



저작자표시-비영리-동일조건변경허락 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.
- 이차적 저작물을 작성할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.



비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.



동일조건변경허락. 귀하가 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공했을 경우에는, 이 저작물과 동일한 이용허락조건하에서만 배포할 수 있습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#)

공학석사 학위논문

전노심 SP3 계산을 위한
방향교차 일차원 선원확장 노달법

Alternating Direction One-Dimensional
Source Expansion Nodal Method
for Whole Core Simplified P3 Calculation

2013년 2월

서울대학교 대학원
에너지시스템공학부
정 희 정

전노심 SP3 계산을 위한 방향교차 일차원 선원확장 노달법

지도교수 주 한 규

이 논문을 공학석사 학위논문으로 제출함

2013년 2월

서울대학교 대학원

에너지시스템공학부

정 희 정

정희정의 공학석사 학위논문을 인준함

2013년 2월

위 원 장 _____ 심 형 진 (인)

부위원장 _____ 주 한 규 (인)

위 원 _____ 조 진 영 (인)

초 록

3차원 전노심 수송계산을 위한 1차원 방향 교차법을 이용한 전격자 기반 SP_3 선원 확장 노달해법(SENM)을 개발하였다. 이를 위해 먼저 3차원 SP_3 방정식으로부터 횡방향으로 적분된 1차원 SP_3 방정식을 유도하였다. 횡방향 적분 SP_3 방정식에 대한 노달해법은 0차와 2차 각모멘트가 각각 4차 르장드르 다항식과 지수함수의 결합으로 표현되어 급격한 변화를 가지는 중성자속 근사에 적합한 선원확장 노달법을 1차원 전격자에 대해 적용하여 동시해를 구할 수 있도록 구성하였다. 3차원 노심 계산을 위해서는 1차원 SP_3 선원확장 노달해를 삼차원의 x, y, z 각 방향에 대해 교차로 구하되 이전의 수직방향의 해로부터 횡방향 적분 방정식 우변의 횡방향 누설항을 갱신하여 해당방향의 해를 구하고 세 방향에 대한 1차원 SENM 해로부터 구해진 각방향 순중성자류를 바탕으로 각 소격격자의 중성자 균형방정식의 해를 독립적으로 구해 중성자속 각모멘트를 갱신하는 방향교차 해법을 고안하였다.

이 방향교차 해법의 반복적 적용만으로도 유효중배계수와 중성자속 분포를 구할 수 있으나 그 수렴속도가 늦은 바 이를 해결하기 위해 P_1 CMFD 계산을 통해 노달계산의 핵분열선원분포를 수렴을 가속시키는 방법을 개발하였다. P_1 CMFD 계산에서는 2차 각모멘트를 미지수로 취하지 않으므로 후속 방향 교차 SENM 노달 계산에

서 2차 각모멘트 갱신이 가능하지 않지만 방향교차 노달계산을 복수로 함으로써 2차 각모멘트가 자체적으로 갱신되도록 함으로써 P_1 CMFD 계산과 통합된 방향교차 1차원 SENM의 수렴성을 확보하였다.

이 방법을 구현한 전산코드는 IAEA PWR 문제, C5G7 MOX 문제, KAIST 4G 문제, MOX 노심 과도해석 표준검증문제, TAKEDA 고속로 문제등의 2차원 및 3차원 벤치마크 문제에 대해 그 정확도와 신속성을 검증하였다. 2차원 벤치마크 문제대해서는 미세격자 유한차분해가 가능하므로 이를 통해 SP_3 기준해를 생성하여 노달해의 비교대상으로 취했고 3차원 벤치마크 문제는 몬테칼로 해법을 통해 기준해를 생성하였다. 이런 검증 과정을 통해 방향교차 일차원 선원확장 노달법이 신속하고 정확한 SP_3 해법임을 확인하였다. 또한, CMFD와 결합하지 않은 방법과의 비교를 통해서 개발한 노달 계산법에서의 CMFD의 매우 우수한 가속 성능도 확인하였다.

주요어 : SP_3 , 선원확장 노달법, 전격자, 소격격자 유한차분법, 방향교차법

학 번 : 2011-21110

목 차

초 록	i
표 목 차	iv
그 립 목 차	v
제 1 장 서 론	1
제 1 절 연구 배경과 목적	1
제 2 절 연구 논점과 해결방안	3
제 3 절 논문의 구성	4
제 2 장 SP_3 방정식과 유한 차분 해법	6
제 1 절 1차원 P_L 방정식의 유도	6
제 2 절 다차원 SP_3 방정식	11
제 3 절 SP_3 방정식의 유한 차분 해법	14
제 3 장 1차원 전격자 기반 SP_3 선원확장 노달법	18
제 1 절 횡방향 적분 1차원 SP_3 방정식	18
제 2 절 선원확장 노달법	20
제 3 절 전격자 방식의 동차해 계수 결정	26
제 4 장 방향 교차 계산 체계	33
제 1 절 P_1 기반 CMFD를 이용한 방향 교차 계산 체계 ...	33
제 2 절 노달 균형 방정식을 이용한 방향 교차 계산 체계	38
제 5 장 수치 계산 결과	41
제 1 절 SP_3 해법의 우수성 검증	42
제 2 절 2차원 벤치마크 문제 검증	46
제 3 절 3차원 벤치마크 문제 검증	60
제 4 절 CMFD 계산의 가속 성능 평가	62
제 6 장 결 론	67

표 목차

[표 5-1] 2차원 벤치마크 문제의 기준해와 SP3와 P1 해법의 유효 증배 계수 오차	10
[표 5-2] 2차원 벤치마크 문제의 SP3와 P1 해법의 출력 오차	20
[표 5-3] 2차원 벤치마크 문제의 총 에너지 군과 집합체 물성치	44
[표 5-4] 2차원 벤치마크 문제의 FDM 결과와 노달 결과 비교 (1)	49
[표 5-5] 2차원 벤치마크 문제의 FDM 결과와 노달 결과 비교 (2)	50
[표 5-6] 2차원 벤치마크 문제의 FDM 결과와 노달 결과 비교 (3)	51
[표 5-7] 3차원 벤치마크 문제의 몬테칼로 결과와 P1 및 SP3 노달 결과 비교	61
[표 5-8] 2차원 벤치마크 문제의 총 노달 반복 계산 횟수	64
[표 5-9] 3차원 벤치마크 문제의 총 노달 반복 계산 횟수	65

그림 목차

[그림 4-1] 방향 교차법을 이용한 노달 반복 계산 체계	37
[그림 4-2] P1 CMFD를 이용한 방향 교차 계산 체계.....	40
[그림 5-1] 2차원 C5G7MOX 문제의 출력 분포 오차	52
[그림 5-2] 2차원 KAIST 문제의 출력 분포 오차	52
[그림 5-3] 2차원 MOX Transient 4G 문제의 출력 분포 오차	53
[그림 5-4] 2차원 MOX Transient 8G 문제의 출력 분포 오차	54
[그림 5-5] 2차원 KOEBERG 문제의 출력 분포 오차	55
[그림 5-6] 2차원 TAKEDA MODEL 2 Rod In 문제의 출력 분포 오차.....	56
[그림 5-7] 2차원 TAKEDA MODEL 2 Rod Out 문제의 출력 분포 오차	57
[그림 5-8] 2차원 TAKEDA MODEL 3 Rod In 문제의 출력 분포 오차.....	58
[그림 5-9] 2차원 TAKEDA MODEL 3 Rod Out 문제의 출력 분포 오차.....	59
[그림 5-10] 3차원 IAEA 문제의 핵분열 선원항 오차 거동 ..	66

제 1장 서 론

제 1절 연구 배경과 목적

효율적인 전노심 해석을 위한 방법으로 서울대학교에서 개발한 nTracer 직접 전노심 수송해석 코드[1]에서는 축 방향으로 1차원 SP₃ 선원확장 노달법(Source Expansion Nodal Method : SENM)과 평면 방향으로 선추적 해법(Method of Characteristics : MOC)을 결합하여 3차원 전노심 직접 계산능을 구현하였다. 초기의 nTracer는 축 방향으로 P₁ 이격자 기반 선원확장 노달법을 사용하였는데 축 방향으로 중성자속의 구배가 심할 경우 오차가 매우 커지는 단점이 있었다. 이를 해결하기 위해 축 방향으로 1차원 SP₃ 전격자 기반 선원확장 노달법을 구현함으로써 제어봉이 부분적으로 삽입된 영역 근처나 반사체 근처와 같이 중성자속이 급격하게 변하는 영역에서의 출력 분포의 오차가 줄어들을 확인할 수 있었다.

축 방향 계산에 이용된 1차원 SP₃ 노달 해법은 횡방향으로 적분된 SP₃ 방정식을 이용하는데 횡방향 누설항을 통해 다른 방향의 문제와 연계되어있다. 이를 이용하면 3차원 노심을 1차원 문제로 나누어 계산할 수 있는데 바꾸어 말하면 1차원 문제의 해가 3차원 문제의 해를 구하는데 확장 적용이 가능하다는 것이다. 이러한 확장성을 바탕으로 이 연구는 1차원 SP₃ 노달 해법만을 이용한 효율적인 3차원 노심 계산 방법론을 개발하여 기존 확산 방정식에 기반한 노심 계산보다 월등한 정확성을 가지고 실용적인 노심 계산법을 구

현하는 것을 목적으로 한다.

노달 해법으로 사용된 선원확장 노달법[2]은 중성자속의 분포를 4차 르장드르 다항식(Legendre Polynomials)과 지수 함수의 결합으로 나타냄으로써 노달전개법(Nodal Expansion Method : NEM) [3]에 비해 공간적으로 심한 변화를 보이는 2차 각모멘트를 잘 나타내기에 좋다. 또한 초월함수 계산으로 인해 전산 시간이 길어져 전산 효율이 떨어지는 해석적노달법(Aalytic Nodal Method : ANM) [4]에 비해 효율적인 노달 방법이다.

전통적으로 노달 해법의 구현을 위해서는 단일 격자 방식과 이격자 방식을 이용해왔다. 단일 격자 방식은 인입 부분 중성자류를 경계조건으로 하여 노드 내에서의 평균 중성자속과 외행 부분 중성자류를 구하는 방식이다. 이격자 방식은 평균 중성자속 조건과 두 격자의 경계면에서 중성자속과 중성자류의 연속 조건을 이용하여 중성자속 분포와 경계면에서의 중성자류를 구한다. 단일 격자 방식은 이격자 방식보다 수렴성이 떨어지는 단점은 있지만 구현하기가 용이하다. 한편 이격자 방식은 노달 계산에 의해 평균 중성자속을 구할 수 없으므로 소격격자 유한 차분법(Coarse Mesh Finite Difference Method : CMFD) [5]과의 결합이 필수적이다. 하지만 SP_3 노달 해법 구현을 위한 SP_3 기반의 CMFD 계산 체제는 매우 복잡하고 P_1 기반의 CMFD 계산 체제는 2차 각모멘트 항을 포함하지 않는다는 단점이 있다. 이러한 문제를 극복하기 위해 이 연구에서는 단일 격자나 이격자 대신 전격자 방식을 고려하기로 한다. 전격자 방식은 격자 경계에서의 중성자속과 중성자류의 연속 조건과

양 끝 격자의 경계 조건만을 필요로 하기 때문에 CMFD 계산 결과 없이 자체적으로 1차원 전노드에 대한 중성자 균형방정식의 해를 생산할 수 있고, 3차원 문제에 대해 일차원 문제를 방향을 교차하며 구성할 수 있어 3차원 전체 노드에 대해 중성자 균형방정식의 해를 구해 줄 수 있는 장점이 있다.

이 연구에서는 먼저 1차원 전격자 기반의 SP_3 선원확장 노달 해법을 방향 교차 방법을 이용해 전노심 계산을 가능하게 하는 해법을 개발하고 그 정확성과 수렴성을 검증한다. 이후 방향교차 해법의 가속을 위해 P_1 기반 소격격자 유한 차분법을 구현한 연계 계산 체제를 확립하고 그 가속 성능을 확인한다.

제 2절 연구 논점과 해결 방안

전노심에 대한 SP_3 계산에 있어서도 CMFD 계산 체제를 구축하여 노달 계산과 CMFD 계산을 교차로 수행하는 방법을 생각할 수 있다. 이 경우 CMFD에서 구해진 전체 격자에 대한 중성자속 해를 이용해서 횡방향 누설항을 갱신하여 노달 계산에서 사용한다. 그런데 SP_3 방정식의 두 미지수 즉 0차 각모멘트인 스칼라중성자속과 2차 각모멘트 중성자속 둘 다를 CMFD 방정식에 포함시키면 2차 각모멘트에 대한 중성자류 보정인자가 매우 커져 수렴 불안정성을 유발하는 문제가 있다. 이는 2차 각모멘트 중성자속은 경계면 좌우에서 부호가 다를 수 있고 경계면에서 변화도 심대하므로 중성자류 보정인자를 구하는 식에서 분자의 중성자류는 아주 커지고 분모의 양 노드 각모멘트의 합은 아주 작아질 수 있으므로 생기는 문제점

이다. 따라서 CMFD는 통의 확산 방정식에 사용하는 방법으로 즉 2차 각모멘트를 포함하지 않는 P_1 CMFD 방식으로 구성할 수 밖에 없다. 이 경우 P_1 CMFD에서 갱신할 수 없는 2차 모멘트 누설항은 이전 노달 해법에서 나온 값을 사용하여야 한다. SP_3 노달 해법 가속을 위해 P_1 CMFD를 결합함으로써 생길 수 있는 0차 모멘트와 2차 모멘트의 불균형의 정도를 확인해보아야 한다. 이를 위해 선원확장 노달법만을 이용하여 SP_3 해법을 구하여 그 결과를 평가할 수 있어야 한다. 이를 위해 이 연구에서는 방향교차 일차원 전격자 선원확장 노달법을 고안하여 해결책을 모색할 것이다.

제 3절 논문의 구성

이 논문에서는 먼저 제 2장에서 볼츠만 수송 방정식으로부터 다균 다차원 SP_3 방정식을 유도한다. 다음 제 3장에서는 먼저 전격자 선원확장 노달법 적용을 위해 횡방향으로 적분된 SP_3 방정식을 유도한다. 이후 1차원 선원확장 노달법의 기본 체제와 선원항을 이용한 특수해 유도방법과 전격자 방식을 이용해 동차해를 구하는 방법에 대해 다룬다. 다음 선원 전개를 위한 해석함수해를 4차 르장드르 다항식으로 전개방법을 설명한다. 제 4장에서는 방향교차 계산 체계를 기술하고 각 독립 격자의 노달 균형 방정식을 이용해 유효 증배 계수와 핵분열 선원항을 갱신하는 방법을 다룬다. 또한 다균 CMFD 계산 체제를 이용한 방향교차 계산 체계에 대해 소개한다. 제 5장에서는 SP_3 해법의 우수성을 평가하기 위해 수행한 2차원 벤치마크 문제와 3차원 벤치마크 문제 해석을 통해 방향교차 SP_3

선원확장 노달 해법의 정확성과 신속성을 검증한다. 또한 이 노달 해법에 쓰인 다군 CMFD 계산의 가속효과도 검증한다. 제 6장에서는 제 5장의 수치 결과를 바탕으로 결론을 도출하고 향후 보완점에 대해 논의한다.

제 2장 SP₃ 방정식과 유한 차분 해법

P_L 방정식은 중성자속의 비등방성을 고려하여 볼츠만 수송 방정식에 나타나는 각종성자속과 산란단면적을 L차 르장드르 다항식으로 전개하여 구하는 방정식이다[6]. 그 중 P₃ 방정식은 확산방정식(P₁ 방정식)에 비해 1개의 추가적인 변수를 가지고도 우수한 정확성을 가지는 수송방정식이다. 여기서는 1차원 P_L 방정식과 SP₃ 방정식을 식 (2.1)와 같은 볼츠만 수송 방정식으로부터 유도하기로 한다.

$$\begin{aligned} & \hat{\Omega} \cdot \nabla \varphi(r, E, \hat{\Omega}) + \Sigma_t(r, E) \varphi(r, E, \hat{\Omega}) \\ & = \frac{1}{k} \frac{\chi(E)}{4\pi} \psi(r) + \int_{4\pi} \int_0^\infty \Sigma(r, E' \rightarrow E, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}) \varphi(r, E, \hat{\Omega}') dE' d\hat{\Omega}' \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\text{여기서 } \psi(r) = \int_0^\infty \int_{4\pi} v \Sigma_f(r, E') \varphi(r, E', \hat{\Omega}') d\hat{\Omega}' dE'$$

제 1절에서는 식 (2.1)로부터 다균 1차원 P_L 방정식을 유도하고 이로부터 제 2절에서는 다균 다차원 SP₃ 방정식을 유도한다. 제 3절에서는 다균 다차원 SP₃ 방정식의 해법으로 유한 차분법을 설명한다.

제 1절 1차원 P_L 방정식의 유도

유도의 편의상 식 (2.1)을 1차원상의 표현으로 나타낼 수 있다. 1차원상에서는 각 중성자속이 방위각과 무관하기 때문에 식 (2.1)

의 누설항과 각 중성자속, 산란단면적은 다음과 같이 근사할 수 있다.

$$\hat{\Omega} \cdot \nabla \varphi(r, E, \hat{\Omega}) \approx \mu \frac{\partial}{\partial z} \varphi(r, E, \mu) \quad (2.2)$$

$$\varphi(r, E, \hat{\Omega}) = \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{4\pi} \phi_l(z, E) P_l(\mu) \quad (2.3)$$

$$\Sigma(r, E' \rightarrow E, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}) = \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{4\pi} \Sigma_l(z, E' \rightarrow E) P_l(\mu_s) \quad (2.4)$$

여기서 $\mu = \cos \theta$, $\mu_s = \cos \theta_s = \hat{\Omega} \cdot \hat{\Omega}'$ 이다.

식 (2.2)부터 식 (2.4)를 식 (2.1)에 대입한다. 식 (2.5)은 L 차 르장드르 다항식으로 전개된 1차원 수송 방정식이다.

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\partial}{\partial z} \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{4\pi} \phi_l(z, E) P_l(\mu) + \Sigma_l(r, E) \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{4\pi} \phi_l(z, E) P_l(\mu) \\ & = \frac{1}{4\pi} \chi(E) \psi(z) + \int_0^\infty \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \left(\left(\sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{4\pi} \Sigma_l(z, E' \rightarrow E) P_l(\mu_s) \right) \right. \\ & \quad \left. \times \left(\sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{4\pi} \phi_l(z, E') \right) \right) d\alpha' d\mu' dE' \end{aligned} \quad (2.5)$$

다음으로 우변의 μ_s 항을 제거하기 위해 덧셈정리(Addition Theorem)을 이용한다. 이 정리는 식 (2.6)와 같다.

$$P_l(\mu_s) = P_l(\mu) P_l(\mu') + 2 \sum_{m=1}^l \tilde{P}_l^m(\mu) \tilde{P}_l^m(\mu') \cos m(\alpha - \alpha') \quad (2.6)$$

여기서,
$$\tilde{P}_l^m(\mu) = \sqrt{\frac{(l+1)!}{(l+m)!}} P_l^m(\mu)$$

식 (2.6)을 식 (2.5)에 대입하여 정리하면 식 (2.5)의 우변의 산란항은 다음의 식 (2.7)과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \left(\sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{4\pi} \Sigma_l(z, E' \rightarrow E) P_l(\mu_s) \right) \left(\sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{4\pi} \phi_l(z, E') \right) d\alpha' d\mu' dE' \\ &= \int_0^\infty \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{4\pi} \Sigma_l(z, E' \rightarrow E) \phi_l(z, E') P_l(\mu) dE' \end{aligned} \quad (2.7)$$

식 (2.7)을 식 (2.5)에 대입하여 식 (2.8)와 같은 L차로 전개된 수송방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\partial}{\partial z} \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{4\pi} \phi_l(z, E) P_l(\mu) + \Sigma_l(z, E) \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{4\pi} \phi_l(z, E) P_l(\mu) \\ &= \frac{1}{4\pi} \chi(E) \psi(z) + \int_0^\infty \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{4\pi} \Sigma_l(z, E' \rightarrow E) \phi_l(z, E') P_l(\mu) dE' \end{aligned} \quad (2.8)$$

식 (2.8)에서 $P_l(\mu)$ 를 제거하기 위해서 르장드르 다항식의 직교성(Orthogonality)를 이용한다. 식 (2.8)의 양변에 르장드르 다항식을 곱한 다음 구간 $[-1, 1]$ 에 대해 적분해준다. 이때 수식의 간결성을 위해 2π 를 곱해준다. 다음으로 모든 항에 이와 같은 적분을 각각 수행한다. 이 때 누설항의 정리를 위해서는 식 (2.9)와 같은 르장드르 점화식(Bonnet's Recursion Formula)을 이용한다.

$$(2l+1)\mu P_l(\mu) = (l+1)P_{l+1}(\mu) + lP_{l-1}(\mu) \quad (2.9)$$

각 항의 적분과정은 다음과 같다.

1) 누설항

$$\begin{aligned}
& 2\pi \int_{-1}^1 \left(\mu \frac{\partial}{\partial z} \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{4\pi} \phi_l(z, E) \right) \cdot P_n(\mu) d\mu \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \int_{-1}^1 \left(\sum_{l=0}^L (2l+1) \mu P_l(\mu) \phi_l(z, E) \right) \cdot P_n(\mu) d\mu \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \int_{-1}^1 \left(\sum_{l=0}^L ((l+1)P_{l+1}(\mu) + lP_{l-1}(\mu)) \cdot \phi_l(z, E) \right) \cdot P_n(\mu) d\mu \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left[\int_{-1}^1 n P_n(\mu)^2 \phi_{n-1}(z, E) d\mu + \int_{-1}^1 (n+1) P_n(\mu)^2 \phi_{n+1}(z, E) d\mu \right] \\
&= \frac{n}{2n+1} \frac{\partial}{\partial z} \phi_{n-1}(z, E) + \frac{n+1}{2n+1} \frac{\partial}{\partial z} \phi_{n+1}(z, E)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

2) 총 반응항

$$\begin{aligned}
& 2\pi \int_{-1}^1 \left(\Sigma_t(z, E) \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{4\pi} \phi_l(z, E) P_l(\mu) \right) \cdot P_n(\mu) d\mu \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 (2n+1) P_n(\mu)^2 d\mu \right) \Sigma_m(z, E) \phi_n(z, E) \\
&= \Sigma_m(z, E) \phi_n(z, E)
\end{aligned} \tag{2.11}$$

3) 핵분열 선원항

$$2\pi \int_{-1}^1 \frac{1}{4\pi} \chi(E) \psi(z) P_n(\mu) d\mu = \delta_{0n} \chi \psi \tag{2.12}$$

4) 산란 선원항

$$\begin{aligned}
& 2\pi \int_{-1}^1 \left(\int_0^\infty \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{4\pi} \Sigma_l(z, E' \rightarrow E) \phi_l(z, E') P_l(\mu) dE' \right) \cdot P_n(\mu) d\mu \\
& = \int_0^\infty \Sigma_n(z, E' \rightarrow E) \phi_n(z, E) dE'
\end{aligned} \tag{2.13}$$

1)에서 4)의 과정을 통해 식 (2.8)은 최종적으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
& \frac{n}{2n+1} \frac{\partial}{\partial z} \phi_{n-1}(z, E) + \frac{n+1}{2n+1} \frac{\partial}{\partial z} \phi_{n+1}(z, E) + \Sigma_t(z, E) \phi_n(z, E) \\
& = \delta_{0n} \chi \psi + \int_0^\infty \Sigma_n(z, E' \rightarrow E) \phi_n(z, E) dE'
\end{aligned} \tag{2.14}$$

여기서 $n=0, \dots, L$

다음으로 다군 형태의 방정식을 얻기 위해서 다군 P_L 방정식을 에너지 구간 $[E_g, E_{g-1}]$ 에 대해 적분하여 최종적인 g 군의 P_L 방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
& \frac{n}{2n+1} \frac{d}{dz} \phi_{n-1,g}(z) + \frac{n+1}{2n+1} \frac{d}{dz} \phi_{n+1,g}(z) + \Sigma_{mg}(z) \phi_{ng}(z) \\
& = \delta_{0n} \chi_g \psi + \sum_{g'=1}^G \Sigma_{ng'g}(z) \phi_{g'}(z)
\end{aligned} \tag{2.15}$$

단,

$$\begin{aligned}
 \phi_{ng}(z) &= \int_{E_g}^{E_{g-1}} \phi_n(z, E) dE = \phi_{ng} \\
 \Sigma_{mg}(z) &= \frac{1}{\phi_{ng}} \int_{E_g}^{E_{g-1}} \Sigma_m(z, E) \phi_n(z, E) dE = \Sigma_{mg} \\
 \Sigma_{ng'g}(z) &= \frac{1}{\phi_{ng}} \int_{E_{g'}}^{E_{g-1}} \int_{E_g}^{E_{g-1}} \Sigma_n(z, E' \rightarrow E) dE \phi_n(z, E') dE' = \Sigma_{ng'g} \\
 &(n=0, \dots, L, g=1, \dots, G)
 \end{aligned}$$

제 2절 다차원 SP₃ 방정식

제 1절에서 최종적으로 구한 다군 1차원 P_L 방정식에 L=0,1,2,3에 대해 전개하면 다음과 같이 행렬형태로 표현한 P₃ 방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix}
 \Sigma_{t0g} & \frac{\partial}{\partial z} & & & \\
 \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial z} & \Sigma_{t1g} & \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} & & \\
 & \frac{2}{5} \frac{\partial}{\partial z} & \Sigma_{t2g} & \frac{3}{5} \frac{\partial}{\partial z} & \\
 & & \frac{3}{7} \frac{\partial}{\partial z} & \Sigma_{t2g} & \\
 & & & &
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \phi_{0g} \\
 \phi_{1g} \\
 \phi_{2g} \\
 \phi_{3g}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \frac{1}{4\pi} \chi_g \psi + \sum_{g'=1}^G \Sigma_{g'g}^{(0)} \phi_{0g'} \\
 \sum_{g'=1}^G \Sigma_{g'g}^{(1)} \phi_{1g'} \\
 \sum_{g'=1}^G \Sigma_{g'g}^{(2)} \phi_{2g'} \\
 \sum_{g'=1}^G \Sigma_{g'g}^{(3)} \phi_{3g'}
 \end{bmatrix}
 \quad (2.16)$$

식 (2.16)을 간략하게 표현하기 위해 몇 가지 가정과 치환을 도입한다. 먼저 각각의 모멘트로 가중 적분한 반응단면적을 0차 모멘트로 가중적분 한 반응단면적과 같다고 가정한다(1). 그리고 특정 에너지 군으로 유입되는 첫 번째 모멘트와 유출되는 첫 번째 모멘

트가 같다고 가정한다(2). 그리고 2차 이상에서 산란 단면적은 0이라 가정한다(3). 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$1) \Sigma_{mg} = \Sigma_{t0g} = \Sigma_{tg}$$

$$2) \sum_{g'=1}^G \Sigma_{g'g}^{(1)} \phi_{1g'} = \sum_{g=1}^G \Sigma_{gg}^{(1)} \phi_{1g} = \Sigma_{sg}^{(1)}$$

$$3) \Sigma_{g'g}^n = 0 \quad (\forall n \geq 2)$$

$$4) D_{0g} = \frac{1}{3(\Sigma_{tg} - \Sigma_{sg}^{(1)})} = \frac{1}{3\Sigma_{trg}}$$

$$5) D_{2g} = \frac{3}{7\Sigma_{tg}}$$

$$6) \phi_{1g} = J_{0g}, \quad \phi_{3g} = J_{2g}$$

$$7) \Sigma_{rg} = \Sigma_{tg} - \Sigma_{gg}^{(0)}$$

$$8) q_0 = \frac{1}{4\pi} \chi_g \psi + \sum_{\substack{g'=1 \\ g'=g}}^G \Sigma_{g'g}^{(0)} \phi_{0g'}$$

1)부터 8)을 이용하여 식 (2.16)을 정리하면 다음과 같은 식으로 표현된다.

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{rg} & \frac{d}{dz} \\ D_{0g} \frac{d}{dz} & 1 & 2D_{0g} \frac{d}{dz} \\ & \frac{2}{5} \frac{d}{dz} & \Sigma_{tg} & \frac{3}{5} \frac{d}{dz} \\ & & D_{2g} \frac{d}{dz} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{0g} \\ J_{0g} \\ \phi_{2g} \\ J_{2g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

식 (2.17)에서 두번째 행과 네번째 행을 미분한 다음 홀수차 모멘트를 소거해주어 2개의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} -D_{0g} \frac{d^2}{dz^2} + \Sigma_{rg} & -2D_{0g} \frac{d^2}{dz^2} \\ -\frac{2}{5} D_{0g} \frac{d^2}{dz^2} & -\frac{4}{5} D_{0g} \frac{d^2}{dz^2} - \frac{3}{5} D_{2g} \frac{d^2}{dz^2} + \Sigma_{tg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{0g} \\ \phi_{2g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{0g} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

최종적으로 구해진 다군 1차원 SP_3 방정식은 1차원으로 표현된 이계 미분 연산자를 라플라시안(Laplacian) 연산자로 바꾸어 다군 다차원 SP_3 방정식으로 확장시킬 수 있다.

$$\begin{bmatrix} -D_g \nabla^2 + \Sigma_{rg} & -2D_g \nabla^2 \\ -\frac{2}{5} D_g \nabla^2 & -\frac{4}{5} D_g \nabla^2 - \frac{3}{5} D_g^{(2)} \nabla^2 + \Sigma_{tg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_g \\ \phi_g^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{0g} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

여기서, $D_g = D_{0g}$, $D_g^{(2)} = D_{2g}$, $\phi_g = \phi_{0g}$, $\phi_g^{(2)} = \phi_{2g}$

제 3절 SP₃ 방정식의 유한 차분 해법

식 (2.18)에 유한 차분법(Finite Difference Method)을 용이하
게 적용하기 위해서 각각의 모멘트가 독립적으로 구성해야 한다. 그
러기 위해서는 0차와 2차 모멘트를 연계시킨 다음의 치환이 필요하
다.

$$\hat{\phi}_g = \phi_g + 2\phi_g^{(2)} \quad (2.20)$$

식 (2.20)을 이용해 식 (2.18)을 변형하면 다음과 같은 식이 된다.

$$\begin{bmatrix} -D_g \nabla^2 + \Sigma_{rg} & -2\Sigma_{rg} \\ -\frac{2}{3}\Sigma_{rg} & -D_g^{(2)} \nabla^2 + \tilde{\Sigma}_{trg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\phi}_g \\ \phi_g^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{0g} \\ -\frac{2}{3}q_{0g} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

먼저 3차원 영역에서 m번째 격자의 u방향의 크기를 h_m^u , 평균
성자속을 $\bar{\phi}_{gm}$, 경계면에서의 중성자속을 $\tilde{\phi}_{gs}^d (d=l,r)$ 라 정의한다.
차분화에 앞서 식 (2.21)의 양변을 부피에 대해 적분한 다음 식의
간결성을 위해 다시 부피로 나눠주면 다음과 같은 2개의 식이 나온
다.

$$\begin{aligned} \sum_{u=x,y,z} \left(\frac{J_{0g,m}^{u,R} - J_{0g,m}^{u,L}}{h_m^u} \right) + \Sigma_{rg,m} \bar{\phi}_{g,m} - 2\Sigma_{rg,m} \bar{\phi}_{2g,m} &= \bar{q}_{0g} \\ \sum_{u=x,y,z} \left(\frac{J_{2g,m}^{u,R} - J_{2g,m}^{u,L}}{h_m^u} \right) - \frac{2}{3}\Sigma_{rg,m} \bar{\phi}_{g,m} + \tilde{\Sigma}_{trg,m} \bar{\phi}_{2g,m} &= -\frac{2}{3}\bar{q}_{0g} \end{aligned} \quad (2.22)$$

다음은 식 (2.22)에서 누설항을 차분화하는 과정이다. 편의상 x방향에 대해서만 유도한다. 먼저 경계면이 아닌 내부에 위치한 m 번째 격자에서의 오른쪽 경계 중성자류는 다음과 같다.

$$J_{g,m}^R = -D_{g,m} \frac{\tilde{\phi}_{gs}^r - \bar{\phi}_{g,m}}{\frac{1}{2}h_m} = -D_{g,m+1} \frac{\bar{\phi}_{g,m+1} - \tilde{\phi}_{gs}^r}{\frac{1}{2}h_{m+1}} = J_{g,m+1}^L \quad (2.23)$$

식 (2.23)에서 경계 중성자속 항을 제거하기 위해서 다음 정의를 이용한다.

$$1) \quad \beta_{g,m} = \frac{D_{g,m}}{h_m}$$

$$2) \quad \tilde{D}_{g,m} = -2 \frac{\beta_{g,m} \beta_{g,m+1}}{\beta_{g,m} + \beta_{g,m+1}}$$

1)과 2)를 이용하면 경계 중성자류가 구해지고 식 (2.23)에 대입하여 정리한 다음 최종적으로 식(2.22)에 대입하여 다음의 두식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \sum_{u=x,y,z} \left(\frac{-\tilde{D}_{g,m}^{uR} \bar{\phi}_{g,m}^{uR} - \tilde{D}_{g,m}^{uL} \bar{\phi}_{g,m}^{uL}}{h_m^u} \right) + \left(\Sigma_{rg,m} + \sum_{u=x,y,z} \tilde{D}_{g,m}^u \right) \cdot \bar{\phi}_{g,m} - 2\Sigma_{rg,m} \bar{\phi}_{g,m}^{(2)} = \bar{q}_{0g} \\ -\frac{2}{3} \Sigma_{rg,m} \bar{\phi}_{g,m} + \sum_{u=x,y,z} \left(\frac{-\tilde{D}_{2g,m}^{uR} \bar{\phi}_{2g,m}^{uR} - \tilde{D}_{2g,m}^{uL} \bar{\phi}_{2g,m}^{uL}}{h_m^u} \right) + \left(\tilde{\Sigma}_{trg,m} + \sum_{u=x,y,z} \tilde{D}_{2g,m}^u \right) \bar{\phi}_{g,m}^{(2)} = -\frac{2}{3} \bar{q}_{0g} \end{aligned} \quad (2.24)$$

모든 격자에 대해 식 (2.24)를 전개하면 블록형태의 선형 시스템이 만들어진다.

한편, 경계면 격자에서는 별도의 경계조건이 필요하다. 반사경 계조건일 경우 경계 중성자류가 0이 되기 때문에 계수 행렬의 원소가 0이 되기 때문에 다른 처리과정이 필요하지 않다. 반면, 진공경 계조건인 경우 인입 부분 중성자류가 0이므로 추가적인 경계 처리과정이 필요하다. 각 중성자속의 르장드로 확장을 이용해 외행 부분 중성자류와 인입 부분 중성자류가 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 J_0^+ &= \int_{-1}^0 P_1(\mu)\varphi(\mu)d\mu = \frac{1}{4}\phi_0 + \frac{1}{2}J_0 + \frac{5}{16}\phi_2 \\
 J_0^- &= \int_0^1 P_1(\mu)\varphi(\mu)d\mu = \frac{1}{4}\phi_0 - \frac{1}{2}J_0 + \frac{5}{16}\phi_2 \\
 J_2^+ &= \int_{-1}^0 P_3(\mu)\varphi(\mu)d\mu = -\frac{1}{16}\phi_0 + \frac{1}{2}J_0 + \frac{5}{16}\phi_2 \\
 J_2^- &= \int_0^1 P_3(\mu)\varphi(\mu)d\mu = -\frac{1}{16}\phi_0 - \frac{1}{2}J_0 + \frac{5}{16}\phi_2
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

여기서, $\varphi(\mu) = \sum_{l=0}^3 \frac{2l+1}{2} \phi_l P_l(\mu)$

식 (2.25)를 식 (2.20)의 중성자속 정의를 이용하여 표현한다.

$$\begin{aligned}
 J_0^+ &= \frac{1}{4}\hat{\phi} - \frac{3}{16}\phi_2 + \frac{1}{2}J_0 \\
 J_0^- &= \frac{1}{4}\hat{\phi} - \frac{3}{16}\phi_2 - \frac{1}{2}J_0 \\
 J_2^+ &= -\frac{1}{16}\hat{\phi} + \frac{7}{16}\phi_2 + \frac{1}{2}J_2 \\
 J_2^- &= -\frac{1}{16}\hat{\phi} + \frac{7}{16}\phi_2 - \frac{1}{2}J_2
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

식 (2.26)으로부터 최종적으로 진공경계조건에서의 행렬식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} J_0 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{7}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\phi} \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

제 3장 1차원 전격자 기반 SP_3 선원확장 노달법

제 2장 2절에서 전개된 다차원 SP_3 방정식에 1차원 선원확장 노달법을 적용하기 위해서는 다차원 방정식을 횡방향으로 적분을 수행한 1차원 SP_3 방정식이 필요하다. 아래 제 1절에서는 먼저 횡방향 적분을 통해 특정 u 축에 수직하는 경계면으로 빠져나가는 평균 중성자속을 횡방향 누설로 정의하여 u 축의 1차원 SP_3 방정식을 유도한다. 다음 제 2절에서는 이 횡방향 적분 SP_3 방정식을 효율적으로 푸는 선원확장 노달법의 대상을 설명하고 제 3절에서는 일차원 전격자를 대상으로 모두 연계된 SP_3 해를 구하는 방법을 설명한다.

제 1절 횡방향 적분 SP_3 방정식

먼저 x 방향의 횡방향으로 적분된 SP_3 방정식을 구해보자. 다음 식 (3.1)은 식 (2.19)의 누설항을 y 방향과 z 방향에 대해서 적분한 식이다. 편의상 양변을 면적으로 나뉜다.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h_y h_z} \int_0^{h_z} \int_0^{h_y} \nabla \cdot \bar{\mathbf{J}}_g dydz \\
&= \frac{1}{h_y h_z} \int_0^{h_z} \int_0^{h_y} \left(\frac{\partial J_{gx}}{\partial x} + \frac{\partial J_{gy}}{\partial y} + \frac{\partial J_{gz}}{\partial z} \right) dydz \\
&= \frac{1}{h_y h_z} \int_0^{h_z} \int_0^{h_y} \left(-D_{gx} \frac{\partial^2 \phi_g}{\partial x^2} + \frac{\partial J_{gy}}{\partial y} + \frac{\partial J_{gz}}{\partial z} \right) dydz \quad (3.1) \\
&= -D_{gx} \frac{\partial^2 \bar{\phi}_{gx}(x)}{\partial x^2} + \frac{\bar{J}_{gy}^r(x) - \bar{J}_{gy}^l(x)}{h_y} + \frac{\bar{J}_{gz}^r(x) - \bar{J}_{gz}^l(x)}{h_z} \\
&= -D_{gx} \frac{\partial^2 \bar{\phi}_{gx}(x)}{\partial x^2} + L_y(x) + L_z(x)
\end{aligned}$$

여기서

$$\bar{\phi}_{gx}(x) = \frac{1}{h_y h_z} \int_0^{h_z} \int_0^{h_y} \phi_g(x, y, z) dydz$$

$$\bar{J}_{gy}^r(x) = \int_0^{h_z} J_{gy}(x, h_y, z) dz, \quad \bar{J}_{gy}^l(x) = \int_0^{h_z} J_{gy}(x, 0, z) dz$$

$$\bar{J}_{gz}^r(x) = \int_0^{h_y} J_{gz}(x, y, h_z) dy, \quad \bar{J}_{gz}^l(x) = \int_0^{h_y} J_{gz}(x, y, 0) dy$$

식 (3.1)에서 최종적으로 구해진 우변의 L_u 를 u 방향의 횡방향 누설이라 정의한다. 식 (2.19)의 0차와 2차 모멘트 누설항에 위와 같은 횡방향 적분을 한 다음 횡방향 누설항을 우변으로 이항하여 x 방향의 1차원 횡방향으로 적분된 SP₃ 방정식이 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{bmatrix} -D_g \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Sigma_{rg} & -2D_g \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\frac{2}{5}D_g \frac{\partial^2}{\partial x^2} & -\frac{4}{5}D_g \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{3}{5}D_g^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Sigma_{tg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{0g} \\ \phi_{2g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{0g} - L_0 \\ -\frac{2}{5}L_0 - \frac{3}{5}L_2 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\text{단, } L_0 = \sum_{u=x,y} L_{0u}, \quad L_2 = \sum_{u=x,y} L_{2u}$$

제 2절 선원확장 노달법

제 1항 선원확장 노달법을 위한 SP₃ 방정식의 변형

선원확장 노달법은 우변의 선원항을 4차 르장드르 다항식으로 근사하여 지수함수와 4차 다항함수가 결합된 형태로 중성자속을 구하는 방법이다. 이 방법의 중성자속은 지수함수로 표현됨으로써 물질 경계주위에서 급격하게 변하는 2차 각모멘트 중성자속의 근사에 매우 효율적이다. SP₃ 방정식을 선원확장 노달법을 이용해 풀기 위해서는 식 (3.2)에 약간의 변형이 필요하다. 먼저 식 (3.2) 좌변의 2x2 행렬을 이계 미분항을 포함한 부분과 포함하지 않은 부분으로 분리하여 식 (3.3)을 얻는다. 앞으로 에너지군 첨자 g는 표현의 간결성을 위해 생략한다.

$$-\begin{bmatrix} D_0 & 2D_0 \\ \frac{2}{5}D_0 & \frac{4}{5}D_0 + \frac{3}{5}D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_0''(x) \\ \phi_2''(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & \Sigma_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_0(x) \\ \phi_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0(x) \\ q_2(x) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

르장드르 다항식은 구간 $[-1,1]$ 에서 정의되기 때문에 계산 과

정의 효율성을 위해 격자 길이 h 를 구간 $[-1,1]$ 로 치환한다.

$$\xi = \frac{2x}{h} - 1, \quad x: [0, h] \rightarrow \xi: [-1, 1] \quad (3.4)$$

식 (3.4)의 치환을 이용하여 정규치환변수 ξ 로 표기된 식 (3.5)가 유도된다.

$$-\frac{4}{h^2} \begin{bmatrix} D_0 & 2D_0 \\ \frac{2}{5}D_0 & \frac{4}{5}D_0 + \frac{3}{5}D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_0''(\xi) \\ \phi_2''(\xi) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & \Sigma_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_0(\xi) \\ \phi_2(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0(\xi) \\ q_2(\xi) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

또는 행렬식 형태로 쓸 수 있다.

$$-\mathbf{D}\Phi''(\xi) + \mathbf{A}\Phi(\xi) = \mathbf{Q}(\xi) \quad (3.6)$$

이 때 0차와 2차 모멘트 중성자류는 식 (3.7)와 식 (3.8)로 정의된다.

$$\begin{bmatrix} J_0(\xi) \\ J_2(\xi) \end{bmatrix} = -\frac{2}{h} \begin{bmatrix} D_0 & 2D_0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_0'(\xi) \\ \phi_2'(\xi) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

또는

$$\mathbf{J}(\xi) = -\mathbf{M}\Phi'(\xi) \quad (3.8)$$

다음으로 식 (3.8)의 양변에 D 의 역행렬을 곱해준다. 여기서

$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}$ 이다.

$$-\Phi''(\xi) + \tilde{\mathbf{A}}\Phi(\xi) = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{Q}(\xi) \quad (3.9)$$

이때 행렬 $\tilde{\mathbf{A}}$ 는 비대각 원소를 가지는 행렬로 0차와 2차 모멘트 중성자속에 대한 독립된 식을 만드는 것을 방해하므로 대각화 (Diagonalization)가 필요하다. 대각화를 하기 위해서 상사변환 (Similarity Transformation)을 이용하여 식 (3.9)를 변환해준다.

상사변환을 위해서는 다음과 같은 행렬 $\tilde{\mathbf{A}}$ 의 고유치 κ_1^2 , κ_2^2 와 고유벡터 $\begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} u_2 \\ 0 \end{bmatrix}$ 로 만들어진 고유행렬 $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 이 필요하다.

행렬 \mathbf{S} 를 이용해 대각화된 행렬 $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{S}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \kappa_1^2 & 0 \\ 0 & \kappa_2^2 \end{bmatrix}$ 을 만든다.

상사변환을 하면 다음과 같은 식 (3.10)이 구해진다. 상사변환을 이용해 변형된 수식을 사용할 경우 계수가 약간 복잡해지는 단점은 있지만 선원확장 노달법의 적용이 쉽고 구속조건을 간단한 변환식을 통해 그대로 적용할 수 있다는 장점이 있다.

$$-\mathbf{S}^{-1}\Phi''(\xi) + \mathbf{\Gamma}\mathbf{S}^{-1}\Phi(\xi) = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{Q}(\xi) \quad (3.10)$$

식 (3.10)을 모달 공간에서의 표현으로 바꾸어 2계 미분 방정식이 유도된다. 이때 모달 플렉스를 $\Psi = \mathbf{S}^{-1}\Phi$ 로 정의한다.

$$-\begin{bmatrix} \psi_1''(\xi) \\ \psi_2''(\xi) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \kappa_1^2 & 0 \\ 0 & \kappa_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1(\xi) \\ \psi_2(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{q}_1(\xi) \\ \hat{q}_2(\xi) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

또는

$$-\Psi''(\xi) + \Gamma\Psi(\xi) = \hat{Q}(\xi) \quad (3.12)$$

$$\text{여기서, } \Psi(\xi) = \mathbf{S}^{-1}\Phi(\xi) = \begin{bmatrix} \psi_1(\xi) \\ \psi_2(\xi) \end{bmatrix}, \quad \hat{Q}(\xi) = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{Q}(\xi) = \begin{bmatrix} \hat{q}_1(\xi) \\ \hat{q}_2(\xi) \end{bmatrix}$$

제 2항 선원확장 노달법에 의한 SP_3 방정식의 해법

식 (3.12)는 4차 르장드르 다항식을 우변으로 가지는 이계 선형 비제차 상미분 방정식으로 두 모달플렉스가 독립된 형태로 나타나있다. 이 방정식은 지수함수 형태의 동차해(homogeneous solution)와 다항함수 형태의 특수해(particular solution)를 가진다. 식 (3.12)의 선원확장 노달법에 의한 해석하는 다음과 같다.

$$\Psi(\xi) = \mathbf{C}_H^K(\xi)\mathbf{a} + \mathbf{S}_H^K(\xi)\mathbf{b} + \sum_{i=0}^4 P_i(\xi)\mathbf{c}_i \quad (3.13)$$

여기서,

$$\mathbf{C}_H^K(\xi) = \begin{bmatrix} \cosh(\kappa_1\xi) & 0 \\ 0 & \cosh(\kappa_2\xi) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_H^K(\xi) = \begin{bmatrix} \sinh(\kappa_1\xi) & 0 \\ 0 & \sinh(\kappa_2\xi) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_i = \begin{bmatrix} c_i^0 \\ c_i^2 \end{bmatrix}, \quad P_i \text{는 } i\text{차 르장드르 다항식이다.}$$

동차해의 계수 \mathbf{a} 와 \mathbf{b} 는 전격자 방식으로 구할 수 있는데 내부 격자 경계 면에서의 각 모멘트의 중성자속과 중성자류의 연속성과 양 끝 경계 격자에서 알베도(Albedo) 경계조건을 이용한다. 특수해의 계수 \mathbf{c}_i 는 선원항의 계수만으로 계수 비교법을 이용해 구할 수 있다.

제 3항 횡방향 누설항 근사

여기서 식 (3.5)는 횡방향 누설항을 포함하고 있다. 횡방향 누설항은 2차 르장드르 다항식으로 다음 식과 같이 근사가 가능하다.

$$L_m^i(\xi) = c_0 P_0(\xi) + c_1 P_1(\xi) + c_2 P_2(\xi) \quad (3.14)$$

누설항의 2차 근사는 해당 격자와 좌우 인접 격자의 평균 누설값을 보존하는 방법을 이용한다. 식 (3.14)의 3개의 변수를 구하려면 해당 격자의 평균 누설값과 좌우 격자의 평균 누설값 이러한 총 3개의 구속 조건이 필요하다.

$$\begin{aligned} \bar{L}_m^{i-1} &= \frac{1}{2} \int_{-3}^{-1} L_m^i(\xi) d\xi \\ \bar{L}_m^i &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 L_m^i(\xi) d\xi \\ \bar{L}_m^{i+1} &= \frac{1}{2} \int_1^3 L_m^i(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (3.15)$$

3개의 계수는 위의 식 (3.15)과 같이 각 격자에서의 누설항의 적분값이 평균 누설값과 같다는 조건을 이용하여 구할 수 있으며 각 계수는 3개의 격자의 평균 누설값의 함수로 표현된다.

양 끝 경계 격자에서는 1개의 인접한 격자를 가지므로 경계조건에 따라 가상의 격자를 만들어 주어야 한다. 먼저 반사 경계 조건에서는 같은 평균 누설값을 가지는 가상의 격자를 가정하고 진공 경계 조건에서는 같은 평균 누설값을 가지나 반대 부호를 가지는 가상의 격자를 가정한다.

이러한 조건을 이용하면 누설항의 계수는 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} c_0 &= \bar{L}_m^i \\ c_1 &= \frac{1}{4}(\bar{L}_m^{i+1} - \bar{L}_m^{i-1}) \\ c_2 &= \frac{1}{12}(\bar{L}_m^{i+1} + 2\bar{L}_m^i - \bar{L}_m^{i-1}) \end{aligned} \quad (3.16)$$

제 4항 특수해 계수의 결정

선원확장 노달법에서는 선원항을 4차 르장드르 다항식을 이용해서 식 (3.5)의 우변항을 식 (3.17)와 같이 근사한다.

$$\mathbf{q}(\xi) = \begin{bmatrix} q_0(\xi) \\ q_2(\xi) \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^4 \begin{bmatrix} q_i^0 \\ q_i^2 \end{bmatrix} P_i(\xi) \quad (3.17)$$

해석해는 모달 공간에서 구해지기 때문에 고유행렬 S의 역행렬이 곱해진 모달 공간에서의 선원항을 이용한다.

$$\hat{\mathbf{q}}(\xi) = \begin{bmatrix} \hat{q}_0(\xi) \\ \hat{q}_2(\xi) \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^4 \begin{bmatrix} \hat{q}_i^0 \\ \hat{q}_i^2 \end{bmatrix} P_i(\xi)$$

식 (3.13) 우변의 마지막 항으로 표현되는 특수해를 식 (3.11)

의 양변에 대입하여 계수를 비교하여 다음과 같은 특수해의 계수를 구할 수 있다. 특수해의 계수는 선원항의 계수와 고유치의 값으로만 표현되므로 각 격자 별로 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 c_0^m &= \frac{\hat{q}_0^m (\kappa_m)^4 + 3\hat{q}_2^m (\kappa_m)^2 + 5\hat{q}_4^m [21 + 2(\kappa_m)^2]}{(\kappa_m)^6} \\
 c_1^m &= \frac{\hat{q}_1^m (\kappa_m)^2 + 15\hat{q}_3^m}{(\kappa_m)^4}, \quad c_2^m = \frac{\hat{q}_2^m (\kappa_m)^2 + 35\hat{q}_4^m}{(\kappa_m)^4} \\
 c_3^m &= \frac{\hat{q}_3^m}{(\kappa_m)^2}, \quad c_4^m = \frac{\hat{q}_4^m}{(\kappa_m)^2}
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

제 3절 전격자 방식의 동차해 계수 결정

제 4항에서 구한 특수해의 계수들을 식 (3.13)에 대입하게 되면 이제 각 격자당 4개의 미정계수가 남게 된다. 이들 계수의 결정을 위해서는 각 격자당 총 4개의 제약 조건이 필요하다.

전격자 방식은 1차원 상의 모든 격자의 경계면에서의 모멘트와 모멘트류의 연속 조건과 양 끝 경계 격자에서의 알베도 경계 조건을 이용하여 1차원상의 전격자의 해를 동시에 구하는 방법이다. 모든 격자에 대해 이러한 구속 조건을 적용하면 인접한 노드의 계수가 결합된 1개의 선형 시스템이 유도된다. 이 선형 시스템은 풀면 모든 격자의 동차해 계수들을 한번에 구할 수 있다.

이 때 경계면에서의 연속 조건과 알베도 경계 조건은 모달 공간에서의 모달 플럭스에 적용되는 것이 아닌 원래 공간에서의 물리

적 의미를 가지는 모멘트와 모멘트류에 대해 적용되어야 한다. 원래 공간에서의 모멘트와 모멘트류는 식 (3.13)에 계수 행렬 \mathbf{S} 를 곱해서 다음 식 (3.19)과 같이 표현된다.

$$\Phi(\xi) = \mathbf{S} \mathbf{C}_H^K(\xi) \mathbf{a} + \mathbf{S} \mathbf{S}_H^K(\xi) \mathbf{b} + \sum_{i=0}^4 P_i(\xi) \mathbf{S} \mathbf{c}_i \quad (3.19)$$

식 (3.19)를 이용하면 격자 내에서 오른쪽 경계($\xi=1$)과 왼쪽 경계($\xi=-1$)의 중성자속이 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \Phi(1) &= \mathbf{S} \mathbf{C}_H^K \mathbf{a} + \mathbf{S} \mathbf{S}_H^K \mathbf{b} + \sum_{i=0}^4 P_i(1) \mathbf{S} \mathbf{c}_i \\ \Phi(-1) &= \mathbf{S} \mathbf{C}_H^K \mathbf{a} - \mathbf{S} \mathbf{S}_H^K \mathbf{b} + \sum_{i=0}^4 P_i(-1) \mathbf{S} \mathbf{c}_i \end{aligned} \quad (3.20)$$

이다. 간단한 표기를 위해 $\mathbf{C}_H^K = \mathbf{C}_H^K(1)$ 와 $\mathbf{S}_H^K = \mathbf{S}_H^K(1)$ 를 정의한다.

다음으로 중성자류는 식 (3.8)의 관계식을 이용하여 구해진다.

$$\mathbf{J}(\xi) = -\mathbf{M}\Phi'(\xi) = -\mathbf{M} \mathbf{S} \mathbf{K} \mathbf{C}_H^K(\xi) \mathbf{a} - \mathbf{M} \mathbf{S} \mathbf{K} \mathbf{S}_H^K(\xi) \mathbf{b} - \sum_{i=0}^4 P_i'(\xi) \mathbf{M} \mathbf{S} \mathbf{c}_i \quad (3.21)$$

여기서, $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{bmatrix}$ 이다.

마찬가지로 오른쪽과 왼쪽 경계의 중성자류 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathbf{J}(1) &= -\mathbf{M}\mathbf{S}\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{K}}\mathbf{a} - \mathbf{M}\mathbf{S}\mathbf{K}\mathbf{S}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{K}}\mathbf{b} - \sum_{i=0}^4 P'_i(1)\mathbf{M}\mathbf{S}\mathbf{c}_i \\ \mathbf{J}(-1) &= -\mathbf{M}\mathbf{S}\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{K}}\mathbf{a} + \mathbf{M}\mathbf{S}\mathbf{K}\mathbf{S}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{K}}\mathbf{b} - \sum_{i=0}^4 P'_i(-1)\mathbf{M}\mathbf{S}\mathbf{c}_i\end{aligned}\quad (3.22)$$

수식의 간결성을 위해 다음 표기법을 정의한다.

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathbf{P}}(\xi) &= \sum_{i=0}^4 P_i(\xi)\mathbf{S}\mathbf{c}_i \\ \mathbf{J}_{\mathbf{P}}(\xi) &= -\sum_{i=0}^4 P'_i(\xi)\mathbf{M}\mathbf{S}\mathbf{c}_i\end{aligned}\quad (3.23)$$

제 1항 중성자속과 중성자류 연속 조건

먼저 중성자속의 연속 조건을 이용한다. 1차원 상에서 이웃한 두 격자(i 번째와 $i+1$ 번째)에서 왼쪽 노드 오른쪽 경계에서의 중성자속이 오른쪽 노드의 왼쪽 경계에서의 중성자속이 같음을 이용한다. 수식으로 표현하면 식 (3.24)와 같다.

$$\Phi_L(1) = \Phi_R(-1) \quad (3.24)$$

식 (3.24)에 식 (3.20)를 대입하여 미정계수 a 와 b 에 대해 다음과 같은 관계식을 정리한다.

$$\begin{aligned}-\mathbf{S}_i\mathbf{C}_{\mathbf{H},i}^{\mathbf{K}}a_i - \mathbf{S}_i\mathbf{S}_{\mathbf{H},i}^{\mathbf{K}}b_i + \mathbf{S}_{i+1}\mathbf{C}_{\mathbf{H},i+1}^{\mathbf{K}}a_{i+1} - \mathbf{S}_{i+1}\mathbf{S}_{\mathbf{H},i+1}^{\mathbf{K}}b_{i+1} \\ = (\Phi_{\mathbf{P},i-1}(1) - \Phi_{\mathbf{P},i}(-1)) = \gamma_{\phi,i}\end{aligned}\quad (3.25)$$

이 때 수식의 우변은 앞에서 구한 특수해의 계수와 계수 행렬로 구성되어있는 상수항이다.

중성자류 역시 같은 방법으로 연속 조건을 수식으로 표현한다.

$$J_L(1) = J_R(-1) \quad (3.26)$$

식 (3.26)에 식(3.22)를 대입하여 마찬가지로 미정계수 a와 b에 대해 다음과 같은 관계식으로 정리한다.

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}_i \mathbf{S}_i \mathbf{K}_i \mathbf{S}_{\mathbf{H},i}^{\mathbf{K}} a_i + \mathbf{M}_i \mathbf{S}_i \mathbf{K}_i \mathbf{C}_{\mathbf{H},i}^{\mathbf{K}} b_i + \mathbf{M}_{i+1} \mathbf{S}_{i+1} \mathbf{K}_{i+1} \mathbf{S}_{\mathbf{H},i+1}^{\mathbf{K}} a_{i+1} - \mathbf{M}_{i+1} \mathbf{S}_{i+1} \mathbf{K}_{i+1} \mathbf{C}_{\mathbf{H},i+1}^{\mathbf{K}} b_{i+1} \\ & = (\mathbf{J}_{\mathbf{P},i-1}(1) - \mathbf{J}_{\mathbf{P},i}(-1)) = \gamma_{J,i} \end{aligned} \quad (3.27)$$

이 수식 역시 우변은 특수해에 의한 모멘트류의 영향을 나타내는 항으로써 특수해의 계수와 계수행렬, 확산 계수 행렬로 구성되어있는 상수항이다.

제 2항 알베도 경계 조건

양 끝 경계 격자의 외각 경계면에서는 1항에서 설명한 연속 조건을 적용할 수 없기 때문에 알베도 경계 조건을 이용한다. 알베도 경계 조건은 다음과 같은 경계면 중성자속과 중성자류의 관계로 나타낼 수 있다.

$$J(a) = \alpha \Phi(a) \quad (a = -1 \text{ or } 1) \quad (3.28)$$

여기서는 격자의 우측 경계면에서의 알베도 조건이 부과될 경

우에 대하여 유도를 해본다. 좌측 경계면에서도 같은 방법을 통해 유도할 수 있다.

α 는 알베도 행렬로 반사 경계 조건에서는 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 로 정의되고

진공 경계 조건에서는 $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{8} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{8} \end{bmatrix}$ 로 정의된다.

식 (3.28)에 식 (3.20)과 식 (3.22)를 대입하면 좌측 경계면에서는 관계식 (3.29)가 유도되고 우측 경계면에서는 관계식 (3.30)가 유도된다. 아래첨자 1과 n은 격자 순서를 나타낸다.

$$\begin{aligned} & -[\mathbf{M}_1 \mathbf{S}_1 \mathbf{K}_1 \mathbf{S}_H^K + \alpha_L \mathbf{S}_1 \mathbf{C}_H^K] a_1 + [\alpha_L \mathbf{S}_1 \mathbf{S}_H^K + \mathbf{M}_1 \mathbf{S}_1 \mathbf{K}_1 \mathbf{C}_H^K] b_1 \\ & = \mathbf{J}_p(-1) + \alpha \Phi_p(-1) = \gamma_{Bot} \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} & [\mathbf{M}_n \mathbf{S}_n \mathbf{K}_n \mathbf{S}_{H,n}^K + \alpha_R \mathbf{S}_n \mathbf{C}_{H,n}^K] a_n + [\alpha_R \mathbf{S}_n \mathbf{S}_{H,n}^K + \mathbf{M}_n \mathbf{S}_n \mathbf{K}_n \mathbf{C}_{H,n}^K] b_n \\ & = \mathbf{J}_p(1) - \alpha \Phi_p(1) = \gamma_{Top} \end{aligned} \quad (3.30)$$

제 3항 계수 행렬의 구성

제 1항과 2항에서 유도한 관계식을 모든 격자에 대해 동시에 적용하면 격자내의 미정 계수의 수와 방정식의 수가 동일하게 구해진다. 이 결과 미정 계수를 결정하기 위한 식 (3.31)과 같이 $2N \times 2N$ 크기를 가지는 선형계가 만들어진다. 좌변 행렬의 각 요소들은 2×2 행렬이며 좌변과 우변 벡터의 각 요소들은 2×1 행렬이다. 우변의 모든 요소들은 a, b와 무관하므로 이 선형계는 가우스 소거법

위의 선형계를 풀기 위해서는 앞에서 가정한 것과 같은 4차 르장드르 다항식으로 전개된 선원항이다. 이는 격자내에서 4차로 근사된 모멘트 공간 분포를 통해서 결정된다.

$$\Phi_{4th}(\xi) = \sum_{i=0}^4 \Phi_{4th,i} P_i(\xi) \quad (3.32)$$

4차 르장드르 다항식으로 전개된 모멘트 공간 분포는 이전 반복 계산에서 결정된 모멘트의 4차 다항식과 지수함수의 결합으로 만들어진 공간 분포를 르장드르 다항식이 지닌 직교성을 이용하여 결정할 수 있다. 이를 이용하면 다음과 같은 4차 계수들이 구해진다.

$$\begin{aligned} \Phi_{4th,0} &= \mathbf{S} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{S}_H^K \mathbf{c}_0 + \mathbf{S} \mathbf{c}_0 \\ \Phi_{4th,1} &= 3\mathbf{S}[\mathbf{K}^{-1} \mathbf{C}_H^K + (\mathbf{K}^{-1})^2 \mathbf{S}_H^K] \mathbf{b} + \mathbf{S} \mathbf{c}_1 \\ \Phi_{4th,2} &= 5\mathbf{S}[3\mathbf{K}^{-1} \mathbf{C}_H^K + (\mathbf{K}^{-1} + 3(\mathbf{K}^{-1})^2) \mathbf{S}_H^K] \mathbf{a} + \mathbf{S} \mathbf{c}_2 \\ \Phi_{4th,3} &= 7\mathbf{S}[(\mathbf{K}^{-1} + 15(\mathbf{K}^{-1})^3) \mathbf{C}_H^K + (6(\mathbf{K}^{-1})^2 + 15(\mathbf{K}^{-1})^4) \mathbf{S}_H^K] \mathbf{b} + \mathbf{S} \mathbf{c}_3 \\ \Phi_{4th,4} &= 8\mathbf{S}[(10(\mathbf{K}^{-1})^2 + 105(\mathbf{K}^{-1})^4) \mathbf{C}_H^K - (\mathbf{K}^{-1} + 15(\mathbf{K}^{-1})^3 + 105(\mathbf{K}^{-1})^5) \mathbf{S}_H^K] \mathbf{a} + \mathbf{S} \mathbf{c}_4 \end{aligned} \quad (3.33)$$

제 4장 방향교차 계산 체계

이 장에서는 먼저 3차원 노심 해석을 위해 1차원 전격자 기반의 선원확장 노달법을 이용하는 전략인 1차원 방향 교차 방법을 제 1절에서 기술하고 제 2절에서는 수렴속도를 향상시키기 위해 P_1 기반 CMFD와 결합한 1차원 방향 교차 방법을 설명한다.

제 1절 1차원 방향교차 계산 체계

제 3장에서 유도한 전격자 기반의 선원확장 노달 해법은 1차원 상의 SP_3 방정식의 해를 구하는 방법이다. 횡방향으로 적분된 1차원 SP_3 방정식에는 다른 방향의 횡방향 누설항도 고려되어있기 때문에 다른 방향의 1차원 문제와 연결되어 있다. 각 방향에 대해 독립된 각각의 1차원 문제를 형성하여 선원확장 노달 해법을 구한다 음 횡방향 누설값을 갱신하여 다른 방향 문제로 전달함으로써 다차원 노심 계산이 가능해진다. 3차원 문제의 경우 한 격자에 대해 3방향의 계산이 수행되어 총 6개의 경계면에서 0차와 2차의 모멘트와 모멘트류가 구해진다. 또한 각 방향의 0차와 2차의 모멘트의 격자 내 분포도 구할 수 있는데 이는 다음 노달 반복 계산을 위해 저장한 다음 계산 단계의 초기 모멘트 분포로 다시 사용할 수 있다.

한편 방향 교차 방법은 3차원 문제의 경우 같은 격자에 대해 3번의 노달 계산을 하기 때문에 각 방향 별로 다른 값을 가지는 평균 중성자속이 구해진다. 고유치 계산을 위해서는 한 격자를 대표하

는 1개의 평균 중성자속이 필요하다. 이는 구해진 6개의 경계 면에서의 중성자류를 이용하여 노달 균형 방정식(Nodal balance equation : NBE)을 풀어 평균 중성자 속을 갱신하고 이를 통해 핵분열 선원항과 유효 증배 계수를 구해준다. 제 1항에서는 노달 균형 방정식을 유도하고 수치해법을 설명하고 제 2항에서는 노달 균형 방정식을 이용한 방향교차 방법을 상세히 설명한다.

제 1항 노달 균형 방정식

노달 균형 방정식은 식 (2.19)의 첫번째 방정식에 체적에 대해 적분한 다음 부피를 나눠주어 구할 수 있다.

$$\frac{1}{V} \int_V \left(\nabla \cdot J_{0g} + \Sigma_{rg} \phi_{0g} = \frac{1}{k_{eff}} \chi_g \psi + \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^G \Sigma_{sg'} \phi_{0g} \right) dV \quad (4.1)$$

여기서 $J_{0g} = -D_{0g} \nabla \phi_{0g} - 2D_0 \nabla \phi_{2g}$ 이다.

식 좌변의 누설항을 식 (3.1)과 같은 방법으로(단, 체적에 대해서) 전개해주면 식 와 같은 노달 균형 방정식을 유도할 수 있다.

$$\sum_{u=x,y,z} \frac{J_{g,u}^r - J_{g,u}^l}{h_u} + \Sigma_{rg} \bar{\phi}_g = \frac{1}{k_{eff}} \chi_g \psi + \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^G \Sigma_{sg'} \bar{\phi}_{g'} \quad (4.2)$$

식 좌변의 누설항은 노달 계산으로부터 구해진다. 이 식에서부터 구하고자 하는 값은 평균 중성자속이다. 위 식은 각각의 격자 내에서 성립하는 관계식으로 인접 격자와의 관계로 구해야하는 누설항이 노달 계산을 이용해 구해졌기 때문에 여러 격자가 결합된 선

형계를 만들지 않고도 해를 구할 수 있다. 좌변의 누설항을 이항함으로써 $Ax=b$ 형태의 1차 방정식 형태로 식을 변형시킬 수 있다. 즉 식의 우변을 이미 구해진 값으로 구성해야 한다.

우변의 핵분열 선원항은 노달 계산에 사용한 이전 반복 계산에서 구해진 값을 사용한다. 노달 계산은 고정 선원 문제로 모멘트와 모멘트류의 분포만 갱신하고 핵분열 선원항이 갱신하지 않았기 때문이다.

그러나 산란선원항이 모든 군의 평균 중성자속을 포함하고 있다. 이런 문제를 해결하기 위해서는 상향 산란 반복 계산(up-scattering iteration)을 도입하였다. 다군 문제에서 일반적으로 가장 높은 에너지군인 1군은 상향 산란이 발생하지 않고 에너지가 낮은 영역에서만 상향 산란이 일어나는데 이때 상향 산란이 처음 일어나는 에너지군을 g_{up} 군이라 한다. 먼저 1군부터 G군까지 차례로 상향 산란이 없다고 가정하고 노달 균형 방정식을 풀어서 각 군의 평균 중성자속을 구한다. 구해진 각 군의 평균 중성자속을 이용해 다시 g_{up} 군부터 G군까지 계산을 반복함으로써 최종적으로 각 군의 평균 중성자속을 구해준다. 모든 격자의 모든 에너지 군에서의 평균 중성자속을 구한 다음 이를 이용해 유효 증배 계수와 핵분열 선원항을 갱신한다.

제 2항 반복 계산 체계

먼저 1차원 방향 교차 방법을 이용해 모든 방향에 대한 1차원 문제에 대해 1차원 전격자 SP_3 선원확장 노달법을 적용해서 모든

격자의 경계면의 모멘트류 정보를 구한다. 그리고 0차와 2차 모멘트류를 이용해 횡방향 누설항을 구한다. 이 때 x , y , z 방향이 차례로 풀리기 때문에 y 방향 문제를 구성할 때 갱신된 x 방향의 누설항을 이용하고 마찬가지로 z 방향 문제를 구성할 때 갱신된 x 방향과 y 방향의 누설항을 이용한다.

그림 4-1은 노달 균형 방정식을 이용한 방향교차 계산 체계를 도식화한 그림이다. 1절의 방법과의 차이점은 0차와 2차 모멘트 누설항을 모두 노달 계산을 통해 갱신하고 노달 균형 방정식을 푸는 것이다.

하지만 이 방법은 노달 균형 방정식을 풀 때 초기의 잘못된 구해진 누설항에 의해 평균 중성자속이 음의 값을 가지는 현상이 나타나기 때문에 이를 방지하기 위해 Under-Relaxation 방법을 이용해 이전 노달 해법에서 구했던 누설항과 가중 평균을 내어 횡방향 누설항을 갱신함으로써 초기에 평균 중성자속이 음의 값을 가지지 않게 한다.

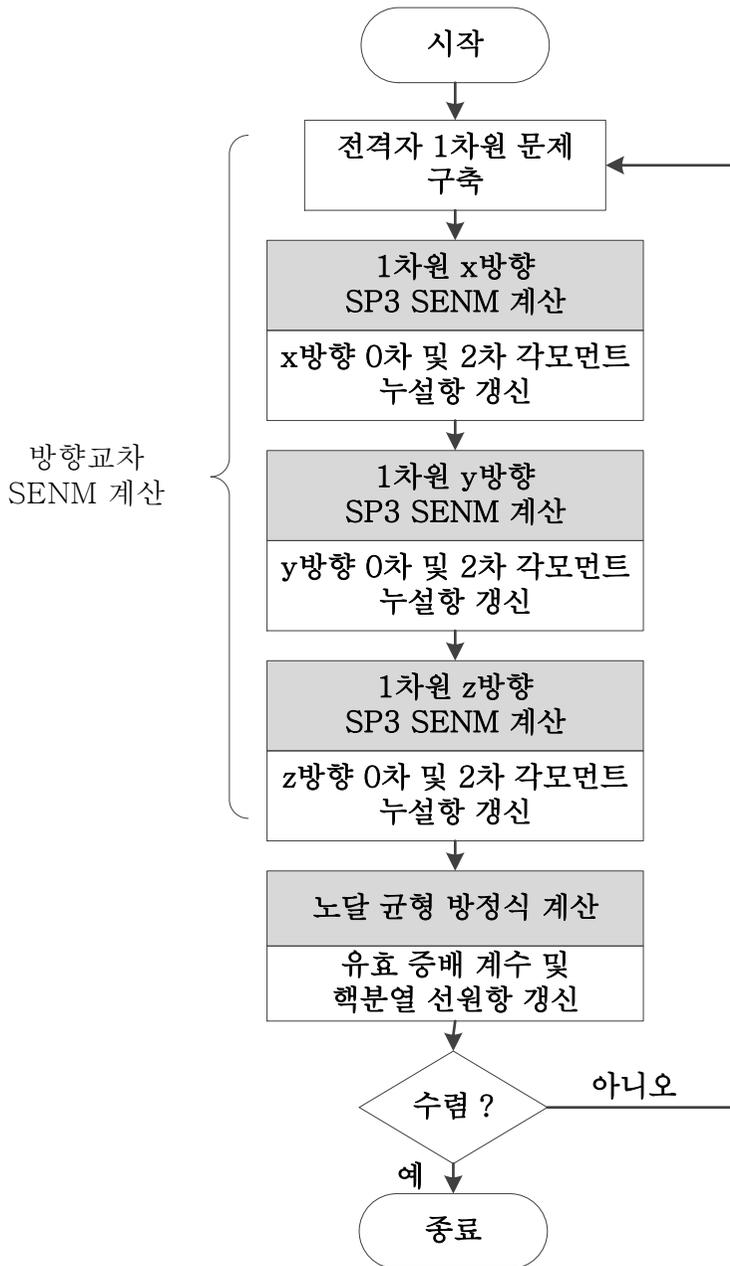


그림 4-1. 방향 교차법을 이용한 노달 반복 계산 체계

제 2절 P_1 기반의 CMFD를 이용한 방향 교차 계산 체계

제 1절의 방향교차 해법의 반복적 적용만으로도 유효 증배 계수 및 핵분열 선원항을 구할 수 있지만 그 수렴속도가 매우 느리기 때문에 CMFD와의 결합을 통해 수렴을 가속시키는 방법을 생각할 수 있다. SP_3 노달 방법과의 결합을 위해서는 2차 모멘트 중성자속도 변수로 가지는 SP_3 에 기반한 CMFD 체제를 구축해야 하지만 다음과 같은 2가지 어려움이 존재하기 때문에 구축하지 않는다. 첫 번째는 SP_3 기반 CMFD 계산 방식의 복잡성 때문이다. 두 번째는 2차 모멘트 항으로 인해 내재된 불안전성 때문이다. 2차 모멘트 중성자속은 0차 모멘트 중성자속에 비해 크기가 매우 작으며 경계면에서의 변화가 심하다. 또한 양의 값만 가지는 0차 모멘트 중성자속과는 달리 음의 값도 가진다. 이러한 2차 모멘트 중성자속의 특성 때문에 식 (2.1)의 분모값이 분자에 비해 매우 작아져서 2차 모멘트에 대한 보정인자가 비정상적으로 큰 값을 가질 수도 있기 때문에 CMFD 체제의 안전성을 보장할 수 없게 된다.

따라서 본 연구에서는 2차 모멘트항을 포함하지 않는 P_1 기반의 CMFD 체제를 이용한다. 고안하였다. 하지만 P_1 CMFD는 0차 각모멘트만을 포함하기 때문에 방향 교차 SENM 노달계산에 필요한 2차 각모멘트 정보를 생성하지 못하므로 2차 각모멘트 정보는 방향교차 SENM 노달계산에서 자체적으로 갱신하여 사용한다.

이 절의 제 1항에서는 소격겨자 유한 차분법을 소개하고 제 2

항에서는 CMFD를 이용한 반복 계산 체계를 설명한다.

제 1항 소격격자 유한 차분법(CMFD)

통합 노달 계산을 위해 소격격자 유한 차분계산은 노달 계산으로부터 구한 중성자류와 유한차분 계산을 통해 구한 중성자류가 같게 만들기위해 중성자류에 보정항을 추가하여 유한 차분 계산을 수행하는 방법이다. CMFD 계산에서의 면 중성자류는 보정항을 포함하여 다음 식 과 같이 주어진다. 에너지 균 침자는 생략한다.

$$J_{CMFD} = -\tilde{D}_{i-1}(\bar{\phi}_i - \bar{\phi}_{i-1}) + \hat{D}_{i-1}(\bar{\phi}_i + \bar{\phi}_{i-1}) \quad (4.3)$$

우변의 \hat{D} 은 보정인자로 노달 계산을 통해 구해진 면 중성자류가 노달 계산을 통한 면 중성자류와 같다는 조건을 이용해서 식 로 정의된다.

$$\hat{D}_{i-1}^u = \frac{J_g^{Nodal} + \tilde{D}_{g,i-1}^u(\bar{\phi}_{g,i}^u - \bar{\phi}_{g,i-1}^u)}{(\bar{\phi}_{g,i}^u + \bar{\phi}_{g,i-1}^u)} \quad (4.4)$$

노달 계산이 각 방향에 대해 각각 수행되기 때문에 보정인자는 각 방향의 1차원 문제 계산이 끝난 다음 갱신된다. 보정인자를 이용해 3차원 CMFD 계산 체계를 구성한다. 보정인자 \hat{D} 의 도입으로 인해 유한 차분 해법에서 구축한 행렬식에서 좌변의 행렬이 비대칭 행렬이 된다. 이러한 비대칭 행렬식을 풀기 위한 수치 해법으로 BiCGSTAB(Bi-Conjugate Gradient Stabilized)을 사용하였고 고유치 문제를 풀기 위해서는 누승법(Power Method)을 사용한다

제 2항 반복 계산 체계

방향 교차 SENM 노달 계산은 제 1절과 동일한 방법으로 행해진다. 1차원 SENM 노달 계산이 모두 끝난 다음에는 계산된 모든 면의 면 중성자류를 이용해 보정인자를 계산하고 3차원 CMFD 계산을 수행하여 평균 중성자속과 유효 증배 계수를 구하고 0차 누설항을 갱신한다. 다음 노달 계산을 할 때에는 2차 누설항과 각 모멘트의 공간분포는 이전 노달 반복 계산에서 구해진 값을 사용한다.

그림 4-2은 P_1 CMFD와 결합한 방향 교차 계산 체계를 도식화한 그림이다.

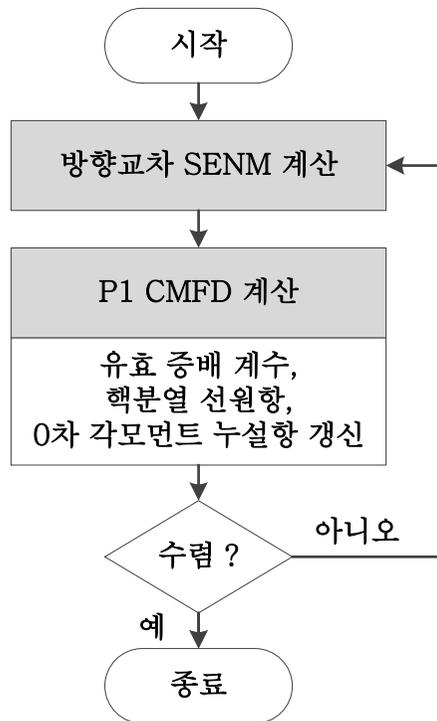


그림 4-2. P_1 CMFD를 이용한 방향 교차 SENM 계산 체계

제 5장 수치 계산 결과

정방형 격자 구조를 가지는 다차원 노심 벤치마크 문제를 이용해 방향교차 계산 체계를 이용한 SP₃ 선원확장 노달 해법의 건전성을 평가하였다.

먼저 SP₃ 선원확장 노달법만을 이용해 구한 해와 CMFD를 이용한 방향교차 방법을 이용해 구한 결과가 일치함을 확인해보았다. 모든 2차원 및 3차원 벤치마크 문제에 대해서 정확히 같은 값을 가지는 것을 확인하였으나 결과를 별도로 기재하지는 않는다.

개발한 계산 모듈을 2차원 벤치마크 문제를 이용해 검증하기 위해서 미세격자를 이용한 SP₃ 유한차분 해법을 이용해 표준해를 구하였다. 이 때 유한 차분 해법이 가지는 격자의 크기가 반으로 줄어들 때 오차 감소 인자는 1/4로 줄어드는 특성을 이용한다. 외삽법을 이용해 격자의 크기가 무한히 작을 때의 해를 구할 수 있다. 다음 식은 유한 차분법을 이용하여 표준해를 구하는 수식이다. 이 때 \square 은 반복 횟수를 나타낸다.

$$k_{eff}^* = \frac{4}{3}k^{(l)} - \frac{1}{3}k^{(l-1)} \quad (5.1)$$

한편 3차원 벤치마크 문제는 축방향의 크기가 수백 cm에 달하므로 미세격자를 이용하여 표준해를 구하는 것이 어렵다고 판단하여 서울대에서 개발한 몬테칼로 코드인 McCARD [7] 결과를 표준해로 삼았다.

CMFD 체제를 이용한 방향 교차법과 CMFD 계산을 수행하지 않은 경우와 노달 반복 횟수를 비교하여 CMFD 체제를 이용한 방향 교차법의 우수성을 확인하였다.

이 장의 제 1절에서는 P_1 해법과 SP_3 해법을 McCARD를 이용한 중성자 수송 방정식의 표준해와 비교함으로써 SP_3 해법의 우수성을 검증한다. 제 2절에서는 2차원 벤치마크 문제를 이용한 계산 모듈의 건전성을 평가하였고 제 3절에서는 3차원 벤치마크 문제를 이용한 계산 모듈의 건전성을 평가하였다. 마지막으로 제 4절에서는 CMFD 가속 체제를 이용한 방향 교차법의 가속 성능을 평가하였다..

제 1절 SP_3 해법의 우수성 검증

2차원 벤치마크 문제들을 이용해 SP_3 해법이 가지는 정확성을 P_1 해법과 비교해 확인한다. P_1 해법과 SP_3 해법은 미세 격자를 이용한 유한 차분법을 이용하여 구했으며 기준이 되는 표준해는 중성자 수송 방정식을 푸는 몬테칼로 코드인 McCARD를 이용해 계산한다. McCARD를 이용해 100만개 중성자로 총 800 cycle 가운데 500 유효 cycle 계산을 수행하였다. 각 문제마다 약간의 차이는 있지만 표준편차는 2~4 pcm이다.

2차원 벤치마크 문제들은 열중성자로 문제인 Kaist4G 문제[8], IAEA 문제[9], KOEBERG 문제[10]와 고속로 문제인 TAKEDA model I, II, III[11]의 제어봉이 인출된 모델과 삽입된 모델 그리고 MOX 연료를 포함하는 C5G7 문제[12], MOX Transient 4G 문제, MOX Transient 8G 문제[13]로 구성되었다.

표 5-1에는 2차원 벤치마크 문제의 몬테칼로 기준해의 유효중배계수(k-effective)와 오차를 pcm 단위로 나타내었다. 모든 문제에 대해 SP₃ 결과가 P₁ 결과보다 뛰어난 것을 알 수 있다. 특히 SP₃ 해법은 중성자 수송 효과가 큰 고속로 문제와 MOX연료를 포함하여 경계면에서의 중성자속의 구배가 심한 문제에서 P₁ 해법에 비해 뛰어난 결과를 보여준다. 고속로 문제의 경우 SP₃ 해법에 의해서 고유치 오차가 최대 1700pcm, 집합체 출력오차가 최대 2.3% 감소함을 알 수 있다.

표 5-1. 2차원 벤치마크 문제의 기준해와 SP₃와 P₁ 해법의 유효 증배 계수 오차

벤치마크 문제	몬테칼로 기준해	오차 [pcm]	
		P ₁	SP ₃
KAIST 4G	1.06795	-104	13
IAEA	1.03454	-47	-5
KOEBERG	1.04027	-50	4
TAKEDA I Rod In	1.10494	-1863	-100
TAKEDA I Rod Out	1.12941	-1858	-409
TAKEDA II Rod In	1.03090	-469	-63
TAKEDA II Rod Out	1.06381	68	-18
TAKEDA III Rod In	0.86259	-1370	-168
TAKEDA III Rod Out	0.92489	-799	-80
C5G7 MOX	1.19361	-121	-5
MOX Transient 4G	0.97443	-198	-15
MOX Transient 8G	0.98896	-200	-11

표 5-2. 2차원 벤치마크 문제의 기준해와 SP₃와 P₁ 해법의 출력 오차

벤치마크 문제	집합체 출력 오차 [%]		최대 출력 오차 [%]	
	P ₁	SP ₃	P ₁	SP ₃
KAIST 4G	1.32	0.18	1.92	0.18
IAEA	0.73	0.19	1.92	0.38
KOEBERG	3.90	3.77	13.08	11.54
TAKEDA I Rod In	5.60	5.39	11.97	10.92
TAKEDA I Rod Out	1.44	0.21	1.36	0.38
TAKEDA II Rod In	0.59	0.24	1.46	1.03
TAKEDA II Rod Out	0.52	0.15	1.24	0.76
TAKEDA III Rod In	1.54	0.59	3.39	1.86
TAKEDA III Rod Out	1.37	0.42	3.41	1.82
C5G7 MOX	0.43	0.10	0.48	0.18
MOX Transient 4G	1.14	0.11	2.66	0.33
MOX Transient 8G	0.40	0.15	1.12	0.44

제 2절 2차원 벤치마크 문제 검증

제 1절에서 언급한 벤치마크 문제 가운데 TAKEDA Model I 문제는 1/4 노심의 크기가 25cm인 크기가 매우 작은 문제이므로 이를 제외한 나머지 벤치마크 문제들을 이용해 방향교차 체계를 이용한 SP₃ 선원확장 노달 해법의 건전성을 검증해본다. 앞에서 밝힌 바와 같이 미세 격자 유한 차분 해법의 결과값을 외삽한 결과값을 기준으로 사용하였다. 검증을 위해서 유효 증배 계수, 집합체 최대 출력 오차, RMS 출력 오차를 비교하였으며 각 집합체 별 출력 분포 오차도 구하였다. 노달 결과는 집합체의 크기가 20cm 이상인 문제와 미만인 문제로 나눈 다음 20cm 이상인 문제는 집합체당 1x1 격자, 2x2 격자, 4x4 격자 총 세 경우에 대해서 결과를 구했고 20cm 미만인 문제는 집합체당 1x1 격자, 2x2 격자인 두 경우에 대해 결과를 구해보았다.

수렴 판정 기준은 유효 증배 계수는 10^{-7} , 핵분열 선원항은 10^{-6} 으로 하였으며 1차원 선원확장 노달법 내에서의 중성자속 곡선 형태 갱신을 위한 반복은 모든 1차원 문제에 대해서 3회로 고정하였다.

다음 표 5-3은 각 벤치마크 문제들의 집합체 크기와 집합체 개수 및 총 에너지군을 나타내었다.

표 5-3. 2차원 벤치마크 문제의 총 에너지 군과 집합체 물성치

벤치마크 문제	총 에너지군	집합체 크기 [cm]	집합체 개수
KAIST 4G	4	21.0	8 x 8
IAEA	2	20.0	17 x 17
KOEBERG	4	21.608	17 x 17
TAKEDA II Rod In / Out	4	5.0	28 x 28
TAKEDA III Rod In / Out	4	5.0	64 x 64
C5G7 MOX	7	21.42	6 x 6
MOX Transient 4G	4	21.42	17 x 17
MOX Transient 8G	8	21.42	17 x 17

표 5-4에서 표 5-6는 FDM으로 구한 기준해와 노달 해법을 통해 구한 결과를 비교한 표이다. 먼저 반응도 오차를 살펴 보면 2차원 C5G7MOX 문제가 가지는 56pcm이 최대 오차 값이다. 표 5-5의 TAKEDA 문제들의 반응도 오차도 최대 20pcm이하로 고속도의 노심 해석을 잘 수행하고 있음을 보여준다. 집합체당 격자 개수를 늘리면 반응도 오차가 줄어드는데 KOEBERG 문제와 MOX Transient 4G 문제와 MOX Transient 8G 문제의 경우 집합체당 4 격자만 사용하더라도 반응도 오차가 1pcm 이하로 줄어들어 집합체당 격자 개수를 늘리더라도 반응도 오차가 더 줄어드는 것을 확인할 수는 없었다.

출력 오차의 경우 최대치가 0.5%정도로 매우 정확한 결과를 보인다. 반응도 오차와는 달리 집합체당 격자 개수가 늘어나면 RMS 출력 오차 및 최대 출력 오차가 줄어드는 것을 확인할 수 있다. 그림 5-1부터 5-9까지는 각 집합체당 출력 오차를 나타낸 그림이다.

이를 통해 방향 교차법을 이용한 SP₃ 선원확장 노달 해법이 2차원 문제에서 잘 구현되고 있음을 확인할 수 있다.

표 5-4. 2차원 문제들의 FDM 결과와 노달 결과 비교 (1)

벤치마크 문제	격자 개수	기준해	오차 [pcm]	최대 출력 오차 [%]	RMS 출력 오차 [%]
KAIST 4G	1 x 1	1.06780	14	0.27	0.20
	2 x 2		11	0.16	0.11
	4 x 4		3	0.07	0.05
IAEA	1 x 1	1.03448	3	0.24	0.13
	2 x 2		1	0.07	0.04
	4 x 4		1	0.05	0.03
KOEBERG	1 x 1	1.04031	16	0.45	0.19
	2 x 2		1	0.13	0.04
	4 x 4		0	0.12	0.03

표 5-5. 2차원 문제들의 FDM 결과와 노달 결과 비교 (2)

벤치마크 문제	격자 개수	기준해	오차 [pcm]	최대 출력 오차 [%]	RMS 출력 오차 [%]
TAKEDA II Rod In	1 x 1	1.03023	9	0.44	0.05
	2 x 2		3	0.16	0.02
TAKEDA II Rod Out	1 x 1	1.06360	3	0.27	0.05
	2 x 2		2	0.07	0.01
TAKEDA III Rod In	1 x 1	0.86134	15	0.49	0.08
	2 x 2		1	0.17	0.03
TAKEDA III Rod Out	1 x 1	0.92426	8	0.41	0.06
	2 x 2		-2	0.30	0.03

표 5-6. 2차원 문제들의 FDM 결과와 노달 결과 비교 (3)

벤치마크 문제	격자 개수	기준해	오차 [pcm]	최대 출력 오차 [%]	RMS 출력 오차 [%]
C5G7MOX	1 x 1	1.19353	56	0.34	0.20
	2 x 2		5	0.14	0.10
	4 x 4		2	0.12	0.08
MOX Transient 4G	1 x 1	0.97429	8	0.42	0.15
	2 x 2		0	0.14	0.06
	4 x 4		0	0.08	0.04
MOX Transient 8G	1 x 1	0.98884	-9	0.44	0.16
	2 x 2		1	0.13	0.06
	4 x 4		1	0.08	0.04

X.XXX	SP3 FDM Reference		
X.XX	SP3 SENM Err.[%] of 1x1 box		
X.XX	SP3 SENM Err.[%] of 2x2 box		
X.XX	SP3 SENM Err.[%] of 4x4 box		
		0.483	
		0.34	
		-0.03	
		-0.02	
	1.755	0.881	
	-0.13	-0.11	
	-0.14	0.09	
	-0.12	0.07	

그림 5-1. 2차원 C5G7MOX 문제의 출력 분포 오차

X.XXX	SP3 FDM Reference		
X.XX	SP3 SENM Err.[%] of 1x1 box		
X.XX	SP3 SENM Err.[%] of 2x2 box		
X.XX	SP3 SENM Err.[%] of 4x4 box		
	0.880	0.800	
	0.02	-0.27	
	-0.16	0.14	
	-0.07	0.02	
1.171	1.214	0.960	
-0.17	0.11	0.24	
-0.15	0.07	-0.04	
-0.03	0.07	-0.03	

그림 5-2. 2차원 KASIT 4G 문제의 출력 분포 오차

X.XXX	SP3 FDM Reference							
X.XX	SP3 SENM Err.[%] of 1x1 box							
X.XX	SP3 SENM Err.[%] of 2x2 box							
X.XX	SP3 SENM Err.[%] of 4x4 box							
					0.618	0.201		
					0.15	0.03		
					0.07	0.00		
					0.06	0.00		
				0.544	0.647	0.207		
				0.01	0.12	0.03		
				0.01	-0.01	0.01		
				0.00	-0.01	0.01		
		2.026	1.624	0.551	0.479	0.201		
		0.08	0.07	-0.02	0.17	0.02		
		0.06	-0.02	0.00	0.06	0.01		
		0.03	-0.02	0.00	0.04	0.01		
	1.255	2.398	1.968	1.039	0.332	0.228		
	-0.07	-0.08	0.01	0.17	-0.04	0.08		
	0.02	-0.08	-0.01	0.07	0.00	0.03		
	0.00	-0.05	-0.03	0.05	0.00	0.02		
	2.277	1.719	2.265	1.751	0.470	0.514	0.276	
	-0.40	-0.32	0.04	0.02	-0.05	0.20	0.01	
	-0.08	-0.12	0.08	-0.04	-0.01	0.07	0.01	
	-0.07	-0.07	0.06	-0.03	0.00	0.05	0.01	
1.207	2.259	1.215	2.038	0.780	0.679	0.300	0.216	
-0.25	-0.44	-0.14	-0.26	-0.05	0.26	-0.01	0.04	
-0.04	-0.13	-0.01	-0.13	0.00	0.06	0.01	0.02	
-0.03	-0.07	-0.01	-0.08	0.00	0.03	0.01	0.01	

그림 5- 4. 2차원 MOX Transient 8G 문제의 출력 분포 오차

X.XXX	SP3 FDM Reference			0.682	0.913						
X.XX	SP3 SENM Err.[%] of 1x1 box			0.21	0.45						
X.XX	SP3 SENM Err.[%] of 2x2 box			0.03	0.07						
X.XX	SP3 SENM Err.[%] of 4x4 box			0.02	0.02						
				0.405	0.706	1.463	1.429				
				-0.10	0.01	0.29	0.01				
				0.01	0.02	0.04	0.00				
				0.01	0.02	0.01	-0.01				
				0.213	0.398	0.570	1.274	2.152			
				-0.13	-0.14	-0.13	-0.14	0.23			
				0.00	0.01	0.00	0.00	-0.01			
				0.01	0.01	0.01	0.00	-0.03			
				0.096	0.173	0.285	0.654	1.024	2.226	2.094	
				-0.08	-0.11	-0.16	-0.20	-0.16	0.14	0.16	
				0.00	0.00	0.00	0.00	-0.02	-0.03	-0.09	
				0.00	0.01	0.01	0.01	-0.01	-0.04	-0.08	
				0.067	0.093	0.133	0.299	0.534	1.203	1.817	3.038
				-0.06	-0.08	-0.10	-0.15	-0.22	-0.21	-0.19	0.33
				0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	-0.01	-0.08	-0.13
				0.00	0.01	0.00	0.01	0.00	-0.01	-0.05	-0.12

그림 5-5. 2차원 KOEBERG 문제의 출력 분포 오차

제 3절 3차원 벤치마크 문제

3차원 벤치마크 문제는 IAEA, C5G7MOX, TAKEDA 문제들로 구성되어 있다. 3차원 벤치마크 문제의 기준해를 구하기 위해 McCARD 코드 계산을 1,000,000개의 중성자를 이용해 800 cycle 가운데 500 유효 cycle 계산을 수행하였다. 표준편차는 2~4 pcm 이다.

축방향 격자의 크기는 반경방향 격자의 크기와 같은 값을 가진다고 가정하여 집합체를 구성한다. IAEA와 C5G7MOX 문제는 축방향으로는 격자를 나누지 않고 반경방향으로만 집합체당 1x1 격자와 2x2 격자로 나누어 계산하였다. TAKEDA 문제들은 집합체의 크기가 5cm로 매우 작기 때문에 집합체를 나누지 않고 계산하였다.

2차원 문제와는 달리 유한 차분 해법을 이용해서 기준해를 생성하지 않았기 때문에 정확성을 검증하지는 못하였고 몬테칼로 기준해와 유효 중배 계수만을 비교하여 계산 모듈의 3차원으로의 확장성을 검증하였다. 또한, 서울대학교에서 개발한 통합 노달 코드인 RENUUS를 이용하여 P₁ SENM 결과와 비교하여 SP3 해법의 우수성을 3차원 문제에 대해서도 검증하였다. 3차원 벤치마크 문제의 결과는 표 5-7과 같다.

표 5-7. 3차원 문제들의 몬테칼로 결과와 P_1 및 SP_3 노달 결과 비교

벤치마크 문제	몬테칼로 기준해	집합체 당 격자개수	오차 [pcm]	
			P_1	SP_3
IAEA	1.02960	1x1	-50	-3
		2x2	-53	-5
C5G7 MOX	1.19099	1x1	-112	47
		2x2	-175	-7
TAKEDA II Rod In	0.95969	1x1	-559	-42
		2x2	-562	-44
TAKEDA II Rod Out	0.97375	1x1	-485	-29
		2x2	-486	-30
TAKEDA III Rod In	0.87474	1x1	-197	-108
		2x2	-	-127
TAKEDA III Rod Out	1.00224	1x1	-	-190
		2x2	-	-188

제 4절 CMFD 계산 체제의 가속 성능 평가

CMFD 계산 체제의 가속 성능 평가는 2차원과 3차원 벤치문제에 대해서 평가한다. 이를 위해서는 P_1 기반의 CMFD 체제를 이용한 SP_3 선원확장 노달 해법의 결과값이 SP_3 선원확장 노달 계산만을 통해 구해진 결과값과 같음이 검증되어야 한다. 제 2절과 제 3절의 2차원 및 3차원 벤치마크 문제를 이용해서 P_1 기반의 CMFD 체제를 이용한 SP_3 선원확장 노달 해법의 정확성을 검증하였고 그 결과를 별도로 기재하지 않는다.

CMFD 계산의 먼저 SP_3 선원확장 노달법을 핵분열 선원항의 pseudo 오차가 10^{-8} 이하가 되도록 충분히 수렴시킨 값을 기준으로 삼아 핵분열 선원항의 실제 오차가 10^{-4} 이하가 되는 노달 반복 계산 횟수를 구하여 P_1 CMFD를 이용한 방향교차 SP_3 선원확장 노달법의 우수성을 검증한다. CMFD 체제와 결합하여 구한 SP_3 SENM 노달 해법(w/ CMFD)과 CMFD 체제와 결합하지 않은 SP_3 SENM 노달 해법(w/o CMFD)의 총 노달 반복 횟수를 비교하였다. SP_3 SENM 계산이 1회 끝난 다음 행해지는 P_1 CMFD 계산의 반복 횟수를 10회 또는 5회로 고정시켜 그 결과를 분석해본다.

표 5-7와 표 5-8는 결과를 나타낸 표이다. 모든 문제에서 CMFD 계산을 하는 경우에 반복 횟수가 급격하게 감소함을 알 수 있다. 고속로 문제인 TAKEDA 문제의 경우 공간 분포의 변화가 거의 없기 때문에 핵분열 선원항의 오차가 일정 수준 이하로 떨어져도 유효 증배 계수는 충분히 수렴하지 않을 수 있기 때문에 표 5-

7과 5-8에 나타난 반복 횟수만으로는 의 수렴을 확인할 수 없었다. 고속로 문제를 제외하고는 반복 횟수가 일정하게 감소하는 추세를 보인다. 10회 CMFD 계산을 했을 경우에는 반복횟수가 약 1/10배가 되고 5회 CMFD 계산을 했을 경우에는 1/5배가 되는 것을 확인할 수 있다. CMFD 계산 내에서는 5번 또는 10번의 반복 계산이 수행되지만 노달 계산 시간에 비해 CMFD 계산 시간은 월등하게 작기 때문 계산 시간을 단축할 수 있고 CMFD 계산을 통해 더욱 빨리 수렴된 정보를 생성할 수 있다.

그림 5-9는 3차원 IAEA문제에 대하여 반복 계산에 따른 실제 핵분열 선원항 오차의 거동을 나타낸 그림이다. CMFD를 이용해 가속을 하는 경우 수렴에 필요한 반복 횟수가 현저히 감소하는 거동을 볼 수 있다.

표 5-8. 2차원 벤치마크 문제의 총 노달 반복 계산 횟수

벤치마크 문제	격자 개수	w/o CMFD	w/ CMFD	
			10	5
KAIST 4G	1 x 1	32	9	7
	2 x 2	35	3	6
	4 x 4	36	3	7
IAEA	1 x 1	213	20	40
	2 x 2	213	21	40
	4 x 4	214	21	41
TAKEDA II Rod In	1 x 1	34	20	13
	2 x 2	33	20	13
TAKEDA II Rod Out	1 x 1	194	22	14
	2 x 2	225	21	15
C5G7MOX	1 x 1	31	8	7
	2 x 2	34	4	9
	4 x 4	36	4	9
MOX Transient 4G	1 x 1	158	16	31
	2 x 2	160	16	31
	4 x 4	160	16	32
MOX Transient 8G	1 x 1	185	24	47
	2 x 2	186	24	47
	4 x 4	187	23	47

표 5-9. 3차원 벤치마크 문제의 총 노달 반복 계산 횟수

벤치마크 문제	격자 개수	w/o CMFD	w/ CMFD	
			10	5
IAEA	1 x 1	465	45	91
	2 x 2	463	45	91
TAKEDA II Rod In	1 x 1	178	3	5
	2 x 2	201	4	5
TAKEDA II Rod Out	1 x 1	195	5	5
	2 x 2	227	4	3
C5G7MOX	1 x 1	450	53	107
	2 x 2	469	55	111

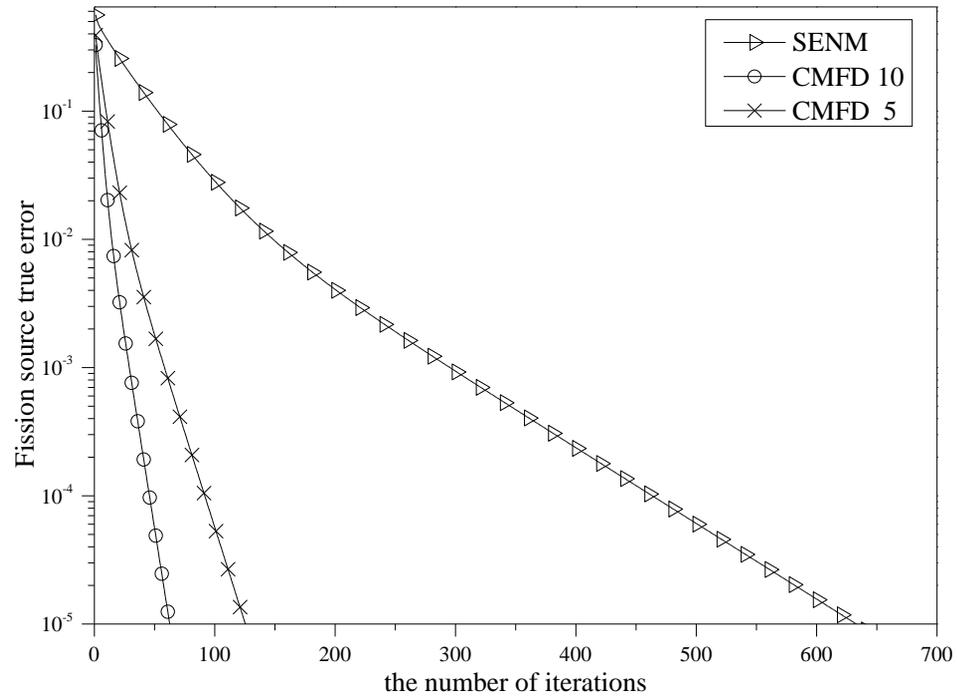


그림 5-10. 3차원 IAEA 문제의 핵분열 선원항 오차 거동

제 6장 결 론

전노심 수송계산을 위해 1차원 방향 교차법을 이용한 전격자 기반 SP_3 선원 확장 노달해법을 개발하고 그 정확성과 수렴성을 검증하였다. 1차원 전격자 기반의 SP_3 선원 확장 노달해법을 직접 유도하였고 다차원 해석을 위한 확장법을 고안하였다. 그리고 가속을 위해 P_1 기반의 소격격자 유한 차분법과 결합된 1차원 방향 교차법을 이용한 전격자 기반 SP_3 선원 확장 노달 계산 체제를 구축하였다.

P_1 에 기반한 CMFD를 이용한 SP_3 선원확장 노달 해법을 검증하기 위해서 노달 균형 방정식을 이용한 SP_3 선원확장 노달 해법을 개발하였고 비교를 통해 2차 모멘트 항의 보정인자 및 누설항을 포함하지 않는 P_1 CMFD이 결합되었음에도 정확한 방법임을 확인하였다.

방향 교차법을 이용한 SP_3 선원 확장 노달 해법의 검증을 위해 먼저 2차원 벤치마크 문제를 이용해 미세 격자를 이용해 구해진 유한 SP_3 유한 차분 해법과 비교함으로써 계산 성능을 검증하였다. 집합체당 격자 개수가 늘어날수록 기준해와 가까워지는 것을 확인하였다. 집합체당 1개의 격자만 가지고도 유효 증배 계수 오차가 최대 50pcm으로 정확한 계산 결과를 제공하는 것을 확인하였다. 대부분의 벤치마크 문제에서 집합체당 4개의 격자만으로도 기준해의 유효 증배 계수와 수 pcm의 오차만 가지는 결과값을 얻을 수 있었다. 특

히 집합체 출력 오차는 집합체당 1개의 격자만 사용해서 노달 해법을 구한 경우에도 최대 출력 오차가 1%를 넘지 않는 매우 정확한 결과를 보였다. 이를 통해서 방향 교차 1차원 선원확장 노달 해법이 중성자 수송 방정식의 정확하고 신속한 해법임을 검증하였다. 또한 이 방법은 3차원으로도 확장이 가능함을 3차원 벤치마크 문제를 통해 확인하였다.

마지막으로 CMFD 계산을 하는 경우와 하지 않은 경우를 비교하여 CMFD 계산의 우수한 가속성을 알 수 있었다. 문제에 따라서는 최대 10배의 가속 효과를 보였고 고속로 문제에서도 뛰어난 가속 성능을 보였다.

이 방법은 노심의 크기가 크거나 집합체의 개수가 늘어날 경우 계산을 위해 구축되는 1차원 문제가 매우 많아져 노달 계산이 늘어나서 계산 시간이 길어지는 단점이 있다. 특히 3차원 문제에서는 이런 노달 계산이 계산 시간에 큰 영향을 미치기 때문에 같은 방향의 1차원 계산이 병렬적으로 이루어진다면 더욱 신속하게 해석이 가능할 것이다. 추후 최적화와 병렬화 작업을 통해 보완되어야 한다.

이와 같이 검증된 방향교차 1차원 SP₃ 선원확장 노달법은 효율적인 노심 해석 도구로 노심 해석에 유용하게 사용될 수 있을 것이다.

참고 문헌

1. Y. S. Jung and H. G. Joo, "Direct Whole Core Calculation with Thermal Feedback Using Planar MOC Generated Cross Section Functions," Proc. M&C2011, Rio de Janeiro, Brazil, May 8–12, 2011, CD-ROM (2011).
2. D. W. LEE and H. G. JOO, "Semi-Analytic Nodal Method Solution for Axial P3 Formulation in Whole Core Transport Calculation," Proc. PHYSOR2008, Interlaken, Switzerland, September 14–15, 2008, CD-ROM (2008).
3. C. H. LEE and T. J. DOWNAR, "A Hybrid Nodal Diffusion/SP3 Method Using One-Node Coarse Mesh Finite Difference Formulation," *Nucl. Sci. Eng.*, **146**, 176 (2004)
4. K. Smith, "An Analytic Nodal Method for Solving the 2-Group, Multidimensional, Static and Transient Neutron Diffusion Equations," Thesis, Massachusetts Institute of Technology Department of Nuclear Engineering (1979)
5. J. I. YOON and H. G. JOO, "Two-Level Coarse Mesh Finite Difference Formulation with Multigroup Source Expansion Nodal Kernels", *Nucl. Sci. Tech.*, **45**, pp.668–682 (2008).
6. E. M. Gelbard, "Applications of the Simplified Spherical Harmonics Equations in Spherical Geometry" , WAPD-TM-294 (1962).
7. H. J. Shim and C. H. Kim, "Error Propagation Module Implemented in the MC-CARD Monte Carlo Code," *Trans. Am. Nucl. Soc.*, **86**, 325 (2002).
8. N. Z. Cho and J. M. Noh, "Hybrid of AFEN and PEN Methods

- for Multigroup Diffusion Nodal Calculation," *Trans. Am. Nuc. Soc.*, **73**, 438 (1995).
9. ARGONNE CODE CENTER, "Benchmark Problem Book" ANL-7416 (Suppl.2), Argonne National Lab. (1977).
 10. E. Z. Muller, Z. J. Weiss, "Benchmarking with the multigroup diffusion high-order response matrix method," *Am. Nuc. Eng.*, **18**, 535 (1991).
 11. T. Takeda and G. Ikeda, "3-D Neutron Transport Benchmarks," *J. Nucl. Sci. Technol.*, **28**, 656 (1991).
 12. M. A. SMITH, E. E. LEWIS and B. C. NA, "Benchmark on Deterministic Transport Calculations without Spatial Homogenization", *Nucl. Energ.* , **45**, 107-118 (2004)
 13. T. Kozlowski, T. Downer, "Pressurized water reactor MOX/UO₂ core transient benchmark, final report," NEA/NSC/DOC(2006)20, OECD Nuclear Energy Agency (2006).

Summary

For efficient core transport calculation, the SP_3 Equation is solved with a whole 1-D Source Expansion Method (SENM) that generates coupling coefficients for the subsequent multi-dimensional Coarse Mesh Finite Difference (CMFD) calculation.

The whole 1-D SENM formulation is derived using an analytic solution for the SP_3 equation consisting of the exponential functions and the 4th order Legendre polynomials for each angular moment. It solved the coupled SENM SP_3 equation for the entire 1-D domain. In the SENM routine, the 1-D SENM problem is solved with alternating direction, namely x-, y- and z- direction to generate the current correction factors needed for CMFD calculation. The CMFD is solved only in the P_1 mode and generates k-effective, node average fluxes and 0th moment transverse leakage for the whole 1-D SENM. This iterative method is called 'Alternating Direction Sweeping Method (ADSM)'.

The verification of this solution scheme is done with various benchmark problems. The results are almost same as solutions of fine mesh Finite Difference Method (FDM) although it uses the coarse mesh size. It shows that ADSM is efficient solvers for SP_3 equations.