ij} 를 하나씩 정하면 다음과 같이 볼록함수 형태의 하한 $g_{LB}(f)$ 을 구할 수 있다.

물의 경우, 목적함수 하한은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} g'(f, \pi) &= \sum_t \sum_{(i,j) \in A_p} C_{ij}^t f_{ij}^t (\max_{k \in \text{cover}(i,j)} \{LB_k^t(f^t)\} - \pi_i) \\ &\geq \sum_t \sum_{(i,j) \in A_p} C_{ij}^t f_{ij}^t (\{LB_{k_{ij}}^t(f^t)\} - \pi_i) \\ &\geq \sum_t \sum_{(i,j) \in A_p} C_{ij}^t f_{ij}^t \left(\sum_{(a,b) \in \text{path}_{j-k_{ij}}} L_{ab}(f_{ab}^t) + \underline{\pi}_{k_{ij}} - \pi_i \right) \\ &\geq \sum_t \sum_{(i,j) \in A_p} C_{ij}^t \left(\sum_{(a,b) \in \text{path}_{j-k_{ij}}} f_{ab}^t L_{ab}(f_{ab}^t) + \underline{\pi}_{k_{ij}} f_{ij} - \pi_i f_{ij} \right) \\ &\geq \sum_t \sum_{(i,j) \in A_p} C_{ij}^t \left(\sum_{(a,b) \in \text{path}_{j-k_{ij}}} f_{ab}^t L_{ab}(f_{ab}^t) + \underline{\pi}_{k_{ij}} f_{ij} - \bar{\pi}_i f_{ij} \right) \\ &= g_{LB}(f) \end{aligned}$$

Proposition 3.2.2 물의 경우, $g_{LB}(f)$ 는 볼록함수이다.

증명: $g_{LB}(f)$ 에서 $\underline{\pi}_{k_{ij}} f_{ij} - \bar{\pi}_i f_{ij}$ 부분은 선형이다. 또한, $\sum_{(a,b) \in \text{path}_{j-k_{ij}}} f_{ab}^t L_{ab}(f_{ab}^t)$ 부분은 앞서 Proposition 3.1.2의 증명에 의해 볼록함수임이 보여졌으므로, $g_{LB}(f)$ 는 볼록함수이다. \square

가스의 경우, 목적함수 하한은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
g'(f, \pi) &= \sum_t \sum_{(i,j) \in A_p} C_{ij}^t f_{ij}^t \left(\left(\frac{\max_{k \in \text{cover}(i,j)} \{LB_k^t(f^t)\}}{\pi_i^t} \right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} - 1 \right) \\
&\geq \sum_t \sum_{(i,j) \in A_p} C_{ij}^t f_{ij}^t \left(\left(\frac{LB_{k_{ij}}^t(f^t)}{\pi_i^t} \right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} - 1 \right) \\
&\geq \sum_t \sum_{(i,j) \in A_p} C_{ij}^t f_{ij}^t \left(\left(\frac{\sum_{(a,b) \in \text{path}_{j-k_{ij}}} L_{ab}(f_{ab}^t) + \pi_{k_{ij}}}{\pi_i^t} \right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} - 1 \right) \\
&\geq \sum_t \sum_{(i,j) \in A_p} C_{ij}^t \left(\frac{\sum_{(a,b) \in \text{path}_{j-k_{ij}}} (f_{ab}^t)^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}} L_{ab}(f_{ab}^t) + \pi_{k_{ij}} (f_{ab}^t)^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}}}{\pi_i^t} \right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} - f_{ij}^t \\
&\geq \sum_t \sum_{(i,j) \in A_p} C_{ij}^t \left(\frac{\sum_{(a,b) \in \text{path}_{j-k_{ij}}} (f_{ab}^t)^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}} L_{ab}(f_{ab}^t) + \pi_{k_{ij}} (f_{ab}^t)^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}}}{\pi_i^t} \right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} - f_{ij}^t \\
&= g_{LB}(f)
\end{aligned}$$

Proposition 3.2.3 가스의 경우, $g_{LB}(f)$ 는 볼록함수이다.

증명: 가스문제의 마찰손실함수는 $\mu_{ij}(f_{ij}^t)^2$ 이므로 이를 대입하면,

$$g_{LB}(f) = \sum_t \sum_{(i,j) \in A_p} C_{ij}^t \left(\frac{\sum_{(a,b) \in \text{path}_{j-k_{ij}}} \mu_{ab}(f_{ab}^t)^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}+2} + \pi_{k_{ij}} (f_{ab}^t)^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}}}{\pi_i^t} \right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} - f_{ij}^t$$

이다. $1.1 \leq \kappa \leq 1.6$ 이므로 $\frac{2\kappa}{\kappa-1} \geq 1$ 이 성립한다. f_{ij}^t 항을 제외한 부분은 다음의 함수 $F(\mathbf{x})$ 의 형태를 띠게 된다. 따라서 $F(\mathbf{x})$ 가 볼록함수임을 보이면 증명이 종료된다.

$$F(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{\alpha_i} \right)^\beta \quad (\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n \geq 0, \alpha_n \beta \geq 1).$$

$F(\mathbf{x})$ 는 다음과 같이 세 함수의 합성함수로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{x}) &= f_3(f_2(f_1(\mathbf{x}))). \\
f_1(\mathbf{x}) &= (x_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_n}}, \dots, x_n^{\frac{\alpha_n}{\alpha_n}}), \quad f_2(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{\alpha_n} \right)^{\frac{1}{\alpha_n}}, \quad f_3(x) = x^{\alpha_n \beta}.
\end{aligned}$$

$f_2(\mathbf{x})$ 는 Minkowski inequality에 의해, $f_3(x)$ 는 $\alpha_n \beta \geq 1$ 이므로 볼록함수이

다. 또한 $f_2(f_1(\mathbf{x}))$ 는 다음의 과정에 의해 볼록함수임을 보일 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & f_2(f_1(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y})) \\
 &= f_2((\lambda x_1 + (1 - \lambda) y_1)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_n}}, \dots, (\lambda x_n + (1 - \lambda) y_n)^{\frac{\alpha_n}{\alpha_n}}) \\
 &\leq f_2(\lambda (x_1)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_n}} + (1 - \lambda) (y_1)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_n}}, \dots, \lambda (x_n)^{\frac{\alpha_n}{\alpha_n}} + (1 - \lambda) (y_n)^{\frac{\alpha_n}{\alpha_n}}) (\because \frac{\alpha_i}{\alpha_n} \geq 1) \\
 &\leq \lambda f_2(x_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_n}}, \dots, x_n^{\frac{\alpha_n}{\alpha_n}}) + (1 - \lambda) f_2(y_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_n}}, \dots, y_n^{\frac{\alpha_n}{\alpha_n}}) (\because f_2 \text{ is convex.}) \\
 &= \lambda f_2(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) f_2(\mathbf{y}).
 \end{aligned}$$

$f_2(f_1(\mathbf{x}))$, $f_2(\mathbf{x})$, $f_3(x)$ 가 모두 볼록함수이므로, 이들의 합성함수인 $F(\mathbf{x})$ 는 볼록함수이다. 따라서 $g_{LB}(f)$ 는 볼록함수이다. \square

각 커버 별로 크리티컬패스를 정하면, 이에 대한 볼록함수 형태의 목적 함수 하한을 이끌어 낼 수 있다. 4장에서는 이 결과들을 이용해 해법을 제시한다.

4. 해법

이 장에서는 에너지-흐름 네트워크 문제에 적용할 수 있는 해법을 제시한다. 해법은 네트워크 구조가 나무일 때 적용할 수 있다.

4.1 해법 개요

3장의 관찰을 토대로 해법을 개발하였다. 네트워크가 나무구조이면, 가압호 별로 커버하는 영역을 구분할 수 있다. 각 가압호에서는 커버하는 영역의 수요지에 흐름을 공급하기 위해 필요한 에너지를 증가시키는데 이 때 가압호는 특정 한 마디의 에너지 하한을 만족하기 위해 에너지를 가한다고도 해석되어진다. 따라서 가압호에서 그 특정마디까지의 경로, 즉, 크리티컬 패스를 탐색하여 이 경로에서 필요한 에너지를 최소화하는 것이 전체 에너지 비용을 줄이는데 효과적일 것이다. 따라서 앞으로 제시될 해법은 총 4단계를 거쳐 진행된다. 먼저 초기해를 탐색한 뒤, 그 해를 바탕으로 커버 별 크리티컬 패스를 찾아낸다. 그런 다음 크리티컬 패스의 손실에너지량을 목적함수로 하여 이를 최소화하여 해를 구한 뒤, 만약 이 해가 가능해가 벗어날 경우 해를 보정하는 작업을 마지막으로 하여 최종해를 구한다.

4.2 (1) 초기해 탐색

3.1절의 에너지량 보존 관찰을 이용해서 초기해를 구한다. 에너지-흐름 네트워크에서 가압에너지량을 최소화하는 것과 손실에너지량을 최소화하는 것이 동일하다는 것을 앞서 보였다. 가압에너지량은 가압호에 흐르는 흐름이 클수록, 증가하는 에너지가 클수록 증가한다는 점이 목적함수인 에너지비용과 동일하고, 특히 상수도관망문제의 목적함수와는 계수만 다른 형태로 매우 유사하다. 또한 손실에너지량은 대부분 일반호에서 발생한다. 따라서 초기해는 일반호의 손실에너지량의 가중합을 최소화하여 구한다. 가중합을 위

한 계수는 $cover(i, j)$ 에 포함되는 호들에 대해 이를 커버하는 가압호의 계수인 C_{ij}^t 를 부여한다.

$$K_{ab}^t = C_{ij}^t \quad (a, b \in cover(i, j))$$

이 계수를 활용한 일반호의 가중손실에너지량은 다음과 같다.

$$g_{loss}(f) = \sum_t \sum_{(i,j) \in A_d} K_{ij}^t f_{ij}^t L_{ij}(f_{ij}^t)$$

$g_{loss}(f)$ 는 볼록함수이다. 이 함수와 일반호의 에너지균형 제약식 $\pi_i^t - \pi_j^t = L_{ij}(f_{ij}^t)$ 의 등식을 다음의 부등식 $\pi_i^t - \pi_j^t \geq L_{ij}(f_{ij}^t)$ 으로 완화하고, 에너지상한 제약식도 완화하여 초기해를 구하는 볼록 최적화 모형은 다음과 같다.

문제 4.2.1 초기해 탐색모형

$$\begin{aligned} \min \quad & g_{loss}(f) + \epsilon \sum_t \sum_{i \in N} \pi_i^t \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j|(j,i) \in A} f_{ji}^t + S_i^t = \sum_{j|(i,j) \in A} f_{ij}^t + D_i^t & \forall i \in N_n, \forall t, \\ & \sum_{j|(j,i) \in A} f_{ji}^t + S_i^t = \sum_{j|(i,j) \in A} f_{ij}^t + D_i^t + b_i^{t+1} - b_i^t & \forall i \in N_t, \forall t, \\ & b_i^1 = B_i^1 & \forall i \in N_t, \\ & b_i^1 = b_i^T & \forall i \in N_t, \\ & \pi_i^t - \pi_j^t \geq L_{ij}(f_{ij}^t) & \forall (i, j) \in A_n, \forall t, \\ & \pi_i^t \leq \pi_j^t & \forall (i, j) \in A_p, \forall t, \\ & \pi_i^t \geq \pi_j^t & \forall (i, j) \in A_d, \forall t, \\ & \underline{\pi}_i \leq \pi_i^t & \forall i \in N, \forall t, \\ & 0 \leq b_i^t \leq \bar{b}_i & \forall i \in N_t, \forall t, \\ & 0 \leq f_{ij}^t \leq \bar{f}_{ij} & \forall (i, j) \in A, \forall t. \end{aligned}$$

문제 4.2.1은 목적함수가 볼록함수이고, 가능해 영역이 볼록인 볼록최적화모형이다. 볼록최적화 모형은 빠른시간 내에 최적해를 구할 수 있다는 장점을 가지고 있다. $g_{loss}(f)$ 이 흐름에 대한 함수고 에너지 변수에 대해서는 아무런 목적함수 개선 요인이 없기 때문에, $\epsilon \sum_t \sum_{i \in N} \pi_i^t$ 을 추가하여 주어진 흐름에 대해서 마디의 에너지값이 최소인 값을 구하도록 하였다.

이 모형을 통해 구한 해는 두 종류의 제약식을 완화했지만, 최적해는 일반호의 에너지균형 제약식을 만족한다.

Proposition 4.2.2 문제 4.2.1의 최적해는 일반호의 에너지균형 제약식($\pi_i^t - \pi_j^t = L_{ij}(f_{ij}^t)$)을 만족한다.

증명: 일반호의 에너지균형 제약식을 하나 이상 만족하지 않는 최적해가 주어졌다고 하고, 만족하지 않는 호 중 하나를 잡아 (i, j) 라고 하자. 마디 i, j 의 에너지차와 호 (i, j) 에서 손실된 에너지의 차이를 δ 라고 하자. 그러면 마디 i 의 에너지값 $(\pi_i^t)^*$ 는 δ 만큼 더 작아져도 여전히 π_i^t 와 관련된 제약식을 모두 만족한다. 그러면 기존 최적해에서 $\pi_i^t = (\pi_i^t)^* - \delta$ 만 수정한 해는 또 다른 최적해가 된다. 이제 마디 i 로 들어오는 호를 (k, i) 라 하면 수정된 최적해에서 마디 k, i 의 에너지차는 호 (k, i) 에서 손실된 에너지보다 최소 δ 이상 크게 된다. 앞서 했던 것 처럼 마디 k 의 값을 감소시키고 이 작업을 반복해나가다 보면, 결국 이 마디들을 커버하는 가압호 다음 마디에 다다르게 되어 가압호 다음 마디의 에너지값을 δ 이상 줄일 수 있다는 결론이 나온다. 이는 목적함수를 감소시키므로 최적해라는데 모순이다. \square

4.3 (2) 크리티컬 패스 탐색

4.2절에서 구한 초기해를 (f^*, π^*) 라 하자. 크리티컬 패스는 가압호가 커버하는 마디들 중 가압호 다음 마디의 에너지와 그 마디의 에너지하한을 역방향 추론으로 나타낸 $LB_k^t(f^t)$ 가 일치하는 마디까지의 경로이다. 역방향 추론 전의 원 제약식 형태를 고려하면 출력된 해에서 마디의 에너지 하한과 에너지 변수 값이 일치할 때 그 마디가 크리티컬 패스의 한 쪽 끝이 된다. 이와 같은 방식으로 초기해 π^* 와 에너지하한 $\underline{\pi}_i$ 를 비교하여, 각 커버 별로 가장 많은 시점에 걸쳐 두 값이 일치하는 마디까지의 경로를 크리티컬패스로 정한다.

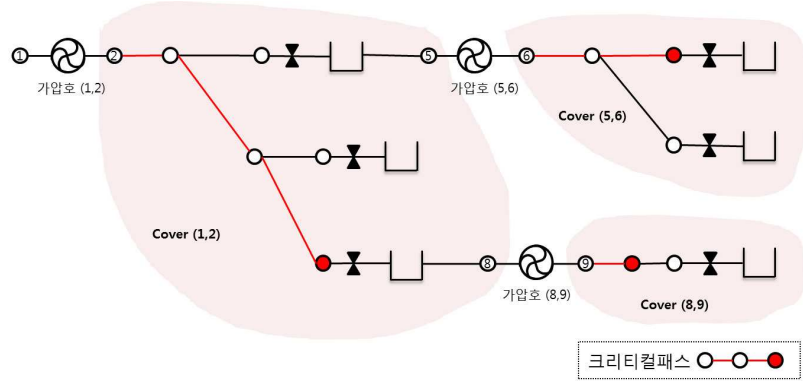


그림 4.1: 크리티컬 패스 탐색

4.4 (3) 크리티컬 패스의 손실에너지량 최소화

3.2절의 관찰에서 커버 별로 크리티컬 패스를 지정하면 이를 이용하여 목적 함수 하한식을 구할 수 있음을 보였다. $cover(i, j)$ 의 크리티컬 패스를 마디 j 부터 마디 k_{ij} 라고 하면, 하한식 $g_{LB}(f)$ 는 다음과 같다.

$$g_{LB}(f) = \sum_t \sum_{(i,j) \in A_p} C_{ij}^t \left(\sum_{(a,b) \in path_{j-k_{ij}}} f_{ab}^t L_{ab}(f_{ab}^t) + \underline{\pi}_{k_{ij}} f_{ij} - \bar{\pi}_i f_{ij} \right) \quad (\text{water})$$

$$g_{LB}(f) = \sum_t \sum_{(i,j) \in A_p} C_{ij}^t \left(\frac{\sum_{(a,b) \in path_{j-k_{ij}}} (f_{ab}^t)^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}} L_{ab}(f_{ab}^t) + \underline{\pi}_{k_{ij}} (f_{ab}^t)^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}}}{\bar{\pi}_i^t} \right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} - f_{ij}^t \quad (\text{gas})$$

이 하한식을 목적함수로 하여 앞서 초기해를 구하는 모형과 유사하게 해를 구한다. 최적화 모형은 다음과 같다.

문제 4.4.1 크리티컬 패스 모형

$$\begin{aligned}
\min \quad & g_{LB}(f) + \epsilon \sum_t \sum_{i \in N} \pi_i^t \\
\text{s.t} \quad & \sum_{j|(j,i) \in A} f_{ji}^t + S_i^t = \sum_{j|(i,j) \in A} f_{ij}^t + D_i^t & \forall i \in N_n, \forall t, \\
& \sum_{j|(j,i) \in A} f_{ji}^t + S_i^t = \sum_{j|(i,j) \in A} f_{ij}^t + D_i^t + b_i^{t+1} - b_i^t & \forall i \in N_t, \forall t, \\
& b_i^1 = B_i^1 & \forall i \in N_t, \\
& b_i^1 = b_i^T & \forall i \in N_t, \\
& \pi_i^t - \pi_j^t \geq L_{ij}(f_{ij}^t) & \forall (i,j) \in A_n, \forall t, \\
& \pi_i^t \leq \pi_j^t & \forall (i,j) \in A_p, \forall t, \\
& \pi_i^t \geq \pi_j^t & \forall (i,j) \in A_d, \forall t, \\
& \underline{\pi}_i \leq \pi_i^t & \forall i \in N, \forall t, \\
& 0 \leq b_i^t \leq \bar{b}_i & \forall i \in N_t, \forall t, \\
& 0 \leq f_{ij}^t \leq \bar{f}_{ij} & \forall (i,j) \in A, \forall t.
\end{aligned}$$

문제 4.4.1은 문제 4.2.1과 동일하게 블록 최적화 모형이므로 최적해를 구할 수 있다. 이 최적해에서 $g_{LB}(f)$ 값은 원 문제의 목적함수 하한이 된다. 하지만 이 해는 에너지상한 제약식은 만족시킨다는 보장이 없다. 따라서 다음 과정을 통해 이를 보정하는 과정을 거친다.

4.5 (4) 에너지 상한 제약식 보정

에너지상한 제약식을 만족하는 경우 해를 그대로 출력한다. 그렇지 않을 경우 문제 4.5.1을 통해 가능해를 탐색한다.

문제 4.5.1 에너지 상한 제약식 보정 모형

$$\begin{aligned}
 \min \quad & g_{LB}(f) + \epsilon \sum_t \sum_{i \in N} \pi_i^t + \sum_t \sum_{i \in N} w_i^t \lambda_i^t \\
 \text{s.t} \quad & \sum_{j|(j,i) \in A} f_{ji}^t + S_i^t = \sum_{j|(i,j) \in A} f_{ij}^t + D_i^t & \forall i \in N_n, \forall t, \\
 & \sum_{j|(j,i) \in A} f_{ji}^t + S_i^t = \sum_{j|(i,j) \in A} f_{ij}^t + D_i^t + b_i^{t+1} - b_i^t & \forall i \in N_t, \forall t, \\
 & b_i^1 = B_i^1 & \forall i \in N_t, \\
 & b_i^1 = b_i^T & \forall i \in N_t, \\
 & \pi_i^t - \pi_j^t \geq L_{ij}(f_{ij}^t) & \forall (i,j) \in A_n, \forall t, \\
 & \pi_i^t \leq \pi_j^t & \forall (i,j) \in A_p, \forall t, \\
 & \pi_i^t \geq \pi_j^t & \forall (i,j) \in A_d, \forall t, \\
 & \underline{\pi}_i \leq \pi_i^t & \forall i \in N, \forall t, \\
 & 0 \leq b_i^t \leq \bar{b}_i & \forall i \in N_t, \forall t, \\
 & 0 \leq f_{ij}^t \leq \bar{f}_{ij} & \forall (i,j) \in A, \forall t, \\
 & \lambda_i^t \geq \pi_i^t - \bar{\pi}_i & \forall i \in N, \forall t, \\
 & \lambda_i^t \geq 0 & \forall i \in N, \forall t.
 \end{aligned}$$

에너지상한과 차이나는 정도를 변수 λ 로 둔 뒤, 이에 대한 가중치를 수정해가면서 가능해를 탐색한다.

4.6 해법 요약

앞서 설명한 해법을 요약하면 다음과 같다. 본 해법은 크리티컬 패스의 에너지량을 줄이는 것이 가압호의 에너지비용을 줄이는 것과 연관성이 있다는 점에 착안하여 개발되었으므로 크리티컬 패스 알고리즘이라고 명명한다.

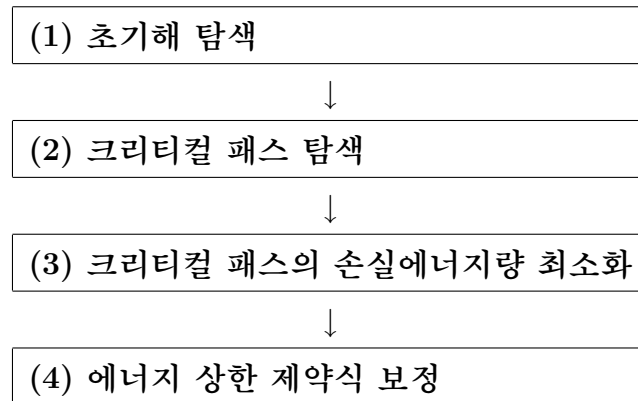


그림 4.2: 크리티컬 패스 알고리즘

5. 현실문제 응용 및 결과

이 장에서는 본 논문에서 제시된 해법을 실제 현실문제에 적용하여 기존의 알고리즘과 해법의 성능을 비교해 본다.

5.1 실험 대상

상수도 관망 펌핑 일정 계획 문제에 해법을 적용하여 보았다. 상수도 관망 펌핑 일정 계획 문제는 취수원으로부터 배수지까지 상수도를 공급하는 관망에서 각지의 수요량을 만족하면서 펌프장에서 소비되는 에너지비용을 최소화하도록 펌핑 일정을 정하는 문제이다. 고도가 높은 지역이나 먼 거리에 있는 지역에 물을 보내기 위해 관망 내에 있는 펌프를 이용하여 에너지를 가해야 하기 때문에 에너지와 흐름을 동시에 고려해야 한다. 상수도관망 내의 펌프나 밸브는 on/off 혹은 몇 개의 수준에 대해 작동하기 때문에 모형화 된 문제는 정수변수를 포함한다. 하지만 정수변수를 그대로 고려하는 것은 계산시간이 너무 길어지기 때문에 이를 완화하여 풀 뒤 후처리과정을 통해 정수변수의 값을 구하는 방식을 많이 이용한다. 이 완화된 문제가 본 논문에서 이야기한 에너지-흐름 네트워크 문제에 포함된다.

마디는 일반적인 마디와 탱크마디로 구분되고, 호는 일반호와 물에 압력을 가하는 펌프장에 해당하는 호, 물이 들어오는 양을 조절하는 밸브로 나뉜다. 펌프장과 밸브는 각각 에너지-흐름 네트워크의 가압호와 감압호에 해당된다. 또한 24시간 펌핑 일정을 15분 단위로 계획하기 때문에 총 96개의 단위시간을 가진다. 상수도 관망 펌핑 일정 계획 문제의 최적화 모형은 다음과 같다.

문제 5.1.1 상수도 관망 펌핑 일정 계획 문제

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_t \sum_{(i,j) \in A_p} C_{ij}^t f_{ij}^t (\pi_j^t - \pi_i^t) \\
 \text{s.t} \quad & \sum_{j|(j,i) \in A} f_{ji}^t + S_i^t = \sum_{j|(i,j) \in A} f_{ij}^t + D_i^t & \forall i \in N_n, \forall t, \\
 & \sum_{j|(j,i) \in A} f_{ji}^t + S_i^t = \sum_{j|(i,j) \in A} f_{ij}^t + D_i^t + b_i^{t+1} - b_i^t & \forall i \in N_t, \forall t, \\
 & b_i^1 = B_i^1 & \forall i \in N_t, \\
 & b_i^1 = b_i^T & \forall i \in N_t, \\
 & \pi_i = \underline{\pi}_i + \frac{b_i^t}{A_i} & \forall i \in N_t, \\
 & \pi_i^t - \pi_j^t = L_{ij}(f_{ij}^t) & \forall (i,j) \in A_n, \forall t, \\
 & \pi_i^t \leq \pi_j^t & \forall (i,j) \in A_p, \forall t, \\
 & \pi_i^t \geq \pi_j^t & \forall (i,j) \in A_d, \forall t, \\
 & \underline{\pi}_i \leq \pi_i^t \leq \overline{\pi}_i & \forall i \in N, \forall t, \\
 & 0 \leq b_i^t \leq \overline{b}_i & \forall i \in N_t, \forall t, \\
 & 0 \leq f_{ij}^t \leq \overline{f}_{ij} & \forall (i,j) \in A, \forall t.
 \end{aligned}$$

상수와 변수의 표기는 이해를 돕기 위해 에너지-흐름 네트워크의 표기를 따랐다. 물은 탱크에 저장된 양에 의해 결정되는 수위에 따라 위치에너지로 갖게 되는데 여기서 에너지와 흐름량 사이에 선형관계식이 생기게 된다. 이 $\pi_i = \underline{\pi}_i + \frac{b_i^t}{A_i}$ 제약식이 그 관계를 나타낸 제약인데, 선형이기 때문에 해법을 적용하는 데는 문제가 없다. (A_i 는 마디 i 에 해당하는 탱크의 단면적 넓이)

5.2 실험 개요

서로 크기가 다른 세 개의 네트워크를 대상으로 실험하였다. 세 네트워크에 대한 정보는 다음과 같다.

표 5.1: 실험 네트워크 정보

	마디	호	펌프장	밸브	탱크
네트워크 1	41	40	2	6	12
네트워크 2	100	98	5	14	27
네트워크 3	146	145	7	21	34

실험시점은 1시간 단위로 0시부터 23시까지 총 24개의 시점에 대해 실험하였다. 크리티컬 패스 알고리즘과 함께 SLP를 사용하여 실험결과를 비교하였다.

5.3 실험 결과

해법을 적용한 결과는 다음과 같다.

표 5.2: 평균 계산시간

실험대상	크리티컬 패스 알고리즘	SLP	차이
네트워크 1	6.5초	10.8초	-5.3초(1.7배)
네트워크 2	20.5초	41.7초	-21.2초(2.0배)
네트워크 3	29.2초	81.5초	-52.3초(2.8배)

표 5.3: 목적함수 값과 하한과의 차이의 평균

실험대상	크리티컬 패스 알고리즘	SLP	차이
네트워크 1	7.8%	7.6%	+0.2%
네트워크 2	6.8%	6.0%	+0.8%
네트워크 3	7.2%	5.9%	+1.3%

크리티컬 패스 알고리즘은 출력된 해의 목적함수 값이 하한과 7%정도 차이나는 우수한 품질의 해를 출력하였다. 또한 SLP와 비교해도 큰 차이가 나지 않았다. 그리고 계산속도는 SLP보다 2-3배 가량 빨랐으며, 네트워크의 크기가 커질수록 차이가 커지는 경향을 보였다.

6. 결론 및 추후 연구 과제

본 연구에서는 현실에서 각기 다른 물질을 네트워크를 통해 수송하는 문제들을 분석하여 이들 문제가 모두 에너지와 흐름의 관계를 모두 고려해야 한다는 공통점을 발견하였고, 이들 문제를 포함하는 에너지-흐름 네트워크 문제를 정의하였다. 에너지-흐름 네트워크 문제는 비선형 문제이지만 에너지량 보존과 크리티컬 패스라는 유용한 성질을 가지고 있었고, 이를 이용하여 크리티컬 패스 알고리즘을 제시하였다. 크리티컬 패스 알고리즘을 상수도 관망 펌핑 일정 계획 문제에 적용한 결과 출력된 해의 목적함수 값이 하한과 7% 정도 차이날 정도로 우수하였고, 이는 SLP와 비슷한 수준이었다. 또한 SLP보다 2-3배 빠른 시간 내에 해를 출력하였는데, 네트워크의 크기가 커질수록 계산속도 차이가 더 벌어지는 것을 실험을 통해 확인할 수 있었다. 크리티컬 패스 알고리즘은 적용해야 하는 네트워크가 크고, 빠른 시간 내에 계속해서 해를 출력해야 하는 실시간 모형의 경우 적용할만한 가치가 있다고 생각된다.

하지만 크리티컬 패스 알고리즘은 네트워크가 나무 구조라는 가정 하에 개발되었다는 한계가 있다. 물론 네트워크의 형태가 반드시 나무 구조는 아니더라도 가압호를 기준으로 커버하는 영역이 나뉘는 네트워크라면 얼마든지 적용할 수 있을 것으로 생각된다. 추후 연구과제로 네트워크가 유사 나무 구조일 때도 본 논문에서 전개한 논리가 적용이 되는지 아니면 조금 변형하여 개념을 그대로 가져갈 수 있을지 알아보는 연구가 필요하다. 이는 본 연구의 적용 범위를 확장할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

- [1] L. M. Brion and L. W. Mays. Methodology for optimal operation of pumping stations in water distribution systems. *Journal of Hydraulic Engineering*, 117(11):1551–1569, 1991.
- [2] John A. Dean. *Lange's Handbook of Chemistry*. McGraw-Hill, 10th edition, 1967.
- [3] D. Mahlke, A. Martin, and S. Moritz. A mixed integer approach for time-dependent gas network optimization. *Optimization Methods & Software*, 24(4):625–644, 2010.
- [4] A. Martin, M. Moller, and S. Moritz. Mixed integer models for the stationary case of gas network optimization. *Math Programming*, 105:563–582, 2006.
- [5] R. P. O'Neill, M. Williard, B. Wilkins, and R. Pike. A mathematical programming model for allocation of natural gas. *Operations Research*, 27(5):857–873, 1979.
- [6] F. M. White. *Fluid Mechanics*. McGraw-Hill, 7th edition, 2009.
- [7] D. De Wolf and Y. Smeers. The simplex algorithm extended to piecewise-linearly constrained problems. *CORE DP No.9119, Universite Catholique de Louvain, Belgium*.
- [8] D. De Wolf and Y. Smeers. The gas transmission problem solved by an extension of the simplex algorithm. *Management Science*, 46(11):1454–1465, 2000.

- [9] G. Yu, R. S. Powell, and M. J. H. Sterling. Optimized pump scheduling in water distribution systems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 83(3):463–488, 1994.

ABSTRACT

Jong-Eun Kim

Department of Industrial Engineering

The Graduate School

Seoul National University

Energy-Flow network problem is the problem that minimizes total energy cost with flow-balance, energy balance and upper and lower bound of energy and flow constraints. In this paper, we define the E-F network problem which includes various problems in field such as water distribution problem and gas pipeline problem. The problem is NP-hard. We present the Critical Path algorithm which is faster than the most common algorithm and print out the feasible solution and lowerbound of objective. The results show that the proposed method achieves lowerbound-close solution.

Keywords : Energy-Flow Network, Water Distribution Network, Gas Pipeline Network, NP-Hardness

Student number : 2010-21095