



저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.



비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.



변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#)

공학박사학위논문

대형구조물의 최적설계 및 시스템 식별을 위한
자유도 기반 시스템 축소기법

System condensation for design optimization and
finite element model updating of large structures

2015년 2월

서울대학교 대학원

기계항공공학부

장성민

요 약

본 논문에서는 대형 구조물의 시스템 식별과 최적 설계를 위해 반복 연산과 병렬 컴퓨팅에 적합한 자유도 기반 축소 기법을 개발하고 측정오차를 고려한 시스템 식별기법과 시스템 식별에 적합한 역문제 해석 알고리즘들을 고안하였다. 또한 측정오차를 고려한 센서 위치 선정 기법을 개발하고 이를 실제 평판 진동 실험을 통해 검증하였다. 마지막으로 개발된 축소 기법을 구조 해석 상용 프로그램과 연동하여 최적설계를 수행하였다.

전산 기술의 지속적인 발전과 설계 상의 다양한 요구로 인하여 구조 해석의 중요도와 필요성이 증가하고 있다. 구조 해석 모델은 예전에 평판 등의 단순한 부품에서 차량 바디 등의 조립된 전체 구조물로 대형화되었으며, 해석수준은 단순한 정적 해석에서 다양한 동적 거동을 해석하는 형태로 그 범위가 늘어나고 있다. 또한 단순한 해석을 넘어서 최적화 기법을 통해 실제 설계에 반영되는 형태로 수치해석의 영역이 늘어나고 있는 실정이다. 이로 인하여 전산 자원의 증가에도 불구하고 대형 구조물의 동적 거동의 최적화에는 많은 어려움이 존재하고 있다. 이를 해결하기 위해서 다양한 축소기법이 연구되고 있다.

기존 축소 기법들은 단일 CPU 에서 한번의 해석에 초점을 둔 형태로 대형 구조물의 해석을 적은 정확도 손실 하에서 적은 메모리와 계산시간을 통해 수행하는 것을 목표로 하였다. 하지만 현재는 CPU 클럭의 증가 속도가 둔화되고 CPU 개수가 증가하는 멀티코어 형태로 변화되고 있다. 또한 단순 해석을 넘어 최적설계에 대한 수요가 나날이 증가하고 있다. 이러한 현재 상황에서 병렬화와

반복 해석에 적합한 축소 기법의 개발이 축소법 관련 연구 중 핵심 연구라고 생각된다.

본 논문에서는 자유도 기반 축소 기법에 적합한 부구조 기법을 고안하여 병렬화 효율성을 증가 시키고, 이전 과정에서 축소된 행렬을 다음 해석에서 재사용하여 정확도 손실 없이 반복 해석을 효과적으로 수행하는 축소 기법을 개발하였다. 이렇게 개발된 자유도 기반 축소 기법은 역문제인 구조 시스템 식별과 최적설계에 활용 할 수 있다. 특히 제안된 기법은 기존 부구조 기법과 달리 정확도 손실이 없어 계산의 높은 정확도를 요구하는 시스템 식별 기법 활용도가 높다.

본 논문에서는 고안된 기법을 활용하여 대형 구조물의 시스템 식별에 대한 연구를 진행하였다. 제안된 축소 기법을 사용하여 시스템 식별 계산상의 효율을 높였으며, 측정 오차를 고려한 시스템 식별기법을 구성하였다. 또한 구조물의 요소단위의 유한요소 모델의 갱신하는 대규모 시스템 식별 문제를 위해 시스템 식별에 적합한 역문제 해석 알고리즘들을 개발하였다. 그리고 주자유도 선정 기법을 활용한 센서 위치 선정 기법을 고안하였다. 고안된 센서 선정 기법의 검증은 위하여 실제 구조물의 진동 실험을 수행하였으며, 측정된 정보를 통하여 시스템 식별을 수행하였다.

마지막으로 제안된 기법들이 실제 산업의 최적 설계에 활용 가능성을 높이기 위해 산업체에서 많이 사용되고 있는 상용 프로그램(Nastran, Abaqus, Ansys)과 제안된 기법을 구현한 Matlab 프로그램의 연동을 통하여 최적설계를 수행하였다. 상용 프로그램과 Matlab 의 연동은 Matlab 이 메인 프로그램으로

제안된 기법으로 최적화를 진행하고 이 때 필요한 각종 정보 들은 자동으로 상용 프로그램에서 얻는 형태로 구성하였다. 이를 위해 상용 프로그램 별로 제공하는 명령어들을 익히고, 이러한 명령어들로 구성된 상용 프로그램 input 파일의 생성하는 Matlab 함수를 상용 프로그램 별로 작성하였다. 상용 프로그램에서 생성된 출력 파일을 Matlab 으로 읽는 것 또한 상용 프로그램 별로 함수로 작성하여 최적화 도중에 필요한 정보를 언제든지 자동으로 얻을 수 있게 구성하였다. 이렇게 구성한 상용프로그램과 Matlab 의 연동 최적화 결과는 최종적으로 최적화 결과로부터 도출된 설계 변수를 상용 프로그램에 입력한 후 해석을 통하여 검증하였다.

주요어: 축소법, 시스템 식별, 최적 설계, 병렬화, 상용 프로그램, 센서 위치 선정

학번: 2008-20789

목 차

1. 서 론	1
1.1 자유도 기반 축소기법	2
1.2 시스템 식별	4
1.3 논문 구성 및 제안 내용	7
2. 자유도 기반 축소기법	9
2.1 자유도 기반 축소 기법 정식화	10
2.1.1. 정적 시스템 축소기법	12
2.1.2. 동적 시스템 축소기법: 단일 연산	13
2.1.3. 동적 시스템 축소기법: 반복 연산	14
2.2 주자유도 선정 기법	16
2.2.1. 순차적 소거법	16
2.2.2. 에너지예측 기법	17
2.2.3. 2 단계 축소기법	18
2.3 제안된 축소기법	21
2.3.1. 병렬화된 Guyan 기법기반 다단계 축소기법	24
2.3.2. 병렬화된 부구조 동적축소기법	28
2.3.3. 반복 계산을 위한 축소기법	31
2.4 수치 예제	35
수치예제 1. 단순 평판 (simple plate)	35

수치예제 2. 자동차 프레임 (Car frame)	40
3. 시스템 식별 기법	46
3.1 시스템 식별 정식화	47
3.2 제안한 시스템 식별 알고리즘	54
3.3 수치 예제	72
수치예제 1. 계층적 군집 기법 검증	72
수치예제 2. 유전 알고리즘을 활용한 기법 검증	81
수치예제 3. I 형 보(I-beam) 예제 (다중 시험 세트 기법 검증)	90
수치예제 4. 측정 오차를 고려한 시스템 식별 검증	98
4. 센서 위치 선정 기법 고안 및 진동 실험을 통한 검증	103
4.1 주자유도 선정 기법 기반 센서 위치 선정 기법	103
4.2 센서 위치에 따른 측정오차의 영향력의 분석	107
4.3 검증을 위한 실험 모델 설정 및 진동 실험 구축	113
4.4 센서 위치 선정결과	122
4.5 진동 실험 및 시스템 식별 결과	132
5. 최적 설계	138
5.1 상용프로그램과의 연계를 통한 최적설계	138
5.2 유전 알고리즘을 활용한 최적화 수치 예제	146
6. 결론	152
참 고 문 헌	155

LIST OF TABLES

Table 2.1 Computer specification	44
Table 3.1 Solution accuracy for eigenvalues in the 1st example	74
Table 3.2 Solution accuracy for eigenvalues in the 2nd example.....	79
Table 3.3 Change of eigenvalues due to structural change.....	92
Table 4.1 Specification of experimental equipment	120
Table 4.2 Numerical result of natural frequencies in plate models	123
Table 4.3 System identification results	137
Table 5.1 Used method and file to load matrix information.....	143

LIST OF FIGURES

Figure 2.1 Schematic figure of substructures in DOF-based reduction.....	22
Figure 2.2 Proposed substructuring scheme for parallel computing.....	26
Figure 2.3 Interface DOF handling in proposed multi-level substructuring scheme.....	26
Figure 2.4 Proposed reduction method for repeated calculation	32
Figure 2.5 Configuration of cantilever plate examples with thickness change	36
Figure 2.6 Relative error of natural frequency in cantilever plate example	38
Figure 2.7 Relative error of natural frequency in proposed method.....	39
Figure 2.8 Geometric figure and finite element model of car frame	42
Figure 2.9 Geometric figure and finite element model of car frame	43
Figure 2.10 Calculation time in car frame model	45
Figure 3.1 Schematic figure of system identification model	50
Figure 3.2 Changes in the values of system parameters in system identification with conventional gradient-based optimization algorithm.....	55
Figure 3.3 Applying hierarchical clustering algorithm.....	57
Figure 3.4 Changes of clusters and system parameters in each step	60
Figure 3.5 Flow char of process that determines candidate region in proposed hierarchical clustering algorithm	63
Figure 3.6 Flow char of system identification procedures in proposed hierarchical clustering algorithm	64
Figure 3.7 Proposed system identification algorithm using genetic algorithm	66
Figure 3.8 Process selecting system parameters in GA step of proposed system identification algorithm.....	68
Figure 3.9 Concept of proposed multi test-set method	70
Figure 3.10 Configuration of plate model and results of the selection of primary DOFs in the 1st plate example.....	73
Figure 3.11 Progress steps using the proposed hierarchical clustering method in the 1st plate example	75
Figure 3.12 Comparison of the calculation times in the 1st example.....	77
Figure 3.13 Configuration of plate model and results of the selection of primary DOFs in the 2nd plate example	78
Figure 3.14 Results of figure in 2nd numerical example.....	78

Figure 3.15 Progress steps using the proposed hierarchical clustering method in the 2nd example	80
Figure 3.16 Assumed structural change in the 3rd example	82
Figure 3.17 Progress steps using the proposed hierarchical clustering method in the 3rd example	83
Figure 3.18 Result of numerical example using proposed method applied with genetic algorithm	84
Figure 3.19 Comparison of calculation time in 3rd example	85
Figure 3.20 Distributions of structural change in 4th example	86
Figure 3.21 Result of 4th example using the proposed hierarchical clustering method ...	87
Figure 3.22 Result of 4th example using proposed method applied with genetic algorithm	88
Figure 3.23 Comparison of calculation time in 4th example	89
Figure 3.24 Configuration of plate model and structural change distribution in 1st example	91
Figure 3.25 Process step of proposed multi test-set method in 1st example	93
Figure 3.26 Comparison of the calculation times in the 1st example	94
Figure 3.27 Configuration of plate model and structural change distribution in 2nd example	96
Figure 3.28 Process step of proposed multi test-set method in 2st example	97
Figure 3.29 Configuration of assumed structural changes and experimental noise	100
Figure 3.30 Result of system identification not considering the experimental noise	101
Figure 3.31 Result of system identification considering the experimental noise	101
Figure 3.32 Results of system identification in various noise level	102
Figure 4.1 Proposed sensor position method	106
Figure 4.2 Simple bar example (N1,2,4 is sensor position)	107
Figure 4.3 2nd mode shape in simple bar model with 4 elements	110
Figure 4.4 1st mode shape in simple bar model with 40 elements	111
Figure 4.5 2nd mode shape in simple bar model with 40 elements	112
Figure 4.6 3rd mode shape in simple bar model with 40 elements	112
Figure 4.7 Configuration of experimental model	114
Figure 4.8 Specific dimension of experimental model	115
Figure 4.9 Experimental plates	116
Figure 4.10 Configuration of experimental model and experimental step	118

Figure 4.11 Experimental equipment.....	119
Figure 4.12 Specification of experiment setting	121
Figure 4.13 Natural frequency difference compared to reference model	124
Figure 4.14 Mode shape in ‘bump model’	125
Figure 4.15 Mode shape in ‘semi-hole model’	126
Figure 4.16 Mode shape in ‘hole model’	127
Figure 4.17 Recommended sensor position	128
Figure 4.18 Nodal point in low modes.....	129
Figure 4.19 Non-recommended location for sensor position.....	130
Figure 4.20 Configuration of final selected sensor position	131
Figure 4.21 Specification of experimental equipment.....	134
Figure 4.22 Experiment output data.....	135
Figure 4.23 Natural frequency errors between experimental results and numerical results	136
Figure 5.1 Flow chat of design optimization process	141
Figure 5.2 Process of generation reduced matrix using Matlab and Abaqus.....	142
Figure 5.3 Optimization process using Matlab combined with Abaqus.....	145
Figure 5.4 Numerical model to perform design optimization.....	147
Figure 5.5 Object function value during optimization iteration using genetic algorithm	149
Figure 5.6 Optimization result in ‘A case’	150
Figure 5.7 Optimization result in ‘B case’	151

1. 서론

유한요소기법 (finite element method)은 기계적 구조물의 해석과 설계에 가장 많이 쓰이는 방법으로써 자동차, 조선, 항공 등의 다양한 산업 및 연구분야에서 활발하게 사용되고 있다. 최근 급격한 전산 기술의 발전로 인하여 기계 구조물의 부품 혹은 일부분이 아닌 기계 구조물 전체를 하나의 모델로 모델링 하여 이를 한번에 해석 하는 형태의 대규모 구조해석도 많이 수행되고 있다.

하지만 해석 하고자 하는 유한요소모델의 크기는 전산자원의 증가속도에 비해서도 급격하게 증가되고 있는 추세다. 해석 모델의 크기 증가는 유한요소 기법의 요소 와 절점 수의 증가는 물론이고 하중 및 경계 조건의 다양화 시스템 거동에 대한 해석 정확도 증가 등으로 다양한 형태로 나타나고 있다.

또한 단순한 하중에 따른 응력해석을 넘어서 다양한 상황에서의 동적 응답을 해석하고 이러한 동적 응답을 고려한 최적 설계 (design optimization)에 대한 수요가 증가하고 있다. 또한 이러한 해석 및 설계의 정확성을 확보 하기 위하여 실험으로 측정한 응답을 기반으로 구조물의 정확한 물성과 형태를 반영하여 유한요소 모델의 정확도를 상승시키는 시스템 식별 (System identification)에 대한 관심이 증가하고 있다.

이러한 최적 설계와 시스템 식별은 역문제의 일종으로써 반복적인 해석이 요구된다. 따라서 본 논문에서는 이러한 반복적인 해석을 효과적으로 수행할 수 있는 자유도 기반 축소기법을 고안하고 이를 최적 설계와 시스템 식별에 적용하는 연구를 수행하였다.

1.1 자유도 기반 축소기법

자유도 기반 축소 기법은 유한요소법을 통해 얻어진 강성, 질량 행렬을 크기가 작은 정보가 압축된 행렬형태로 줄여주는 축소 기법 중 하나 이다. 행렬의 고유벡터를 이용하여 축소된 행렬을 만드는 모드기반 축소법과 달리 자유도 기반 축소 기법은 행렬의 일부분을 수식 상 전개하여 자유도 사이의 관계식을 구하고 이를 통하여 해당 행렬을 축소하는 기법을 뜻한다.

이러한 자유도 기반 축소 기법은 Guyan[1]이 1965 년에 최초로 제안 하였으며 이를 정적 축소(Static condensation)라 한다. 정적 축소기법에서는 구조물의 정적 해석문제에서의 변위를 주자유도 부분과 부자유도 부분으로 나눈다. 이 때 부자유도부분에 하중이 없다면 부자유도 부분의 식을 먼저 풀 수 있게 되고 이를 통하여 부자유도와 주자유도의 상관관계를 구할 수 있다. 이 때 부자유도와 주자유도의 상관관계를 나타내는 행렬을 변환행렬(Transformation matrix)이라고 한다. 이 변환행렬을 통해 축소된 강성행렬과 하중을 얻게 된다.

이러한 정적 축소 기법을 기반으로 동적 해석을 위한 축소 기법에 대한 연구가 활발히 진행 되었다. 동적 평형 방정식은 정적 문제와 달리 전체 평형식을 주자유도와 부자유도로 나누어도 부자유도 부분 방정식만을 쉽게 먼저 풀 수 없다. 따라서 이러한 동적 문제의 효과적인 축소를 위해서는 ‘변환 행렬을 어떻게 정확하게 구하는가’ 와 ‘어떤 자유도를 주자유도로 선정할 것인가’ 하는 문제가 매우 중요하다.

먼저 동적 해석을 위한 정확한 변환 행렬을 구하기 위한 연구는 Paz[2]가 특정 주파수를 가정하여 동적 거동을 고려하는 축소를 기법을 제안하였다. 그리고 테일러 급수 전개(Taylor series expansion)를 통하여 동적 요소를 고려하는 방법에 대한 연구가 진행되었고[3-5], 이를 Gordis[6]가 정리하여 IRS(Improved Reduced System)기법을 제안하였다. 이를 개선하여 테일러 급수의 고차항을 포함한 AIRS(Accerated Improved Reduced System)기법[7]이 Kim 과 Kang 에 의해 제안되었다. 또한 반복적인 연산을 통하여 축소 행렬의 정확도를 향상 시키는 IIRS(Iterative Improved Reduced System)기법이 연구되었다[8-10].

자유도 선정 연구에서는 가장 신뢰성 있는 방법으로는 Shah 와 Raymund 이 제안한 순차적 소거법 (Sequential Elimination Method)[11]이 있다. 하지만 순차적 소거법은 연산 한번에 하나의 자유도를 부자유도로 선정함으로써 자유도가 큰 모델에 적합하지 않다. 특히 대형 구조물해석의 요구가 커지고 있는 현재에는 이러한 단점이 크게 부각되고 있다. 이러한 단점을 극복하기 위하여 에너지기반 주자유도 선정기법에 대한 연구가 진행되었다.

Kammer[12]는 주자유도 선정 이전에 후보 자유도 선정에 자유도 별 운동에너지를 사용하였고, Kim 과 Choi[13]가 이러한 자유도 에너지 평가를 통하여 주자유도를 자체를 선정하는 에너지기반 주자유도 선정 기법을 제안하였다. Cho 와 Kim[14]은 자유도 단위가 아닌 요소 단위의 에너지를 구하고 이를 통하여 주자유도를 선정하는 기법을 제안하고, 이를 확장하여 순차적 소거법과 연동하는

형태로 2 단계 축소 기법을 제안하였다[15]. 또한 감쇠를 포함한 동적 모델에서의 주자유도 선정에 대한 연구도 Jeong 등[16]이 의해 진행되었다.

다양한 연구가 위와 같이 진행되었으나 주로 해석위주의 연구로 반복연산이 필요한 최적화, 시스템 식별 등의 역문제(inverse problem)을 위한 효과적인 축소기법에 대한 연구는 많이 진행되지 못했다. 본 논문은 기존의 자유도 기반 축소법을 반복 연산에 효과적인 형태로 향상 시키고자 한다.

1.2 시스템 식별

실험을 통해 측정된 정보를 통해서 실제 구조물의 구조적 특성을 구하는 시스템 식별 기법은 구조물의 건전성 모니터링이나 파손 탐지 등에 많이 활용되고 있다[17-20]. 하지만 실제 구조물의 노후화와 늘어나고 있는 안전에 대한 요구로 인해 보다 높은 신뢰도와 정확성을 가지는 파손 탐지 및 헬스 모니터링 기법이 요구됨에 따라 효율적이며 정확한 구조 시스템 식별 기법의 개발을 위한 연구가 활발히 진행되고 있다.

시스템 식별은 최적화 등과 같은 역문제로서 반복적인 해석을 통해 실제 구조 시스템의 특성을 가지는 수학적 모델을 구하는 방법이다. 이 때 수학적 모델은 단순한 함수에서 복잡한 유한요소모델까지 다양하다. 이 중 유한요소 모델 갱신기법 (finite model updating method) [21-23]은 기존의 유한요소 모델을

실험 데이터를 통해 갱신하여 보다 정확한 유한요소 모델을 얻는 기법이다. 이렇게 얻어진 유한요소 모델은 피로 해석 등의 다양한 해석에 직접적으로 사용될 수 있다.

이러한 유한요소 모델을 갱신하기 위해서는 실험에서 측정된 정보를 가지고 기존 유한요소 모델과 차이를 수치화하고 이를 최소화하는 방식으로 진행된다. 이때 기존 유한요소 모델과 실험과의 차이를 수학적 어떤 형식으로 정의하고 비교하는가에 따라서 시스템 식별의 전체 정확도와 효율성에 많은 영향을 준다. 유한요소 모델과 실험과의 차이를 수학적 표현하는 것을 오차 함수로 정의하며, 실제 구조물의 거동을 효과적으로 반영할 수 있는 오차함수를 설정하는 것이 중요하다. 기존의 연구에서는 단순하게 실험의 변위 (Displacement), 고유진동수 (Natural frequency), 모드형상 (Mode shape) 등의 비교하여서 이들 단순한 차이 값을 오차 함수로 설정하고 이 값이 최소화하는 모델을 찾았다[24,25]. 보다 물리적 구조물의 전체적인 거동을 표현하는 오차함수를 설정하기 위해서 동적 평형식에서 직접적으로 전개하여 잔여 에너지를 정의하고 이를 최소화하는 구조 시스템 식별기법이 개발되었다.

하지만 실제로 실험을 통해 측정되는 데이터는 센서와 여러 실험 장비의 현실적 한계에 의해서 일반적으로 유한요소 모델의 절점의 수와 비교하여 상당히 적은 수이다. 따라서 실험을 통해 얻지 못한 부분이 존재하게 된다. 이러한 실험을 통해 측정 정보를 얻지 못한 자유도의 응답을 처리하는 것이 중요한 문제가 되었다. 이러한 미지의 자유도 응답을 시스템 식별을 위한 역문제의 미지수로 설명하게 되면 미지수가 너무 많아져서 대형구조물의 시스템 식별이 어려움을 겪게 된다.

이를 해결하기 위해서 앞서 언급한 자유도 기반 시스템 축소기법에서의 변환행렬을 사용하여 전체 자유도의 응답을 실험을 통해 얻은 일부 위치의 응답만으로 추산하는 방법을 제안되었다[26]. 하지만 이러한 응답의 추산에서 발생한 오차가 시스템 식별 역해석 연산과정에서 커지면서 해의 수렴성이 저하되는 문제가 발생된다. 이러한 추산 과정에서 발생하는 오차에 의한 문제를 IIRS 기법을 통하여 오차를 줄임으로써 해결하였다. 이러한 기법에서는 센서위치가 주자유도로 선정된 위치와 같아야 하고 주자유도로 선정된 위치가 적절히 선정되어야 한다. 이를 위하여 주자유도 선정 기법을 사용된다.

기존에 연구에서는 단순한 모델에서 수치적인 계산을 통한 시스템 식별이 많이 존재하였다. 따라서 본 논문에서는 보다 실제 구조물의 시스템 식별을 위하여 측정 오차를 고려한 시스템 식별이나 효과적인 시스템 식별 수행 알고리즘들을 고안하였다. 그리고 실제 구조물의 진동 실험 및 진동 실험을 실제로 진행하여 제안된 시스템 식별기법의 검증과 주자유도 선정 기법을 통한 센서 위치 선정의 효용성을 확인 및 보완한 센서 선정 기법을 제안하였다.

1.3 논문 구성 및 제안 내용

본 논문의 총 5 장으로 구성되어 있다. 2 장에서는 자유도 기반 축소기법에서의 기존 주요 연구 내용을 분석하고 병렬화와 반복해석에 적합한 형태를 고안하고자 하였다. 이를 위하여 전체 구조물의 행렬을 일부 경계를 공유하는 부구조 형태로 나누고 각 부구조별로 변수화하여 표현한 행렬로 구성한다. 이렇게 구성된 행렬을 기존 축소 기법에 대입하여서 나누어진 행렬들이 어떻게 축소되는지를 수식적으로 전개하여 분석한다. 이를 통하여 병렬화 즉 분업화 할 수 있는 영역과 반복되는 부분들을 찾아서 이를 효과적으로 수행할 수 있도록 기법을 고안하였다. 이를 수치 예제를 통해 검증하였다.

2 장에서 기술한 자유도 기반 축소기법을 활용하여 시스템 식별을 수치적으로 수행한 내용을 3 장에 기술하였다. 3 장에서는 우선 기본적으로 평형 방정식을 활용한 유한요소 모델 갱신 형태의 시스템 식별 기법을 수식적으로 기술한다. 그리고 실제 측정 데이터 수의 한계를 극복하기 위한 자유도 기반 축소법의 활용에 대해 설명하고 이를 실제 측정 상에서 발생하는 측정 오차를 고려한 시스템 식별 기법으로 확장하였다. 그리고 센서 위치와 주자유도의 연관성을 기술하고 주자유도 선정법의 활용한 센서위치 선정 기법을 제안한다. 마지막으로 대형 구조물의 요소단위 유한요소 갱신을 위하여 시스템 식별을 위한 반복 연산의 특징을 분석하여 보다 효과적인 시스템 식별 수행 알고리즘들을 고안하였다.

4 장에서는 실제 진동 실험을 통하여 3 장에서 제안된 시스템 식별 기법의 과 센서 위치 선정기법에 대한 효용성을 검증한다. 우선 실제 실험한 모델과 실험

장비 및 방법에 대해 기술한다. 그 다음 실험 모델의 동적 거동을 수치해석상 분석한다. 이를 기반으로 센서 위치 선정에 사용할 진동 모드 수를 선정하며 3장에서 제안한 센서 위치 선정 기법을 통하여 센서 위치를 선정한다. 실제 측정된 데이터를 분석하고 이를 통해 시스템 식별을 수행하였다. 마지막으로 수행한 시스템 식별 결과를 통하여 제안된 기법에 대한 논의한다.

본 논문에서는 2장에서 제안한 축소기법을 실제 산업의 최적설계에 활용도를 높이기 위하여 유한요소 상용 프로그램과 인하우스 코드의 연동을 구현하였다. 5장에서는 이러한 상용 프로그램과 인하우스 코드를 연동하는 방법에 대해 기술한다. 먼저 상용 프로그램과 인하우스 코드의 장단점을 분석하고 상용 프로그램과 인하우스 코드 연동 제안한다. 상용 프로그램에서 주요 행렬 정보를 얻는 방법에 대해 기술하고 이를 받아서 제안된 기법으로 최적설계를 하는 과정에 대해 설명한다. 그리고 수치 예제를 통하여 상용 프로그램의 정보를 통한 인하우스 코드의 최적 설계를 수행하여 기존의 방법과의 제안된 기법을 비교 분석 한다.

2. 자유도 기반 축소기법

구조물의 동적 구조해석은 아래와 같은 2 계 미분방정식 형태로 구성되는 운동방정식을 푸는 형태로 구성된다.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}(t) \quad (2.1)$$

여기서 \mathbf{M}, \mathbf{C} 와 \mathbf{K} 는 각각 구조물의 질량행렬, 감쇠행렬, 강성행렬을 나타낸다. 일반적으로 위 식을 풀어서 주어진 외력 $\mathbf{F}(t)$ 에 따른 가속도($\ddot{\mathbf{x}}$), 속도($\dot{\mathbf{x}}$), 변위(\mathbf{x})를 구하게 된다. 비감쇠 자유 진동 문제 즉 감쇠를 무시하는 경우에는 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}e^{i\omega t}$ 관계식을 통해서 식 (2.1)은 아래와 같이 고유치 문제(eigenvalue problem)로 변환 된다.

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{M}\mathbf{u} \quad (2.2)$$

위 식을 통해 고유치(λ)와 고유벡터(\mathbf{u})를 구하는 해석을 고유치 해석이라고 하면 이는 모달 해석(Modal analysis), 주파수 응답 해석(Frequency response analysis), 과도 시간 응답 해석(Transient time response analysis) 등에 사용된다. 이 고유치 해석이 동적 해석의 계산 시간 중 많은 부분을 소요된다. 본 논문에서 언급하는 축소 시스템 기법들은 기본적으로 이 고유치 해석을 효과적으로 해석하고자 제안된 기법들이다.

2.1 자유도 기반 축소 기법 정식화

자유도 기반 축소 기법은 식 (2.2)를 효율적으로 해석하기 위해서 서론에서 언급한 바와 같이 전체 자유도를 주자유도와 부자유도로 나누어 두 자유도의 관계를 구한다. 따라서 식 (2.2)는 아래 식 (2.3)와 같이 변경 된다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{pp} & \mathbf{K}_{ps} \\ \mathbf{K}_{ps}^T & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_p \\ \mathbf{u}_s \end{Bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{pp} & \mathbf{M}_{ps} \\ \mathbf{M}_{ps}^T & \mathbf{M}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_p \\ \mathbf{u}_s \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

식 (2.3)의 부 자유도(\mathbf{u}_s)에 해당하는 두 번째 열을 전개하면 아래와 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{K}_{ps}^T \mathbf{u}_p + \mathbf{K}_{ss} \mathbf{u}_s - \lambda \mathbf{M}_{ps}^T \mathbf{u}_p - \lambda \mathbf{M}_{ss} \mathbf{u}_s = \mathbf{0} \quad (2.4)$$

위 식을 부자유도(\mathbf{u}_s)로 다시 전개하면 아래와 같이 주자유도(\mathbf{u}_p)와 부자유도(\mathbf{u}_s)의 관계로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{u}_s = -(\mathbf{K}_{ss} - \lambda \mathbf{M}_{ss})^{-1} (\mathbf{K}_{ps}^T - \lambda \mathbf{M}_{ps}^T) \mathbf{u}_p \quad (2.5)$$

이 때 두 자유도의 관계를 나타내는 행렬을 변환행렬이라고 하고 아래와 같이 표현된다.

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_p \\ \mathbf{u}_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix} \mathbf{u}_p \quad \text{where } \mathbf{t} = -(\mathbf{K}_{ss} - \lambda \mathbf{M}_{ss})^{-1} (\mathbf{K}_{ps}^T - \lambda \mathbf{M}_{ps}^T) \quad (2.6)$$

이 변환 행렬을 통해 식 (2.3)은 아래와 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{pp} & \mathbf{K}_{ps} \\ \mathbf{K}_{ps}^T & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix} \mathbf{u}_p = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{pp} & \mathbf{M}_{ps} \\ \mathbf{M}_{ps}^T & \mathbf{M}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix} \mathbf{u}_p \quad (2.7)$$

따라서 양 변에 변환 행렬을 한번 더 곱해서 전개하면 아래와 같이 전개 된다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{t}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{pp} & \mathbf{K}_{ps} \\ \mathbf{K}_{ps}^T & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix} \mathbf{u}_p = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{t}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{pp} & \mathbf{M}_{ps} \\ \mathbf{M}_{ps}^T & \mathbf{M}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix} \mathbf{u}_p \quad (2.8)$$

$$(\mathbf{K}_{pp} + \mathbf{K}_{ps} \mathbf{t} + \mathbf{t}^T \mathbf{K}_{ps}^T + \mathbf{t}^T \mathbf{K}_{ss} \mathbf{t}) \mathbf{u}_p = \lambda (\mathbf{M}_{pp} + \mathbf{M}_{ps} \mathbf{t} + \mathbf{t}^T \mathbf{M}_{ps}^T + \mathbf{t}^T \mathbf{M}_{ss} \mathbf{t}) \mathbf{u}_p \quad (2.9)$$

이는 아래 같이 축소된 형태의 고유치 방정식으로 표현할 수 있고,

$$\mathbf{K}_R \mathbf{u}_p = \lambda_R \mathbf{M}_R \mathbf{u}_p \quad (2.10)$$

축소강성행렬과 질량행렬을 아래와 같은 식으로 나타낸다.

$$\mathbf{K}_R = \mathbf{K}_{pp} + \mathbf{K}_{ps} \mathbf{t} + \mathbf{t}^T \mathbf{K}_{ps}^T + \mathbf{t}^T \mathbf{K}_{ss} \mathbf{t} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{M}_R = \mathbf{M}_{pp} + \mathbf{M}_{ps} \mathbf{t} + \mathbf{t}^T \mathbf{M}_{ps}^T + \mathbf{t}^T \mathbf{M}_{ss} \mathbf{t} \quad (2.12)$$

이 때 변환행렬(\mathbf{t})는 정적 축소와 달리 미지수인 고유치항(λ)이 포함되어서 고유치의 함수로 나타낸다. 따라서 이 변환행렬을 정확하게 푸는 것이 자유도 기반 축소 기법에서 중요도가 상당히 큰 문제이며 이를 위해 많은 연구가 진행되었다.

2.1.1. 정적 시스템 축소기법

우선, 가장 처음 시도된 방법은 Guyan[1]이 처음 제안한 정적 축소법을 그대로 적용하는 것으로 방법이다. 이는 식 (2.4)에서 $\lambda=0$ 를 넣는 형태로 변환행렬은 아래와 같이 구성된다.

$$\mathbf{t}_G = -\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{ps}^T \quad (2.13)$$

이를 통해 축소된 고유치 방정식은 아래와 같이 구성되며

$$\mathbf{K}_G \mathbf{u}_p = \lambda_r \mathbf{M}_G \mathbf{u}_p \quad (2.14)$$

축소강성행렬과 질량행렬을 아래와 같은 식으로 나타낸다.

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{K}_{pp} + \mathbf{t}_G^T \mathbf{K}_{ps}^T \quad (2.15)$$

$$\mathbf{M}_G = \mathbf{M}_{pp} + \mathbf{M}_{ps} \mathbf{t}_G + \mathbf{t}_G^T \mathbf{M}_{ps}^T + \mathbf{t}_G^T \mathbf{M}_{ss} \mathbf{t}_G \quad (2.16)$$

식 (2.5)와 같이 Guyan 이 제안한 방법은 변환 행렬에 질량행렬이 수식상 포함되지 않아서 질량의 영향이 큰 고주파 영역으로 갈수록 정확도가 떨어지게 된다.

2.1.2. 동적 시스템 축소기법: 단일 연산

위에서 언급한 질량행렬의 영향을 고려하기 위해서 다양한 연구가 시도되었다. 먼저 Paz[2]가 특정 주파수를 고유치 항에 대입하는 기법을 제안하였다. 따라서 변환 행렬은 아래와 같이 표현된다.

$$\mathbf{t}(\bar{\omega}) = -(\mathbf{K}_{ss} - \bar{\omega}^2 \mathbf{M}_{ss})^{-1} (\mathbf{K}_{ps}^T - \bar{\omega}^2 \mathbf{M}_{ps}^T) \quad (2.17)$$

이러한 기법은 대입한 고유치($\bar{\omega}$)의 값 부분 주파수 영역 대에서만 정확성을 보장하고 나머지 부분의 해의 정확도는 현저히 떨어지게 된다. 따라서 식 (2.5)을 근본적으로 풀어 보고자 아래 식처럼 테일러 급수전개를 이용한 방법이 시도되었다.

$$\begin{aligned} \mathbf{t} = & -\mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{ps}^T + \mathbf{K}_{ss}^{-1} (\mathbf{M}_{ps}^T - \mathbf{M}_{ss} \mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{ps}^T) \lambda \\ & + \mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{M}_{ss} \left\{ \mathbf{K}_{ss}^{-1} (\mathbf{M}_{ps}^T - \mathbf{M}_{ss} \mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{ps}^T) \right\} \lambda^2 + O(\lambda^3) + \dots \end{aligned} \quad (2.18)$$

여기서 고유치를 가정해서 대입한다. 이때 가정한 고유치는 식 (2.14)를 이용하여 구하고 아래와 같이 표현된다.

$$\lambda_{\text{approximated}} = \mathbf{M}_G^{-1} \mathbf{K}_G \quad (2.19)$$

O'Callahan 등[5] 이 식 (2.17)의 테일러 급수 전개된 변형함수의 1 차 항까지를 사용한 IRS(Improved Reduced System) 기법을 제안하였으면 이 때 변환 행렬을 아래와 같이 표현 할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{IRS} = & -\mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{ps}^T + \mathbf{K}_{ss}^{-1} (\mathbf{M}_{ps}^T - \mathbf{M}_{ss} \mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{ps}^T) \mathbf{M}_G^{-1} \mathbf{K}_G \\ = & \mathbf{t}_G + \mathbf{K}_{ss}^{-1} (\mathbf{M}_{ps}^T - \mathbf{M}_{ss} \mathbf{t}_G) \mathbf{M}_G^{-1} \mathbf{K}_G \end{aligned} \quad (2.20)$$

이 후 Kim 과 Kang[7]에 의하여 테일러 전개 항 중 2 차 이상의 고차항까지 고려한 아래 식과 같은 AIRS (Accelerated Improved Reduced System)기법을 제안하였다.

2.1.3. 동적 시스템 축소기법: 반복 연산

위에서 언급한 변환 행렬을 가정을 통해 수식적으로 전개하는 것과 달리 식 (2.5)의 비선형 형태의 변환 행렬을 반복적인 연산을 통해 수치적으로 해석하기 위한 시도가 진행되었다.

Friswell[8]이 제안한 IIRS (Iterative Improved Reduced System)기법은 식 (2.18)의 IRS 기법에서 얻은 축소 강성, 질량 행렬을 통하여 아래 식과 같은 가정된 고유치항으로 사용한다.

$$\lambda_{\text{approximated}} = \mathbf{M}_R^{-1} \mathbf{K}_R \quad (2.21)$$

이렇게 가정한 고유치항을 반영하여 변환행렬에 구하고 이를 통해 다시 가정된 고유치항을 갱신한다. 따라서 k 번째 변환 행렬과 축소 강성, 질량 행렬은 아래와 같다.

$$\mathbf{t}^{(k)} = \mathbf{t}_G + \mathbf{K}_{ss}^{-1} \left(\mathbf{M}_{ps}^T + \mathbf{M}_{ss} \mathbf{t}^{(k-1)} \right) \left[\mathbf{M}_R^{(k-1)} \right]^{-1} \mathbf{K}_R^{(k-1)} \quad (2.22)$$

$$\mathbf{K}_R^{(k)} = \mathbf{K}_{pp} + \mathbf{K}_{ps} \mathbf{t}^{(k)} + \left[\mathbf{t}^{(k)} \right]^T \mathbf{K}_{ms}^T + \left[\mathbf{t}^{(k)} \right]^T \mathbf{K}_{ss} \mathbf{t}^{(k)} \quad (2.23)$$

$$\mathbf{M}_R^{(k)} = \mathbf{M}_{pp} + \mathbf{M}_{ps} \mathbf{t}^{(k)} + \left[\mathbf{t}^{(k)} \right]^T \mathbf{M}_{ms}^T + \left[\mathbf{t}^{(k)} \right]^T \mathbf{M}_{ss} \mathbf{t}^{(k)} \quad (2.24)$$

Xia[10]는 다른 형태의 IIRS 기법을 제안하였다. 변환행렬을 아래와 같이 정적 부분과 동적 부분으로 나누어 전개 한다.

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_G + \mathbf{t}_d \quad (2.25)$$

첫 번째 항(\mathbf{t}_G)은 변환 행렬의 정적 부분을 나타내며 Guyan 기법의 변환행렬과 같으며 두 번째 항은 동적 부분을 나타내며 아래와 같이 표현된다.

$$\mathbf{t}_d = \mathbf{K}_{ss}^{-1} (\mathbf{M}_{ps}^T + \mathbf{M}_{ss} \mathbf{t}(\lambda)) \lambda \quad (2.26)$$

이 때 Friswell 방법과 유사하게 마지막 항의 변환 행렬($\mathbf{t}(\lambda)$)은 이전 단계의 변환행렬을 대입하고 고유치항(λ) 부분은 아래와 같이 정의한다.

$$\lambda = \mathbf{M}_d^{-1} \mathbf{K}_G \quad (2.27)$$

이 때 \mathbf{M}_d 는 등가질량행렬(equivalent mass matrix)라고 하며 아래와 같이 표현된다.

$$\mathbf{M}_d = \mathbf{M}_{pp} + \mathbf{t}_G^T \mathbf{M}_{ps}^T + \mathbf{M}_{ps} \mathbf{t}^{(k)} + \mathbf{t}_G^T \mathbf{M}_{ss} \mathbf{t}^{(k)} \quad (2.28)$$

따라서 아래와 같은 형태의 반복적인 연산과정을 수행한다.

$$\mathbf{t}^{(k)} = \mathbf{t}_G + \mathbf{K}_{ss}^{-1} (\mathbf{M}_{ps}^T + \mathbf{M}_{ss} \mathbf{t}^{(k-1)}) [\mathbf{M}_d^{(k-1)}]^{-1} \mathbf{K}_G \quad (2.29)$$

$$\mathbf{M}_d^{(k)} = [\mathbf{M}_{pp} + \mathbf{t}_G^T \mathbf{M}_{ps}^T] + [\mathbf{M}_{ps} + \mathbf{t}_G^T \mathbf{M}_{ss}] \mathbf{t}^{(k)} \quad (2.30)$$

이렇게 구성된 Xia 기법은 Friswell 기법에 비해 수학적 소거를 통하여 Guyan 기법의 계산을 많이 재사용하여 계산 효율을 늘리면서도 수렴성 또한 증가시켰다.

2.2 주자유도 선정 기법

앞서 언급한 바와 같이 자유도 기반 축소에서의 정확도는 어떠한 자유도를 주자유도로 선정하는가에 따라서 축소 시스템의 신뢰도가 달라진다. 따라서 주자유도 선정에 대한 연구가 활발히 진행되었다. 본 절에서 소개되는 주자유도 선정 기법은 3 장에서 시스템 식별에 센서 위치 선정기법으로 적용하였다.

2.2.1. 순차적 소거법

순차적 소거법(Sequential Elimination method) [11]은 주자유도 선정 기법 중에 일반적으로 많이 쓰이는 방법 중에 하나다. 이 기법의 주자유도 선정 과정은 아래와 같다.

1 단계: 강성행렬과 질량 행렬의 대각항의 비($\mathbf{K}_{ii} / \mathbf{M}_{ii}$)를 구한다. 이중 가장

큰 값을 가진 자유도를 부자유도로 정한다.

2 단계: 정해진 부자유도를 소거하는 형태로 정적 축소를 수행한다.

3 단계: 대각항의 비가 절삭 주파수 혹은 남은 자유도가 원하는 주자유도 수가 될 때까지 1,2 단계를 반복한다.

2 단계에서의 축소는 정적 축소 (Guyan 기법)이외에도 2.1 절에서 설명한 다른 축소 기법을 적용할 수 있다. 다만 Guyan 기법이 계산의 시간상으로 유리하다.

순차적 소거법은 위에서 보는 바와 같이 계산 과정이 비교적 단순하며 높은 신뢰도를 가진다는 장점을 가지고 있다. 다만 각 단계에 하나의 자유도를 제거하기 때문에 대형 구조물에서는 주자유도 선정 시간이 기하급수적으로 크게 증가하는 단점을 가지고 있다.

2.2.2. 에너지예측 기법

순차적 소거법의 계산 시간 상의 단점을 극복하고자 Kim 과 Choi 는 자유도별 에너지를 평가하여 주자유도를 선정하는 기법을 제안하였다[13]. 각 자유도의 에너지를 구해서 원하는 주자유도 개수를 한번에 선정하는 방식으로 순차적 소거법과 같은 반복적인 과정이 없어서 계산 시간 상의 효과를 볼 수 있다.

각 자유도의 에너지는 아래의 식과 같이 표현된다.

$$Energy = \sum_{i=1}^n \sum_{k=i}^n \phi_{ij} M_{ik} \phi_{kj} \quad (2.31)$$

ϕ_{ij} 는 i 번째 행, j 번째 열의 리츠 벡터 값을 의미하고, M_{ik} 는 질량행렬의 i 번째 행, k 번째 열을 의미한다. n 는 고려한 모드 개수로 위의 식에서 전체 자유도 개수(N 개)만큼의 모드를 고려하면 아래의 식과 같이 1 이 된다.

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=i}^N \phi_{ij} M_{ik} \phi_{kj} = 1 \quad (2.32)$$

Krammer [12] 는 원하는 주파수 대역에 해당되는 n 개의 모드를 고려한 에너지의 합이 0.4~0.5 정도가 되면 비교적 정확한 결과를 예상 할 수 있다고 제안하였다.

이러한 에너지 예측 기법은 저차 모드가 상대적으로 크게 반영되거나 요소 크기에 따라서 다른 선정 경향을 보여주는 경우가 발생하기도 한다. 이러한 단점을 다소 보완하고자 아래와 같은 가중치를 부여하기도 한다.

$$Energy = \sum_{i=1}^n \sum_{k=i}^n \phi_{ij} M_{ik} \phi_{kj} \left(1 - \frac{\lambda_j}{\lambda_{n-1}} \right) \quad (2.33)$$

2.2.3. 2 단계 축소기법

Kim 과 Cho 는 위에서 언급한 순차적 소거법의 정확성과 에너지 기반 선정 기법의 계산상의 효율성을 모두 얻기 위하여 이 두 방법을 결합한 형태의 2 단계 축소 기법(Two-level condensation scheme, TLCS)을 제안하였다[15]. 제안된 2 단계 축소기법에서는 먼저 에너지 예측 기법과 유사한 형태로 주자유도

후보 영역을 설정한다. 그리고 기존 축소 기법을 통해 행렬을 축소하고 이렇게 축소된 행렬에서 순차적 소거법을 수행한다.

1 단계 후보영역을 설정하기 위해서는 근사화된 모드가 필요하다. 근사화된 모드는 에너지 예측 기법과 유사한 행태로 리츠 벡터를 사용한다. 자세한 과정은 다음과 같다. 우선 아래와 같이 질량행렬의 대각항을 통하여 초기 리츠 벡터를 구한다.

$$\mathbf{K}\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{M}_{ii} \quad (2.34)$$

$$\mathbf{z}^{(1)} = \frac{\mathbf{x}^{(1)}}{\sqrt{(\mathbf{x}^{(1)})^T \mathbf{M}\mathbf{x}^{(1)}}} \quad (2.35)$$

이렇게 구한 리츠 벡터는 Gram-schmid 과정을 통해 여타의 리츠 벡터를 구할 수 있다.

$$\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{x}^{(i)} - \sum_{k=1}^{i-1} \left((\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{M}\mathbf{x}^{(k)} \right) \quad (2.36)$$

2 단계 축소 기법에서는 계산된 리츠 벡터를 통하여 요소단위로 레일리 지수를 아래와 같이 계산한다.

$$Ra_e^i = \sum_{k=1}^{\text{\#of mode}} \frac{\mathbf{z}^{(k)} \mathbf{K}_e^i \mathbf{z}^{(k)}}{\mathbf{z}^{(k)} \mathbf{M}_e^i \mathbf{z}^{(k)}} \quad (2.37)$$

\mathbf{K}_e^i 와 \mathbf{M}_e^i 는 i 번째 요소의 강성행렬과 질량행렬을 의미한다. 이렇게 레일리 지수(Rayleigh quotient) 값 중 낮은 값을 가진 요소가 후보 영역으로 설정된다. 이를 그대로 주자유도로 선정하는 기존의 에너지 예측 기법과 달리 2 단계 축소 기법에서는 이 후보 영역을 가지고 순차적 소거법을 다시 수행하여 보다 더 정확한

위치의 주자유도를 선정한다. 선정된 후보영역에 포함된 자유도만으로 2.1 절에 설명한 축소 기법을 적용하여 축소 행렬을 만든다. 이 축소 행렬을 가지고 순차적 소거법을 수행하여 최종 주자유도를 선정한다.

2 단계 축소 기법은 요소 단위의 에너지를 구하여 후보영역을 설정하는 형태의 초기 방법에서 후보 영역을 절점 단위로 설정하는 절점기반 2 단계 축소기법이 제안되었다. 식 2.31 과 유사한 형태로 자유도 단위로 레일리 지수를 구하고 이를 해당 절점끼리 더하는 형태로 아래와 같이 절점 단위의 레일리 지수를 구한다.

$$Ra_n^i = \sum_{i=1}^{\#ofDOF} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\phi_{ij} K_{ik} \phi_{kj}}{\phi_{ij} M_{ik} \phi_{kj}} \quad (2.37)$$

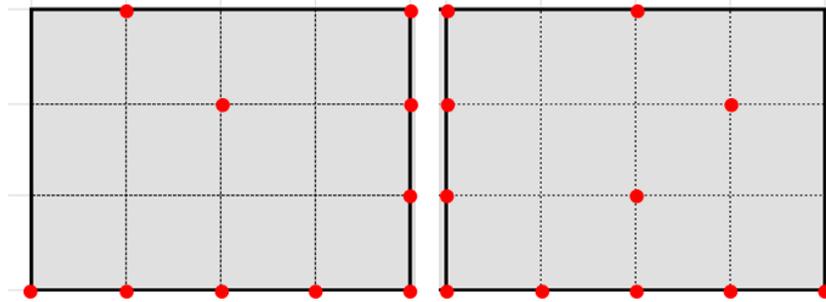


Figure 2.1 Schematic figure of substructures in DOF-based reduction

이를 주자유도끼리 묶어서 순서를 재배열하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{cccccc}
 \mathbf{K}_{ii}^{[1]} + \mathbf{K}_{ii}^{[2]} & \mathbf{K}_{ip}^{[1]} & \mathbf{K}_{ip}^{[2]} & \mathbf{K}_{is}^{[1]} & \mathbf{K}_{is}^{[2]} & \\
 & \mathbf{K}_{pp}^{[1]} & & \mathbf{K}_{ps}^{[1]} & & \\
 \text{sym} & & \mathbf{K}_{pp}^{[2]} & & \mathbf{K}_{ps}^{[2]} & \\
 & & & \mathbf{K}_{ss}^{[1]} & & \\
 & & & & \mathbf{K}_{ss}^{[2]} & \\
 & & & & &
 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c}
 \mathbf{u}_i \\
 \mathbf{u}_p^{[1]} \\
 \mathbf{u}_p^{[2]} \\
 \mathbf{u}_{s1}^{[1]} \\
 \mathbf{u}_s^{[2]}
 \end{array} \right\} \\
 & = \lambda \left[\begin{array}{cccccc}
 \mathbf{M}_{ii}^{[1]} + \mathbf{M}_{ii}^{[2]} & \mathbf{M}_{ip}^{[1]} & \mathbf{M}_{ip}^{[2]} & \mathbf{M}_{is}^{[1]} & \mathbf{M}_{is}^{[2]} & \\
 & \mathbf{M}_{pp}^{[1]} & & \mathbf{M}_{ps}^{[1]} & & \\
 \text{sym} & & \mathbf{M}_{pp}^{[2]} & & \mathbf{M}_{ps}^{[2]} & \\
 & & & \mathbf{M}_{ss}^{[1]} & & \\
 & & & & \mathbf{M}_{ss}^{[2]} & \\
 & & & & &
 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c}
 \mathbf{u}_i \\
 \mathbf{u}_p^{[1]} \\
 \mathbf{u}_p^{[2]} \\
 \mathbf{u}_{s1}^{[1]} \\
 \mathbf{u}_s^{[2]}
 \end{array} \right\} \tag{2.39}
 \end{aligned}$$

따라서 주자유도와 부자유도에 의해 나누어진 강성행렬은 아래와 같으며 질량행렬도 강성행렬과 같은 형태로 나누어진다.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{pp} &= \left[\begin{array}{ccc}
 \mathbf{K}_{ii}^{[1]} + \mathbf{K}_{ii}^{[2]} & \mathbf{K}_{ip}^{[1]} & \mathbf{K}_{ip}^{[2]} \\
 & \mathbf{K}_{pp}^{[1]} & \\
 \text{sym} & & \mathbf{K}_{pp}^{[2]}
 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc}
 \mathbf{K}_{ii}^{[1]} & \mathbf{K}_{ip}^{[1]} \\
 & \mathbf{K}_{pp}^{[1]}
 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc}
 \mathbf{K}_{ii}^{[2]} & \mathbf{K}_{ip}^{[2]} \\
 \text{sym} & \mathbf{K}_{pp}^{[2]}
 \end{array} \right] = \bigcup_{i=1}^{nSub} \mathbf{K}_{pp}^{[i]} \\
 \mathbf{K}_{ps} &= \left[\begin{array}{cc}
 \mathbf{K}_{is}^{[1]} & \mathbf{K}_{is}^{[2]} \\
 \mathbf{K}_{ps}^{[1]} & \\
 & \mathbf{K}_{ps}^{[1]}
 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c}
 \mathbf{K}_{is}^{[1]} \\
 \mathbf{K}_{ps}^{[1]}
 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c}
 \mathbf{K}_{is}^{[2]} \\
 \mathbf{K}_{ps}^{[1]}
 \end{array} \right] = \bigcup_{i=1}^{nSub} \mathbf{K}_{ps}^{[i]} \\
 \mathbf{K}_{ss} &= \left[\begin{array}{c}
 \mathbf{K}_{ss}^{[1]} \\
 \mathbf{K}_{ss}^{[2]}
 \end{array} \right] = \bigcup_{i=1}^{nSub} \mathbf{K}_{ss}^{[i]} \tag{2.40}
 \end{aligned}$$

2.3.1. 병렬화된 Guyan 기법기반 다단계 축소기법

위에서 부구조별로 전개한 방정식에 Guyan 기법을 적용하여 전개하면 아래와 같은 변환 행렬을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{t}_G = -\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sp} &= -\begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{ss}^{[1]})^{-1} & & \\ & (\mathbf{K}_{ss}^{[2]})^{-1} & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{si}^{[1]} & \mathbf{K}_{sp}^{[1]} \\ \mathbf{K}_{si}^{[2]} & \mathbf{K}_{sp}^{[2]} \end{bmatrix} \\
 &= -\begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{ss}^{[1]})^{-1} \mathbf{K}_{si}^{[1]} & (\mathbf{K}_{ss}^{[1]})^{-1} \mathbf{K}_{sp}^{[1]} \\ (\mathbf{K}_{ss}^{[2]})^{-1} \mathbf{K}_{si}^{[2]} & (\mathbf{K}_{ss}^{[2]})^{-1} \mathbf{K}_{sp}^{[2]} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{G_si}^{[1]} & \mathbf{t}_{G_sp1}^{[1]} \\ \mathbf{t}_{G_si}^{[2]} & \mathbf{t}_{G_sp2}^{[2]} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

따라서 정적 축소 기법의 축소강성, 질량행렬은 아래와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_G = \mathbf{K}_{pp} + \mathbf{t}_G^T \mathbf{K}_{sp} \\
 = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii}^{[1]} + \mathbf{K}_{ii}^{[2]} & \mathbf{K}_{ip}^{[1]} & \mathbf{K}_{ip}^{[2]} \\ & \mathbf{K}_{pp}^{[1]} & \\ sym & & \mathbf{K}_{pp}^{[2]} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{is}^{[1]} (\mathbf{K}_{ss}^{[1]})^{-1} & \mathbf{K}_{is}^{[2]} (\mathbf{K}_{ss}^{[2]})^{-1} \\ \mathbf{K}_{ps}^{[1]} (\mathbf{K}_{ss}^{[1]})^{-1} & \\ & & \mathbf{K}_{ps}^{[2]} (\mathbf{K}_{ss}^{[2]})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{si}^{[1]} & \mathbf{K}_{sp}^{[1]} \\ \mathbf{K}_{si}^{[2]} & \mathbf{K}_{sp}^{[2]} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

위의 식은 부구조 별로 나누어 아래와 같이 전개할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_G = & \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii}^{[1]} & \mathbf{K}_{ip}^{[1]} \\ & \mathbf{K}_{pp}^{[1]} \\ sym & & \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{is}^{[1]} (\mathbf{K}_{ss}^{[1]})^{-1} \mathbf{K}_{si}^{[1]} & \mathbf{K}_{ps}^{[1]} (\mathbf{K}_{ss}^{[1]})^{-1} \mathbf{K}_{si}^{[1]} \\ \mathbf{K}_{ps}^{[1]} (\mathbf{K}_{ss}^{[1]})^{-1} \mathbf{K}_{si}^{[1]} & \mathbf{K}_{ps}^{[1]} (\mathbf{K}_{ss}^{[1]})^{-1} \mathbf{K}_{sp}^{[1]} \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii}^{[2]} & \mathbf{K}_{ip}^{[2]} \\ & \mathbf{K}_{pp}^{[2]} \\ sym & & \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{is}^{[2]} (\mathbf{K}_{ss}^{[2]})^{-1} \mathbf{K}_{si}^{[2]} & \mathbf{K}_{ps}^{[2]} (\mathbf{K}_{ss}^{[2]})^{-1} \mathbf{K}_{si}^{[2]} \\ \mathbf{K}_{ps}^{[2]} (\mathbf{K}_{ss}^{[2]})^{-1} \mathbf{K}_{si}^{[2]} & \mathbf{K}_{ps}^{[2]} (\mathbf{K}_{ss}^{[2]})^{-1} \mathbf{K}_{sp}^{[2]} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

또한 각 부구조별로 Guyan 기법 축소를 수행하면 아래와 같은 축소된 강성행렬을 얻게 된다.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_G^{[1]} &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii}^{[1]} & \mathbf{K}_{ip}^{[1]} \\ & \mathbf{K}_{pp}^{[1]} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{is}^{[1]} (\mathbf{K}_{ss}^{[1]})^{-1} \mathbf{K}_{si}^{[1]} & \mathbf{K}_{ps}^{[1]} (\mathbf{K}_{ss}^{[1]})^{-1} \mathbf{K}_{si}^{[1]} \\ \mathbf{K}_{ps}^{[1]} (\mathbf{K}_{ss}^{[1]})^{-1} \mathbf{K}_{si}^{[1]} & \mathbf{K}_{ps}^{[1]} (\mathbf{K}_{ss}^{[1]})^{-1} \mathbf{K}_{sp}^{[1]} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{G_{ii}}^{[1]} & \mathbf{K}_{G_{ip}}^{[1]} \\ & \mathbf{K}_{G_{pp}}^{[1]} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{K}_G^{[2]} &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii}^{[2]} & \mathbf{K}_{ip}^{[2]} \\ & \mathbf{K}_{pp}^{[2]} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{is}^{[2]} (\mathbf{K}_{ss}^{[2]})^{-1} \mathbf{K}_{si}^{[2]} & \mathbf{K}_{ps}^{[2]} (\mathbf{K}_{ss}^{[2]})^{-1} \mathbf{K}_{si}^{[2]} \\ \mathbf{K}_{ps}^{[2]} (\mathbf{K}_{ss}^{[2]})^{-1} \mathbf{K}_{si}^{[2]} & \mathbf{K}_{ps}^{[2]} (\mathbf{K}_{ss}^{[2]})^{-1} \mathbf{K}_{sp}^{[2]} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{G_{ii}}^{[2]} & \mathbf{K}_{G_{ip}}^{[2]} \\ & \mathbf{K}_{G_{pp}}^{[2]} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

식 (2.43)은 위의 각 부구조별로 축소한 행렬의 합으로 아래와 같이 표현 할 수 있다.

$$\mathbf{K}_G = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{G_{ii}}^{[1]} + \mathbf{K}_{G_{ii}}^{[2]} & \mathbf{K}_{G_{ip}}^{[1]} & \mathbf{K}_{G_{ip}}^{[2]} \\ \mathbf{K}_{G_{pi}}^{[1]} & \mathbf{K}_{G_{pp}}^{[1]} & \\ \mathbf{K}_{G_{pi}}^{[2]} & & \mathbf{K}_{G_{pp}}^{[2]} \end{bmatrix} = \bigcup_{i=1}^{nSub} \mathbf{K}_G^{[i]} \tag{2.45}$$

따라서 Guyan 기법기반의 자유도 축소는 부구조 별로 축소 행렬을 구해서 마지막에 부구조별 축소 행렬을 더하는 형태로 축소를 진행할 수 있다. 이를 통해 본 논문에서는 그림 2.2 처럼 병렬연산에서 각각의 CPU 혹은 Computer 는 해당 부구조의 정보만 가지고 연산하고 축소된 행렬만을 전송 받아서 합치는 형태의 병렬연산에 적합한 축소 기법을 고안하였다.

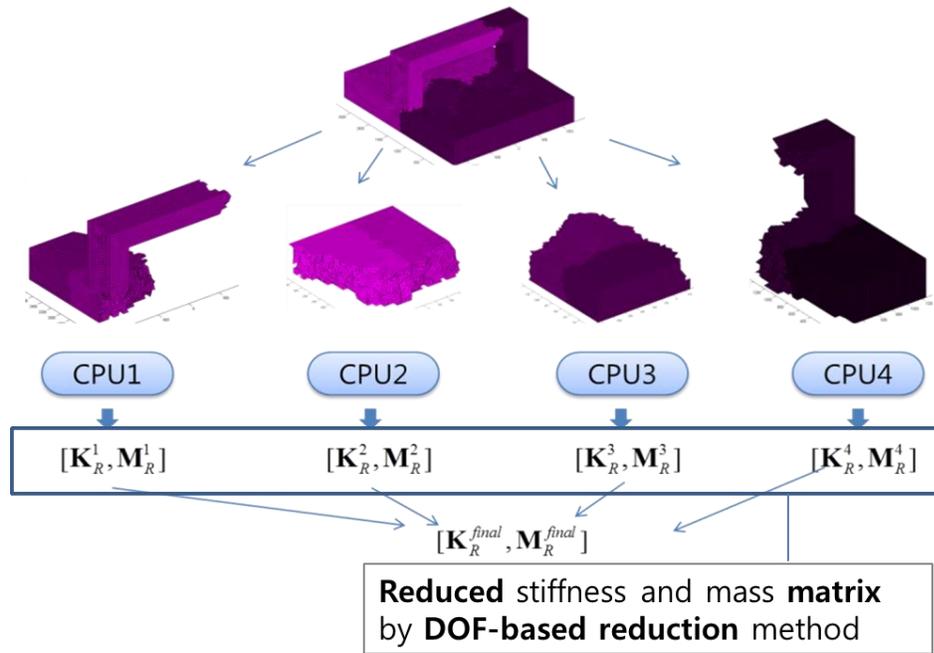


Figure 2.2 Proposed substructuring scheme for parallel computing

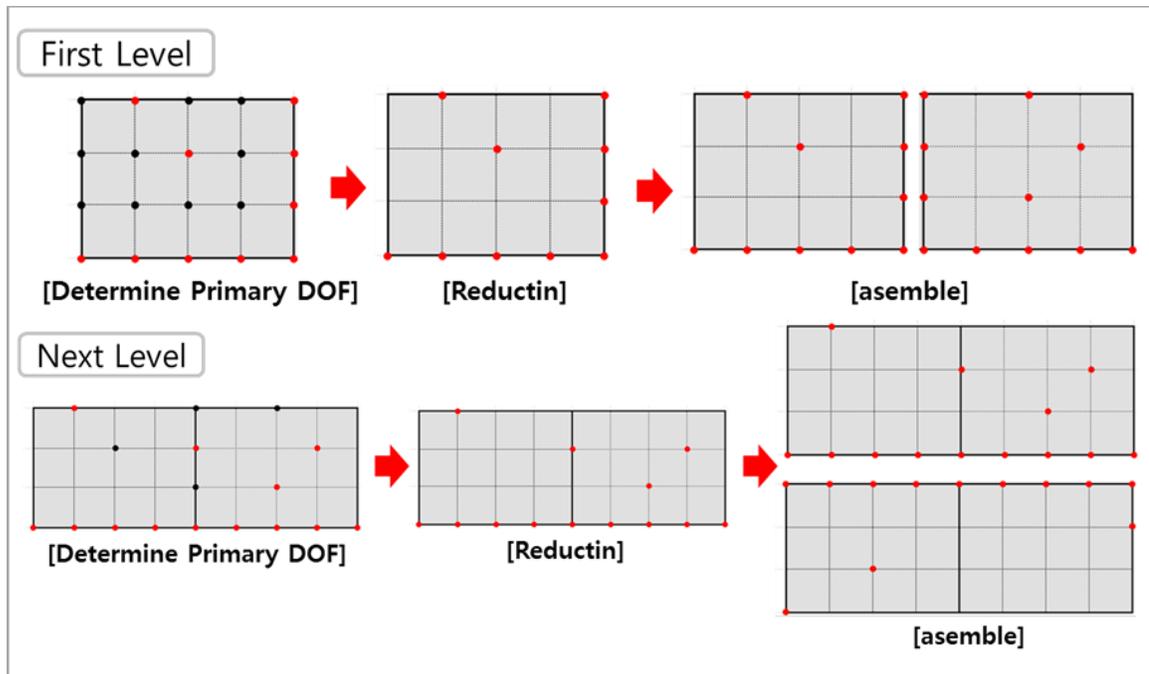


Figure 2.3 Interface DOF handling in proposed multi-level substructuring scheme

이러한 자유도 기반 부구조는 부구조 개수가 늘어나면 경계 자유도가 증가하고 이는 모두 주자유도로 포함되어야 되기 때문에 축소된 행렬의 크기가 증가하게 된다. 이러한 문제는 자유도 기반 부구조 형태에서 고질적으로 발생하는 문제로 이로 인하여 자유도 기반 부구조는 다단계로 (multi-level)의 응용에 어려움이 있었다. 이를 해결하고자 본 논문에서는 그림 2.3 과 같이 이전 단계의 경계 자유도를 부자유도로 치환하는 형태의 축소를 진행함으로써 이러한 경계 문제를 해결하고자 하였다.

제안한 다단계 축소 기법은 자유도 기반 축소기법들 중에서 다단계 형태의 부구조 기법을 구축하였으며 병렬 계산시 각 CPU 간의 축소된 행렬정보만 교환하여 계산 효율을 높였다. 이를 통하여 각 CPU 들이 각각의 메모리를 사용하는 클러스터 환경에서도 병렬 계산에 적합하다. 하지만 제안된 기법은 Guyan 기법을 기반으로 고주파 영역의 정확도를 보장하지 못한다는 단점을 가지고 있다. 이로 인해 저차 모드만 고려하는 최적화 문제나 반복적 연산이나 초기 가정 값이 필요한 다른 축소 기법에 활용 할 수 있을 것으로 기대 된다.

2.3.2. 병렬화된 부구조 동적축소기법

위에서 언급한 다단계 축소 기법은 병렬에 용이하고 경계 문제가 개선되었지만 고주파의 정확도의 문제를 가지고 있다. 이를 개선하기 위하여 IIRS 기법을 기반으로 부구조 축소기법을 고안하였다.

우선 식 2.38~2.40 을 기반으로 IRS 기법의 변환행렬을 표현하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{t}_{IRS} &= \mathbf{t}_G + \mathbf{K}_{ss}^{-1} (\mathbf{M}_{ps}^T - \mathbf{M}_{ss} \mathbf{t}_G) \mathbf{M}_G^{-1} \mathbf{K}_G \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{t}_G^{[1]} \\ \mathbf{t}_G^{[2]} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{ss}^{[1]})^{-1} \\ (\mathbf{K}_{ss}^{[2]})^{-1} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{si}^{[1]} & \mathbf{M}_{sp}^{[1]} \\ \mathbf{M}_{si}^{[2]} & \mathbf{M}_{sp}^{[2]} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ss}^{[1]} \\ \mathbf{M}_{ss}^{[2]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_G^{[1]} \\ \mathbf{t}_G^{[2]} \end{bmatrix} \right) \quad (2.46) \\
 &\quad \left(\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{G_{ii}^{[1]} + \mathbf{M}_{G_{ii}^{[1]}} & \mathbf{M}_{G_{ip}^{[1]}} & \mathbf{M}_{G_{ip}^{[2]}} \\ \mathbf{M}_{G_{pi}^{[1]}} & \mathbf{M}_{G_{pp}^{[1]}} & \\ \mathbf{M}_{G_{pi}^{[2]}} & & \mathbf{M}_{G_{pp}^{[2]}} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{G_{ii}^{[1]} + \mathbf{K}_{G_{ii}^{[1]}} & \mathbf{K}_{G_{ip}^{[1]}} & \mathbf{K}_{G_{ip}^{[2]}} \\ \mathbf{K}_{G_{pi}^{[1]}} & \mathbf{K}_{G_{pp}^{[1]}} & \\ \mathbf{K}_{G_{pi}^{[2]}} & & \mathbf{K}_{G_{pp}^{[2]}} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

이 중 두 번째 항은 아래와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{M}_{ps}^T + \mathbf{M}_{ss} \mathbf{t}^{(k-1)}) [\mathbf{M}_d^{(k-1)}]^{-1} \mathbf{K}_G \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{si}^{[1]} - \mathbf{M}_{ss}^{[1]} (\mathbf{K}_{ss}^{[1]})^{-1} \mathbf{K}_{si}^{[1]} & \mathbf{M}_{sp}^{[1]} - \mathbf{M}_{ss}^{[1]} (\mathbf{K}_{ss}^{[1]})^{-1} \mathbf{K}_{sp}^{[1]} \\ \mathbf{M}_{si}^{[2]} - \mathbf{M}_{ss}^{[2]} (\mathbf{K}_{ss}^{[2]})^{-1} \mathbf{K}_{si}^{[2]} & \mathbf{M}_{sp}^{[2]} - \mathbf{M}_{ss}^{[2]} (\mathbf{K}_{ss}^{[2]})^{-1} \mathbf{K}_{sp}^{[2]} \end{bmatrix} \quad (2.47) \\
 &\quad \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{G_{ii_inv}} & \mathbf{M}_{G_{ip1_inv}} & \mathbf{M}_{G_{ip2_inv}} \\ \mathbf{M}_{G_{p1i_inv}} & \mathbf{M}_{G_{p1p1_inv}} & \mathbf{M}_{G_{p1p2_inv}} \\ \mathbf{M}_{G_{p2i_inv}} & \mathbf{M}_{G_{p2p1_inv}} & \mathbf{M}_{G_{p2p2_inv}} \end{bmatrix} \mathbf{K}_G
 \end{aligned}$$

첫 번째 부구조의 IRS 기법의 변환행렬은 아래와 같이 나타난다.

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{IRS}^{[1]} &= \mathbf{t}_G^{[1]} + (\mathbf{K}_{ss}^{[1]})^{-1} \left[\mathbf{M}_{si}^{[1]} - \mathbf{M}_{ss}^{[1]} (\mathbf{K}_{ss}^{[1]})^{-1} \mathbf{K}_{si}^{[1]} \quad \mathbf{M}_{sp}^{[1]} - \mathbf{M}_{ss}^{[1]} (\mathbf{K}_{ss}^{[1]})^{-1} \mathbf{K}_{sp}^{[1]} \right] \\ &\quad \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{G_{ii_inv}} & \mathbf{M}_{G_{ip1_inv}} & \mathbf{M}_{G_{ip2_inv}} \\ \mathbf{M}_{G_{pi_inv}} & \mathbf{M}_{G_{p1p1_inv}} & \mathbf{M}_{G_{p1p2_inv}} \end{bmatrix} \mathbf{K}_G \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{G_{si}}^{[1]} + \mathbf{t}_{d_{si}}^{[1]} & \mathbf{t}_{G_{sp}}^{[1]} + \mathbf{t}_{d_{sp}}^{[1]} & \mathbf{t}_{d_{sp}}^{[1]} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.48)$$

다른 부구조의 변환행렬도 위의 식과 유사한 형태로 얻어지면 따라서 전체 변환행렬은 아래와 같이 표현된다.

$$\mathbf{t}_{IRS} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{IRS}^{[1]} \\ \mathbf{t}_{IRS}^{[2]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{G_{si}}^{[1]} + \mathbf{t}_{d_{si}}^{[1]} & \mathbf{t}_{G_{sp1}}^{[1]} + \mathbf{t}_{d_{sp1}}^{[1]} & \mathbf{t}_{d_{sp2}}^{[1]} \\ \mathbf{t}_{G_{si}}^{[2]} + \mathbf{t}_{d_{si}}^{[2]} & \mathbf{t}_{d_{sp1}}^{[2]} & \mathbf{t}_{G_{sp2}}^{[2]} + \mathbf{t}_{d_{sp2}}^{[2]} \end{bmatrix} = \bigcup_{i=1}^{nSub} \mathbf{t}_{IRS}^{[i]} \quad (2.49)$$

위 식에서 볼 수 있듯이 IRS 기법의 변환 행렬은 식 2.41의 Guyan 기법의 변환행렬과 달리 일부 항 ($\mathbf{t}_{d_{sp2}}^{[1]}, \mathbf{t}_{d_{sp1}}^{[2]}$)들이 추가 된다. 이는 식 2.47에서 Guyan 기반 축소질량행렬 (\mathbf{M}_G)의 역행렬연산 과정에 의해 비롯되며 이로 인해 각 부구조의 변환 행렬 크기가 증가하는 현상이 발생된다.

따라서 아래의 축소된 강성행렬의 전개가 조금 복잡한 형태로 구성된다.

$$\mathbf{K}_{IRS} = \mathbf{K}_{pp} + \mathbf{K}_{ps} \mathbf{t} + \mathbf{t}^T \mathbf{K}_{ps}^T + \mathbf{t}^T \mathbf{K}_{ss} \mathbf{t} \quad (2.50)$$

위 식의 각 항은 아래와 같이 전개된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ps} \mathbf{t} &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{is}^{[1]} & \mathbf{K}_{is}^{[2]} \\ \mathbf{K}_{ps}^{[1]} & \\ & \mathbf{K}_{ps}^{[2]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{IRS}^{[1]} \\ \mathbf{t}_{IRS}^{[2]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{is}^{[1]} \mathbf{t}_{IRS}^{[1]} + \mathbf{K}_{is}^{[2]} \mathbf{t}_{IRS}^{[2]} \\ \mathbf{K}_{ps}^{[1]} \mathbf{t}_{IRS}^{[1]} \\ \mathbf{K}_{ps}^{[2]} \mathbf{t}_{IRS}^{[2]} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{is}^{[1]} \mathbf{t}_{IRS}^{[1]} \\ \mathbf{K}_{ps}^{[1]} \mathbf{t}_{IRS}^{[1]} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{is}^{[2]} \mathbf{t}_{IRS}^{[2]} \\ \mathbf{K}_{ps}^{[2]} \mathbf{t}_{IRS}^{[2]} \end{bmatrix} = \bigcup_{i=1}^{nSub} \mathbf{K}_{ps}^{[i]} \mathbf{t}_{IRS}^{[i]} \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}^T \mathbf{K}_{ps}^T &= \mathbf{t}^T \mathbf{K}_{sp} = \begin{bmatrix} (\mathbf{t}_{IRS}^{[1]})^T & (\mathbf{t}_{IRS}^{[2]})^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{si}^{[1]} & \mathbf{K}_{sp}^{[1]} \\ \mathbf{K}_{si}^{[2]} & \mathbf{K}_{sp}^{[2]} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (\mathbf{t}_{IRS}^{[1]})^T \mathbf{K}_{si}^{[1]} + (\mathbf{t}_{IRS}^{[2]})^T \mathbf{K}_{si}^{[2]} & (\mathbf{t}_{IRS}^{[1]})^T \mathbf{K}_{sp}^{[1]} + (\mathbf{t}_{IRS}^{[2]})^T \mathbf{K}_{sp}^{[2]} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (\mathbf{t}_{IRS}^{[1]})^T \mathbf{K}_{si}^{[1]} & (\mathbf{t}_{IRS}^{[1]})^T \mathbf{K}_{sp}^{[1]} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\mathbf{t}_{IRS}^{[2]})^T \mathbf{K}_{si}^{[2]} & (\mathbf{t}_{IRS}^{[2]})^T \mathbf{K}_{sp}^{[2]} \end{bmatrix} \\
&= \bigcup_{i=1}^{nSub} (\mathbf{t}_{IRS}^{[i]})^T \mathbf{K}_{sp}^{[i]}
\end{aligned} \tag{2.52}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}^T \mathbf{K}_{ss} \mathbf{t} &= \begin{bmatrix} (\mathbf{t}_{IRS}^{[1]})^T & (\mathbf{t}_{IRS}^{[2]})^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ss}^{[1]} \\ \mathbf{K}_{ss}^{[2]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{IRS}^{[1]} \\ \mathbf{t}_{IRS}^{[2]} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (\mathbf{t}_{IRS}^{[1]})^T \mathbf{K}_{ss}^{[1]} & (\mathbf{t}_{IRS}^{[2]})^T \mathbf{K}_{ss}^{[2]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{IRS}^{[1]} \\ \mathbf{t}_{IRS}^{[2]} \end{bmatrix} \\
&= (\mathbf{t}_{IRS}^{[1]})^T \mathbf{K}_{ss}^{[1]} \mathbf{t}_{IRS}^{[1]} + (\mathbf{t}_{IRS}^{[2]})^T \mathbf{K}_{ss}^{[2]} \mathbf{t}_{IRS}^{[2]} = \bigcup_{i=1}^{nSub} (\mathbf{t}_{IRS}^{[i]})^T \mathbf{K}_{ss}^{[i]} \mathbf{t}_{IRS}^{[i]}
\end{aligned} \tag{2.53}$$

축소 질량행렬 (\mathbf{M}_{IRS}) 또한 위의 축소강성행렬 (\mathbf{K}_{IRS}) 과 유사한 형태로 구성된다.

따라서 위의 식 전개를 통하여 IRS 기반 축소 강성/질량 행렬 ($\mathbf{K}_{IRS}, \mathbf{M}_{IRS}$) 을 각 부구조별 연산, 즉 병렬화를 통하여 얻을 수 있다.

또한, IRS 기법을 반복적으로 수행하는 형태의 IIRS 기법의 변환행렬은 아래와 같이 표현된다.

$$\mathbf{t}^{(k)} = \mathbf{t}_G + \mathbf{K}_{ss}^{-1} (\mathbf{M}_{ps}^T + \mathbf{M}_{ss} \mathbf{t}^{(k-1)}) [\mathbf{M}_R^{(k-1)}]^{-1} \mathbf{K}_R^{(k-1)} \tag{2.54}$$

이 때 이전 단계의 축소 강성/질량행렬 ($\mathbf{K}_R^{(k-1)}, \mathbf{M}_R^{(k-1)}$) 은 위에서 언급한 부구조별로 전개된 IRS 기법 기반 축소법 형태로 구성된다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_R^{(k-1)} &= \mathbf{K}_{pp} + \mathbf{K}_{ps} \mathbf{t}^{(k-1)} + [\mathbf{t}^{(k-1)}]^{-T} \mathbf{K}_{ms}^T + [\mathbf{t}^{(k-1)}]^{-T} \mathbf{K}_{ss} \mathbf{t}^{(k-1)} \\
&= \mathbf{K}_{pp} + \bigcup_{i=1}^{nSub} \mathbf{K}_{ps}^{[i]} \mathbf{t}^{(k-1)[i]} + \bigcup_{i=1}^{nSub} (\mathbf{t}^{(k-1)[i]})^T \mathbf{K}_{ss}^{[i]} + \bigcup_{i=1}^{nSub} (\mathbf{t}^{(k-1)[i]})^T \mathbf{K}_{ss}^{[i]} \mathbf{t}^{(k-1)[i]}
\end{aligned} \tag{2.55}$$

따라서 위의 식 전개를 통하여 IRS 기반 축소 강성/질량 행렬($\mathbf{K}_{IRS}, \mathbf{M}_{IRS}$)을 각 부구조별 연산하는 형태로 수식을 전개하였다. 이를 통하여 각 부구조의 연산은 각 각의 CPU 에서 연산이 진행된다.

다만 위의 2.3.1 절의 Guyan 기반 부구조 기법과 달리 Guyan 기법의 질량행렬($(\mathbf{M}_G)^{-1}$)의 역행렬연산은 병렬화 하기 어려움이 있다. 단순 PC 의 경우 역행렬 연산 자체가 병렬화로 구성되어 있지만 다수의 컴퓨터가 연결되어 있는 클러스터 환경에서는 이러한 역행렬 병렬연산에 어려움이 발생한다. 이로 인해 Guyan 기반의 질량행렬의 역행렬연산의 계산 시간 비율이 증가 하게 된다.

2.3.3. 반복 계산을 위한 축소기법

앞서 서론에서 언급했듯이 기존의 축소 기법은 단순 해석의 정확도와 효율성을 올리는데 초점을 맞춰서 많은 연구가 진행되었다. 하지만 현재 최적화나 시스템 식별 등의 역문제에 대한 수요가 증가하면서 반복적인 계산이 많아지고 있다. 따라서 반복 계산 상에서의 효율적인 계산 방법의 개발이 중요하다고 생각한다.

본 논문에서는 이러한 반복적인 계산에 효율적인 축소 기법을 개발하고자 아래 그림 2.4 과 같은 아이디어를 고안해 내었다.

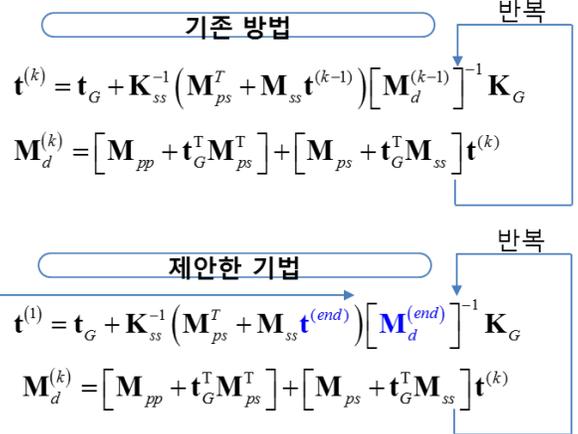
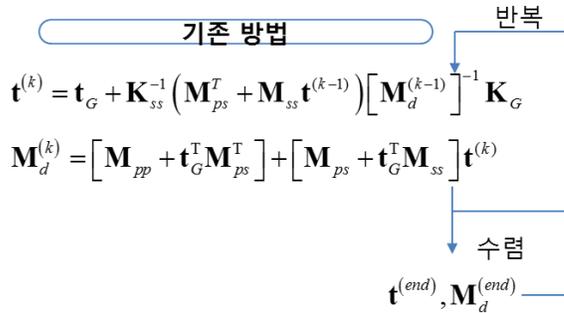
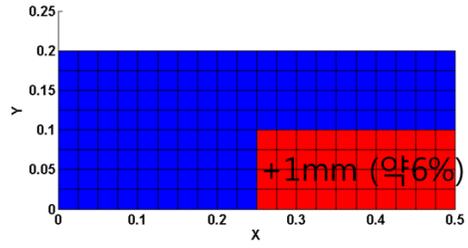
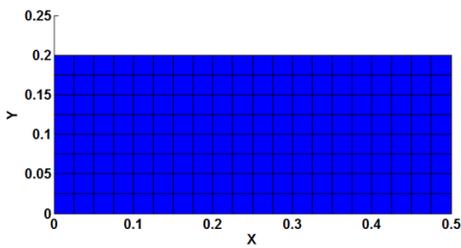


Figure 2.4 Proposed reduction method for repeated calculation

그림 2.4 에 보듯이 기존의 축소방법들은 일부분의 구조 변화에도 전체 축소 과정을 그대로 다시 진행하게 된다. 이러한 비효율적인 부분을 개선하고자 제안한 기법에서는 기존의 축소가 완료된 행렬($\mathbf{t}^{(end)}, \mathbf{M}_d^{(end)}$)의 정보를 그대로 이용해서 보다 빠른 축소 연산을 수행하고자 하였다.

이러한 기법을 위 2.3.1 절, 2.3.2 절에서 제안한 병렬화된 부구조 축소기법에 적용할 수 있다. 1 번 부구조의 물성이나 두께 등의 정보가 변경된다면 기존의 Guyan 기반 축소질량행렬(\mathbf{M}_G)은 아래와 같이 변경된다.

$$\mathbf{M}_{G_per} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{G_ii_perturb}^{[1]} + \mathbf{M}_{G_ii}^{[1]} & \mathbf{M}_{G_ip_perturb}^{[1]} & \mathbf{M}_{G_ip}^{[1]} \\ \mathbf{M}_{G_pi_perturb}^{[1]} & \mathbf{M}_{G_pp_perturb}^{[1]} & \\ \mathbf{M}_{G_pi}^{[2]} & & \mathbf{M}_{G_pp}^{[1]} \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

앞 절에서 언급한 바와 같이 Guyan 기법의 질량행렬($(\mathbf{M}_G)^{-1}$)의 역행렬연산은 부구조 별 연산이 어렵다. 즉 변경된 부구조만의 연산이 어렵게 된다. 이를 극복하기 위해서 본 논문에서는 Woodbury formulation [27]를 사용하여 역행렬 연산의 변경된 부분만의 연산으로 아래와 같이 분리하였다.

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}_{G_perturb}]^{-1} &= (\mathbf{M}_G + \mathbf{U}\mathbf{M}_{G_perturb}^{[1]}\mathbf{V})^{-1} \\ &= \mathbf{M}_G^{-1} - \mathbf{M}_G^{-1}\mathbf{U} \left([\mathbf{M}_{G_perturb}^{[1]}]^{-1} + \mathbf{V}\mathbf{M}_G^{-1}\mathbf{U} \right)^{-1} \mathbf{V}\mathbf{M}_G^{-1} \end{aligned} \quad (2.57)$$

위 식에서 볼 수 있듯이 기존 초기 역행렬의 정보를 가지고 있다면 변경된 부분의 역행렬 연산만 가지고도 전체 질량행렬의 역행렬 연산을 수행할 수 있다. 이후 연산은 2.3.2 절의 기법을 이용하면 변경된 부분만의 연산을 통하여 축소된 행렬을 구할 수 있다.

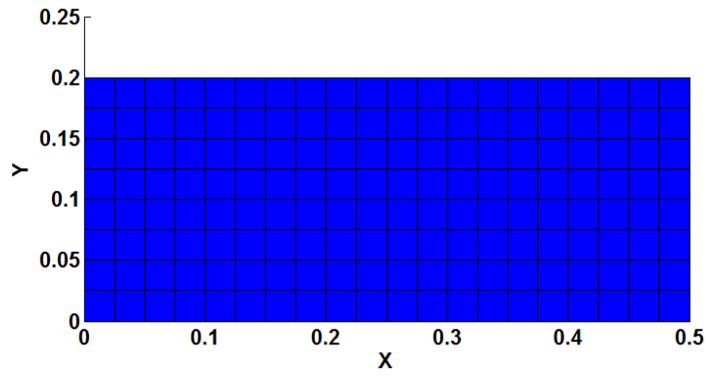
이러한 기존 행렬을 이용한다는 점이 본 논문에서 제안한 기법이 기존 기법과 크게 차별화된 부분으로 최적화와 시스템 식별과 같은 반복적인 연산에서 변경된 부분만의 연산을 통하여 효과적으로 축소행렬을 구할 수 있다.

2.4 수치 예제

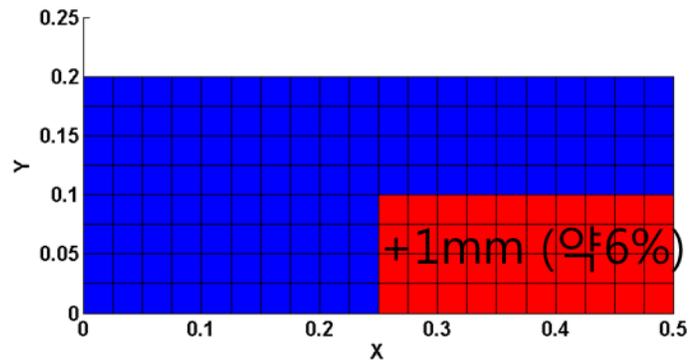
본 절에서는 실제 수치 예제를 통하여 앞 절에서 제안한 축소 기법의 효율성과 정확성을 살펴보고자 한다.

수치예제 1. 단순 평판 (*simple plate*)

본 예제는 그림 2.5 와 같은 단순평판 모델이다. 본 모델을 통해서 기존 축소 기법들의 효율성을 분석하였다. 또한 본 논문에서 제안한 기존의 축소된 행렬을 재활용하는 기법의 가능성과 정확도를 검증하였다. 단순평판 모델예제는 이후 3 장에서 기술할 시스템 식별을 위해 진행한 실제 진동 실험에도 사용되기 때문에 경계조건이 없는 형태로 고유치 해석을 수행하였다. 총 189 개 절점으로 구성되어 있으면 총 160 개의 6 자유도 4 절점 요소를 사용하였다. 경계조건이 없으므로 총 자유도 개수는 1134 가 된다. 부구조는 위, 아래, 좌우 형태로 4 개로 구성하였다. 이 중 두께 변화에 따른 해석의 정확도 분석을 위해 하단 우측 부분의 부구조를 그림 2.5 와 같이 두께 변화를 주었다. 변화 두께는 1mm 로 초기 두께(15mm)의 6.67%정도 이다.



(a) Original model

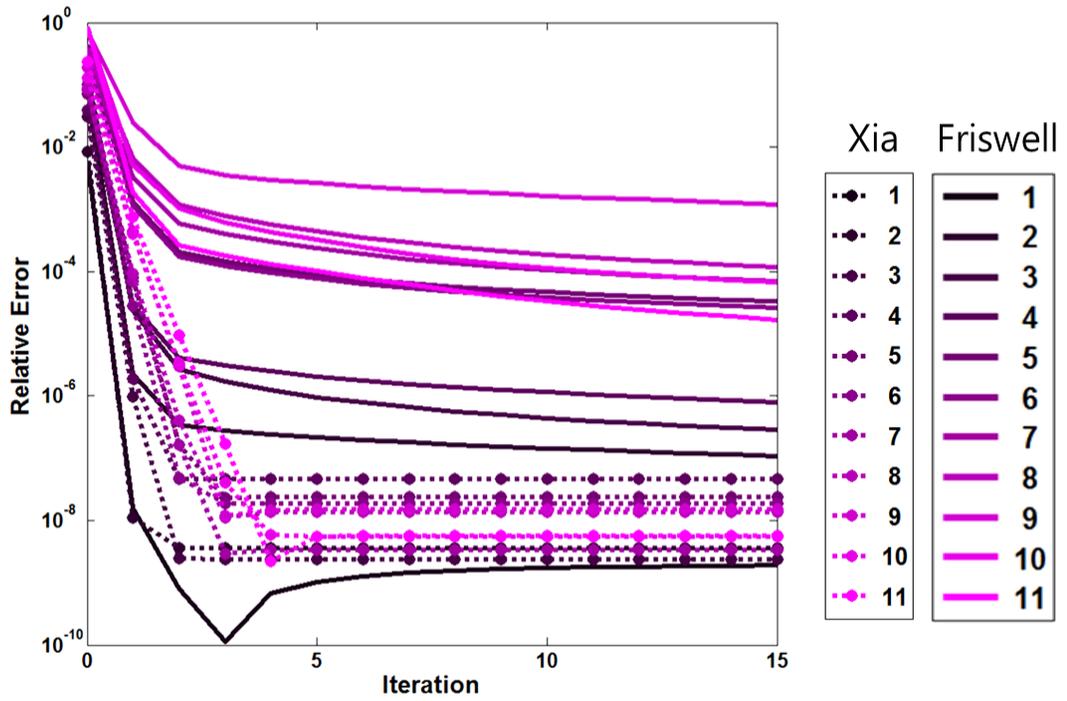


(b) Perturbed model (changed thickness)

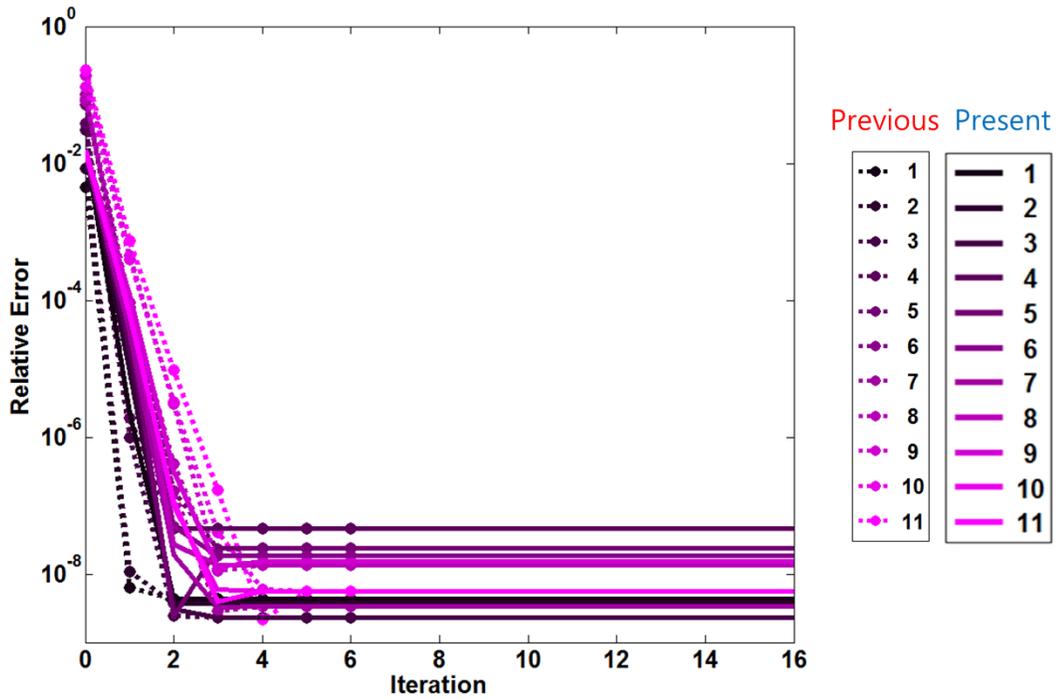
Figure 2.5 Configuration of cantilever plate examples with thickness change

그림 2.6(a)은 초기 모델에서의 기존 방법의 수렴성을 비교한 결과이다. 그림에서 볼 수 있듯이 Xia 방법[10]이 Friswell 방법[9] 보다 수렴속도가 빠른 것을 확인 할 수 있다. 그림 2.6(b)는 이렇게 수렴된 축소행렬을 그대로 재활용한 제안된 기법의 해석 결과다. 그림에서와 같이 기존의 Xia 방법으로 해석한 것보다도 수렴성이 빠른 것을 확인 할 수 있다. 또한 그림 2.7 처럼 두께변화가 30%이상에서도 정확도가 상대오차기준으로 $1e-10$ 수준을 보이는 것을 확인 할 수 있다.

본 외팔평판 예제를 통하여 기존의 수렴된 축소 행렬을 재사용하는 제안된 기법의 가능성을 확인 수 있었다. 다음 예제에서는 제안된 기법을 부구조기법과 병렬화를 활용하여 실제 계산상의 보다 높은 효과적인 해석을 수행하고 이의 효율성을 검증하고자 한다.



(a) Previous methods (Xia [10], Friswell [9])



(b) Present method

Figure 2.6 Relative error of natural frequency in cantilever plate example

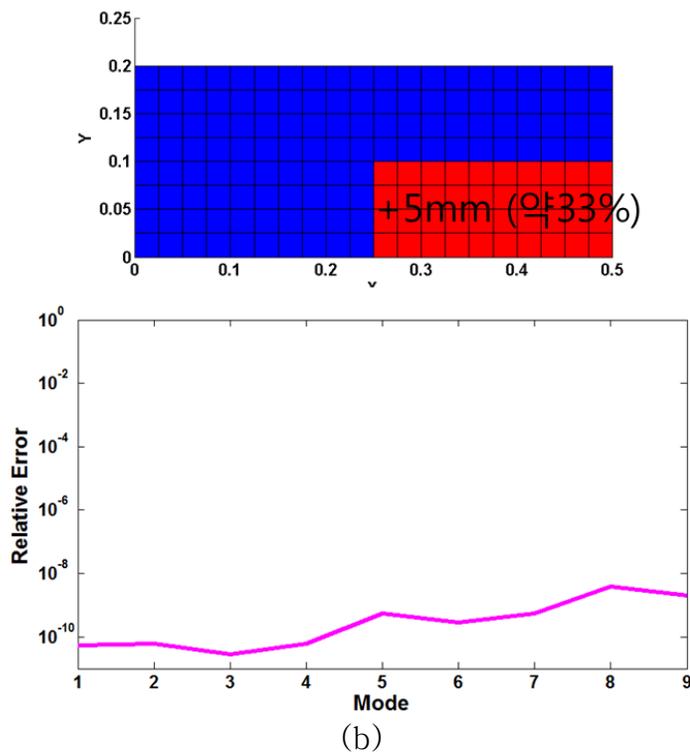
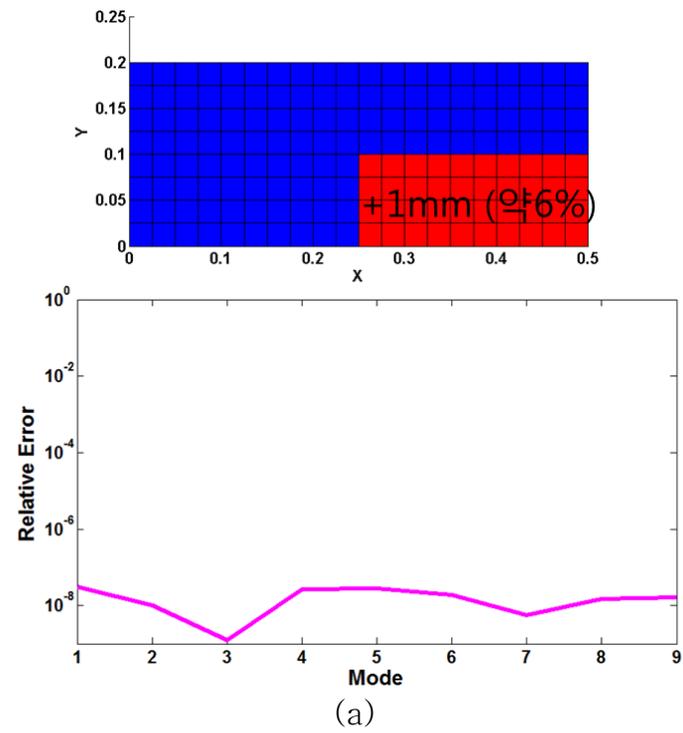


Figure 2.7 Relative error of natural frequency in proposed method

수치예제 2. 자동차 프레임(Car frame)

본 절에서는 제안된 기법의 병렬화의 효율성을 확인하기 위하여 자동차 프레임 모델에 대한 고유치 해석을 수행하였다. 사용된 기법은 2.3.1 절에서 설명한 병렬화된 Guyan 기반 다단계 축소기법이다. 그림 2.8 은 자동차 프레임의 형상과 유한요소 모델의 형상을 나타낸다. 본 모델은 Abaqus 에서 예제로 제공된 모델[28]을 Hypermesh[29]로 재가공한 모델이다. 전체 요소 수는 1,228,081 개이며 총 절점 수와 총 자유도 수는 각각 1,242,687 개와 7,456,122 개이다. 제안된 기법에서는 해당 CPU 들은 전체 구조모델의 정보를 가지고 있는 대신 그림 2.9 과 같이 해당 부구조의 정보만을 가지고 있다. 파란색 원으로 표현된 부분은 다른 부구조와 만나는 경계 절점으로 이 부분의 정보로 부구조 간의 정보가 전달되게 된다.

제안된 기법의 병렬화에 성능을 확인하기 위해서 총 32 개의 코어를 가진 shared memory 기반 컴퓨터를 사용하였다. 상세한 컴퓨터사항은 표 2.1 과 같다. 그림 2.10 은 제안된 기법의 고유치 계산 시간을 보여준다. ‘Lanzocs’ 는 가장 일반적인 고유치 해석 기법으로 Matlab 의 내제된 함수인 ‘eigs’ 함수를 사용한 결과이다. Matlab 의 ‘eigs’ 함수 또한 병렬화가 구현된 것으로 동일한 CPU 를 사용하여 결과를 비교하였다 그림 2.10 처럼 제안된 기법이 기존 방법보다 10 배 가까이 빠른 것을 확인 할 수 있다. 다만 사용한 Guyan 축소기법 기반의 방법이기 때문에 계산 정확도는 Lanzocs 방법보다 낮다는 단점을 가지고 있다. 이는 다소 계산시간을 소요하지만 반복 연산을 통해 계산성능을 향상 시킬 수 있다. 특히

CPU 수의 적을 때에는 Lanzocs 방법의 계산 효율이 좋다. 다만 본 예제처럼 32 개이상의 CPU 를 사용하면 병렬화 효율이 낮아지는 것으로 생각된다. 따라서 기존의 Lanzocs 기법 보다 제안된 방법이 클러스터 환경의 대규모 병렬화 계산에서는 보다 효율성이 높을 것으로 기대된다.

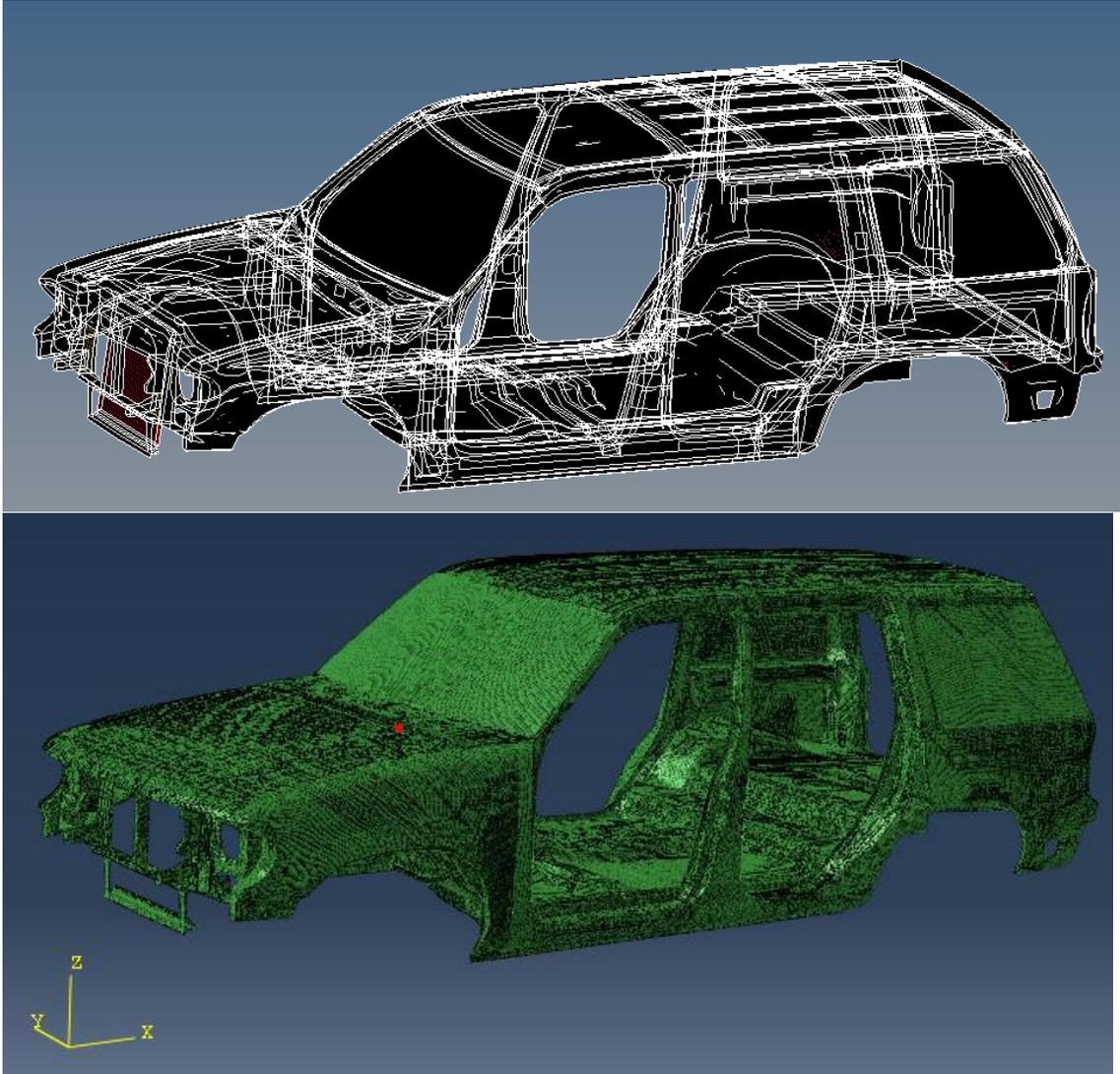


Figure 2.8 Geometric figure and finite element model of car frame

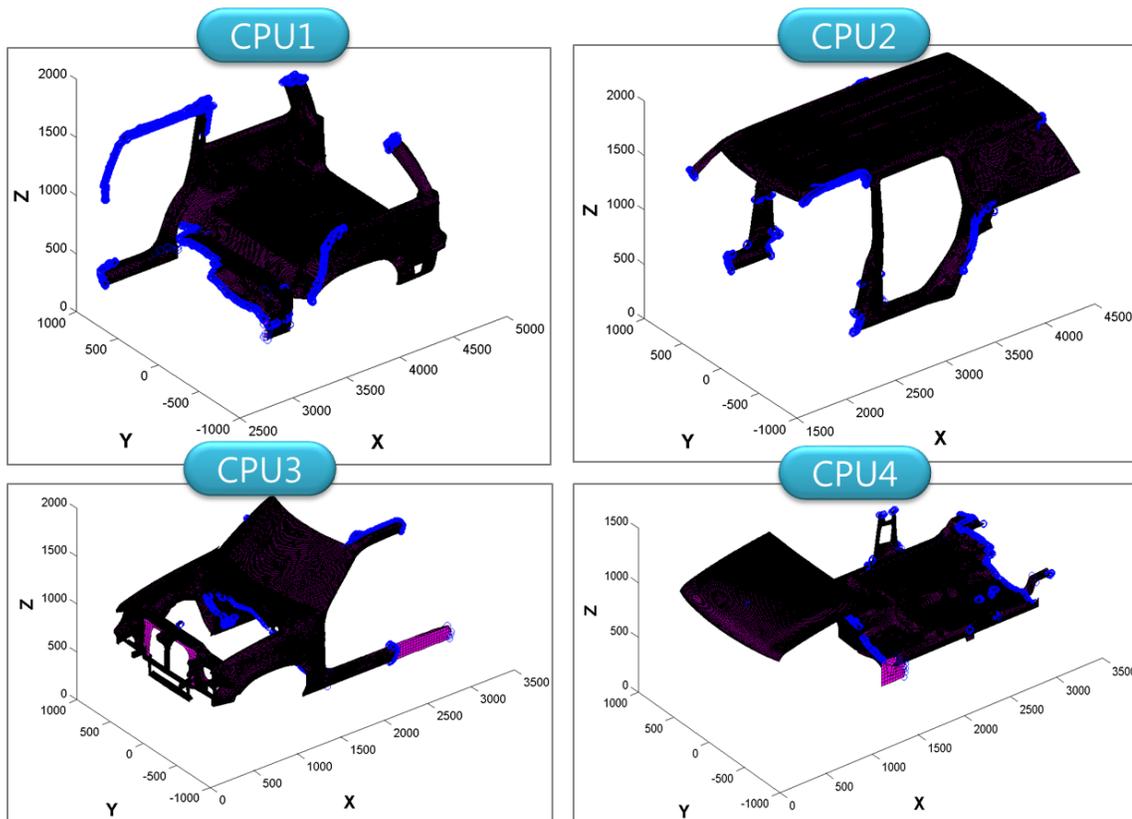


Figure 2.9 Geometric figure and finite element model of car frame

Table 2.1 Computer specification

Specification	
CPU model	Xeon X7550 Hexa core(4EA)
CPU clock	2.00 GHz
Total number of cores	32
Memory	128 GB (shared memory)
Computing capability	0.26T flops

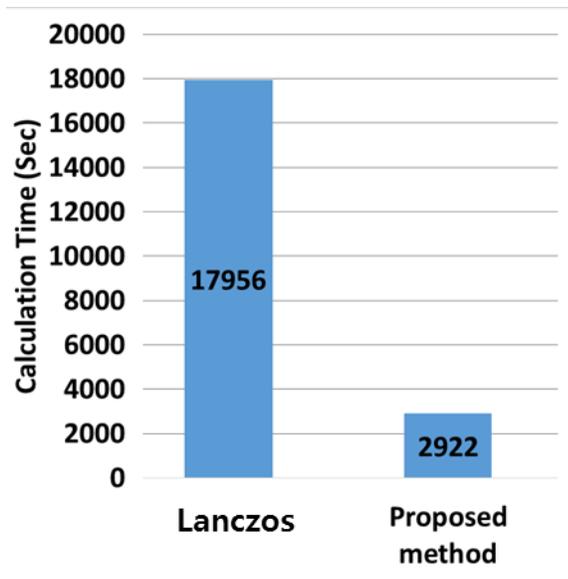


Figure 2.10 Calculation time in car frame model

3. 시스템 식별 기법

시스템 식별은 최적화 등과 같은 역문제로서 반복적인 해석을 통해 실제 구조 시스템의 특성을 가지는 수학적 모델을 구하는 방법이다. 본 논문에서는 다양한 시스템 식별 기법 중에 서론에서도 언급했듯이 기존의 유한요소 모델을 실험 데이터를 통해 갱신하는 유한요소 모델 갱신기법(finite model updating method)에 대해 연구 하였다.

이러한 유한요소 모델을 갱신하기 위해서는 실험에서 측정된 정보를 가지고 기존 유한요소 모델과 차이를 수치화하고 이를 최소화하는 방식으로 진행된다. 이때 기존 유한요소 모델과 실험과의 차이를 수학적 어떤 형식으로 정의하고 비교하는가에 따라서 시스템 식별의 전체 정확도와 효율성에 많은 영향을 준다. 기존의 연구에서는 단순하게 실험의 변위(Displacement), 고유진동수(Natural frequency), 모드형상(Mode shape)등의 비교하여서 이들의 값이 최소화하는 모델을 찾았다.

본 연구에서는 구조물의 전체적인 거동을 표현하기 위해서 동적 평형방정식(Dynamic balance equation, Equilibrium equation)에서 수식 전개를 통하여 잔여 에너지를 정의하고 이를 최소화하는 평형방정식 기반 시스템 식별 기법을 적용하였다[26].

3.1 시스템 식별 정식화

3.1.1. 평형방정식 기반 시스템 식별 정식화

일반적인 동적 평형방정식은 아래와 같다.

$$\mathbf{K}\mathbf{u} - \lambda\mathbf{M}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (3.1)$$

위 식이 초기 가정된 유한요소 모델의 평형방정식이며 이를 기준계 (baseline system)이라고 한다. 다양한 원인으로 인한 구조적 변화를 가진 실제 구조물의 동적 평형식은 아래와 같은 형태로 표현될 수 있다.

$$(\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K})\mathbf{u}' - \lambda'(\mathbf{M} + \Delta\mathbf{M})\mathbf{u}' = \mathbf{0} \quad (3.2)$$

이를 섭동계 (perturbed system) 이고 칭하며, 위 식에서 λ' 와 \mathbf{u}' 은 실험을 통해 얻은 실제 구조물의 고유치 (Eigen value) 와 진동 모드 (Eigen Vector) 를 의미한다. 또한 구조변화의 무차원화를 위해 구조 변화 ($\Delta\mathbf{K}$, $\Delta\mathbf{M}$) 는 아래와 같이 매개변수 (α_e^K , α_e^M) 형태로 표현하였다.

$$\Delta\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{NE} \Delta\mathbf{K}_i = \sum_{i=1}^{NE} S_i^K (\alpha_i^K) \quad (3.3)$$

$$\Delta\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{NE} \Delta\mathbf{M}_i = \sum_{i=1}^{NE} S_i^M (\alpha_i^M) \quad (3.4)$$

실험을 통해 얻은 데이터 (λ' , \mathbf{u}') 와 유한요소 모델에서 얻어지는 초기 유한요소모델의 강성행렬 (\mathbf{K}) 과 질량행렬 (\mathbf{M}) 을 통해서 식 (3.2) 를 만족하는 미지의 구조변화 ($\Delta\mathbf{K}$, $\Delta\mathbf{M}$) 를 구하는 형태로 시스템 식별이 진행된다. 본 논문에서는 위의 평형방정식을 그대로 사용한 아래와 같은 잔류 오차 식을 구성하였다.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}) &= [\mathbf{K}'(\boldsymbol{\alpha}) - \lambda \mathbf{M}'(\boldsymbol{\alpha})] \mathbf{u} \\ &= \left[\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M} + \sum_{i=1}^{NE} \left\{ S_i^K(\alpha_i^K) - \lambda S_i^M(\alpha_i^M) \right\} \right] \mathbf{u} \end{aligned} \quad (3.5)$$

매개변수 $\boldsymbol{\alpha}$ 는 시스템 식별의 시스템의 특성을 나타내는 시스템변수 (system parameter)라 칭하고 아래와 같이 강성행렬과 질량행렬의 구조변화를 표현한다.

$$\boldsymbol{\alpha} = \left[\alpha_1^K \quad \alpha_2^K \quad \cdots \quad \alpha_{NE}^K \quad \alpha_1^M \quad \alpha_2^M \quad \cdots \quad \alpha_{NE}^M \right]^T \quad (3.6)$$

셀요소와 같이 회전 자유도와 병진 자유도가 같이 포함된 일부 구조모델에서 두 자유도 간의 차원 차이로 인한 일부 회전자유도 부분이 과도하게 강조되는 문제를 방지하기 위해서 아래와 같은 형태의 가중함수를 정의하여 잔류 에너지 형태로 변환하였다.

$$W_{ii} = (\phi'_{ij})^2 \quad (3.7)$$

이 가중치를 통하여 아래의 식과 같이 잔류에너지의 norm 값을 최소화하는 구조변화 ($\Delta \mathbf{K}$, $\Delta \mathbf{M}$)를 찾는 형태로 최종 시스템식별문제를 구성하였다.

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}) \quad (3.8)$$

$$\text{Min}[\|\mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha})^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha})\|] \quad (3.9)$$

3.1.2. 자유도 기반 축소법 적용

위 절에서 모델의 고유치와 고유벡터 (λ' , \mathbf{u}')는 실험을 통해 얻은 데이터로 설명하였다. 하지만 실제 실험에서는 센서 및 다른 실험 장비 상의 한계로 인하여 유한요소모델의 모든 절점 위치에서 실험 데이터를 얻는 것은 사실상 힘들게 된다. 따라서 그림 3.1 과 같이 고유벡터 (\mathbf{u}')는 실험을 통해 얻을 수 있는 부분 ($\mathbf{u}'_{\text{Specified}}$)과 알 수 없는 부분 ($\mathbf{u}'_{\text{Unspecified}}$)으로 아래와 같이 나뉘게 된다.

$$\mathbf{u}' = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}'_{\text{Specified}} \\ \mathbf{u}'_{\text{Unspecified}} \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

specified 는 ‘specified DOF’ 는 나타내며 실험에서 센서의 응답을 통해서 얻어지는 자유도를 뜻한다. 반대로 unspecified 는 ‘unspecified DOF’를 의미하며 센서가 위치하지 않는 자유도를 의미 한다. 따라서 식 3.8 은 시스템변수가 아래와 같이 늘어난 형태로 표현된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}_u) &= [\mathbf{K}'(\boldsymbol{\alpha}) - \lambda \mathbf{M}'(\boldsymbol{\alpha})] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}'_{\text{Specified}} \\ \mathbf{u}'_{\text{Unspecified}} \end{Bmatrix} \\ &= \underbrace{[\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}'_{\text{Specified}} \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\text{Known}} \\ &\quad + \underbrace{[\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}] \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{u}'_{\text{Unspecified}} \end{Bmatrix} + \sum_{e=1}^{NE} [S_e^K(\boldsymbol{\alpha}_e^K) - \lambda S_e^M(\boldsymbol{\alpha}_e^M)] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}'_{\text{Specified}} \\ \mathbf{u}'_{\text{Unspecified}} \end{Bmatrix}}_{\text{Unknown}} \end{aligned} \quad (3.11)$$

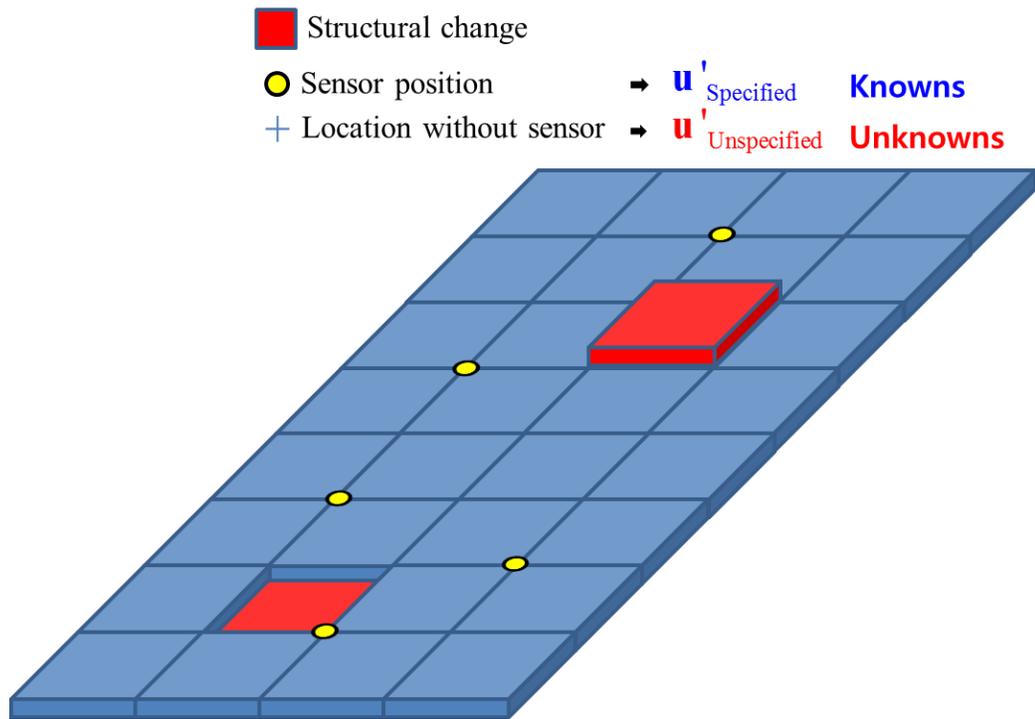


Figure 3.1 Schematic figure of system identification model

이렇게 센서가 부착되지 않는 자유도의 응답은 센서의 수보다는 월등히 많고 이로 인해 미지수가 기하급수적으로 늘어서 평형방정식 기반의 요소단위의 시스템 식별이 어려워진다. 이를 해결하기 위해서 본 논문에서는 2장에서 설명한 자유도 기반 축소 기법의 변환행렬을 통하면 모델 전체의 고유벡터를 실험으로 측정된 부분의 값만으로 근사치를 구하였다. 따라서 변환행렬을 통해 식 3.11 을 재구성하면 아래와 같이 미지수 항을 줄여서 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}) &= [\mathbf{K}(\boldsymbol{\alpha}) - \lambda \mathbf{M}(\boldsymbol{\alpha})] \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{t}(\boldsymbol{\alpha}) \end{bmatrix} \mathbf{u}'_{\text{Specified}} \\
 &= [\mathbf{K}_0 - \lambda \mathbf{M}_0] \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{t}(\boldsymbol{\alpha}) \end{bmatrix} \mathbf{u}'_{\text{Specified}} + \sum_{e=1}^{NE} [S_e^K(\alpha_e^K) - \lambda S_e^M(\alpha_e^M)] \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{t}(\boldsymbol{\alpha}) \end{bmatrix} \mathbf{u}'_{\text{Specified}}
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

3.1.3. 실험오차를 고려한 시스템 식별

위 절에서 언급했듯이 \mathbf{u}'_s 는 실험을 통해 측정되는 고유벡터이다. 하지만 실제 측정과정에서는 고유벡터에 측정오차가 발생하게 된다. 이러한 측정 오차가 크면 기존의 시스템 식별 기법으로는 식별 자체가 불가능하게 된다. 대칭구조에서의 고유벡터의 대칭성 등이 측정 오차로 인해서 어긋나는 형태가 발생 될 수 있다. 본 논문에서는 이러한 특징을 이용하여서 구조물에 특성에 맞는 형태로 측정된 응답을 보정하고자 하였다. 이를 위해 측정 오차를 나타내는 시스템 변수를 추가하여 이를 변경함으로써 측정오차를 보완하는 시스템 식별 기법을 제안하고자 한다.

이를 위해서 본 논문에서는 실제 고유 벡터는 아래와 같이 측정된 값에서 노이즈 부분을 제거한 형태로 표현하였다.

$$\mathbf{u}'_{\text{Specified}} = \mathbf{u}'_{\text{Experiment}} - \mathbf{u}'_{\text{Noise}} \quad (3.13)$$

따라서 식 3.12 은 아래와 같이 표현된다.

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}) = [\mathbf{K}(\boldsymbol{\alpha}) - \lambda \mathbf{M}(\boldsymbol{\alpha})] \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{t}(\boldsymbol{\alpha}) \end{bmatrix} (\mathbf{u}'_{\text{Experiment}} - \mathbf{u}'_{\text{Noise}}) \quad (3.14)$$

그리고 본 논문에서는 노이즈 부분을 아래와 같이 매개변수화된 시스템 변수로 설정하였다.

$$\mathbf{u}'_{\text{Noise}} = \mathbf{u}'_{\text{Experiment}} \times \alpha_{\text{Noise}} \quad (3.15)$$

식 3.12 에서의 시스템 변수는 구조변화를 나타내는 \mathbf{a} 과 노이즈를 표현하는 α_{Noise} 로 아래와 같이 구성된다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}(\mathbf{a}, \alpha_{\text{Noise}}) &= [\mathbf{K}(\mathbf{a}) - \lambda \mathbf{M}(\mathbf{a})] \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{t}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \mathbf{u}'_{\text{Experiment}} (1 - \alpha_{\text{Noise}}) \\
&= [\mathbf{K}_0 - \lambda \mathbf{M}_0] \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{t}(\mathbf{a})^{(j)} \end{bmatrix} \mathbf{u}'_{\text{Experiment}} (1 - \alpha_{\text{Noise}}) \\
&\quad + \sum_{e=1}^{NE} [S_e^K(\alpha_e^K) - \lambda S_e^M(\alpha_e^M)] \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{t}(\mathbf{a})^{(j)} \end{bmatrix} \mathbf{u}'_{\text{Experiment}} (1 - \alpha_{\text{Noise}})
\end{aligned} \tag{3.16}$$

위의 식의 잔류 오차를 최소화하는 형태의 반복적인 해석이 수행된다. 이 때 노이즈 항(α_{Noise})이 지나치게 크게 변하게 되면 측정된 응답에 맞는 구조물을 찾는 형태가 아닌 기존 구조물에 맞는 응답을 변형하는 형태의 시스템 식별이 되어 버리기 때문에 노이즈의 항(α_{Noise})이 지나치게 크게 변형하는 것을 막아야 한다. 이를 위해서 본 논문에서는 3.3.2 절에서 노이즈 항(α_{Noise})을 고려한 별도의 시스템 식별 알고리즘을 제안하였다.

3.2 제안한 시스템 식별 알고리즘

시스템 식별에서 자유도 기반 축소법을 적용하면 평형방정식을 직접적으로 이용하여 정확한 시스템 식별 문제를 구성하면서도 미지수 즉 시스템 변수의 추가 없이 시스템 식별 문제를 구성할 수 있다. 하지만 추가적인 시스템 변수가 없다고 하더라도 유한요소 모델 갱신을 정확하게 하기 위해서는 구조물의 전체 요소 개수만큼의 시스템 변수가 필요하게 된다. 따라서 대형 구조물의 시스템 식별문제는 다수의 미지수(unknown)를 역해석문제가 된다. 이는 다변수 최적화와 비슷한 형태의 계산 자원과 시간이 요구 된다.

또한 그림 3.2 와 같이 초기 유한요소모델과 시스템 식별을 통해 갱신된 유한요소모델에서 구조 변화가 없는 요소가 흔히 다수 발생하게 된다. 이럴 경우 구조변화를 나타내는 시스템 변수의 값이 0 으로 존재하게 되고, 이는 초기 값과 같은 값으로 수렴하는 많은 변수를 가진 다변수 최적화 문제 형태로 해의 수렴이 급격하게 떨어지게 된다. 따라서 이를 해결하기 위해서 본 논문에서는 시스템 식별에 맞는 역해석 알고리즘들을 개발하였다.

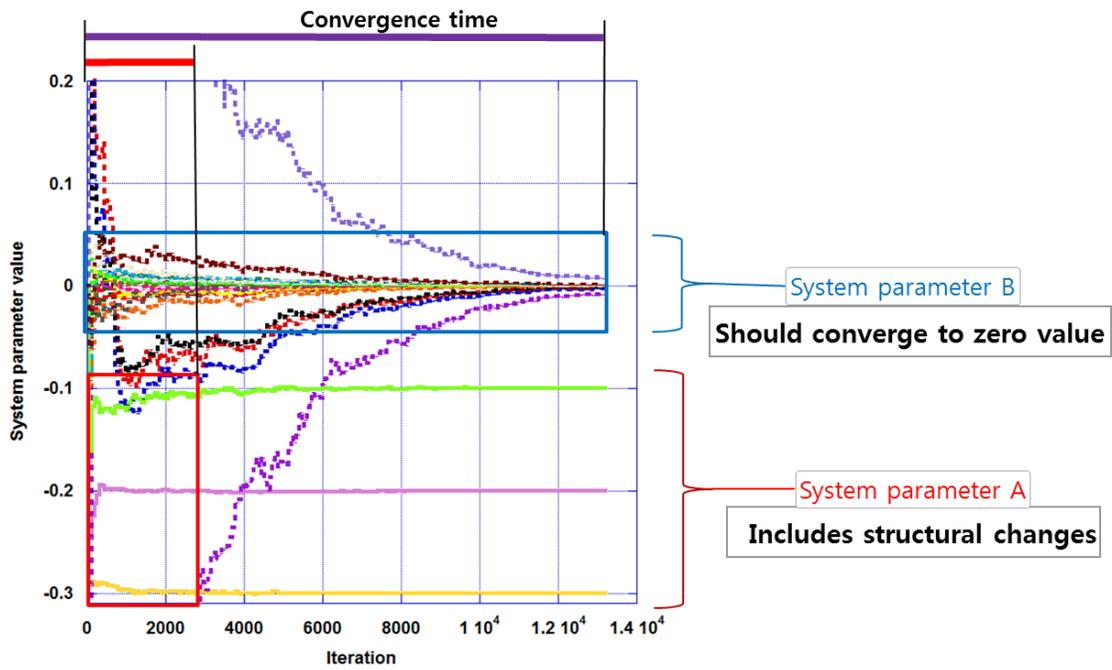


Figure 3.2 Changes in the values of system parameters in system identification with conventional gradient-based optimization algorithm

3.2.1. 계층적 군집화(Hierarchical Clustering) 적용

계층적 군집화 기법(Hierarchical Clustering Algorithm)은 데이터 마이닝(data mining) 등에서 사용되는 기법으로 데이터 사이에 유사성이 있는 형태를 계층적으로 군집으로 묶는 기법이다[30–33]. 군집화하는 주요 목적은 각각의 군집화된 집단의 특성을 파악하기 위해서 이다. 본 논문에서는 그림 3.3 와 같이 이러한 군집화 기법의 아이디어에 착안하여 시스템 식별에 적합한 역문제 해석 알고리즘을 고안하였다.

계층적 군집화 기법은 크게 두 가지 형태로 나뉘는 계층적 군집화(divisive hierarchical clustering)와 응집형 계층 군집화(Agglomerative Hierarchical Clustering)가 있다. 나뉘는 계층적 군집화는 하나로 된 군집을 연계적으로 분류하는 형태이고 응집형 계층 군집화는 이와 반대되는 형태이다. 본 논문에서는 나뉘는 계층적 군집화를 시스템 식별에 적용하였다.

제안된 방법에서는 각 요소 별로 정의된 시스템 변수를 아래 식과 같이 임의로 나누어진 몇 개의 군집(Cluster)으로 묶었다. 하나의 군집에 포함된 요소는 모두 동일한 시스템 변수를 가지게 된다.

$$\begin{cases} \alpha_i^K = \alpha_{p,q}^K \\ \alpha_i^M = \alpha_{p,q}^M \end{cases} \quad \forall e_i \in \Omega_{p,q} \quad (3.17)$$

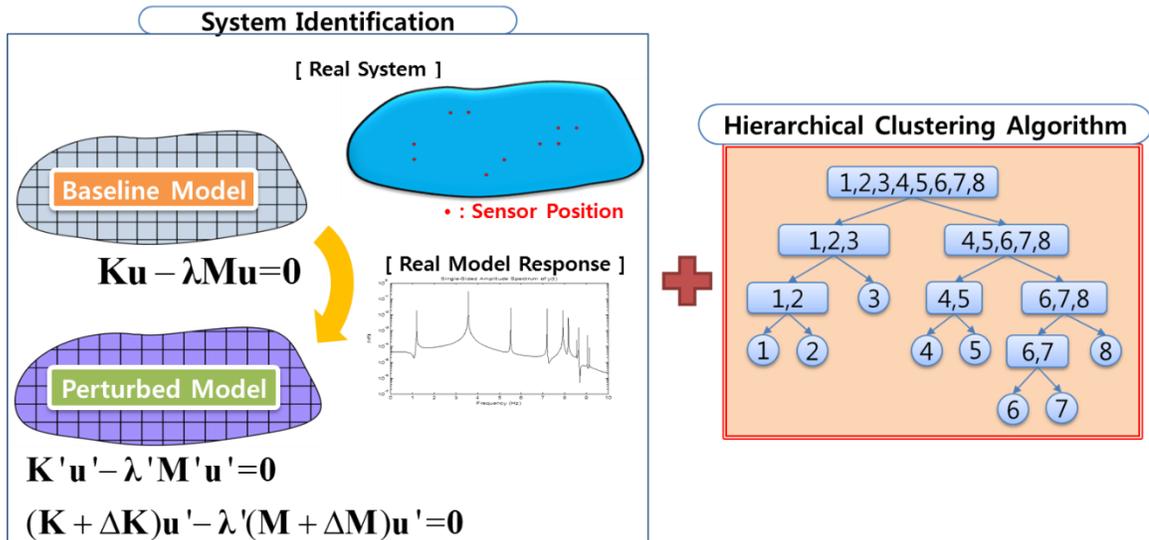


Figure 3.3 Applying hierarchical clustering algorithm

$\Omega_{p,q}$ 는 p 단계에 q 번째 군집을 의미한다. $\alpha_{p,q}^K$ 와 $\alpha_{p,q}^M$ 는 해당 군집의 시스템 변수를 나타낸다. 따라서 군집을 묶인 형태의 시스템 변수는 아래와 같이 표현하였다.

$$\mathbf{\alpha}_p = [\alpha_{p,1}^K \quad \alpha_{p,2}^K \quad \cdots \quad \alpha_{p,NC}^K \quad \alpha_{p,1}^M \quad \alpha_{p,2}^M \quad \cdots \quad \alpha_{p,NC}^M]^T \quad (3.18)$$

NC 는 군집의 개수(Number of Cluster)를 의미한다. 이렇게 군집으로 시스템 변수를 묶으면 총 시스템 변수의 수가 줄어들어서 역문제 해석이 수월해진다. 하지만 군집으로 묶여서 몇 개의 시스템 변수만으로 전체 모델의 구조변화를 표현하는데 제한이 있기 때문에 이렇게 묶어진 형태의 시스템 변수로는 정확한 시스템 식별을 수행하지 못한다. 그래서 제안된 방법에서 시스템 식별과정에서 변경되는 시스템 변수 값을 고려해서 기존의 군집을 단계적으로 나눈다. 또한 구조 변화가 없는 즉 초기 모델과 실제 모델이 동일한 것으로 예상되는 부분의 군집은 시스템 변수에서 제외하고 초기 모델의 정보를 그대로 사용한다. 이러한 과정을 분화 과정(division process)와 제외 과정(discarding process)으로 정의하다. 이 두 과정을 통해 군집형태는 구조변화가 존재하는 부분에만 존재하는 형태로 변형된다.

분화 하거나 제외하는 기준은 아래와 같이 시스템 변수의 상대적인 값으로 설정하였다.

$$r_q = \frac{\alpha_{p,q}}{\alpha_{\max}} \quad (3.19)$$

r_q 는 q 번째 군집의 상대 크기로 군집의 최대값(α_{\max})에 대한 해당 시스템 변수($\alpha_{p,q}$)의 비를 나타낸다. 이 상대 크기는 두 개의 기준선(upper limit, L_U and lower limit, L_L)에 따라 나뉘게 된다. 아래의 식과 같이 L_U 보다 큰 값을 가진 군집은 두 개의 군집으로 나누어지고 L_L 보다 작은 값을 가진 군집은 제외 영역(discarded region, $\Omega_{Discard}$)으로 포함된다. 이 두 기준선(L_U , L_L)은 기법상에서 설정해줘야 하는 변수이다. 3.3 절에 수치예제를 통해 두 변수의 값에 따라서 시스템 식별의 정확도가 민감하게 변하지 않음을 확인할 수 있다.

$$\begin{cases} \Omega_{p,q} \rightarrow \Omega_{p+1,q}, \Omega_{p+1,q+1} & (r_q > L_U) \\ \Omega_{p,q} \rightarrow \Omega_{p,q} & (L_L < r_q < L_U) \\ \Omega_{p,q} \rightarrow \Omega_{Discard} & (r_q < L_L) \end{cases} \quad (3.20)$$

제외영역($\Omega_{Discard}$)은 구조 변화가 없는 영역을 의미하고, 이 영역에 포함된 군집은 시스템 변수의 값을 아래의 식과 같이 0으로 고정하고 다음 연산부터 시스템 변수에서 제외 시킨다.

$$\alpha_i^K = 0, \alpha_i^M = 0 \quad \forall e_i \in \Omega_{Discard} \quad (3.21)$$

제안한 기법의 이러한 제외 과정으로 인해 반복적인 분화 과정에도 시스템 변수가 크게 증가하지 않게 하는 장점을 가진다. 그림 3.4는 이러한 분화와 제외 과정을 통해 군집이 변화는 과정을 나타낸다.

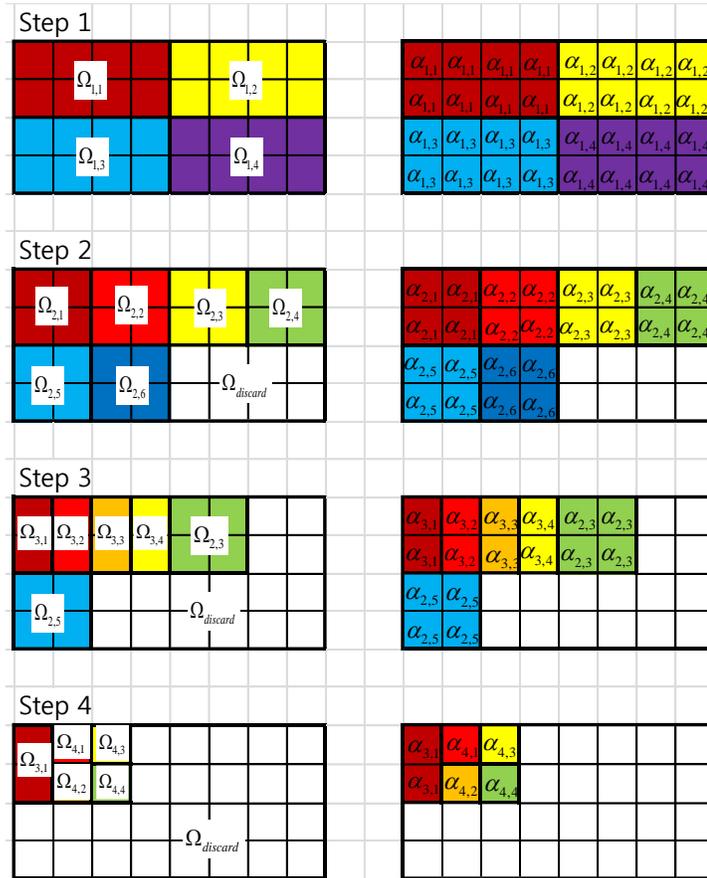


Figure 3.4 Changes of clusters and system parameters in each step

요소가 하나만을 포함 군집의 경우 2 개 이상을 포함한 군집에 비해서 시스템 변수의 값이 크게 나오게 된다. 따라서 구조 변화가 큰 요소가 하나의 군집으로 구성되게 되면 전체 군집 중에서 최대값을 항상 가지게 된다. 이 경우 작은 구조 변화를 가진 요소가 제외영역으로 설정될 수 있다. 이를 방지하기 위해서 시스템 변수 최대값(α_{\max})은 아래의 식과 같이 2 개의 요소 이상이 포함된 군집의 시스템 변수 중에서 최대값을 선정한다.

$$\alpha_{\max} = \max(\alpha_i) \quad e_i \in \{\Omega_{p,q} : N(\Omega_{p,q}) \geq 2\} \quad (3.22)$$

$N(\Omega_{p,q})$ 는 해당 군집에 포함된 요소의 개수를 나타낸다. 이러한 분화와 제외 과정을 통해서 더 이상 군집의 형태가 바뀌지 않을 경우의 군집이 있는 영역을 후보 영역이라고 정의 한다. 그림 3.5 는 설명한 제안된 기법에서 후보영역을 설정하는 방법의 순서도이다.

위에서 언급한 방법으로 후보영역을 설정되면 후보 영역만으로 시스템 식별 연산을 수행한다. 몇 개의 군집으로 표현된 후보 영역만을 가지고 시스템 식별을 수행하므로 빠르게 연산을 수행할 수 있지만 만약 구조변화를 가진 일부 요소가 후보 영역에 포함되어 있지 않으면 정확한 해를 얻지 못하게 된다. 이러한 문제를 방지하기 위해서 제안된 기법에서는 후보 영역만 가지고 정확한 해를 얻지 못할 경우 제외 영역을 다시 되살리는 복원 과정(recovering process)을 수행하게 된다.

복원 과정에서는 아래와 같이 제외영역을 같은 시스템 변수로 묶어서 하나의 군집으로 다시 설정한다.

$$\Omega_{Discard} \rightarrow \Omega_{1,q+1} \quad (3.23)$$

추가 된 군집 또한 기존의 군집과 같이 분화, 제외 과정을 거쳐서 구조변화가 포함된 요소만을 가진 형태로 변형된다. 제안된 기법의 시스템 식별의 전체 과정은 그림 3.6 과 같다.

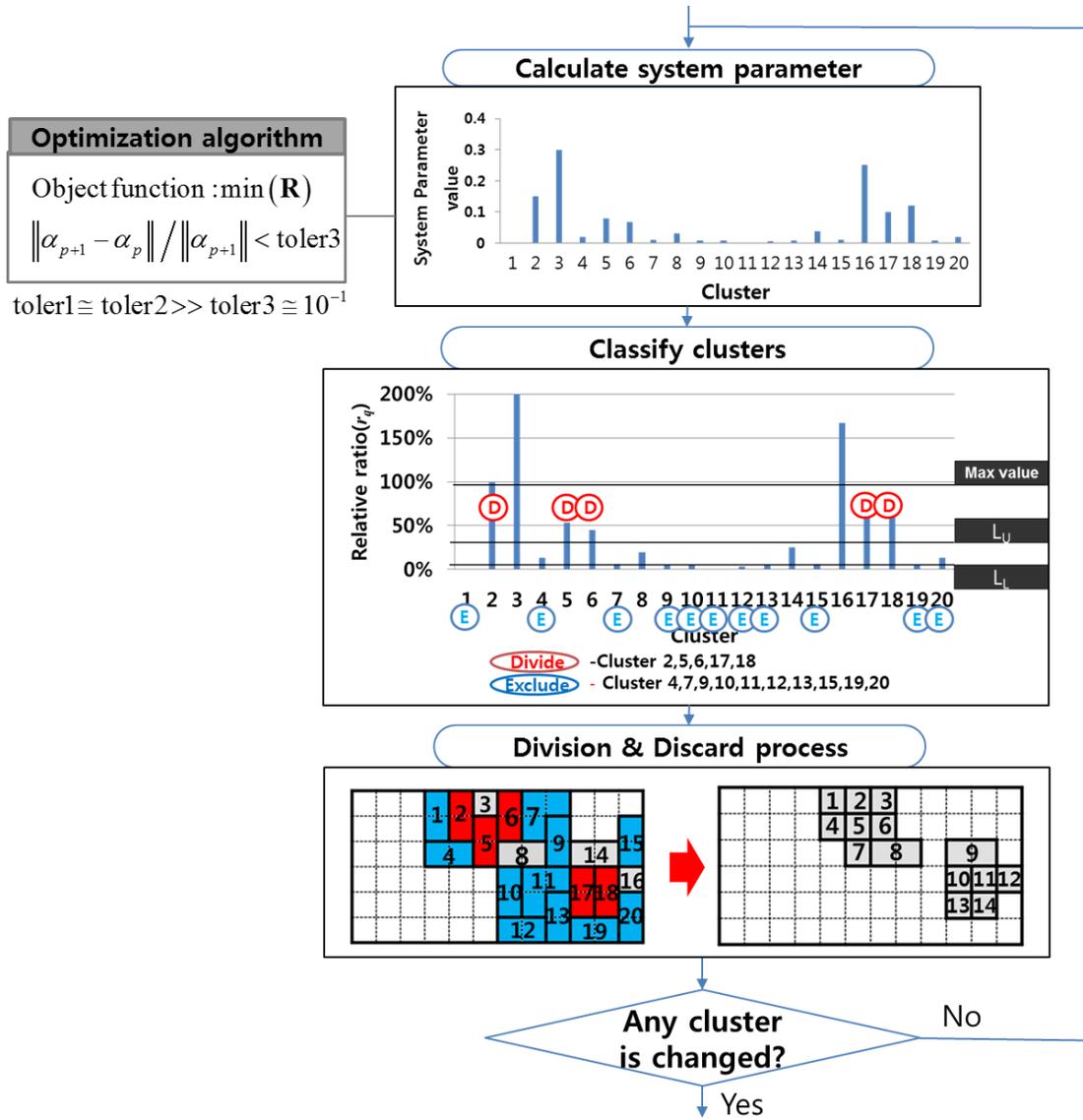


Figure 3.5 Flow char of process that determines candidate region in proposed hierarchical clustering algorithm

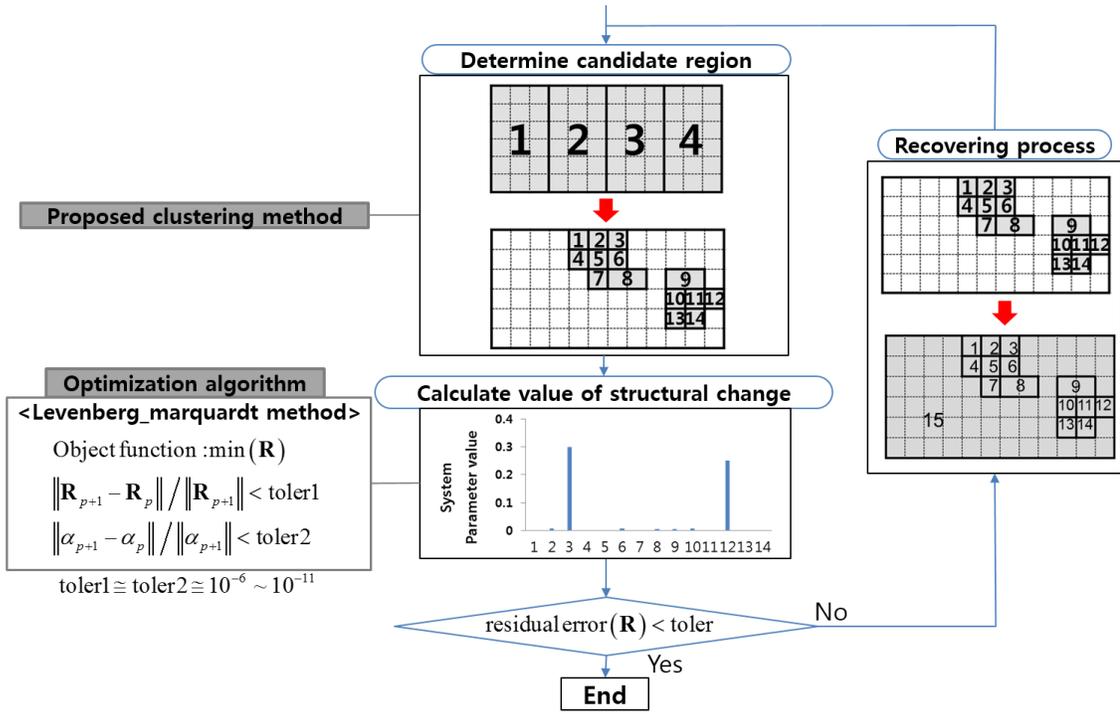


Figure 3.6 Flow char of system identification procedures in proposed hierarchical clustering algorithm

3.2.2. 실험오차를 고려한 시스템 식별을 위한 기법

위 절에서 설명한 계층적 군집화 기법은 요소가 많은 시스템의 식별을 용이하게 한다. 하지만 실험오차의 경우에는 요소 단위로 묶는 것이 직관적이지 못하여 3.1.3 절과 같이 실험오차를 고려한 시스템 식별에는 적합하지 못하다. 하여 본 논문에서는 실험오차를 고려한 시스템 식별을 위한 역문제 수행 알고리즘을 별도로 고안하였다.

제안한 방법의 기본 형태는 다수의 시스템 변수 중에 구조변화가 있는 위치처럼 중요도가 높은 시스템 변수만을 선정해 이를 통해 시스템 식별을 수행하는 형태이다. 이를 위해서 초기에 시도된 형태는 유전 알고리즘(Genetic Algorithm)을 활용하는 것이다. 제안된 방법에서는 그림 3.7 과 같이 기존의 기울기 기반 최적화 기법(Gradient-based optimization method) 도중에 시스템 변수를 선정하는 GA 과정을 수행한다. 기울기 기반 최적화 기법이란 유전 알고리즘과 상반되는 일반적인 역해석 수행 기법으로 가장 대표적인 기법으로는 뉴턴 랩슨 방법(Newton-Rhapson method)이 있다.

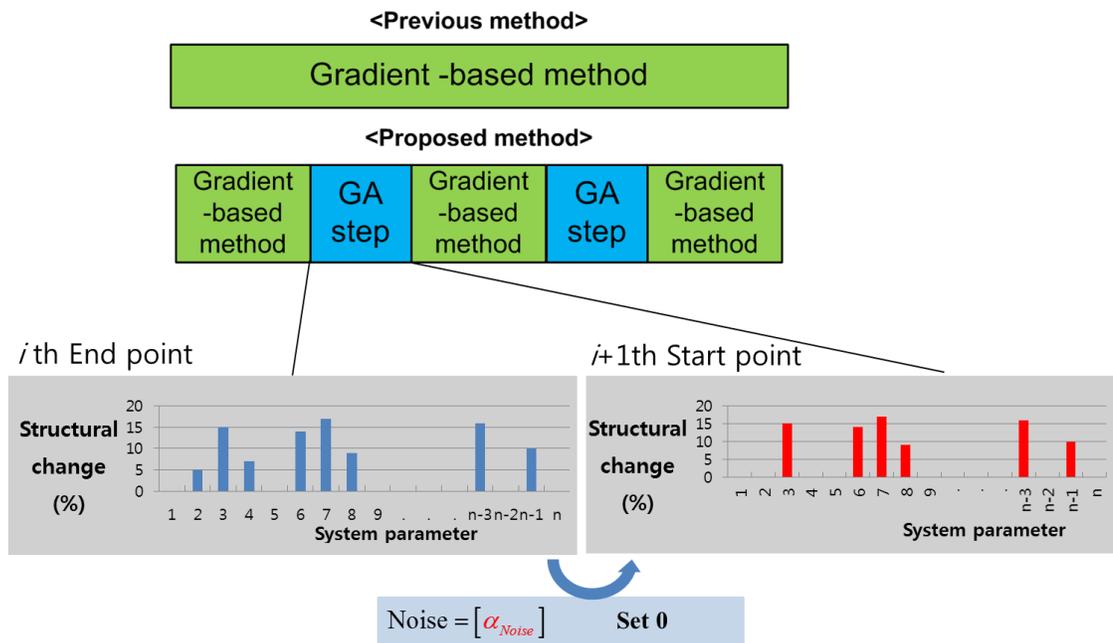


Figure 3.7 Proposed system identification algorithm using genetic algorithm

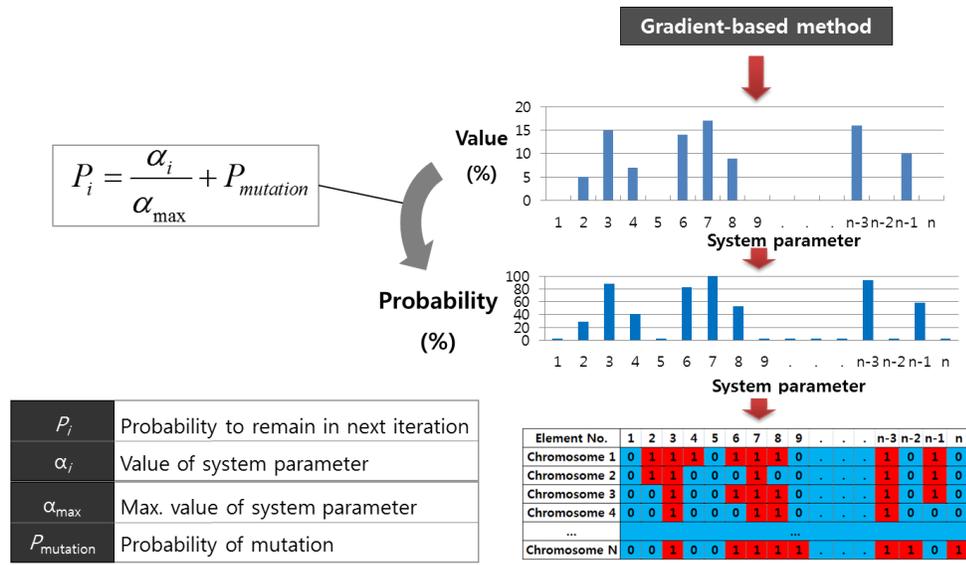
유전 알고리즘에서 룰렛 형태로 각 유전자가 선택될 확률 정의 하게 되는데, 제안한 기법에서는 아래와 같이 각 시스템 변수가 선택될 확률을 정의 하였다.

$$P_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_{\max}} + P_{\text{mutation}} \quad (3.24)$$

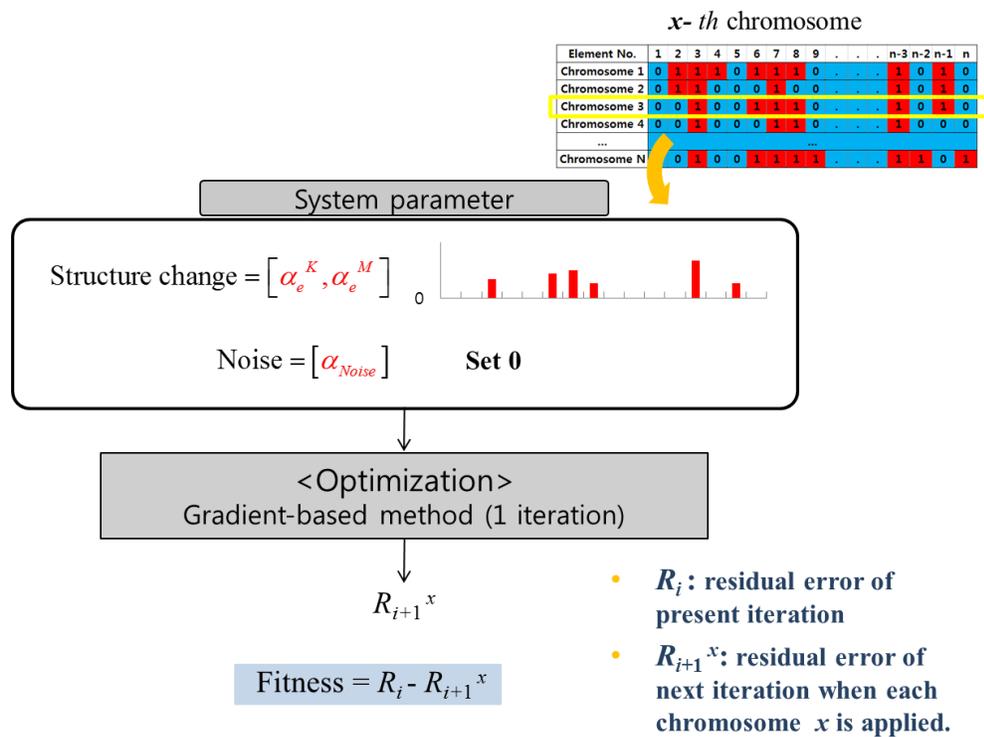
해당 시스템 변수가 선정될 확률(P_i)은 시스템 변수의 최대값(α_{\max})에 대한 해당 시스템 변수의 값(α_i)의 비율과 돌연변이(mutation) 확률(P_{mutation})에 의해 결정된다.

위 식을 통하여 기존 최적화 기법에서 얻어진 시스템 변수의 값에 따라서 시스템 변수들이 선정되고 그림 3.8(a)과 같이 다양한 형태의 시스템 변수세트가 구성된다. 이러한 셋을 유전 알고리즘에서 염색체(Chromosome)로 불린다. 각각의 세트에서 적합성(fitness)을 계산하여 가장 큰 값을 가진 세트를 선정하여 이후 기울기 기반 기법에서는 선정된 세트에 포함된 시스템 변수만을 가지고 시스템 식별을 수행한다. 적합성은 그림 3.8(b)와 같이 해당 세트를 넣고 기울기 기반 최적화를 한 스텝 수행했을 때 잔류오차가 감소되는 크기로 정의 하였다.

또한 GA 단계마다 선정되는 시스템 변수의 값은 그대로 유지된다. 다만 측정오차를 나타내는 노이즈 부분의 시스템 변수는 0 으로 초기화 된다. 이를 통하여 제안된 기법은 측정오차의 시스템 변수가 주되게 변경되어서 발생하는 문제를 방지할 수 있다.



(a) Generation of population



(b) Calculation of fitness

Figure 3.8 Process selecting system parameters in GA step of proposed system identification algorithm

3.2.3. 다중 시험 세트 기법(*multi test-set method*)

위의 유전 알고리즘을 기반으로 구성된 방법은 확률에 의한 임의성이 존재한다. 따라서 시스템 식별을 수행할 때마다 시스템 변수의 분포 등이 달라지게 된다. 이로 인해 계산 시간의 차이를 보이게 된다. 이를 보완하기 위해서 다중 시험 세트 기법(Multi test-set method)을 고안하였다.

다중 시험 세트 기법은 기존의 유전 알고리즘을 활용한 것과 유사한 형태로 여러 개의 시스템 변수 세트를 만든다. 먼저 모든 시스템 변수를 포함한 상태에서 일정 수준의 기울기 기반기법을 통해 시스템 식별을 수행한다. 이렇게 얻어진 그림 3.9 와 같은 시스템 변수 값을 가지고 여러 개의 시스템 변수 세트를 생성하게 된다. 다만 유전알고리즘처럼 확률에 의한 임의의 형태가 아닌 특정 값 이상의 시스템 변수만을 선택하여 세트를 구성한다. 이를 통하여 다수의 시험 세트는 몇 개의 시스템 변수만을 포함하게 된다. 제일 마지막 세트는 모든 시스템 변수를 모두 포함하게 된다. 그러면 마지막 세트의 계산시간이 크게 증가하게 된다. 이를 방지하기 위해서 마지막 세트는 3.3.1 절의 계층적 군집기법의 복원과정과 유사하게 제일 낮은 기준 이하의 변수들은 하나의 시스템 변수로 묶어서 표현한다.

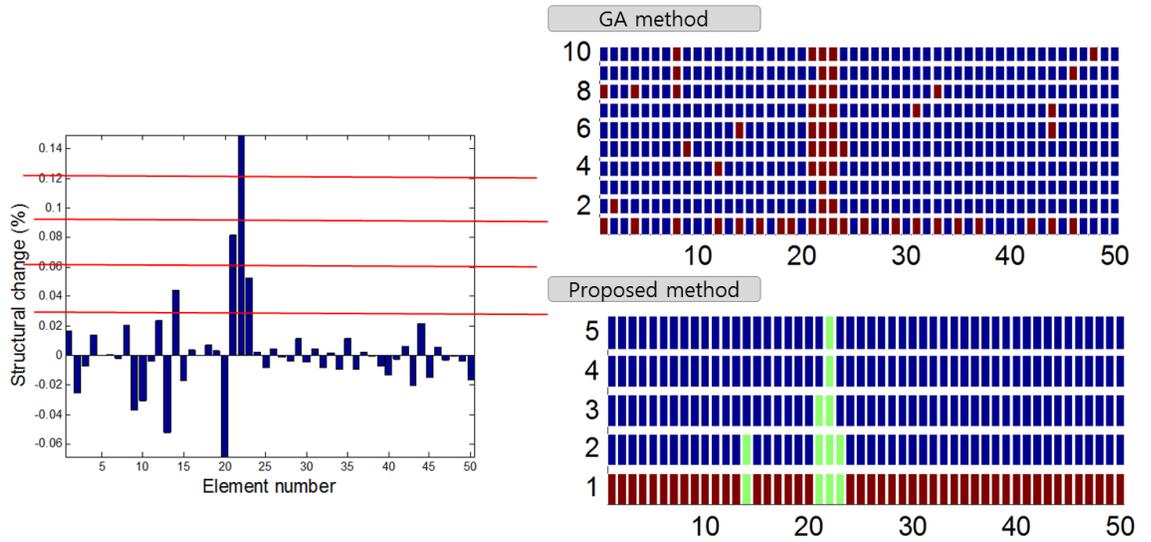


Figure 3.9 Concept of proposed multi test-set method

이렇게 생성된 시험 세트를 위의 유전알고리즘을 활용한 형태와 유사하게 적합성을 각 세트마다 구하고 가장 적합한 시험 세트를 선정하다. 이후 다시 기울기 기반 최적화 기법을 일정 수준 수행한다. 제일 마지막 세트가 가장 적합한 시험 세트로 선정된 경우에는 3.3.1 절의 계층적 군집 기법의 분화과정과 유사하게 하나로 묶여 있는 낮은 시스템 변수의 군집을 세분화 한다.

계층적 군집 기법은 초기에 상대적으로 작은 군집으로 묶여진 시스템 변수들이 시스템을 제대로 표현하지 못하는 시스템 변수의 값을 기준으로 군집을 나누는 것에 대한 이론적 근거가 부족한 점이 단점으로 생각될 수 있다. 하지만 다중 시험 세트 기법은 유전 알고리즘을 활용한 기법과 같이 초기에 시스템 변수를 모두 사용하여 계산한 값을 기준으로 시스템 변수를 설정하기 때문에 이러한 문제가 발생하기 않는다. 또한 계층적 군집 기법의 중요한 시스템 변수를 빠르게 선정하는 장점을 그대로 가져갈 수 있다. 그리고 측정오차를 고려한 시스템 식별에도 기존의 장점을 그대로 가진 체로 바로 적용할 수 있다.

3.3 수치 예제

수치예제 1. 계층적 군집 기법 검증

시스템 식별에서 사용할 수치 모델은 이는 뒤에서 설명할 실제로 수행한 진동 실험의 모델과 유사성을 유지하기 위해서 단순 평판을 기본으로 하였다. 첫 예제는 그림 3.10의 외팔 평판 모델이다. 전체 절점 수는 84 개이며 4 절점 6 자유도 셀요소를 사용하여 전체 자유도는 504 개이다. 그림 3.10에 파란색 원은 선정된 주자유도를 나타낸다. 경계 조건은 삼각형으로 표현된 끝 부분이 모든 자유도를 구속한 형태이다. 파란색 별로 표시된 요소가 구조변화가 존재하는 요소로 각각 20%, 10%, 15%, 25%의 강성 행렬의 감소를 가지고 있다. 25% 강성행렬의 감소는 해당 요소행렬의 모든 값이 25% 낮은 형태로 이 때 시스템 변수는 -0.25가 된다. 본 예제에서는 편의를 위해 (-)를 생략한 형태로 표현하였다. 이러한 구조변화로 인하여 고유치의 변경이 발생한다. 고유치 변화량은 표 3.1에서 보는 바와 같이 2%이하이다.

그림 3.11을 3.3.1절에서 설명한 계층적 군집 기법을 활용한 과정을 표현하고 있다. Z 축은 각 요소의 시스템 변수의 값을 나타낸다. 같은 군집에 포함되는 요소는 막대의 같은 색을 통해 표현하였다. 그림 3.11(d)에서 볼 수 있듯이 계층적 군집 기법을 통해서 정확한 구조 변화를 찾아냄을 확인 할 수 있다.

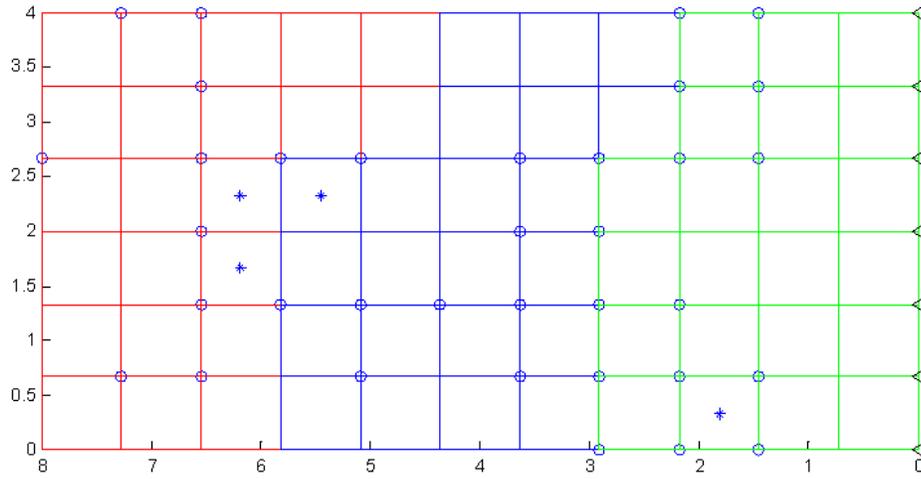


Figure 3.10 Configuration of plate model and results of the selection of primary DOFs in the 1st plate example
 ($E = 210 \text{ GPa}$, $\nu = 0.33$, $t = 0.5 \text{ m}$, $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$)

Table 3.1 Solution accuracy for eigenvalues in the 1st example

Mode	Baseline system	Perturbed system		Inverse solution			
				Previous method [26]		Proposed method	
1	1783.03	1776.08	-0.3914%	1776.08	-0.3914%	1776.08	-0.3914%
2	30343.9	30032.3	-1.0376%	30032.3	-1.0376%	30032.3	-1.0376%
3	68197.6	67438.5	-1.1257%	67438.5	-1.1257%	67438.5	-1.1257%
4	79730.2	79294.7	-0.5492%	79294.7	-0.5492%	79294.7	-0.5492%
5	318394	314150	-1.3509%	314150	-1.3509%	314150	-1.3509%

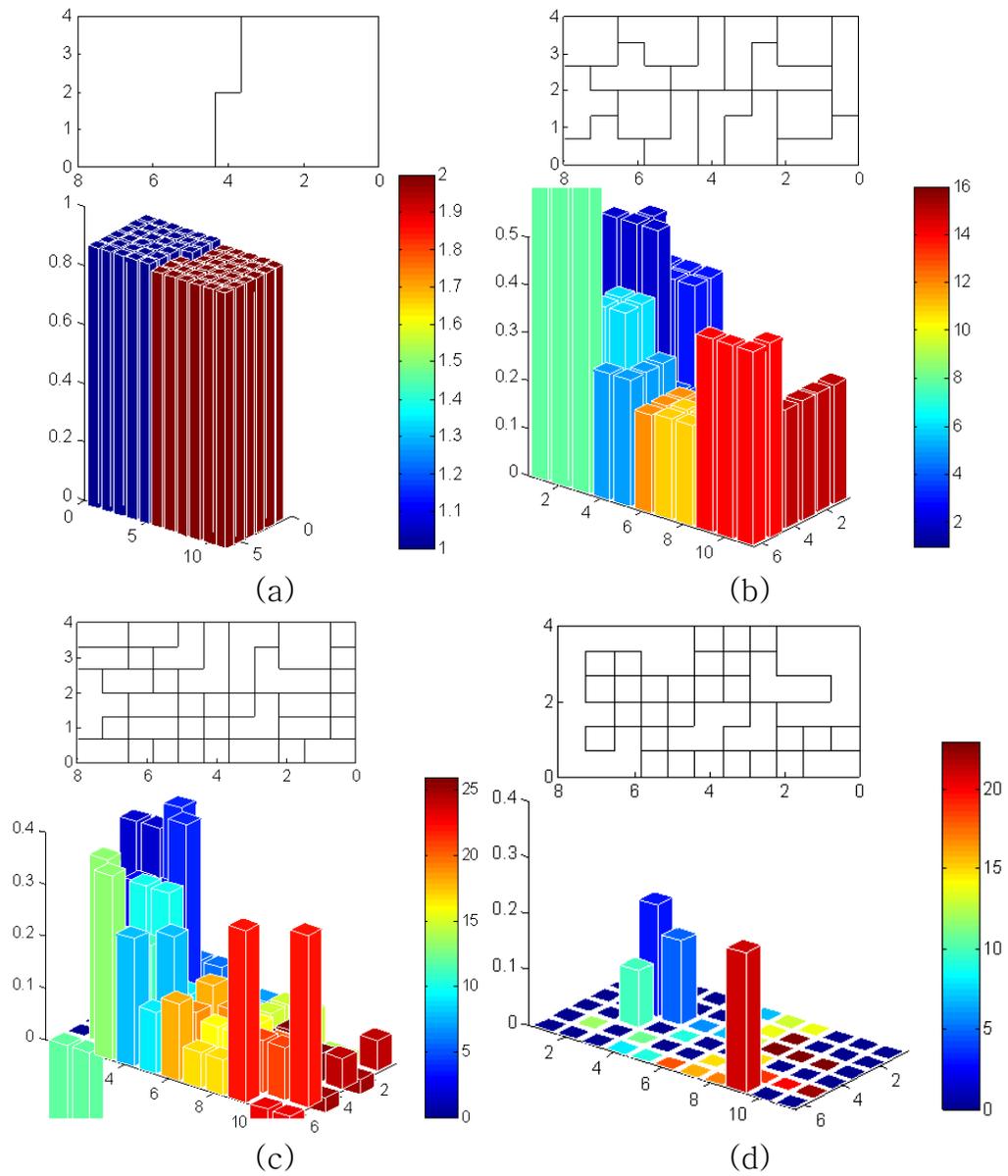


Figure 3.11 Progress steps using the proposed hierarchical clustering method in the 1st plate example

$(E = 210 \text{ GPa}, \nu = 0.33, t = 0.5 \text{ m}, \rho = 7800 \text{ kg/m}^3)$

그림 3.12는 계층적 군집 기법의 기준선 변수(L_U, L_L)에 따른 계산시간을 보여준다. 보는 바와 같이 계층적 군집 기법은 모든 기준선 변수 값에서 모두 기존 기법보다 빠른 계산 속도를 보여준다. 또한 모든 경우에서 정확한 시스템 식별을 수행하였다.

두 번째 예제는 그림 3.13과 같이 요소 256개로 총 절점수는 289이며, 총 자유도수는 1734이다. 구조 변화는 파란 별로 표시된 부분이면 오른쪽 그림과 같은 크기로 부여되었다. 이러한 강성행렬의 감소에 따라서 표 3.2와 같은 고유치 변화가 발생하였다. 이러한 강성행렬의 감소를 찾는 시스템 식별을 수행하였고 계층적 군집기법을 사용하였다.

그림 3.14(a)와 같이 기존의 기법은 정확한 구조변화를 찾지 못하는 것을 확인 할 수 있다. 또한 표 3.2의 결과와 같이 정확한 고유치를 구하지 못하였다. 이와 달리 계층적 군집 기법을 통하면 그림 3.14(b)와 같이 정확한 시스템 식별을 수행하는 것을 확인 할 수 있다.

계층적 군집 기법은 이와 같이 요소가 많은 대형 구조물의 시스템 식별에 보다 큰 장점을 보여준다. 특히 일부의 구조 변화를 기법 도중에 시스템 변수에 제외되더라도 3.3.1절에 언급한 복원 과정을 통하여 다시 시스템 변수로 포함되는 과정을 그림 3.15(c), (d)를 통해 확인 할 수 있다. 이를 통해 계층적 군집 기법이 초기에 부정확한 정보를 통해 군집을 나누고 일부 시스템 변수를 제외하는 등의 과정을 거치지만 최종적으로 정확한 시스템 식별을 효과적으로 수행하는 것을 확인 할 수 있다.

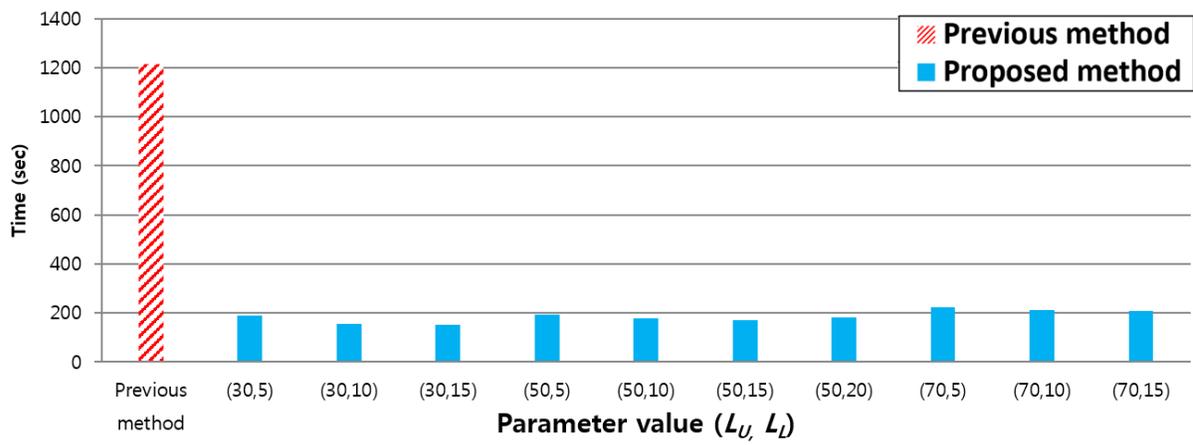


Figure 3.12 Comparison of the calculation times in the 1st example

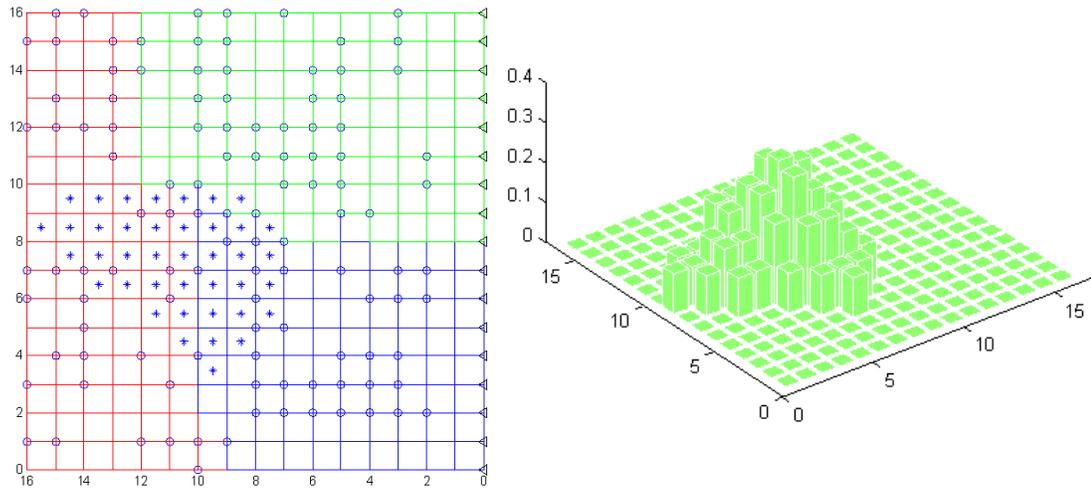
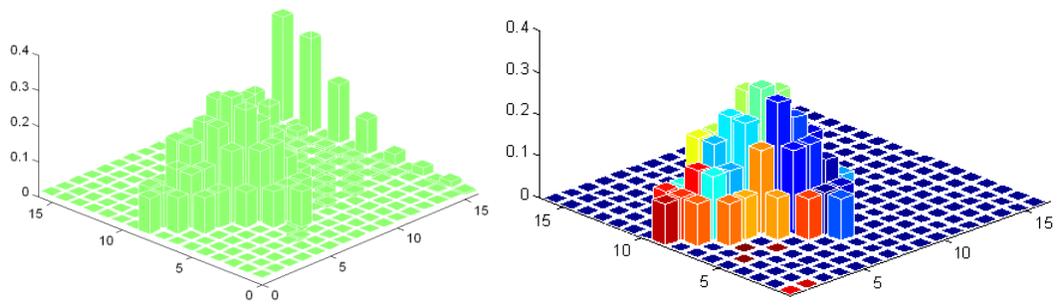


Figure 3.13 Configuration of plate model and results of the selection of primary DOFs in the 2nd plate example



(a) Previous method

(b) Proposed method

Figure 3.14 Results of figure in 2nd numerical example

Table 3.2 Solution accuracy for eigenvalues in the 2nd example

Mode	Baseline system	Perturbed system		Inverse solution			
				Previous method [26]		Proposed method	
1	114.778	114.231	-0.4785%	114.220	-0.4881%	114.231	-0.4785%
2	663.097	645.489	-2.7277%	645.479	-2.7293%	645.489	-2.7277%
3	4253.07	4118.79	-3.2602%	4118.86	-3.2586%	4118.79	-3.2602%
4	6969.01	6497.82	-7.2516%	6497.67	-7.2536%	6497.82	-7.2516%
5	8823.45	8604.15	-2.5487%	8604.27	-2.5473%	8604.15	-2.5487%
6	26849.6	26198.8	-2.4856%	26198.1	-2.4881%	26198.8	-2.4856%
7	35511.1	34383.8	-3.2771%	34384.2	-3.2760%	34383.8	-3.2771%

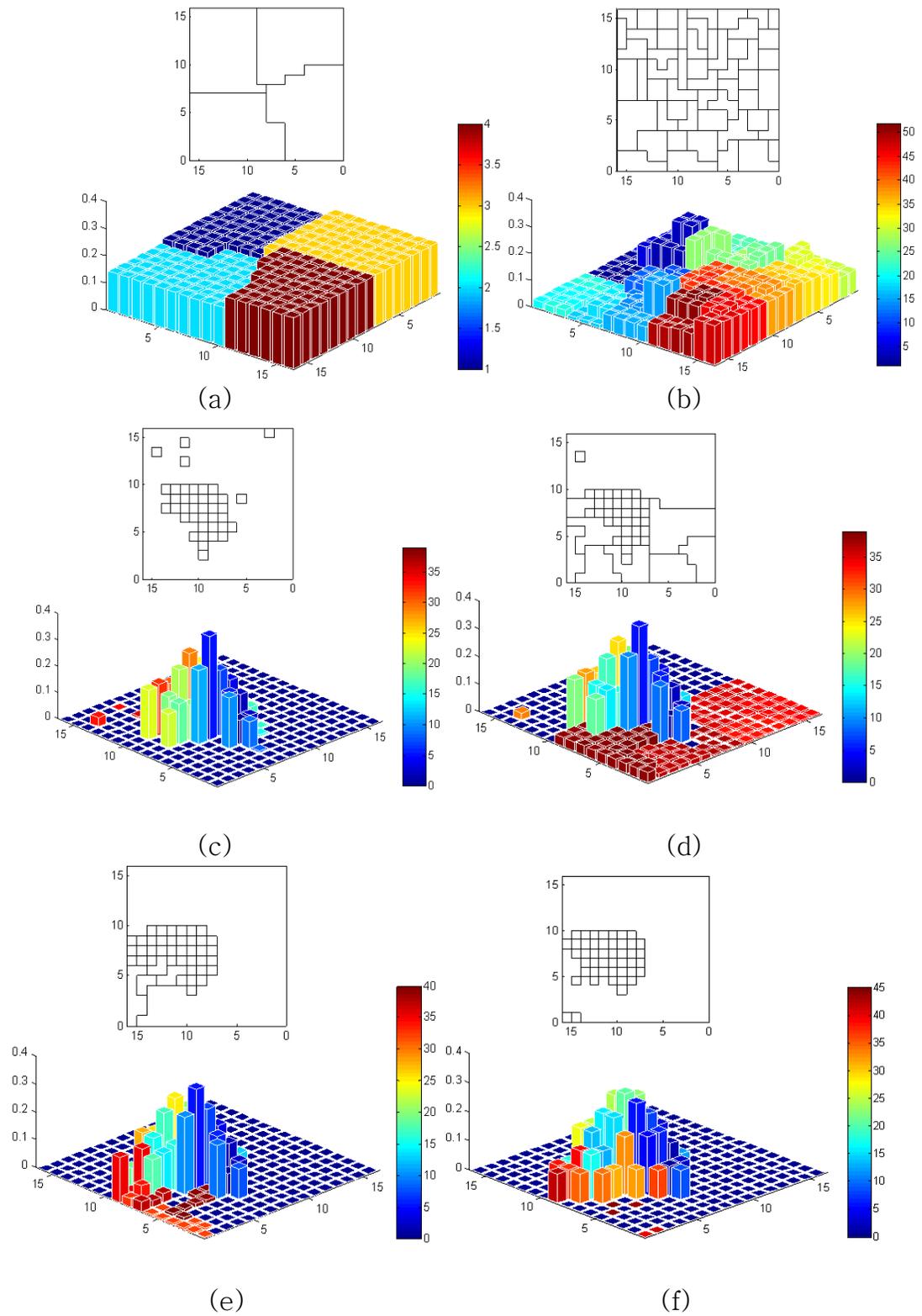


Figure 3.15 Progress steps using the proposed hierarchical clustering method in the 2nd example

수치예제 2. 유전 알고리즘을 활용한 기법 검증

유사한 예제를 3.3.2 절에서 설명한 유전 알고리즘을 활용한 기법을 통해 시스템 식별을 수행하였다. 수치 모델은 위에서 사용한 그림 3.10 의 동일한 평판을 사용하였으며 구조변화만 그림 3.16 과 같은 형태로 변경하여서 수행하였다. 이 경우 계층적 군집 기법, 유전 알고리즘을 활용한 기법 모두 그림 3.17, 3.18 와 같이 정확 구조변화를 정확히 구하였다. 계산시간 또한 그림 3.19 과 같이 모두 기존의 방법보다 상당히 감소하는 것을 확인 할 수 있다. ‘Proposed method A’ 는 3.3.1 절에 설명한 계층적 군집 기법을 나타내면 ‘Proposed method B’ 는 3.3.2 절의 유전 알고리즘을 활용한 기법이다.

보다 다양한 구조 변화에서도 제안된 기법들이 정확한 시스템 식별을 수행하는지를 검증하기 위하여 그림 3.20 과 같이 4 가지 종류의 구조변화를 정의하고 이를 찾는 시스템 식별을 수행하였다. 그림 3.21, 3.22 에서 보듯이 제안된 두 방법 모두 4 가지 경우 모두 정확한 시스템을 식별하였다. 그림 3.23 와 같이 계산시간 면에서 두 방법 모두 기존 방법보다 좋은 효율성을 보였다. 하지만 계층적 군집 기법이 찾고자 하는 구조변화의 요소수가 늘어나면 계산시간이 증가하는 경향을 보이는데 반해 유전알고리즘을 활용한 기법은 4 가지 경우에서 모두 비슷한 수준의 계산시간을 보여주었다.

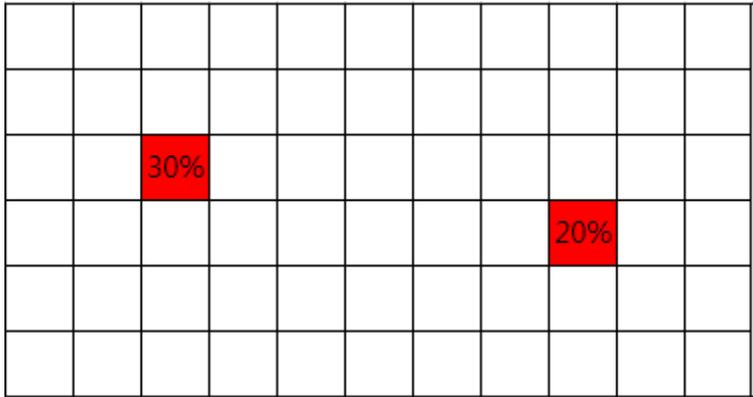


Figure 3.16 Assumed structural change in the 3rd example

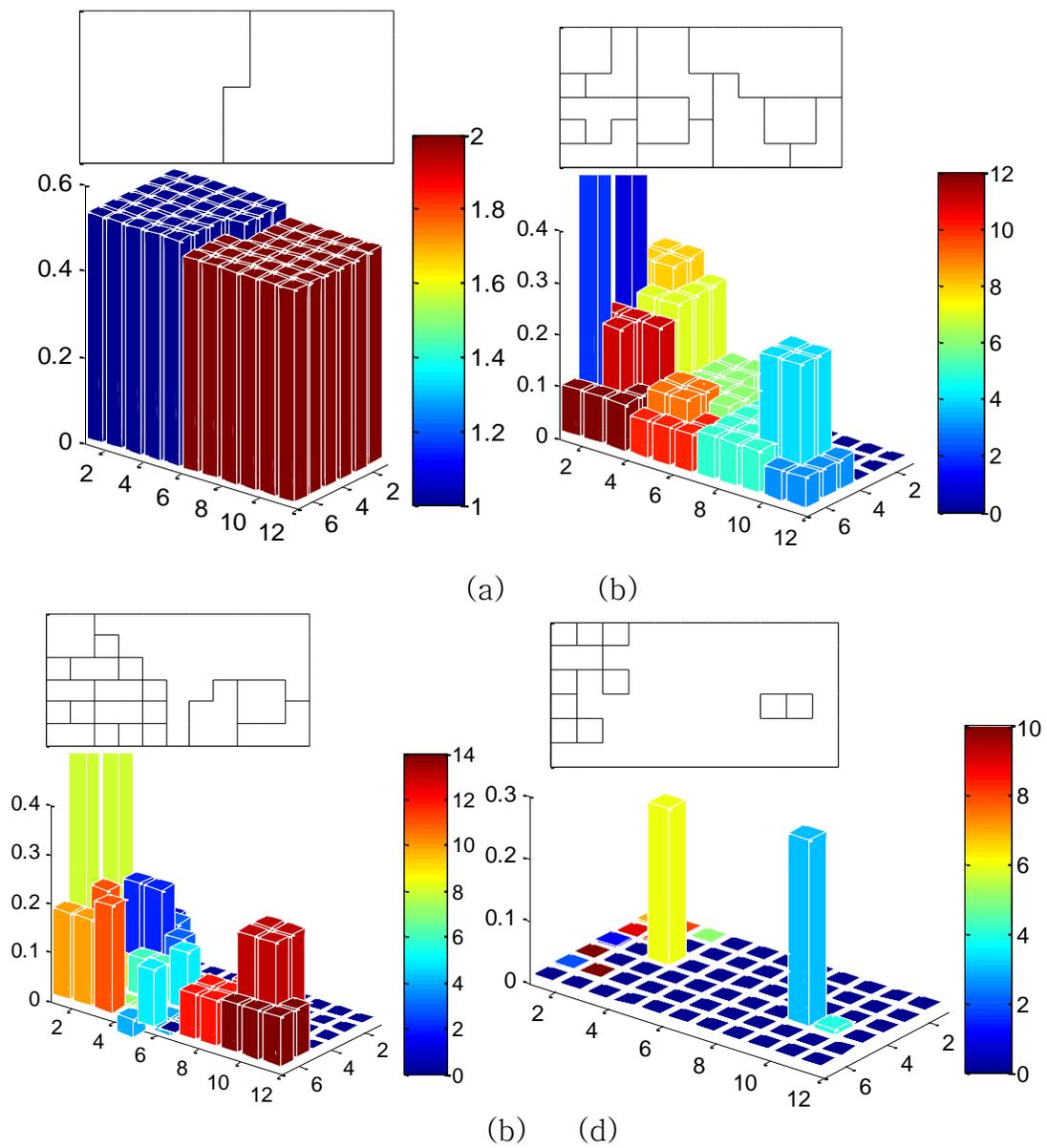
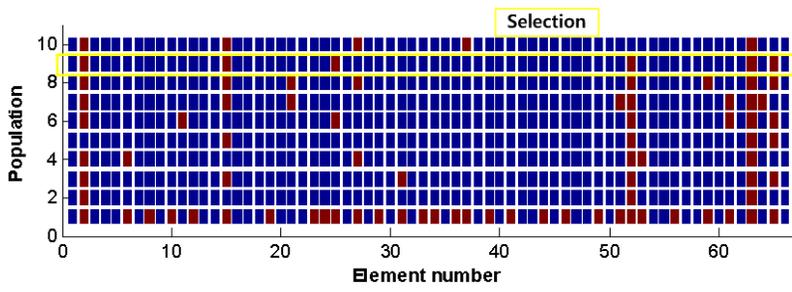
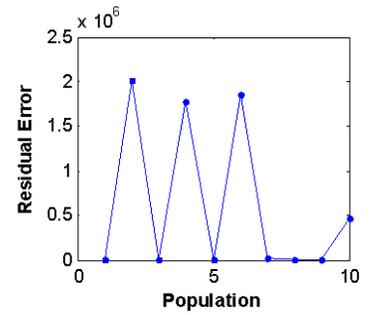


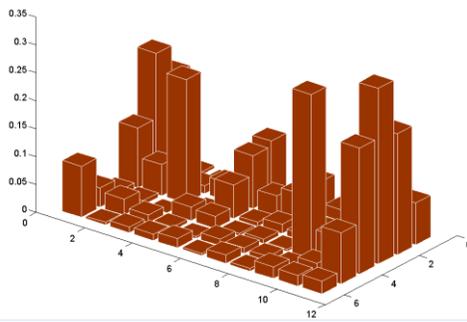
Figure 3.17 Progress steps using the proposed hierarchical clustering method in the 3rd example



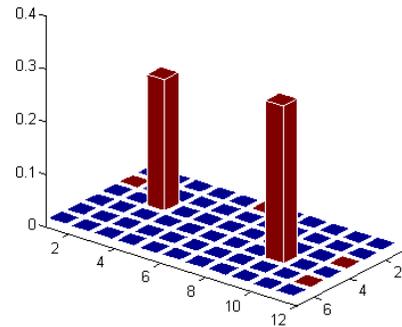
(a) Generation



(b) Fitness



(c) First full iteration result



(d) Final result after gradient method step

Figure 3.18 Result of numerical example using proposed method applied with genetic algorithm

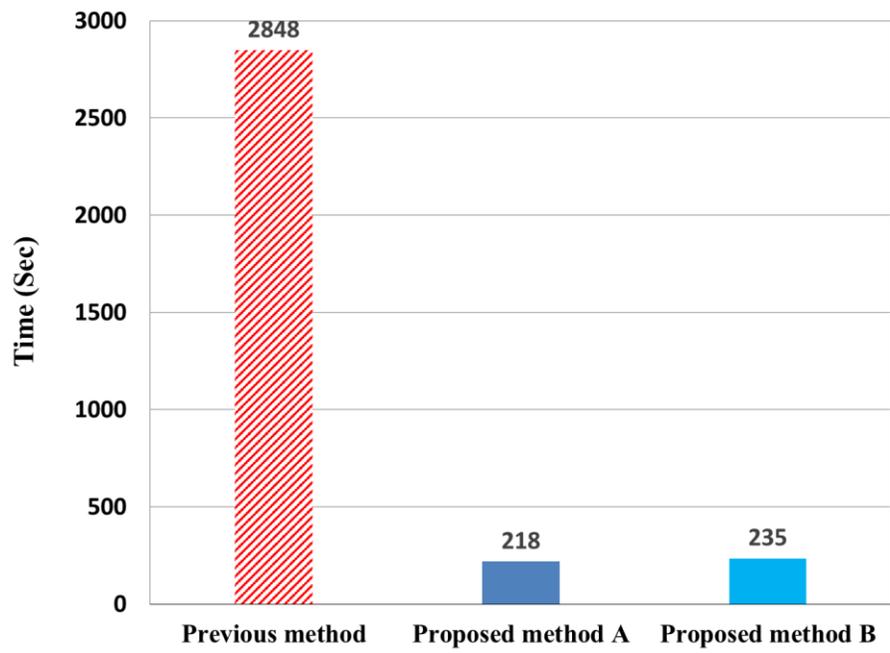
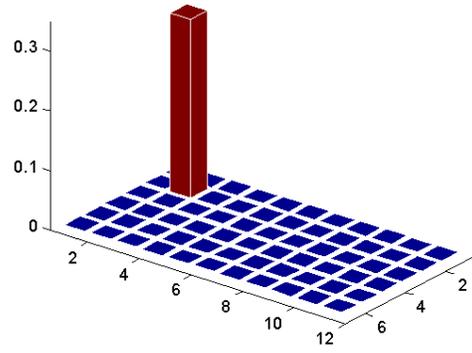
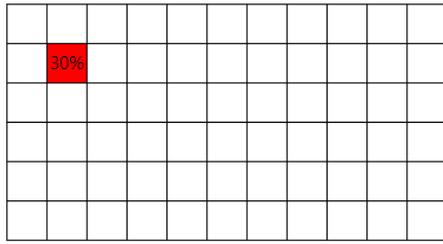
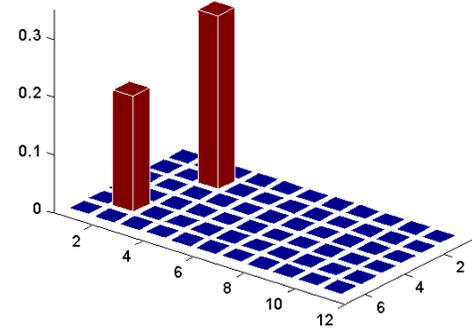
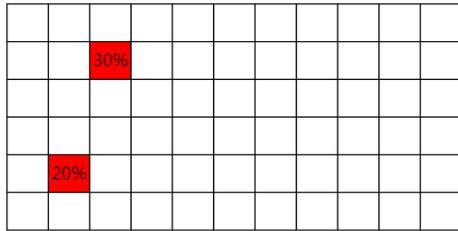


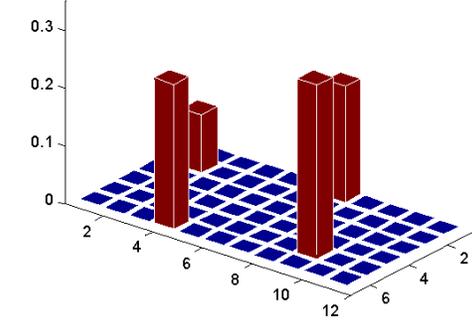
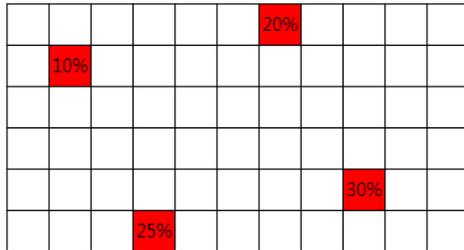
Figure 3.19 Comparison of calculation time in 3rd example



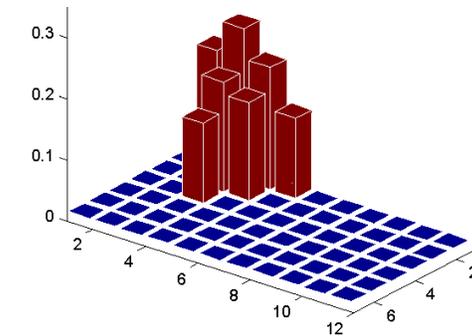
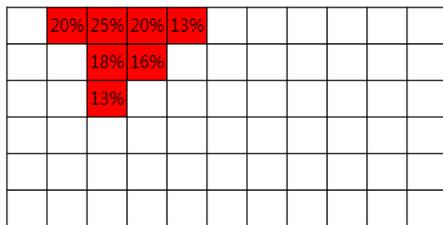
Case (1)



Case (2)



Case (3)



Case (4)

Figure 3.20 Distributions of structural change in 4th example

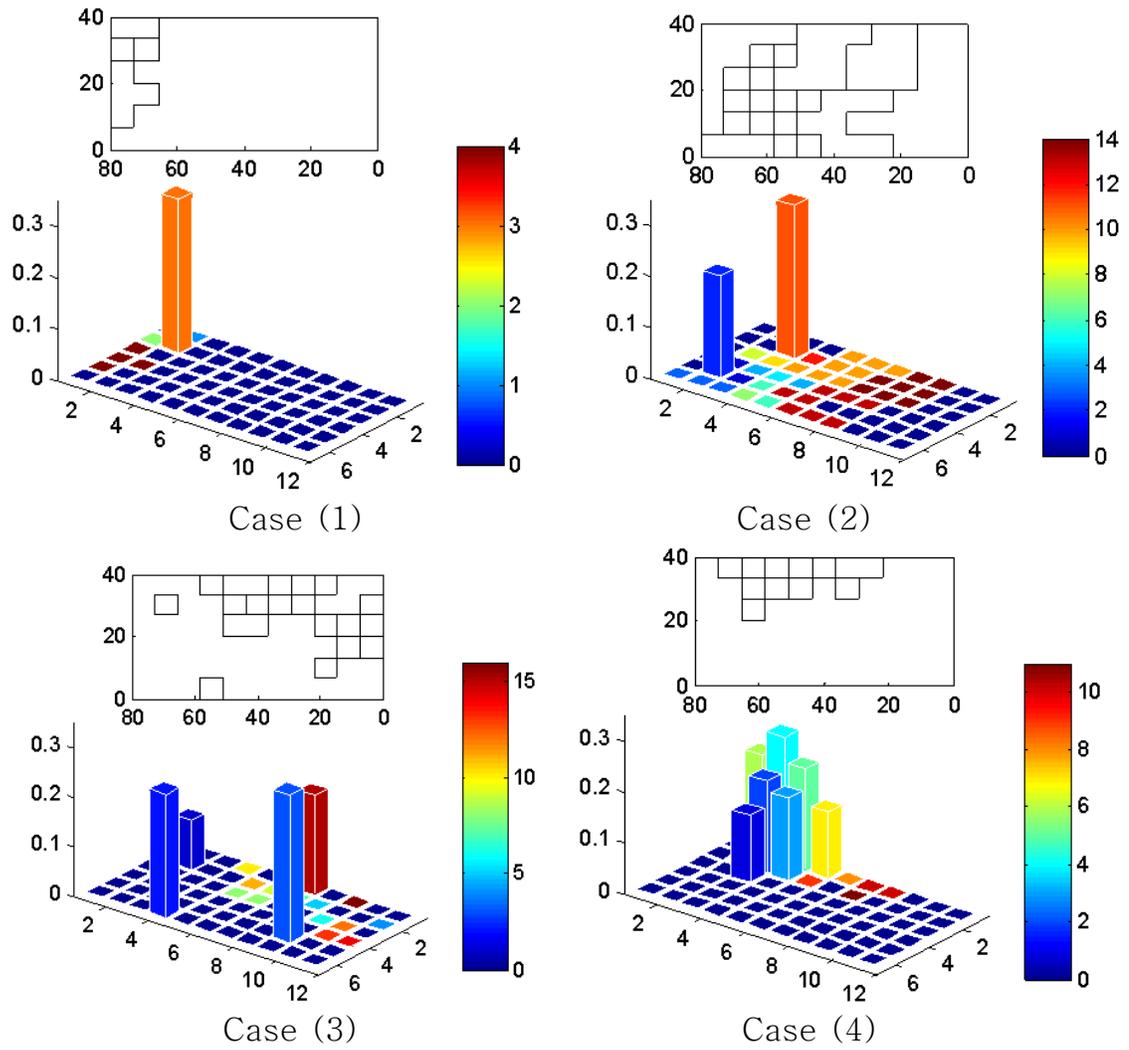


Figure 3.21 Result of 4th example using the proposed hierarchical clustering method

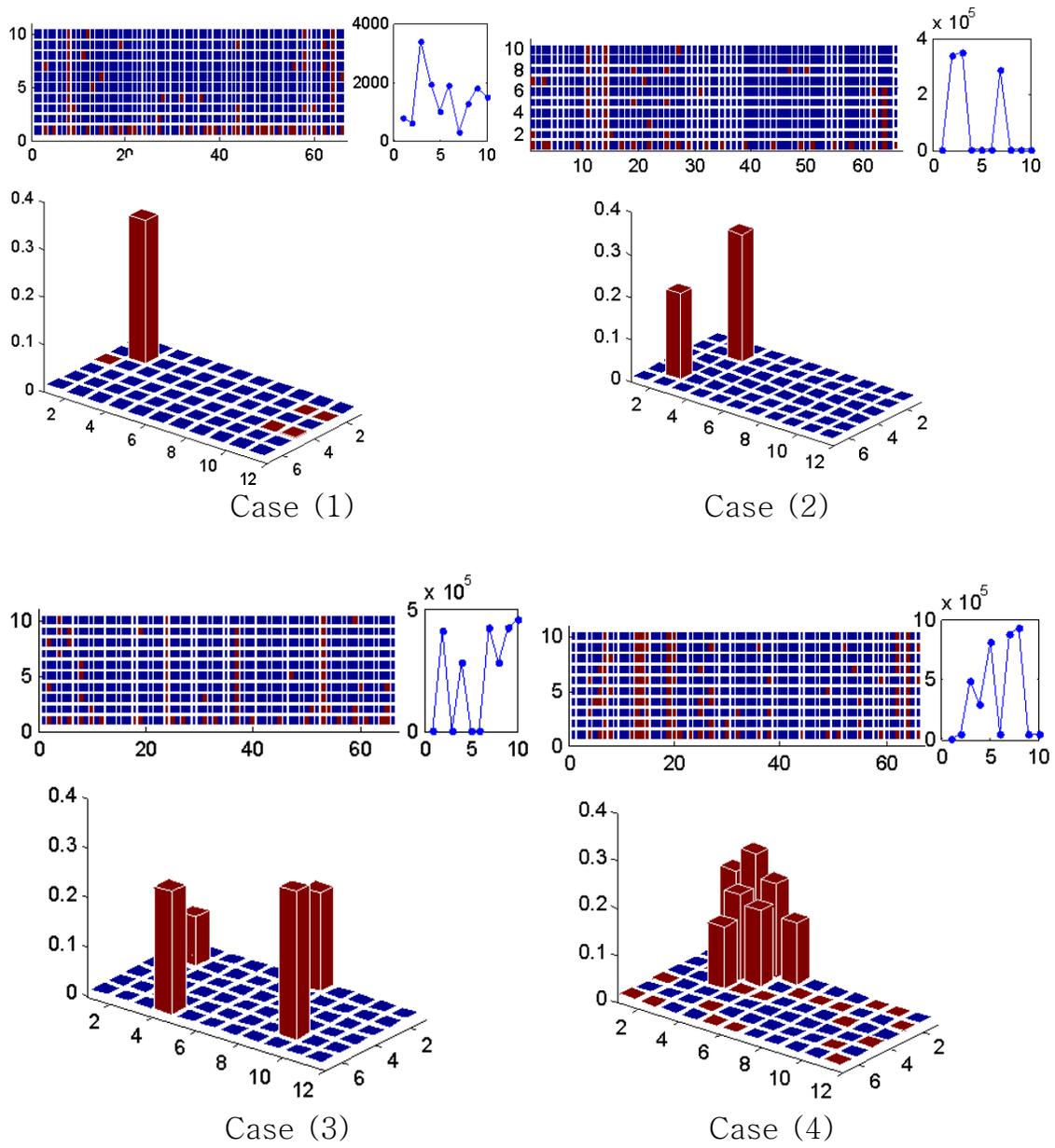


Figure 3.22 Result of 4th example using proposed method applied with genetic algorithm

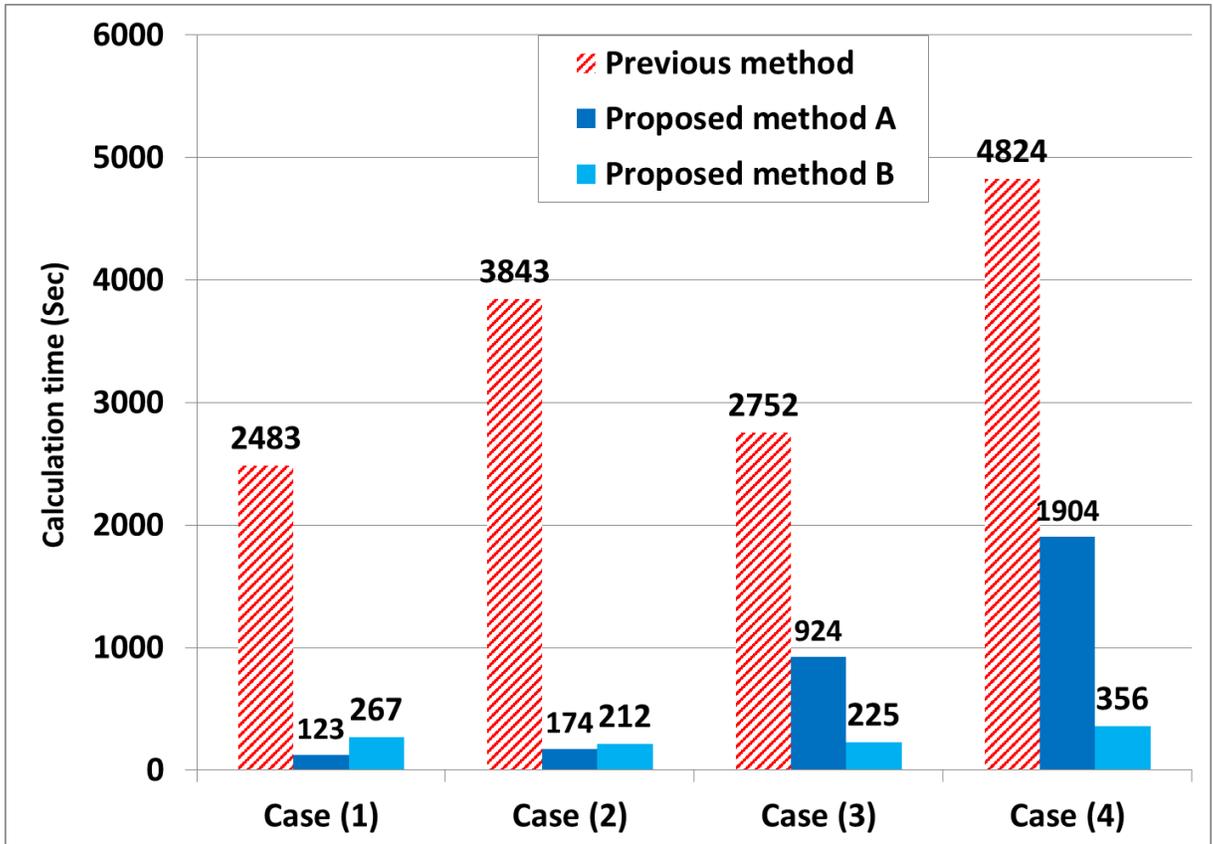
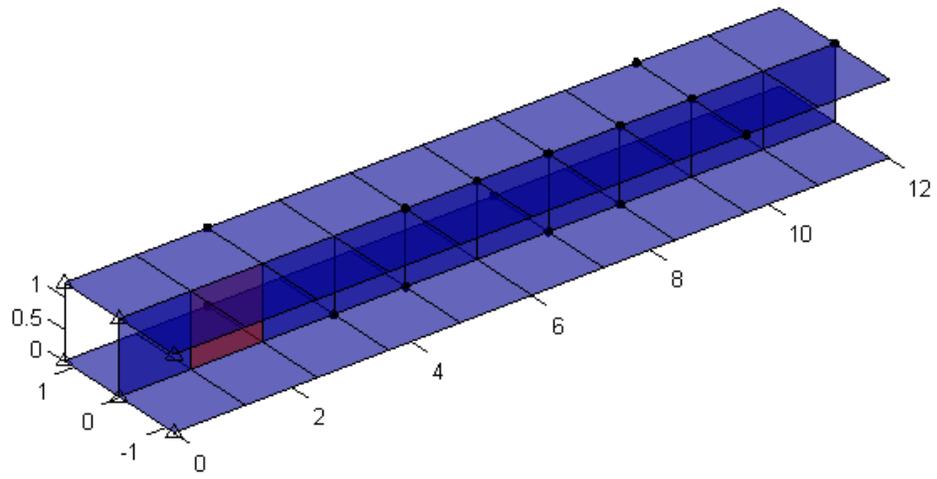


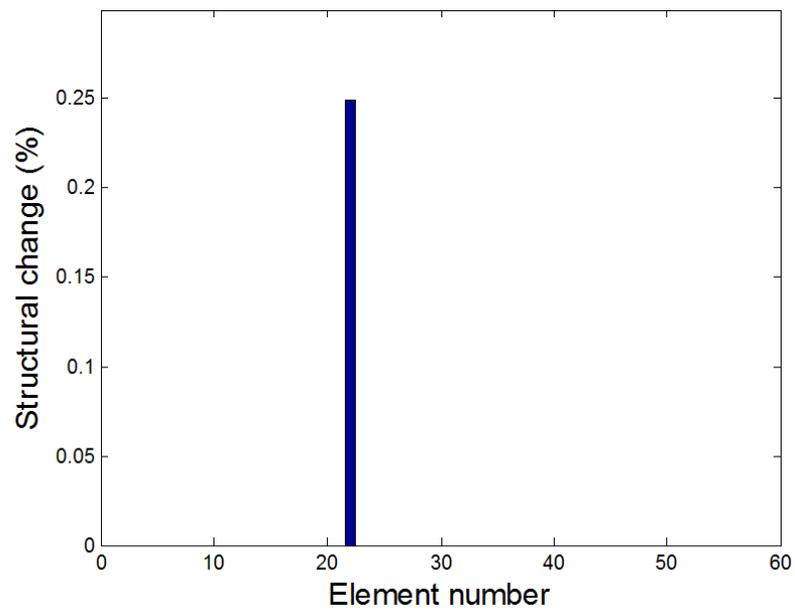
Figure 3.23 Comparison of calculation time in 4th example

수치예제 3. I형 보(I-beam)예제 (다중 시험 세트 기법 검증)

본 절에서는 다중 시험 세트 기법의 검증을 위해 시스템 식별을 수행하였다. 예제의 형태는 그림 3. 24 와 같은 I형 보(I-beam)이다. 위에서 검증한 2 기법 또한 동일한 예제에서 수행하여 위에서 설명한 두 기법과 비교 검증하였다. 그림 3.24(a)에서 검은 점은 주자유도를 의미한다. 초기 모델과 실제 모델의 차이인 구조 변화는 붉은색으로 표시된 요소에 그림 3.24(b)와 같이 25% 강성 행렬의 감소하는 형태로 가정하였다. 가정한 구조변화로 인해 표 3.3 과 같이 고유치의 변화가 발생하고 이를 통해 가정한 구조변화를 역으로 찾는 시스템 식별을 수행하였다. 제안한 다중 시험세트 기법은 그림 3.25 와 같은 과정을 통하여 구조변화를 포함한 시스템 변수를 선정하여 정확한 구조변화를 찾는 시스템 식별을 정확히 수행하였다. 앞서 설명 및 검증한 두 방법 또한 정확한 시스템 식별을 수행하였다. 그림 3.26 는 각 기법에 걸린 계산시간을 비교한 것으로 기존방법은 위 두 절과 동일한 방법이며 ‘Proposed method A’ 는 계층적 군집 기법을 ‘Proposed method B’ 는 유전 알고리즘을 활용한 기법을 ‘Proposed method C’는 다중 시험 세트 기법을 나타낸다. 그림에서 확인 할 수 있듯이 계산 시간 상에서 다중 시험 세트 기법이 가장 효율적임을 알 수 있다. 이는 3.3.3 절에서 설명한 계층적 군집 기법의 시스템 변수를 군집화하는 데서 오는 장점과 유전 알고리즘을 통한 초기 해의 정확성의 장점을 모두 접목하는 형태로 기법이 고안되었기 때문이다.



(a)



(b)

Figure 3.24 Configuration of plate model and structural change distribution in 1st example

($E=1.0298 \text{ lb/in}^2$, $\nu=0.33$ $\rho=0.102 \text{ lb/in}^3$)

Table 3.3 Change of eigenvalues due to structural change

#. Mode	Baseline Sys.	Perturbed Sys.	% Change
1	1092.7	1092.3	0.0329
2	1314.7	1299.4	1.1637
3	1941.7	1941.4	0.0164
4	2289.1	2285.7	0.1454
5	4096	4066.3	0.7246
6	7924.8	7862.9	0.7813
7	8250.6	8191.5	0.7162

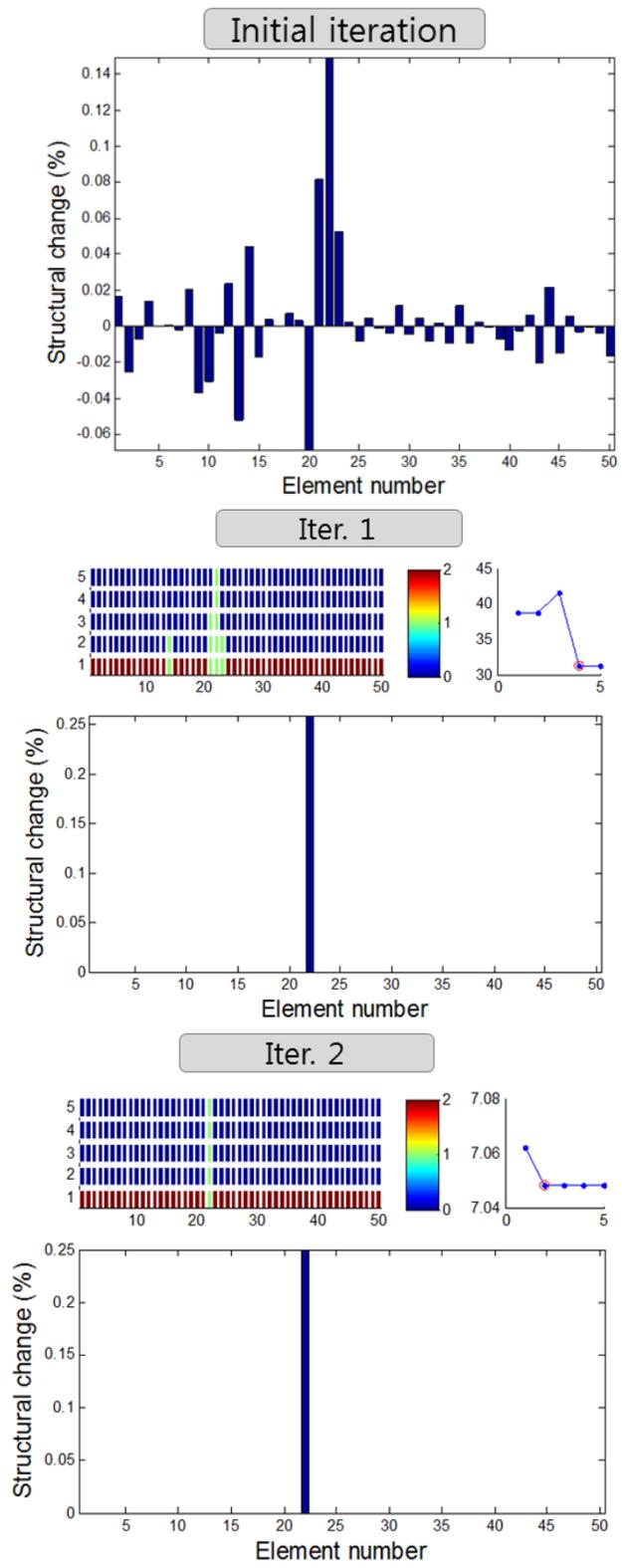


Figure 3.25 Process step of proposed multi test-set method in 1st example

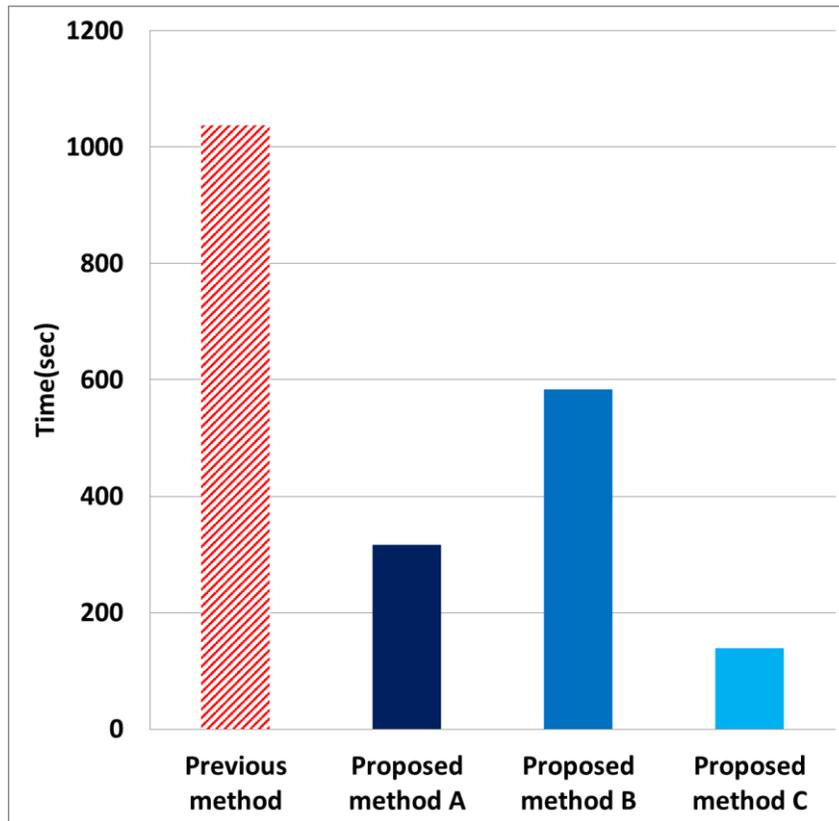


Figure 3.26 Comparison of the calculation times in the 1st example

다음 예제는 보다 큰 I 형 보 예제이다. I 형 보는 위 절에서 설명한 외팔평판과 달리 스파와 스킨형태로 요소 형태가 다르게 구성되어 있어 시스템 식별이 상대적으로 어렵다. 특히 그림 3.27 과 같이 요소가 많은 I 형 보 모델은 정확한 시스템 식별이 쉽지 않다. 제안된 다중 시험세트 기법은 그림 3.28 과 같은 과정을 통하여 정확한 구조 변화를 찾는 것을 확인할 있다. 이와 같이 제안된 기법은 다수의 요소로 구성된 모델의 요소 단위의 시스템 식별을 효과적으로 수행할 수 있는 기법으로 생각된다.

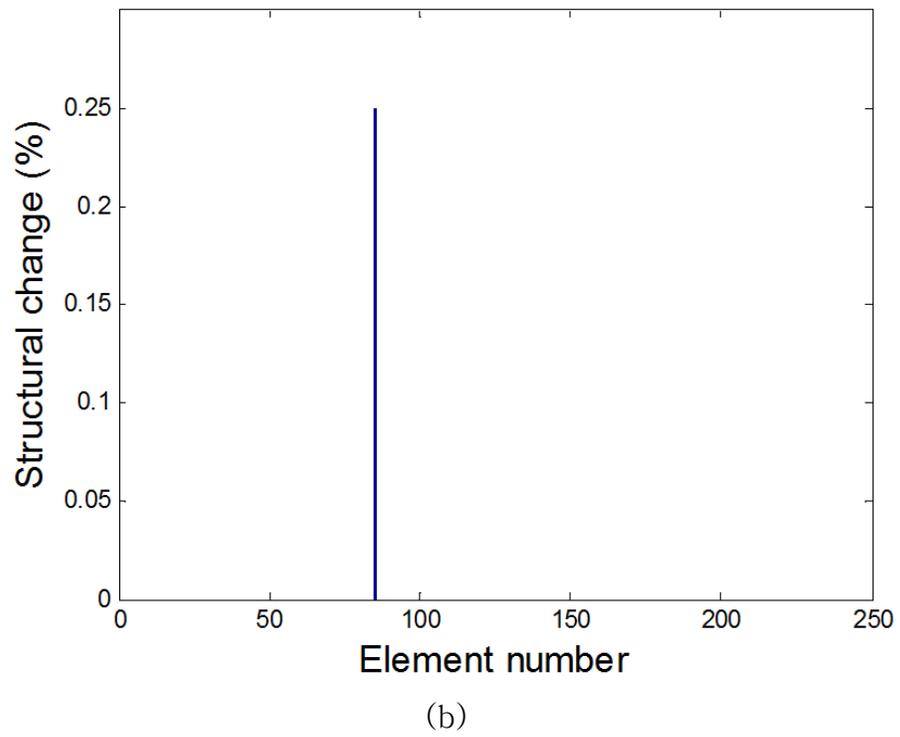
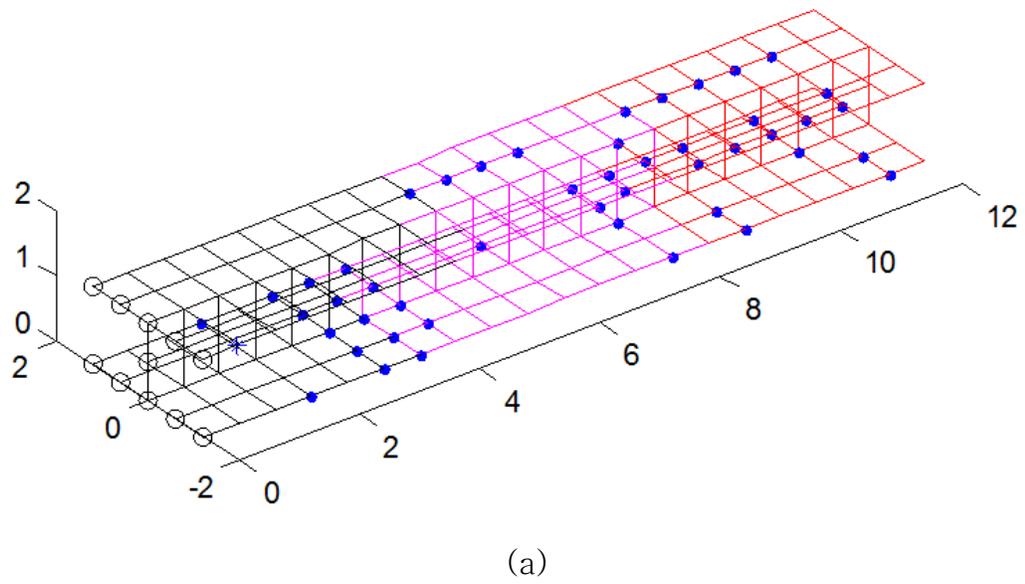


Figure 3.27 Configuration of plate model and structural change distribution in 2nd example

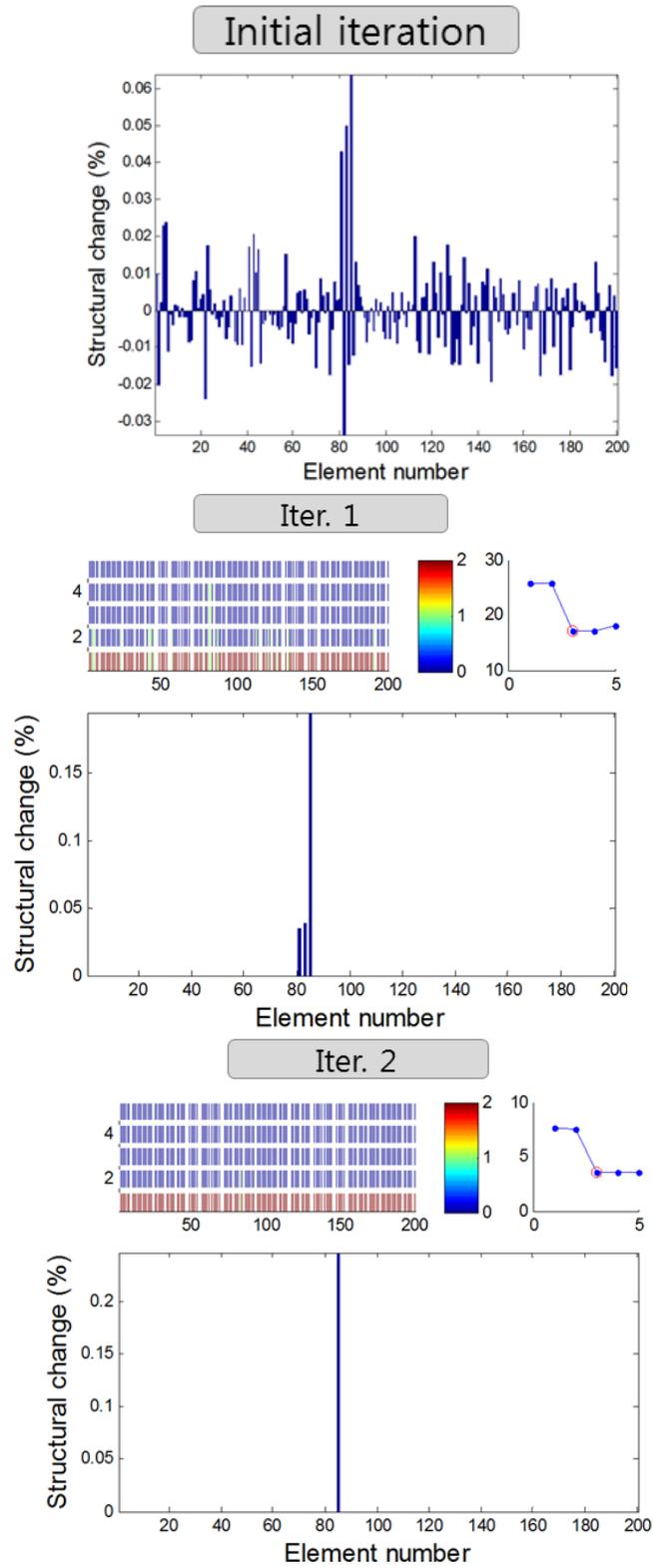


Figure 3.28 Process step of proposed multi test-set method in 2st example

수치예제 4. 측정 오차를 고려한 시스템 식별 검증

본 절에서는 3.3.4 절에서 설명한 측정 오차를 고려한 시스템 식별을 수치예제를 통해 검증하고자 한다. 수치 예제는 위 절들과 유사한 외팔평판 예제로 그림 3.29 에 상단에 그림과 같은 형태로 강성행렬의 변화를 가정하였다. 이를 측정된 고유 진동수와 고유 벡터를 통해 찾는 시스템 식별을 수치적으로 수행하였다. 이때 측정 오차는 그림 3.29 의 하단과 같이 부가 백색 가우스 잡음(Additive White Gaussian Noise, AWGN)으로 가정하여 부여하였다. 부가 백색 가우스 잡음은 전 주파수 영역 내에서 부가되는 형태의 노이즈로 실제 측정오차가 반드시 이와 같다고 볼 수 는 없다. 하지만 실제 측정 오차는 다양한 원인에 의해 발생하여 이를 수치적인 기법만으로 정확히 묘사하기는 어렵다. 따라서 본 논문에서는 수치 해석적인 측면으로 봤을 때 실제 측정오차는 상대적으로 큰 부가 백색 가우스 잡음보다 작다고 가정하고 상대적으로 큰 부가 백색 가우스 잡음 하에서 시스템 식별을 가능한지 여부를 통해 제안된 기법을 검증 하고자 하였다. 부가 백색 가우스 잡음 정도(level)는 신호 대 잡음비(Signal to Noise Ratio, SNR)을 이용하여 설정하였다. 신호 대 잡음비 주로 데시벨(dB)로 표현한 형태로 표현되면 아래와 같이 정의 된다.

$$\text{SNR}_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \left(\frac{P_{\text{signal}}}{P_{\text{noise}}} \right) = 20 \log_{10} \left(\frac{A_{\text{signal}}}{A_{\text{noise}}} \right) \quad (3.25)$$

이를 단순한 비의 값으로 표현하면 아래와 같다.

$$\text{SNR} = \frac{P_{\text{signal}}}{P_{\text{noise}}} = \left(\frac{A_{\text{signal}}}{A_{\text{noise}}} \right)^2 \quad (3.26)$$

이를 기반으로 본 논문에서 표현하는 측정 오차의 크기는 아래와 같이 정의 하였다.

$$\text{NoiseLevel} = \frac{A_{\text{noise}}}{A_{\text{signal}}} \quad (3.27)$$

그림 3.29 의 하단 우측의 그림은 노이즈 5%을 부가 백색 가우스 잡음으로 부여한 시스템 응답이다.

그림 3.30 은 기존의 측정오차가 없는 경우의 수치적으로 시스템 식별을 수행한 결과이다. 그림 3.30(a)는 기존 방법을 통해 시스템 식별을 수행한 것이며, 그림 3.30(b)는 제안된 방법의 결과이다. 그림에서 보는 바와 같이 두 방법 모두 정확한 구조변화를 찾는 시스템 식별을 수행하였다. 반면에 그림 3.31 과 같이 측정 오차를 가정한 시스템 식별 문제에서는 기존 방법이 정확한 해를 구하지 못하는 반면에 제안된 방법은 비교적 정확한 해를 찾는 것을 확인 할 수 있다. 그림 3.32 는 가정한 노이즈 크기에 따라 제안된 기법의 시스템 식별 결과를 보여준다. 보는 바와 같이 모든 경우에서 대체로 실제와 유사한 결과를 보여줌을 확인 할 수 있다.

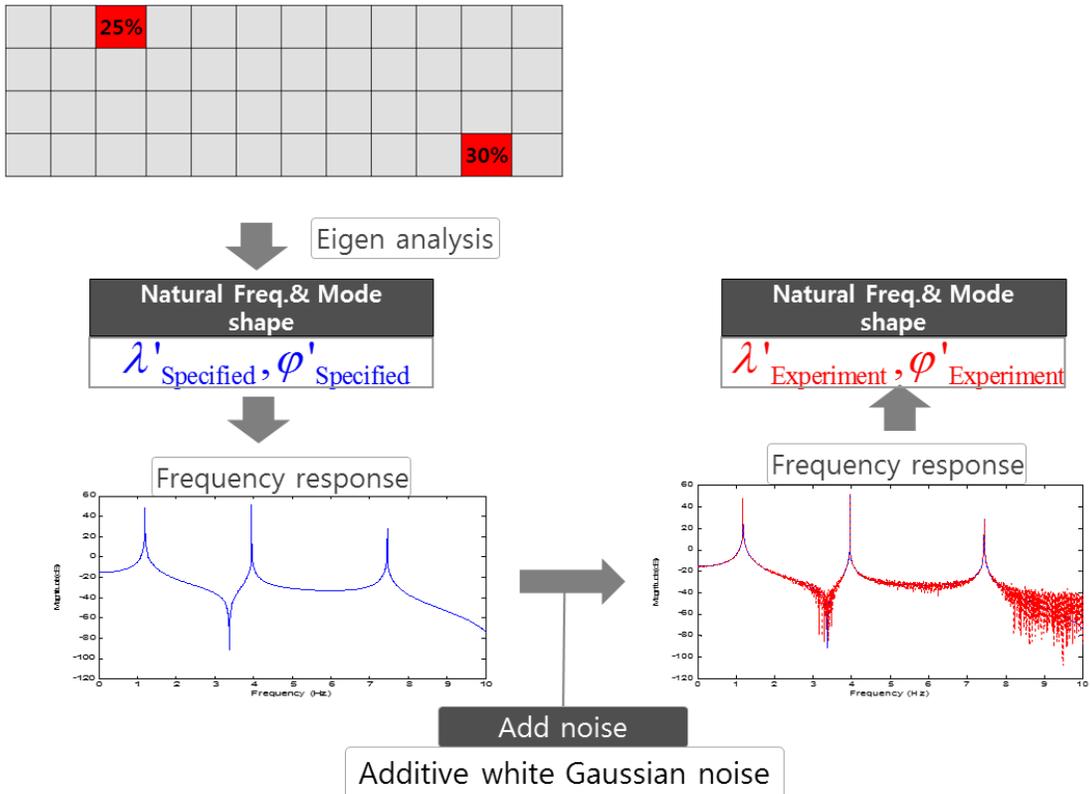
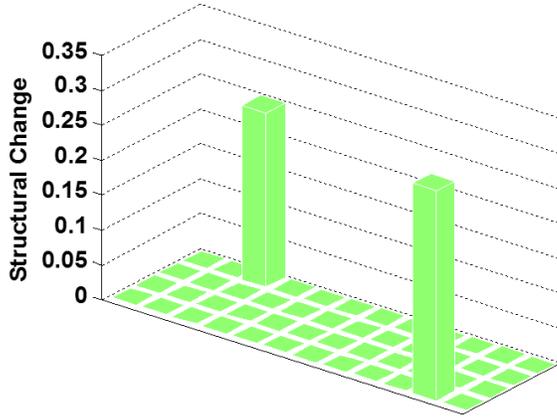
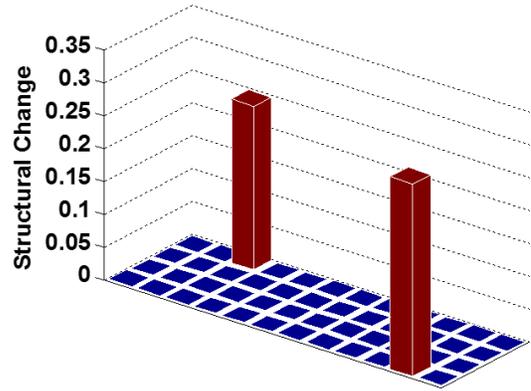


Figure 3.29 Configuration of assumed structural changes and experimental noise

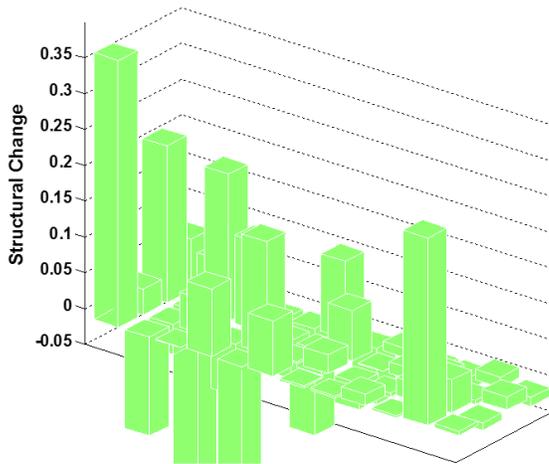


(a) Previous method

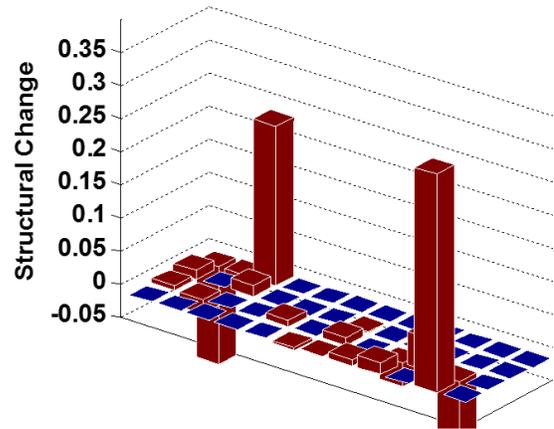


(b) Present method

Figure 3.30 Result of system identification not considering the experimental noise (Noise 0%)

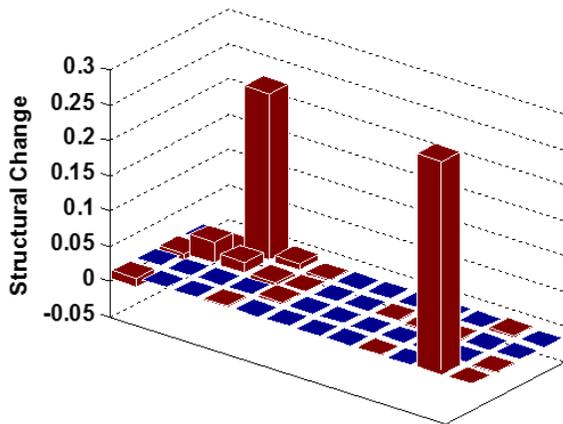


(a) Previous method

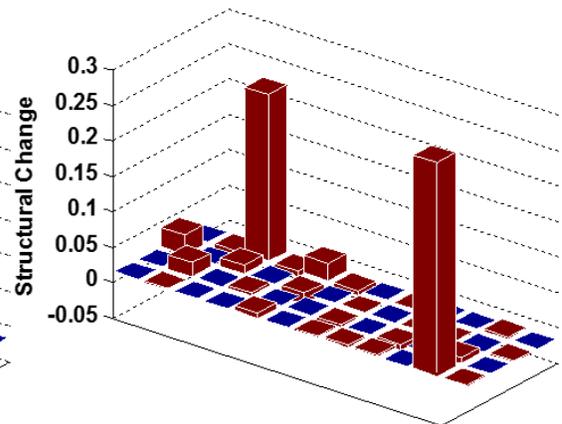


(b) Present method

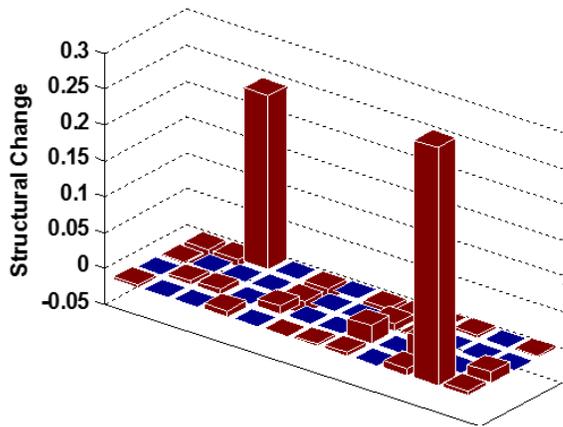
Figure 3.31 Result of system identification considering the experimental noise (Noise 5%)



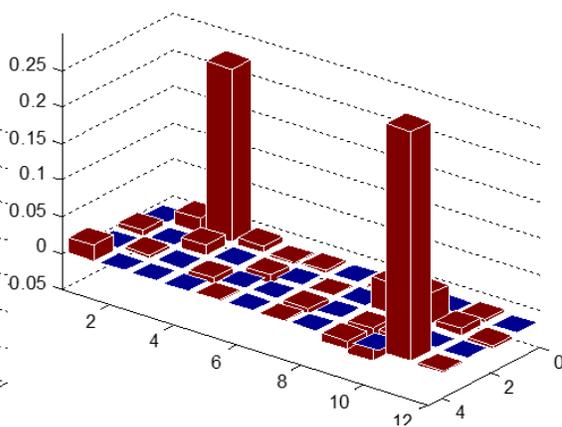
(a) Noise 1%



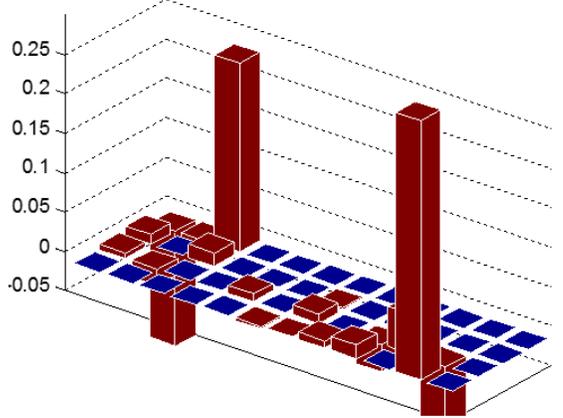
(b) Noise 2%



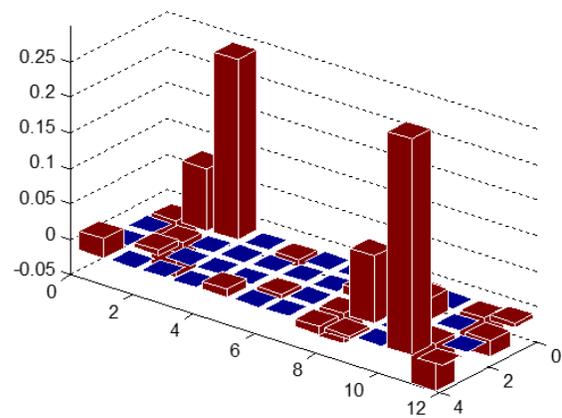
(c) Noise 3%



(d) Noise 4%



(e) Noise 5%



(f) Noise 6%

Figure 3.32 Results of system identification in various noise level

4. 센서 위치 선정 기법 고안 및 진동 실험을 통한 검증

본 장에서는 위 장에서 설명한 축소 기반 시스템 축소 기법에 적합한 실험 데이터를 얻기 위한 센서위치 선정 기법을 제안하고, 이를 실제 평판 구조물의 진동 실험 및 시스템 식별로 제안된 센서 위치 선정 기법을 검증 하였다. 제안된 센서 위치 선정 기법은 2 장의 주자유도 선정 기법을 기반으로 구성 되었으며, 측정오차를 고려하여 선정될 수 있도록 고안하였다.

4.1 주자유도 선정 기법 기반 센서 위치 선정 기법

실험에서 측정할 센서 위치선정(sensor positioning)은 시스템 식별의 정확도에 직접적으로 영향을 주기 때문에 시스템 식별에서 중요한 연구 분야 중 하나다. 실험에서 센서를 부착할 때, 일반적으로 측정 모드에서 크게 움직이는, 즉 해당 모드에서 고유벡터의 크기가 큰 부분에 부착한다. 하지만 각 모드마다 다른 위치에 센서를 부착해야 돼서 실험 수행 횟수가 크게 늘어 나게 된다. 따라서 여러 모드에서 동시에 효과적으로 응답을 측정할 수 있는 센서위치를 선정할 수 있는 것이 중요하다. 본 논문에서는 이 센서 위치 선정을 2.2 절의 주자유도 선정 기법을 활용하여서 여러 모드에서 효과적으로 응답을 측정할 수 있는 센서 위치 기법을 고안하였다. 또한 센서 응답에서 전체 고유벡터를 복원하는 자유도 기반 축소를 활용한 시스템 식별에서 각 센서에서 측정오차가 미치는 영향을 반영하여 측정오차의 영향이 적도록 센서를 선정하도록 구성하였다.

기존의 자유도 축소법을 이용한 시스템 식별 연구에서는 2 단계 축소 기법을 통하여 센서위치를 선정하였다. 하지만 본 연구에서 2 단계 축소기법의 2 번째 단계에 수행되는 순차적 소거법은 센서 위치 선정에 적합하지 못한 면을 발견하였다.

순차적 소거법에서는 2.4.1 절의 외팔평판과 같이 모든 요소가 형상과 크기가 같은 유한요소 모델일 경우 초기에 강성행렬과 질량 행렬의 대각항의 비($\mathbf{K}_{ii}/\mathbf{M}_{ii}$)가 모두 똑같아서 수치적인 오차로 임의적으로 부자유도가 선정되거나 자유도 번호가 낮은 부자유도가 선정된다. 자유도의 번호 또한 임의로 배열할 수 있는 것이므로 결국 최초의 부자유도가 임의로 선정되는 현상이 발생한다. 따라서 최종적으로 주자유도로 선정되어야 하는 자유도가 부자유도 선정 될 수 있고 이러한 경우 주자유도 선정이 다른 형태로 구성되게 된다. 또한 특정 진동수 이하나 특정 모드 개수에서의 자유도 비교가 어렵다. 따라서 시스템 식별에 필요한 혹은 센서에서 측정 할 수 있는 진동수 이하 진동에서 큰 응답이 있는 센서 위치를 선정하는데 어려움이 있다.

따라서 본 논문에서는 2 단계 축소 기법 중 절점 기반 축소 기법의 에너지 예측 하는 부분의 기법을 활용하여 센서 위치 선정 기법을 고안하였다. 기존의 절점 기반 축소 기법에서는 레일리 지수는 아래의 형태로 계산된다.

$$Ra_n^i = \sum_{i=1}^{\#of\ DOF} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\phi_{ij} K_{ik} \phi_{kj}}{\phi_{ij} M_{ik} \phi_{kj}} \quad (4.1)$$

이 때 사용되는 벡터(ϕ_{ij})는 리츠 벡터로 근사화된 고유벡터이다. 정확한 고유벡터를 사용하면 보다 정확한 레일리 지수를 구할 수 있다. 하지만 기존 기법에서 고유벡터를 활용하여 주자유도를 선정하지 않았다. 그 이유는 기존의 주자유도 선정은 고유치 해석이전에 자유도 선정에 활용되기 때문에 고유치 해석 후에 얻을 수 있는 고유벡터를 그대로 사용하기는 불가능하기 때문이었다.

하지만 시스템 식별에서는 기존의 초기 모델의 고유치 해석을 수행할 수 있으며 이는 시스템 식별 전에 계산 시간과 비교해 봤을 때 큰 비중을 차지 하지 않는다. 따라서 본 논문에서는 기존의 주자유도 선정기법에서 사용한 리츠 벡터 대신 아래 식과 같이 초기 모델의 고유 벡터를 사용하는 형태의 센서 위치 선정기법을 고안하였다.

$$Ra_n^i = \sum_{i=1}^{\#of\ DOF} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{u_{ij} K_{ik} u_{kj}}{u_{ij} M_{ik} u_{kj}} \quad (4.2)$$

이를 통하여 측정하고자 하는 모드에서 변형이 큰 절점을 선정하고 이 곳에 센서를 붙여서 실험을 수행한다. 자유도가 아닌 절점을 선정하는 이유는 센서가 3 축을 동시에 측정하는 센서가 많이 존재하기 때문에 절점으로 선정하였고, 한 축 센서로 실험을 수행할 경우 아래의 식처럼 자유도 별 에너지 선정 및 주자유도 선정을 수행하면 된다.

이렇게 선정된 센서 위치 중에는 일부 모드에서 고유벡터 크기가 0 인 즉 노달 포인트 (Nodal point)인 지점이 포함될 수 있다. 이 경우 측정 데이터에서 전체 고유벡터를 복원하는 과정에서 측정 오차에 의한 고유벡터의 왜곡 현상이

크게 나타난다. 이러한 현상의 발생의 원인과 경향성은 4.2 절에서 단순 bar 예제를 통해 이론적으로 분석하였다. 이러한 현상을 막기 위해서 본 논문에서 고안한 방법은 그림 4.1 과 같이 선정된 센서 위치 중 모드 하나에서라도 노달 포인트에 가까운 부분의 위치는 센서 위치에서 제외하는 과정을 추가 하였다. 그림 4.1 의 1,2 단계는 순서에 무관하게 노달 포인트를 제외한 이후, 남은 자유도에서 주자유도 선정 기법을 기반으로 해서 센서 위치를 선정하는 형태로 구성해도 된다.

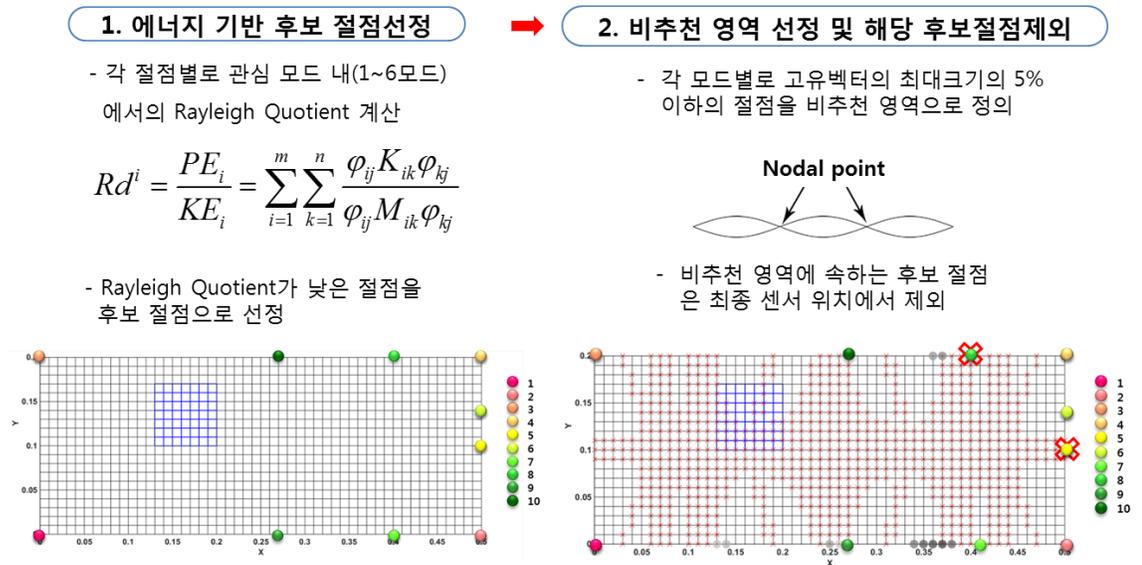


Figure 4.1 Proposed sensor position method

4.2 센서 위치에 따른 측정오차의 영향력의 분석

앞 절에서 언급 했듯이 실험에서 센서를 부착할 때, 센서가 특정 모드에서 고유벡터 크기가 0 인 즉 노달 포인트 (Nodal point)인 지점이 위치할 경우 측정 데이터에서 전체 고유벡터를 복원하는 과정에서 측정 오차에 의한 고유벡터의 왜곡 현상이 크게 나타난다. 이러한 현상의 원인과 경향성을 이론적으로 검증하기 위해서 단순한 bar 구조에서의 센서 위치에 따른 측정오차의 영향력의 차이를 이론적으로 분석하였다.

예제는 그림 4.2 와 같이 5 절점의 단순 bar 구조이며, 1,2,4 번 절점이 센서 위치로 선정된 경우이다. 이 경우 강성 행렬과 질량행렬은 아래와 같이 구성된다.

$$\mathbf{K} = k \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{M} = m \times \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

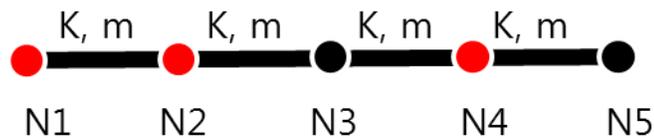


Figure 4.2 Simple bar example (N1,2,4 is sensor position)

식 (2.2)의 고유치 식은 아래와 같이 표현된다.

$$k \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & & & \\ & & 2 & -1 & -1 \\ & & -1 & -1 & 2 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_5 \end{Bmatrix} = \lambda \mathbf{M} = m \times \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_5 \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

2 장의 자유도 기반 축소 기법을 활용하여 변환 행렬을 구한다. Guyan 기법 기반의 변환 행렬은 아래와 같이 구성된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_G &= -\mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{sp} = - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.6)$$

반복연산을 통해 수립된 정확한 변환행렬을 아래와 같다.

$$\mathbf{t}_{IRS} = \begin{bmatrix} -1 & 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

이러한 변환행렬을 통하여 센서응답에서 전체 자유도의 고유벡터를 복원하면 아래와 같게 된다. 복원한 고유벡터는 강제 모드를 제외한 2 번째 모드의 고유벡터이다.

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_4 \\ \varphi_3 \\ \varphi_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{t}_{IRS} \end{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_p = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ -1 & 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} & & \\ 1 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} = 0.5 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

이 때 각 센서 위치에서 측정오차를 수식상으로 가정하여 추가해서 전개하였다.

1 번 절점에 측정오차가 존재한다고 보면, 아래와 같은 형태로 구성된다.

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\varphi}^{\text{Measure_Err1}} &= \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_4 \\ \varphi_3 \\ \varphi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{t}_{IRS} \end{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_p^{\text{Measure_Err1}} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ -1 & 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} & & \\ 1 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5+\alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5+\alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0.5-\alpha \\ -0.5+\alpha \end{bmatrix} = (0.5-\alpha) \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

반면에 2 번 절점에 측정오차가 존재할 경우, 고유벡터는 측정오차(α)의 함수로 아래와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\varphi}^{\text{Measure_Err2}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{t}_{IRS} \end{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_p^{\text{Measure_Err2}} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ -1 & 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} & & \\ 1 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5 \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5+(1+\sqrt{2})\alpha \\ -0.5-\sqrt{2}\alpha \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

두 경우의 측정오차에 의해 전체 고유벡터의 왜곡 정도를 비교하기 위해서 MAC 값(modal assurance criterion)을 비교하였다.

$$\text{MAC}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}^{\text{Measure_Err1}}) = \frac{(\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\varphi}^{\text{Measure_Err1}})}{(\boldsymbol{\varphi}^T \cdot \boldsymbol{\varphi})((\boldsymbol{\varphi}^{\text{Measure_Err1}})^T \cdot \boldsymbol{\varphi}^{\text{Measure_Err1}})} = 1 \quad (4.11)$$

$$\text{MAC}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}^{\text{Measure_Err2}} (\alpha = 0.08)) = \frac{(\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\varphi}^{\text{Measure_Err2}})}{(\boldsymbol{\varphi}^T \cdot \boldsymbol{\varphi})((\boldsymbol{\varphi}^{\text{Measure_Err2}})^T \cdot \boldsymbol{\varphi}^{\text{Measure_Err2}})} = 0.9836 \quad (4.12)$$

위 두 식에서 보는 것과 같이 노달 포인트에 해당되는 2번 절점에서의 측정오차에 의한 고유벡터의 오차가 큰 것을 확인할 수 있다. 그림 4.3 은 각 두 경우의 고유벡터, 즉 모드 형상(Mode shape)을 보여준다.

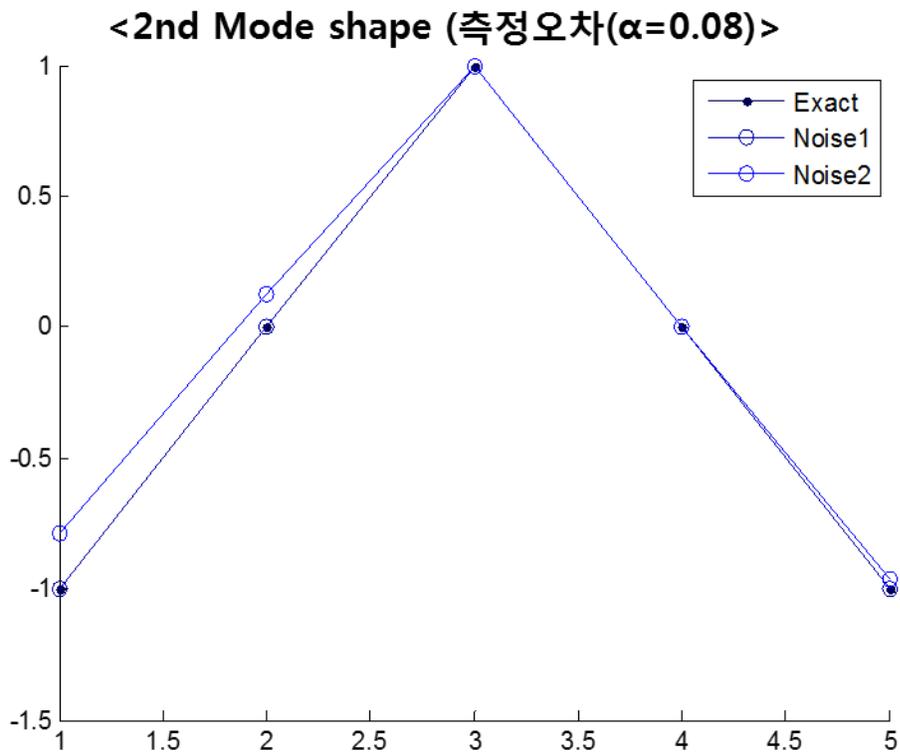


Figure 4.3 2nd mode shape in simple bar model with 4 elements

보다 많은 자유도를 늘린 모델에서도 노달 포인트에서 측정오차가 발생한 경우와 그렇지 않은 위치에서 발생한 경우의 오차 발생 정도가 크게 차이 남을 확인 할 수 있다.

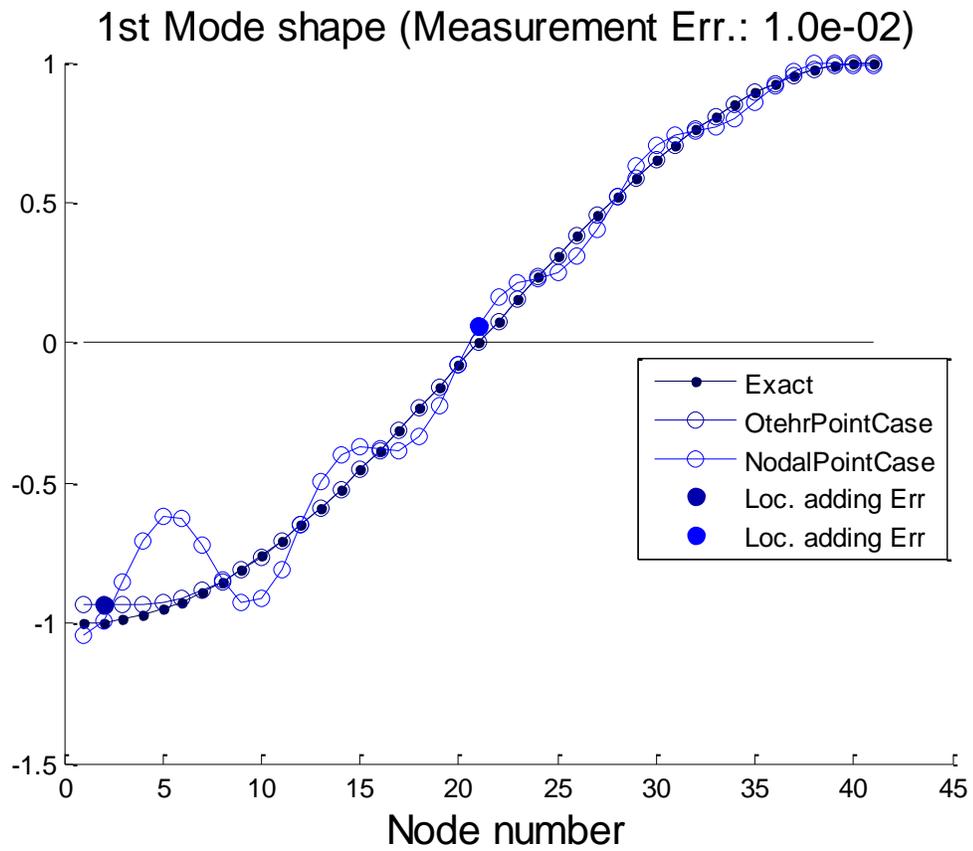


Figure 4.4 1st mode shape in simple bar model with 40 elements

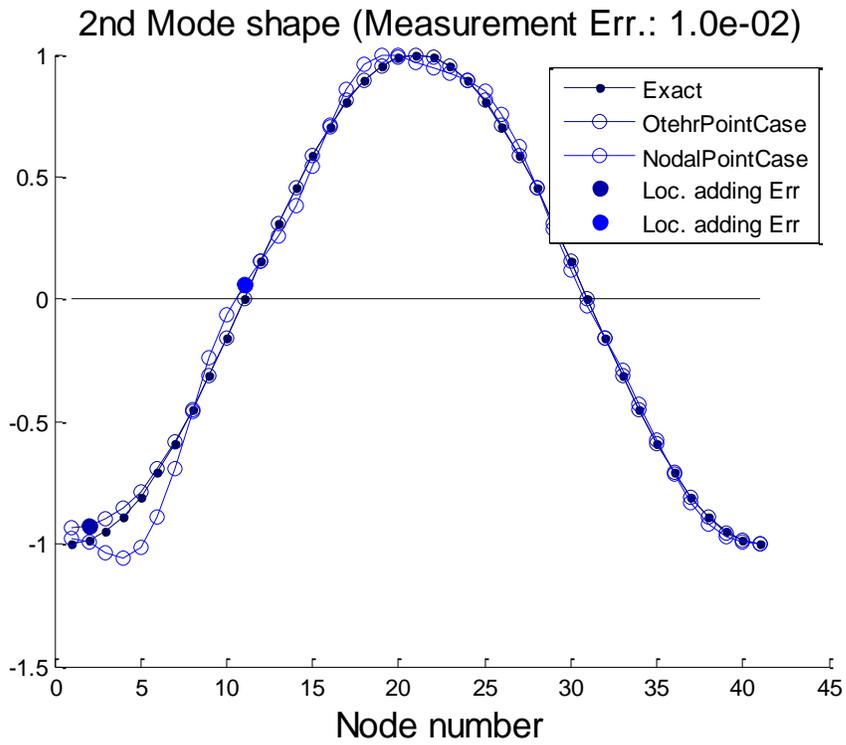


Figure 4.5 2nd mode shape in simple bar model with 40 elements

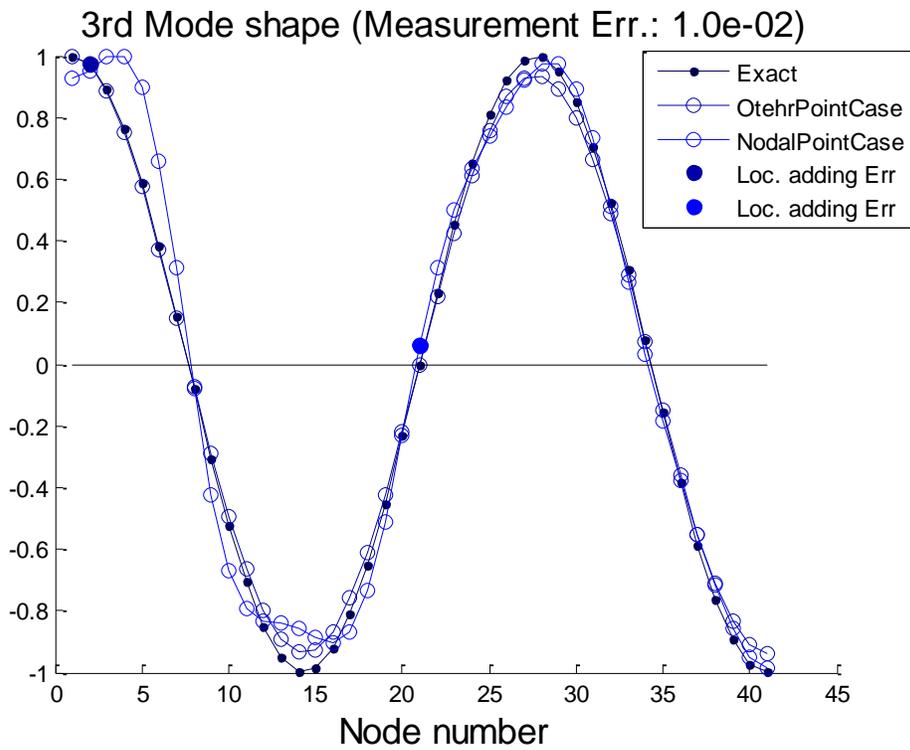
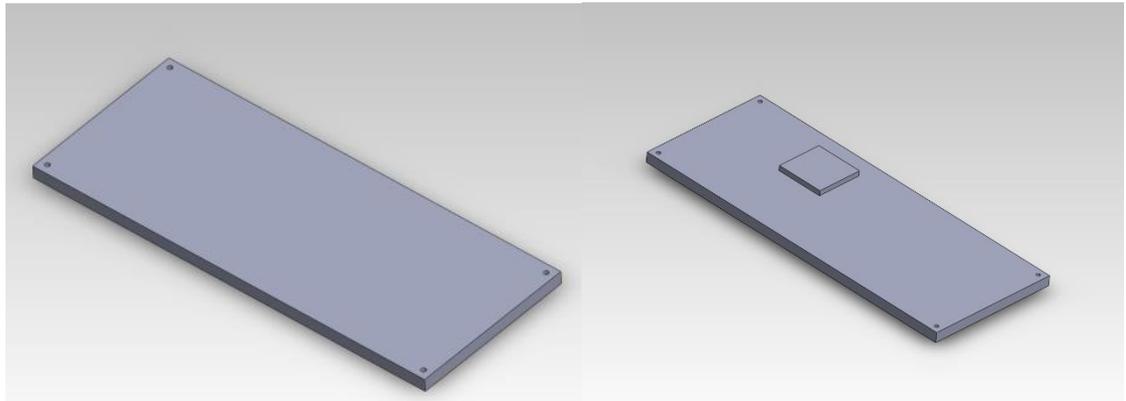


Figure 4.6 3rd mode shape in simple bar model with 40 elements

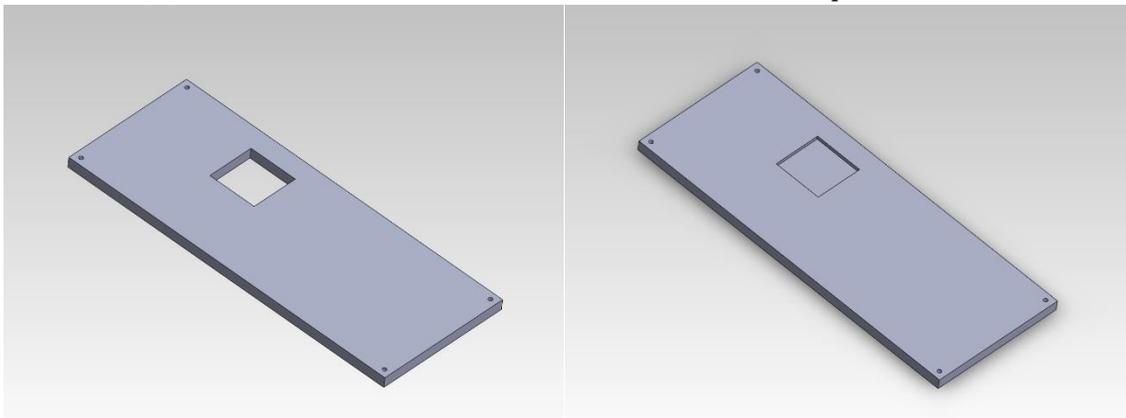
4.3 검증을 위한 실험 모델 설정 및 진동 실험 구축

센서 선정 기법의 검증을 위하여 실제 진동 실험을 통해 평판의 두께변화를 찾는 시스템 식별을 구성하고 실험을 수행하였다. 진동 실험 모델은 위 장에서 수치 예제로 사용한 단순 평판으로 정하였다. 그림 4.7 과 같이 단순 평판을 초기 모델(Reference model)로 설정하고 특정 위치에서의 두께 변화를 변화하는 형태로 3 가지의 변형된 모델(Perturbed model)를 구성하였다. 평판은 알루미늄합금(A6061-T6)으로 만들어 졌으며 전체 크기는 가로 500mm, 세로 200mm, 두께 15mm 로 되어 있다. 두께가 변경되는 위치는 모두 동일하며 해당 위치의 두께는 3 가지 변형된 모델에서 각각 0mm(Hole model), 5mm(Semi-hole model), 30mm(Bump model) 이다. 모델의 보다 구체적인 수치는 그림 4.8 에 표시 되어있다. 평판 끝 단에 있는 4 개의 구멍을 추가하여서 진동 실험에서 고무줄로 묶어서 공중에 띄우는데 용이하게 하였다. 실제 시편은 밀링(milling) 가공기법을 통하여 두께의 변화 구현하여 그림 4.9 과 같은 형태의 시편을 제작하였다.



(a) Reference model

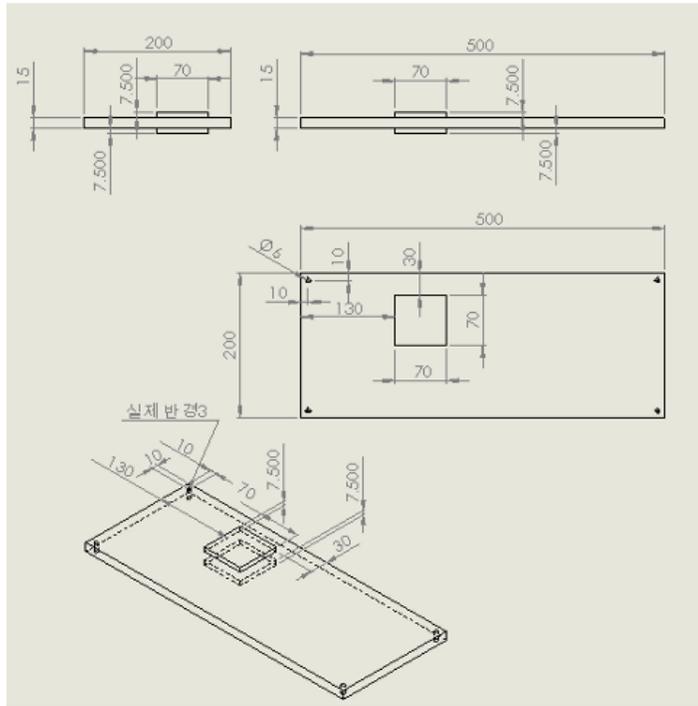
(b) Bump model



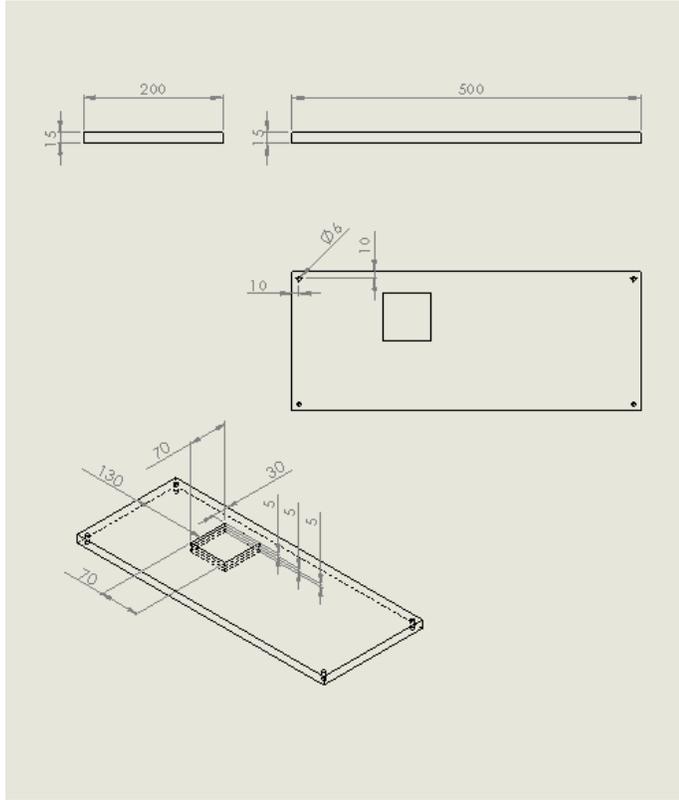
(c) Hole model

(d) Semi-hole model

Figure 4.7 Configuration of experimental model

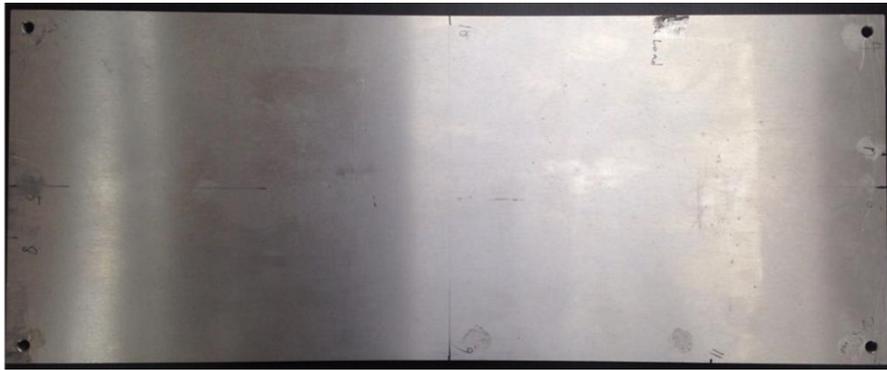


(a) Bump model

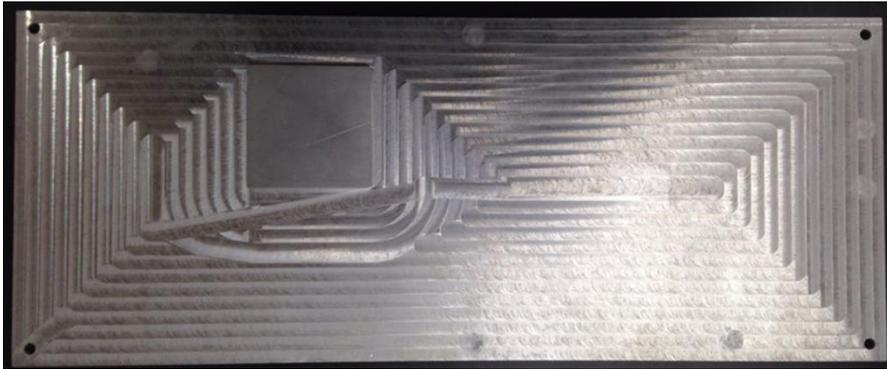


(b) Semi-hole model

Figure 4.8 Specific dimension of experimental model



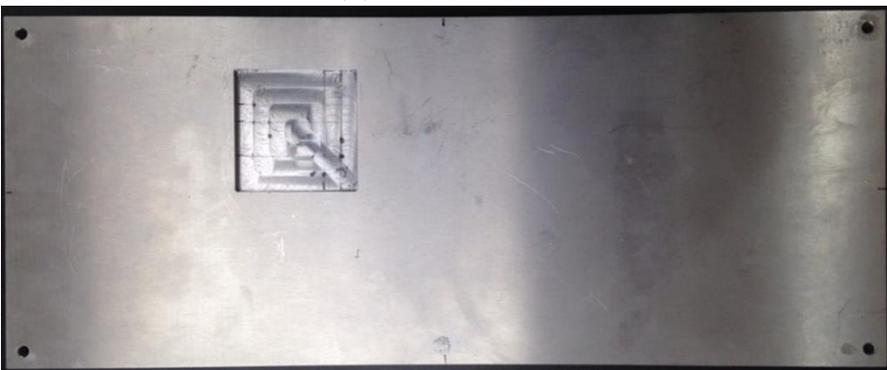
(a) Reference model



(b) Bump model



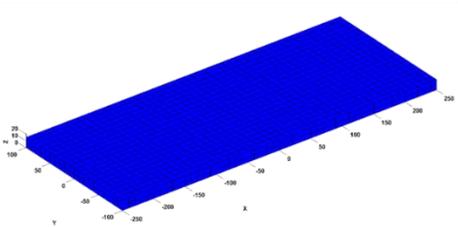
(c) Hole model



(d) Semi-hole model

Figure 4.9 Experimental plates

진동 실험은 그림 4.10 와 같이 평판에 센서를 부착하고 임팩트 해머(Impact hammer)를 통해 가진하고 이 때 센서의 응답을 받는 형태의 전형적인 고유치 해석을 위한 진동 실험을 구축하였다. 실험 장비는 그림 4.11 의 장비들을 삼성전자 생산기술 연구소에서 대여하여는 형태로 실험을 진행하였다. 장비들의 구체적인 스펙은 표 4.1 과 같다. 센서 신호 처리는 PULSE LapShop 프로그램을 사용하였으며 자세한 옵션 내용은 그림 4.12 과 같다. 센서는 기본적으로 3 축 센서로 입력모듈의 입력을 3 개를 소요한다. 실험 장비들을 해당 시편의 실험을 목적으로 구비된 형태가 아니어서 센서의 크기나 입력모듈의 구체적인 사항이 실험의 목적과 정확히 부합하지는 않는다. 또한 이러한 장비의 제한성으로 인하여 실제 진동 실험은 3 축 센서를 부착하고 가진 및 측정 후 센서의 위치를 이동 후 가진 및 측정하는 형태로 평판의 여러 위치에서의 센서 응답을 얻었다.



- plate size : 500mmx200mmx15mm
- Material : A6061-T6
- Density : 2712kg/m³,
- Yong's modulus : 7.1E+10Pa
- Poisson's Ratio:0.33

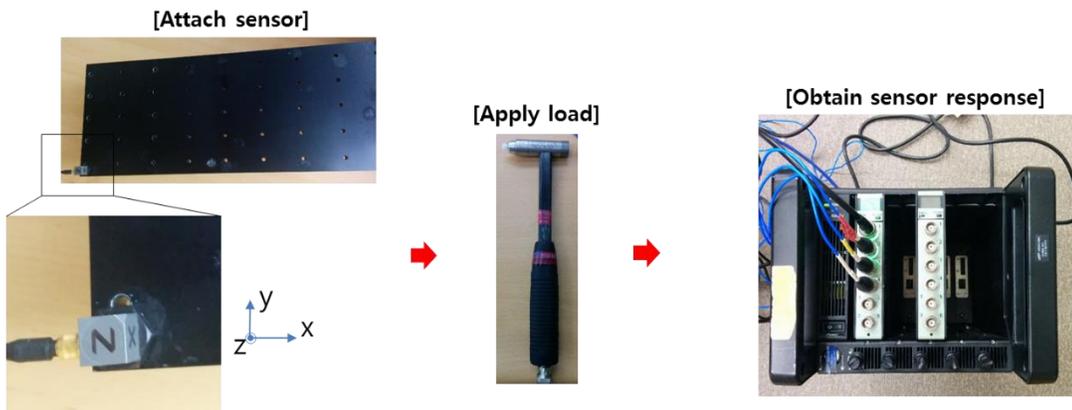


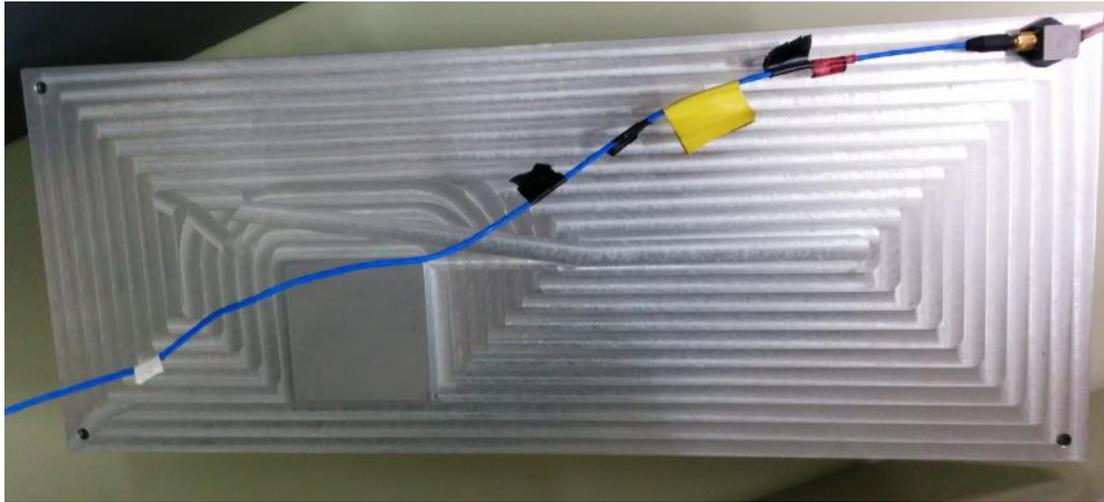
Figure 4.10 Configuration of experimental model and experimental step



(a) Impact hammer



(b) input module

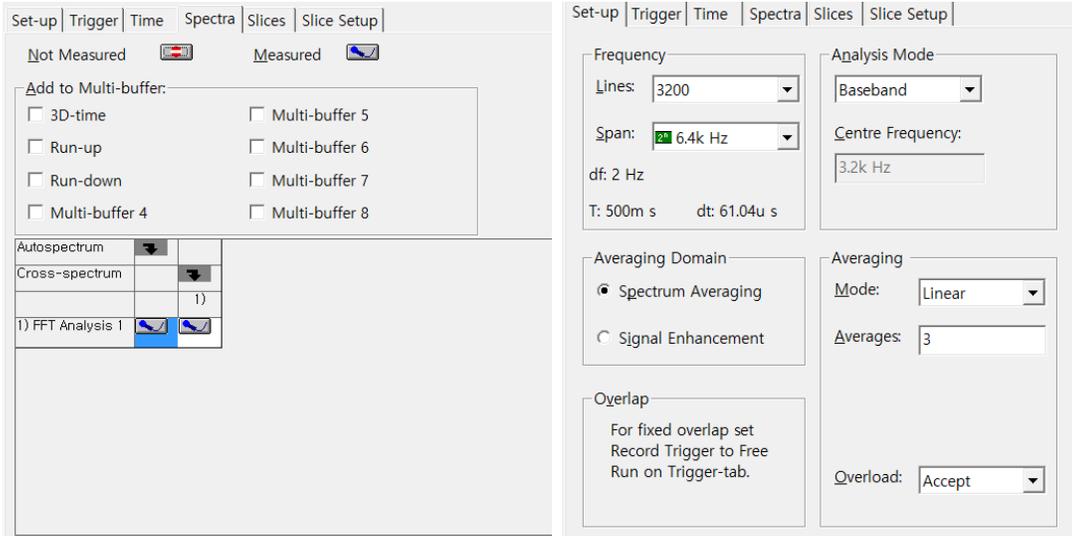


(c) Sensor and plate

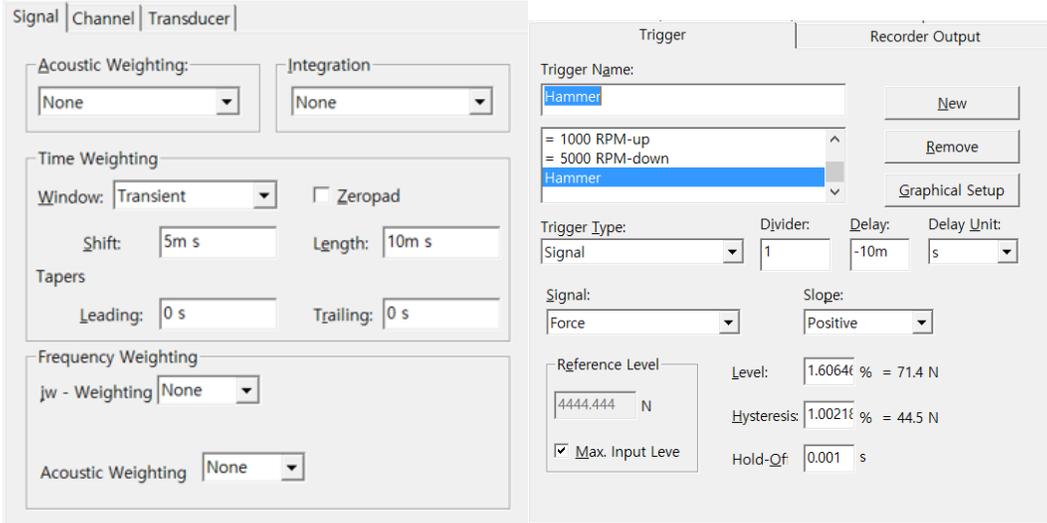
Figure 4.11 Experimental equipment

Table 4.1 Specification of experimental equipment

Accelerometer	
Model	PCM 356A14
Sensitivity	(±10%) 100 mV/g (10.2 mV/(m/s ²))
Measurement Range	±50 g pk (±490 m/s ² pk)
Broadband Resolution	0.0001 g rms (0.001 m/s ² rms)
Frequency Range	(±5%) 0.5 to 5000 Hz
Electrical Connector	1/4-28 4-Pin
Impact hammer	
Model	PCB 086C03
Frequency range	8 kHz
Amplitude range	500 lb
Head diameter	0.6 inch
Sensitivity	(±15%) 10 mV/lbf (2.25 mV/N)
Measurement Range	±500 lbf pk (±2224 N pk)
Hammer Mass	0.34 lb (0.16 kg)
Input module	
Model	LAN-XI - Type 3050
input channels	4 or 6
input range	51.2KHz (DC)
sampling rate	131 ksamples/s



(a) FFT



(b) Force

(c) Trigger

Figure 4.12 Specification of experiment setting

4.4 센서 위치 선정결과

본 절에서는 자유도 기반 축소법을 통하여 위 절에서 설명한 4 가지 평판 모델의 센서 위치 선정하였다. 위의 4 가지 평판은 특정 위치의 두께 변화로 표 4.2 과 같이 고유진동수의 변화를 보이게 된다. 초기 평판과 비교하면 그림 4.13 과 같은 크기의 오차를 가지게 된다. 그림 4.14~16 은 초기 평판과 두께 변화된 모델들의 고유벡터 차이를 보여준다. 그림 4.14 에서 볼 수 있듯이 ‘Bump model’ 은 초기 평판과 5,6 번 모드에서 차이가 큰 것을 알 수 있다. 특히 6 번 모드는 기존의 평판이 대칭성을 유지하고 있는 반면에 ‘Bump model’에서는 비대칭성을 보인다. 심지어 그림 4.15~16 에서 볼 수 있듯이 ‘Hole model’, ‘Semi-hole model’에서는 5 번째 모드와 6 번째 모드가 초기 평판과 순서가 변경되는 현상이 발생한다. 이러한 고유벡터의 변화를 고려하여서 센서위치 선정 시 고려하는 모드 개수는 6 개로 선정하였다.

센서위치는 3.2 절에서 설명했듯이 해당 모델의 고유치 해석을 수행하고 이를 통해 얻어진 고유벡터를 통하여 각 절점의 에너지 비를 구하고 이를 통해 그림 4.17 와 같이 센서 위치 후보군을 설정하였다. 이중 그림 4.18 와 같이 저차 모드 중 특정 모드에서의 노달 포인트(Nodal point) 즉 고유 벡터가 특정 모드에서 0 인 지점을 제외시켰다. 최종적으로 센서위치로 피해야 할 부분은 그림 4.19 와 같으며, 이 부분을 제외시켜서 최종적으로 그림 4.20 와 같이 센서 위치를 선정하였다. 결과비교를 위하여 실험은 후보군에 대하여 모두 수행하였다.

Table 4.2 Numerical result of natural frequencies in plate models

Reference Model	Bump Model	Hole Model	Semi-hole Model
316.4	336.4	293.3	294.3
471.6	511.2	445.4	446.0
874.8	944.2	837.9	826.2
1010.2	1094.4	971.4	970.7
1682.0	1699.0	1612.4	1626.8
1692.7	1731.4	1683.1	1665.7
2057.1	2125.5	1901.0	1884.6

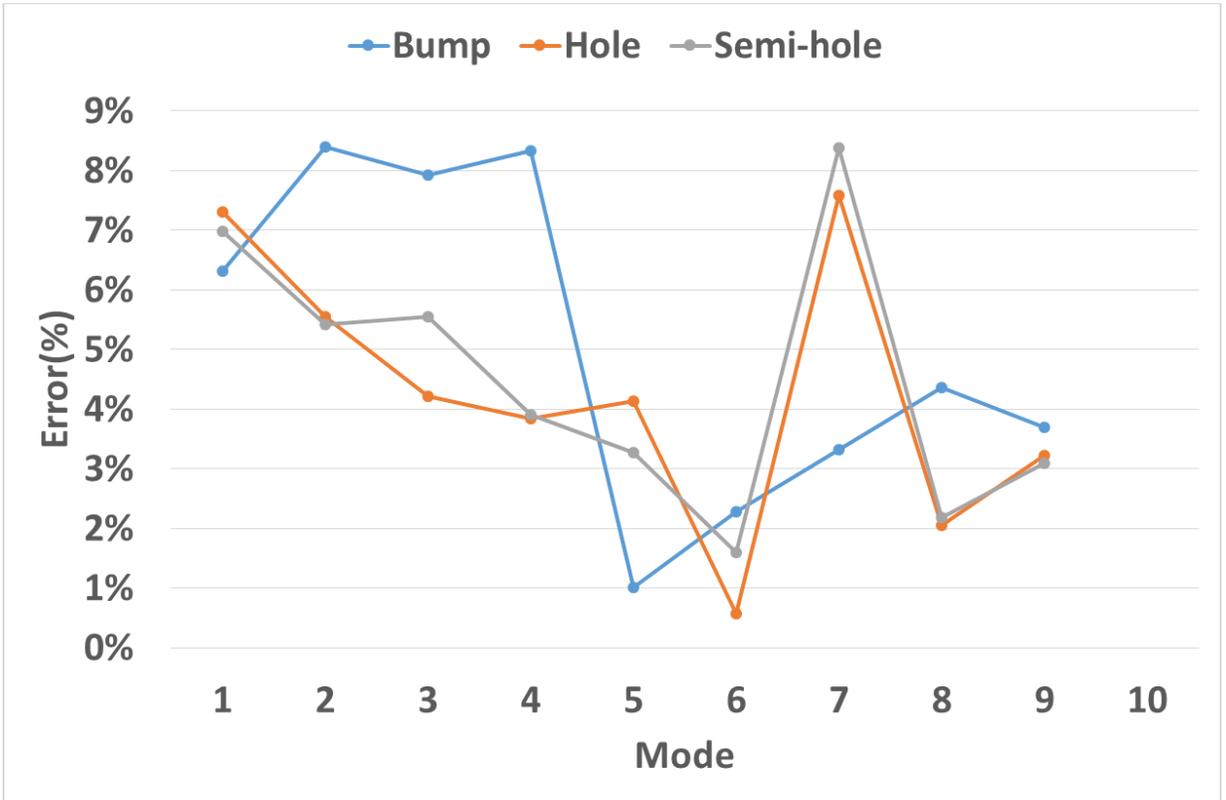


Figure 4.13 Natural frequency difference compared to reference model

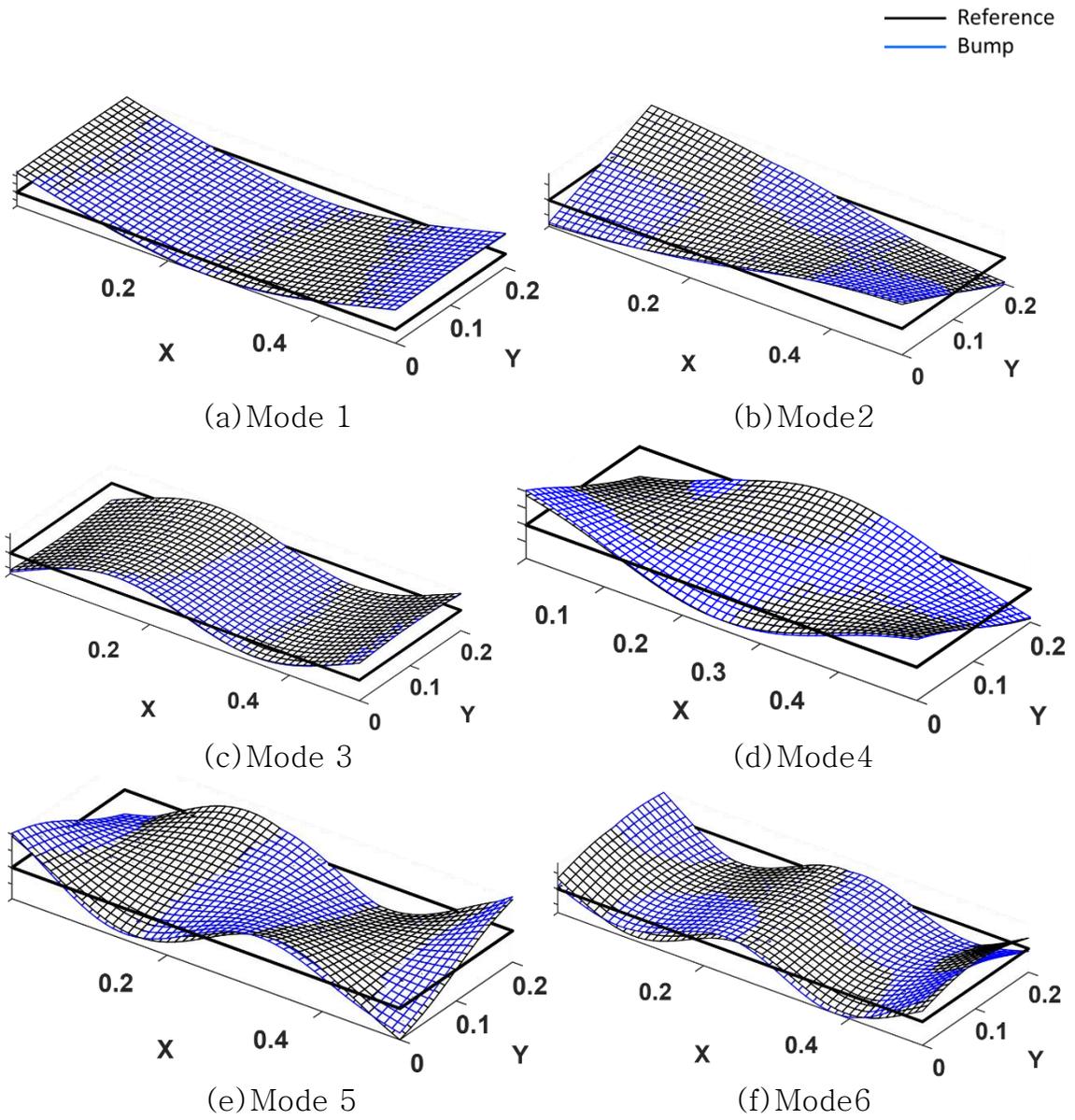


Figure 4.14 Mode shape in 'bump model'

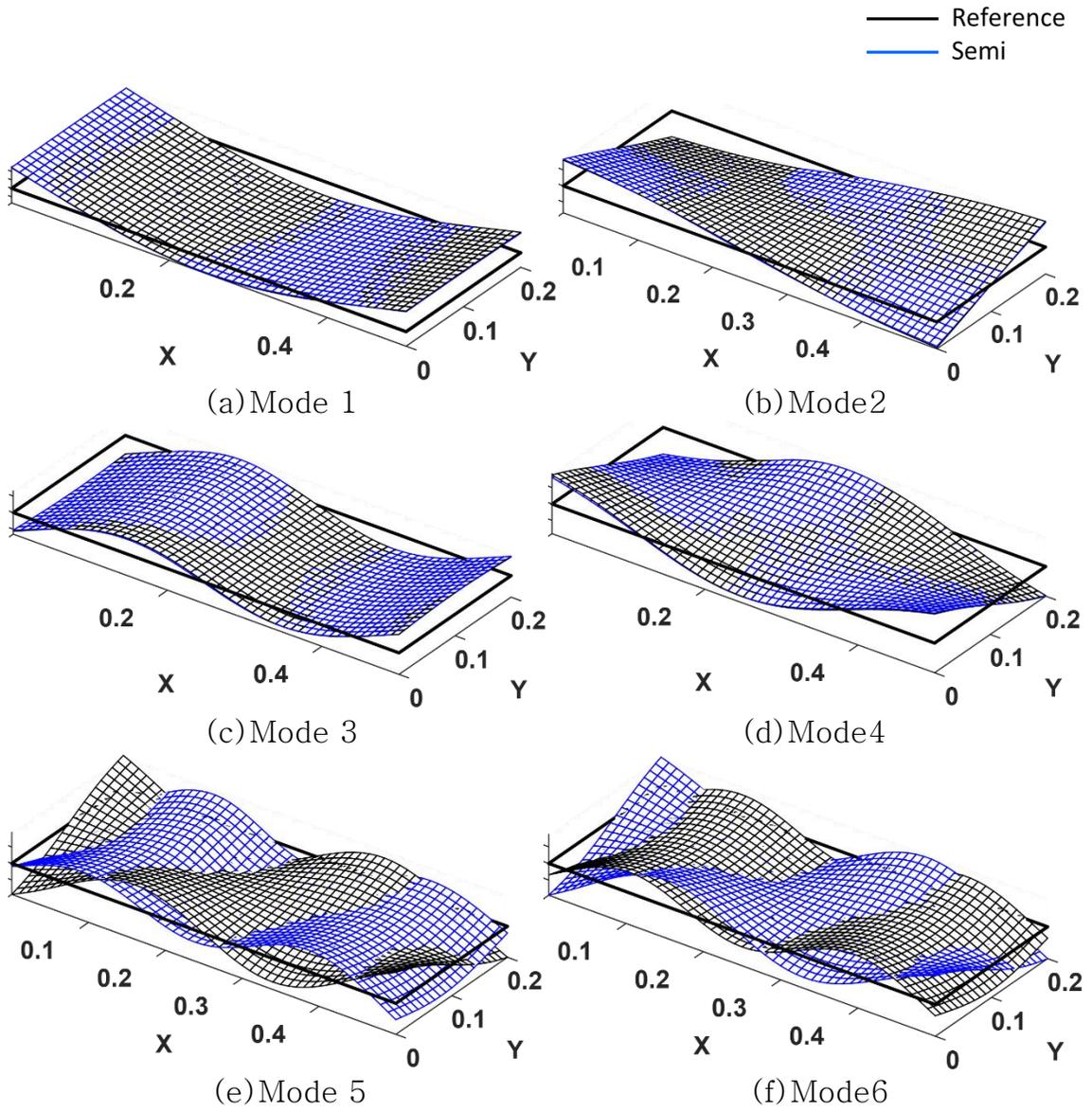


Figure 4.15 Mode shape in 'semi-hole model'

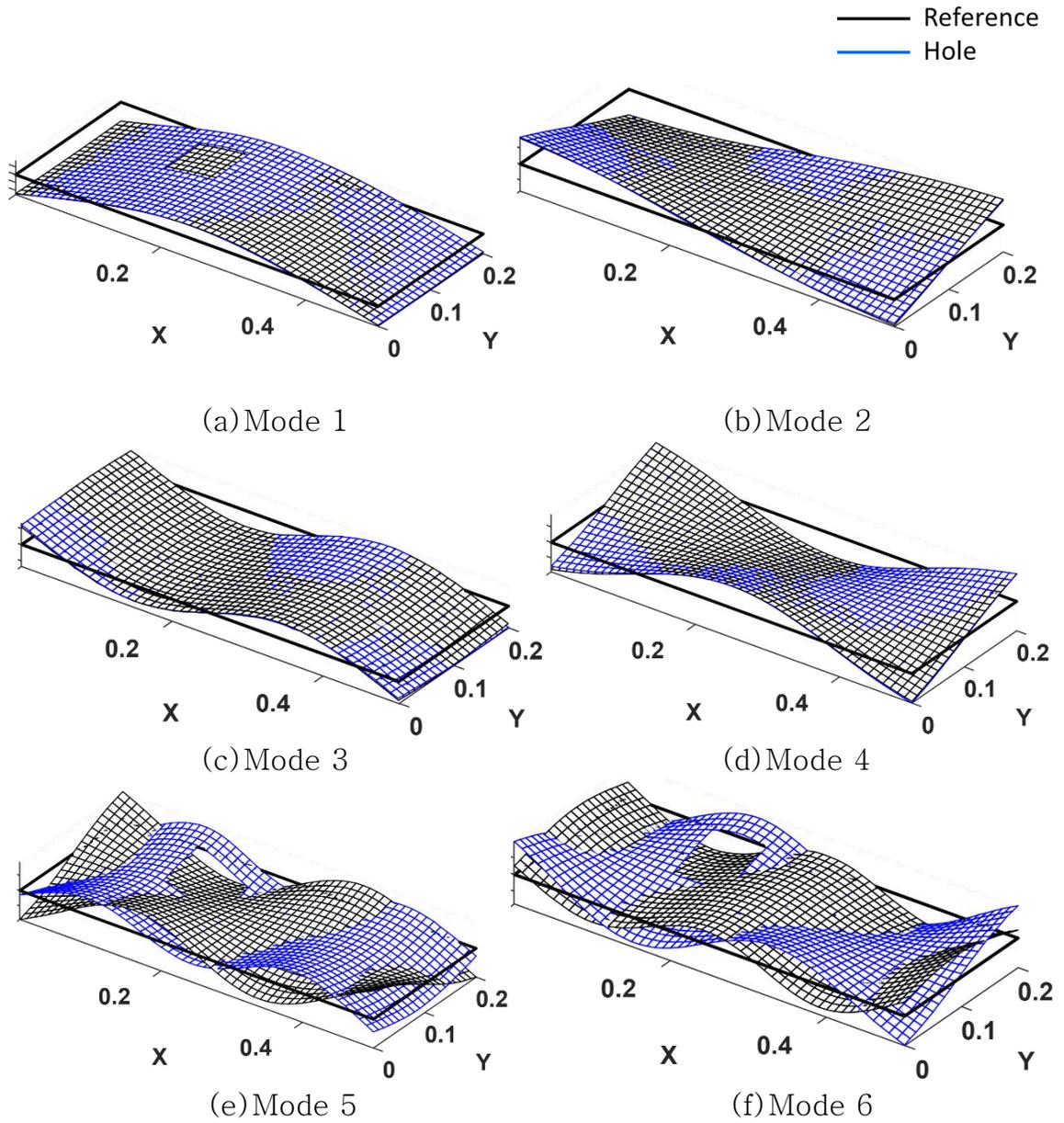
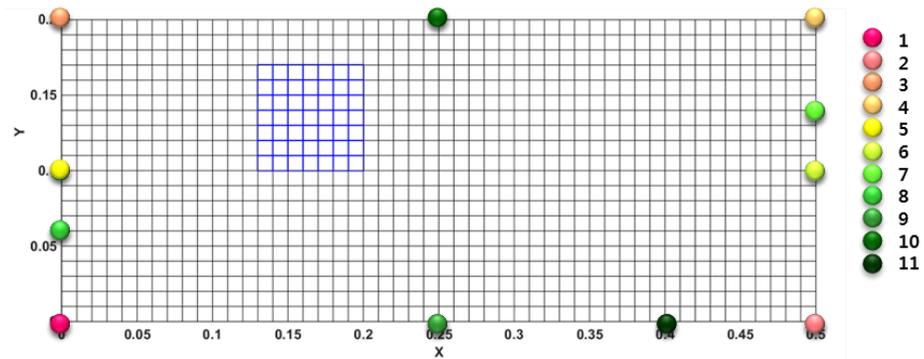
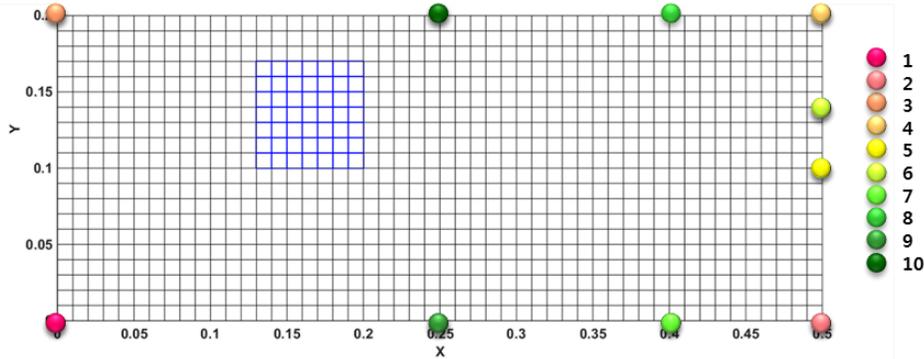


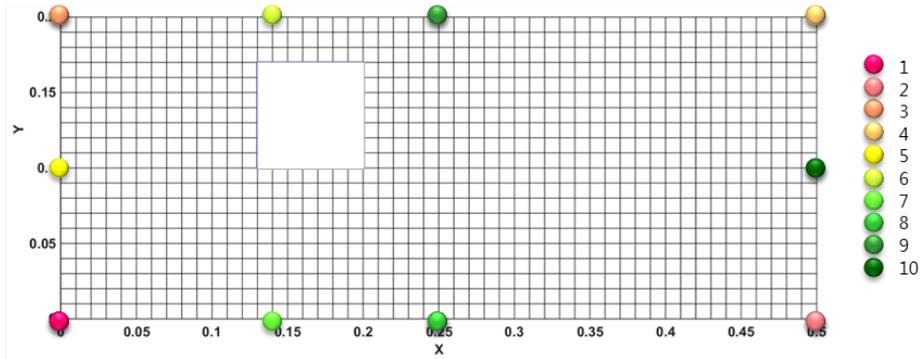
Figure 4.16 Mode shape in 'hole model'



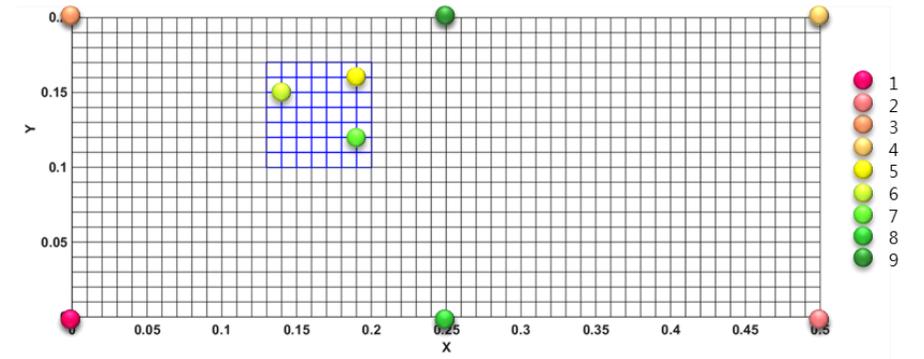
(a) Reference model



(b) Bump model

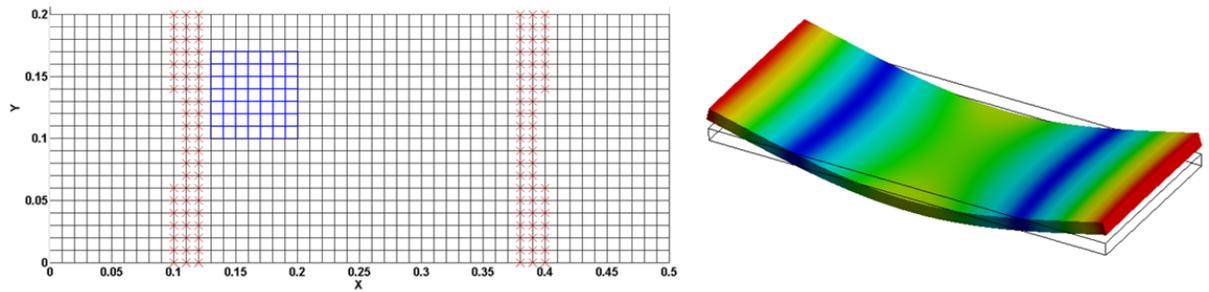


(c) Hole model

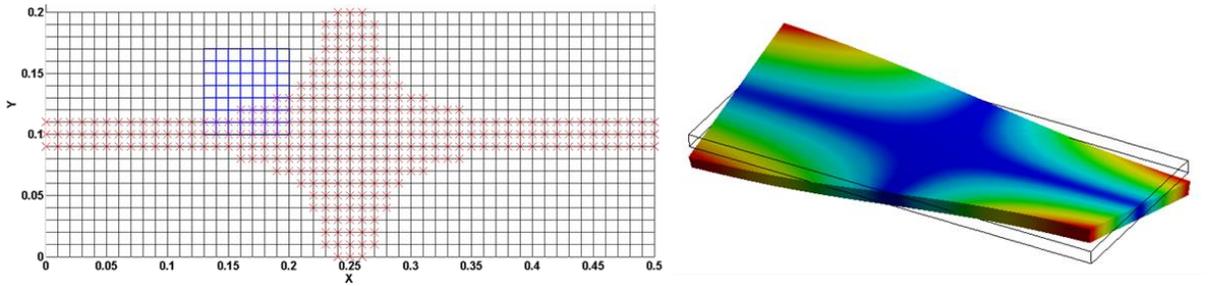


(d) Semi-hole model

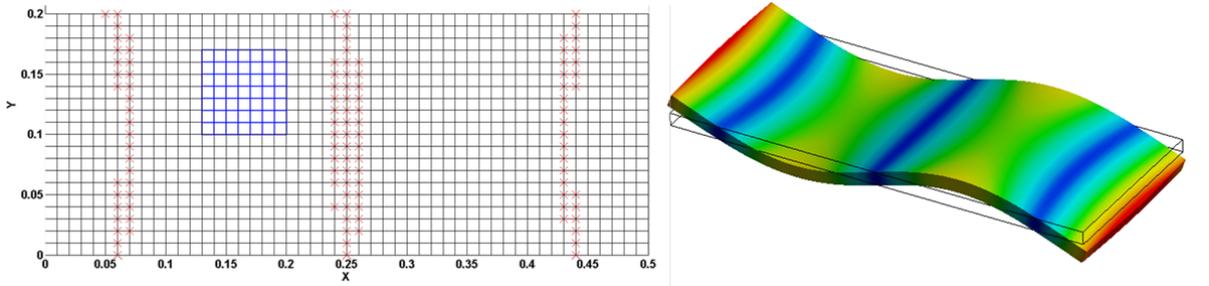
Figure 4.17 Recommended sensor position



(a) 1st mode

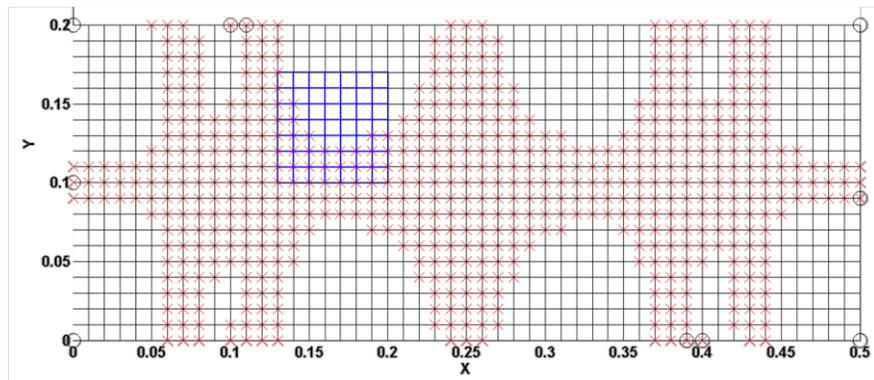


(d) 2nd mode

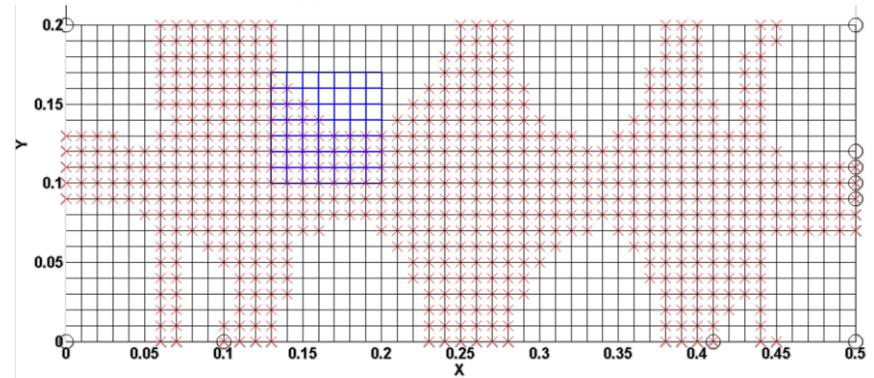


(c) 3rd mode

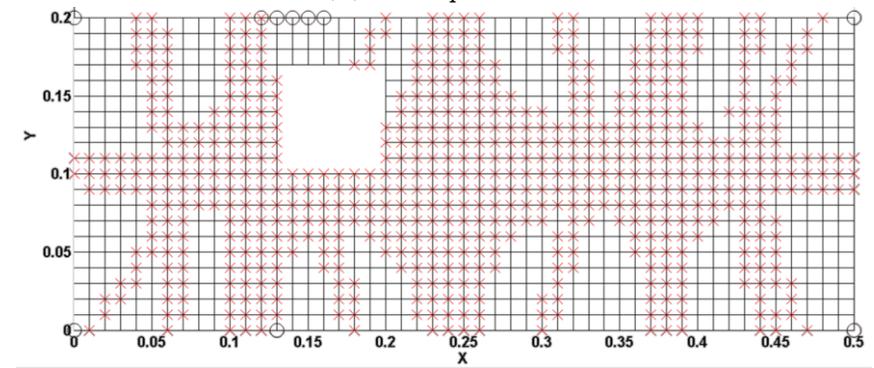
Figure 4.18 Nodal point in low modes



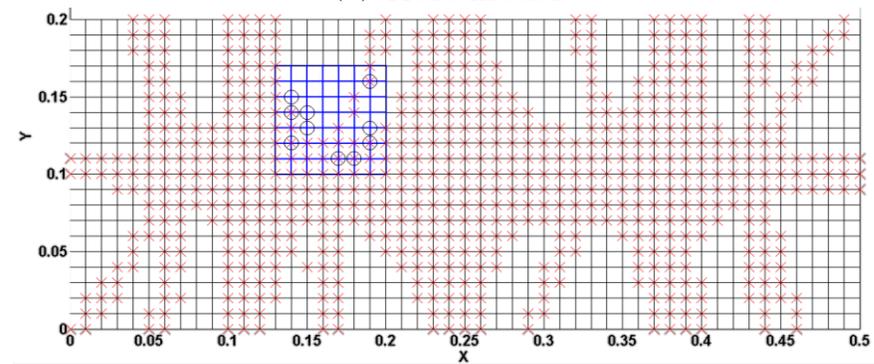
(a) Reference model



(b) Bump model



(c) Hole model



(d) Semi-hole model

Figure 4.19 Non-recommended location for sensor position

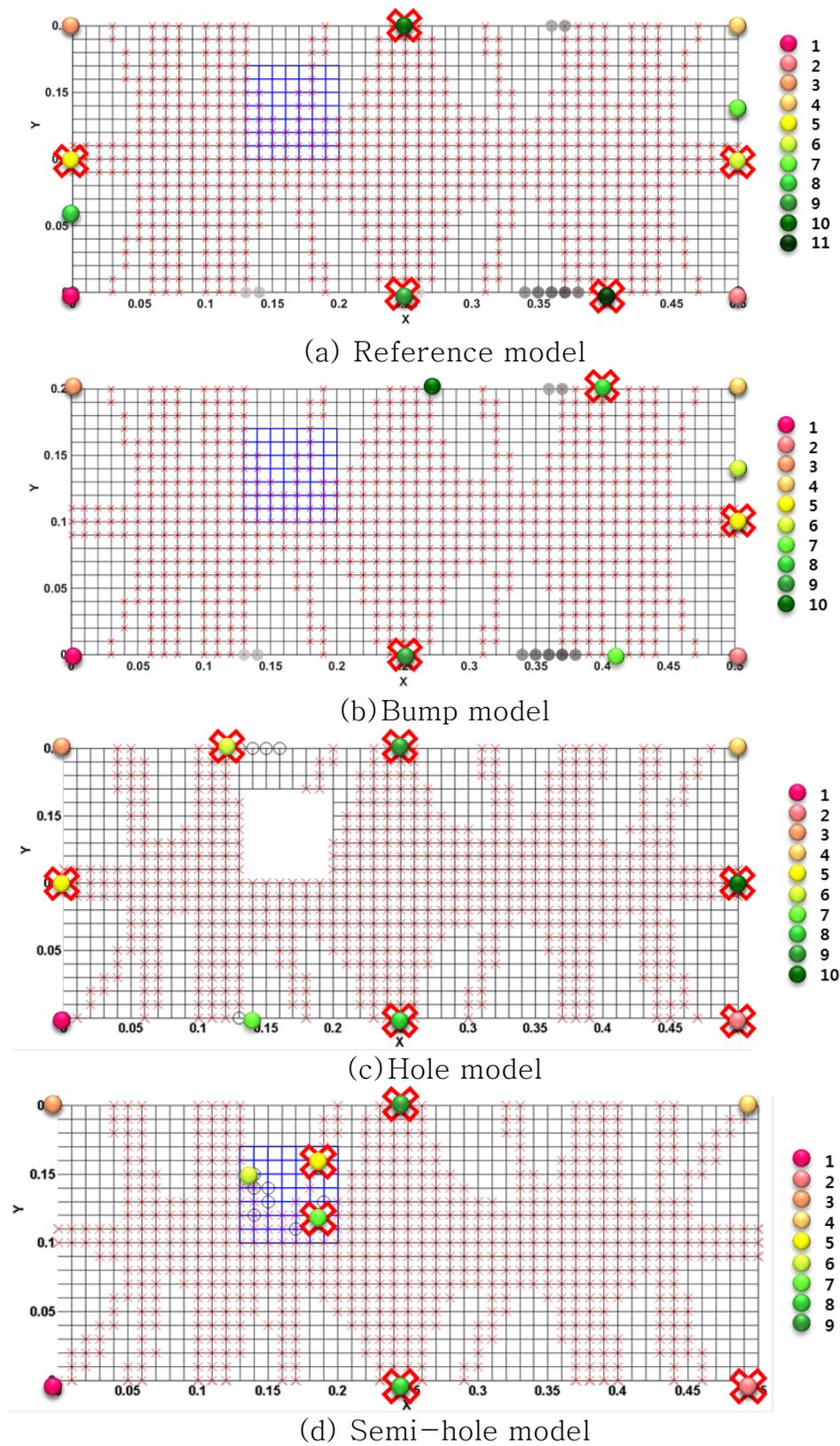


Figure 4.20 Configuration of final selected sensor position

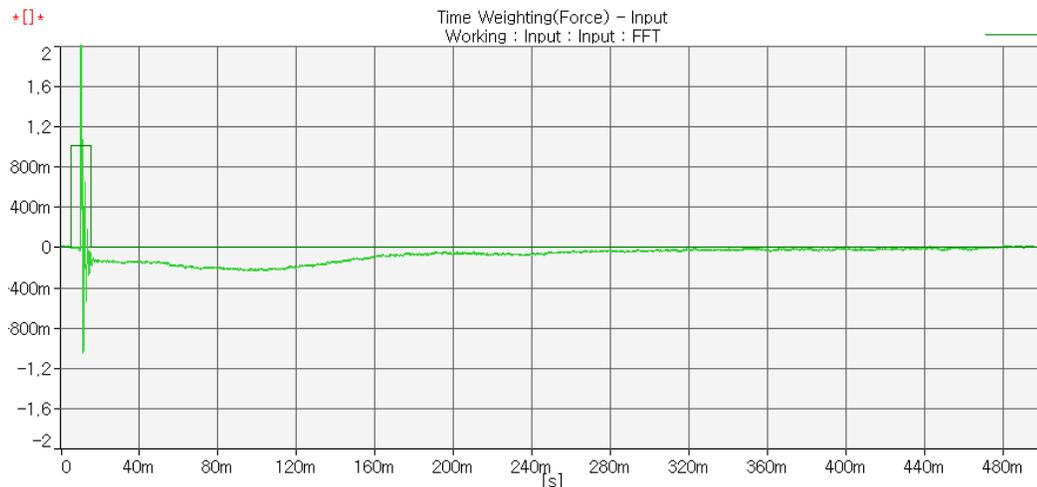
4.5 진동 실험 및 시스템 식별 결과

4.4 절에서 선정한 센서 위치를 토대로 실제 실험을 진행하였다. 하중은 임팩트 하중을 부여하였으며 그림 4.21 과 같이 window 를 설정하였다. 실험을 통해 얻은 데이터는 해당 센서에서의 응답을 FFT 변환을 하여 얻어지는 주파수 응답의 크기와 위상이다. 해당 위치마다 3 번의 실험을 진행하였고 이를 통해 Coherence 를 확인하였다.

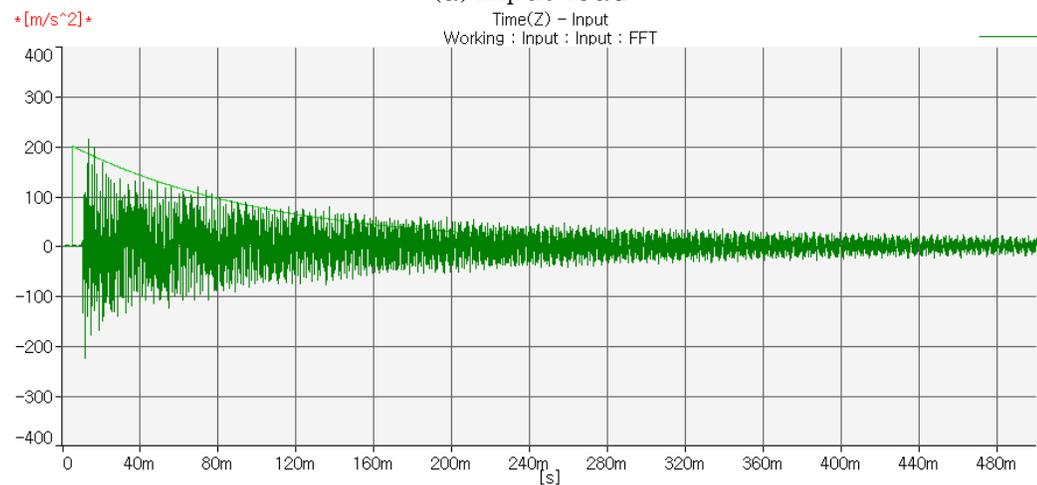
그림 4.22(a) 과 같은 주파수 응답의 크기 그래프에서 peak 를 부분을 찾아서 고유 진동수와 고유 벡터의 크기를 구하였다. 그림 4.22(b)에서 보는 바와 같이 위상 그래프에서는 해당 고유 진동수 값의 부호를 통하여 고유 벡터의 방향을 결정하였다.

그림 4.23 은 실험을 구한 고유 진동수와 해석을 구한 고유진동수의 오차를 나타낸다. 위의 실험에서 얻은 고유 진동수와 고유 벡터를 이용하여 3 절에서 설명한 시스템 식별 기법을 통하여 두께 변화가 있는 부분의 두께를 시스템 변수로 설정하여 시스템 식별을 수행하였다. 표 4.3 은 추천한 센서 위치의 센서데이터만을 통하여 시스템 식별한 경우와 측정된 모든 센서 위치를 모두 포함 경우의 시스템 식별 결과를 보여준다. 표에서는 보는 바와 같이 추천한 센서 위치의 데이터만 가지고 한 경우에는 비교적 정확히 두께를 식별하는 것을 확인할 수 있다. 반면 이보다 더 많은 정보 즉 모든 측정 데이터를 다 고려해서 시스템 식별한 경우에는 오히려 시스템 식별을 전해 하지 못하거나 큰 오차를 보이는 것을

확인 할 수 있다. 이는 오차가 큰 데이터는 오히려 해를 해치는 현상이 발생하기 때문이라고 생각된다. 오차가 큰 센서의 응답이 없다면 해당 부분의 고유벡터는 다른 부분의 고유벡터에서 주자유도 축소법으로 추산하여 고려된다. 따라서 오차가 큰 센서 응답이 포함되면 이 잘못된 응답을 기준으로 주변 자유도의 고유벡터를 추산하기 때문에 오차가 기하급수적으로 커지게 된다. 따라서 무작정 센서 수를 늘려서 실험하는 것보다는 해석 기반으로 센서 위치를 추산하고 이를 통하여 정확한 실험을 한다면 보다 정확하고 효과적인 시스템 식별을 할 수 있을 것이라고 기대된다.

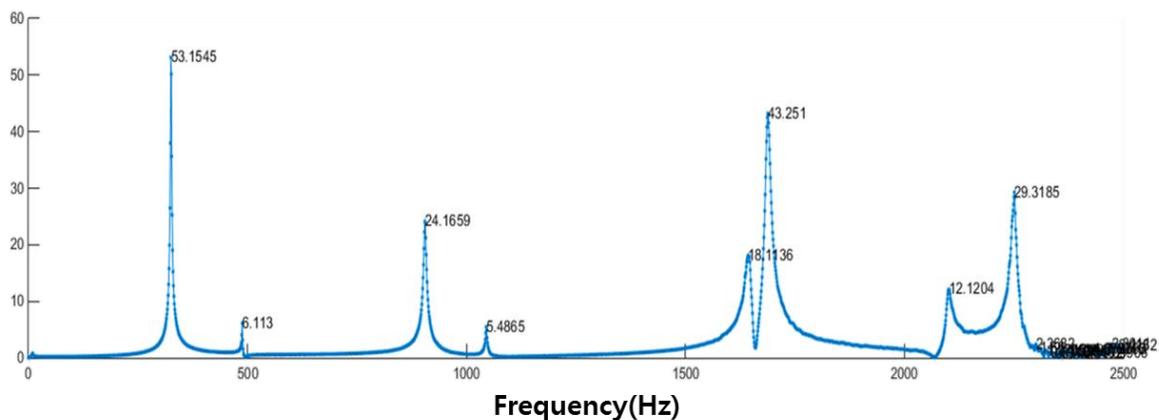


(a) Input load

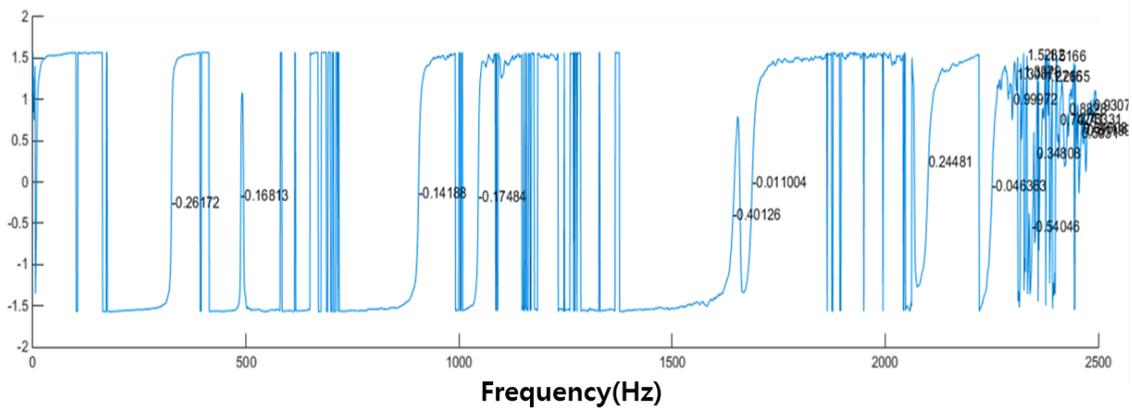


(b) Sensor output

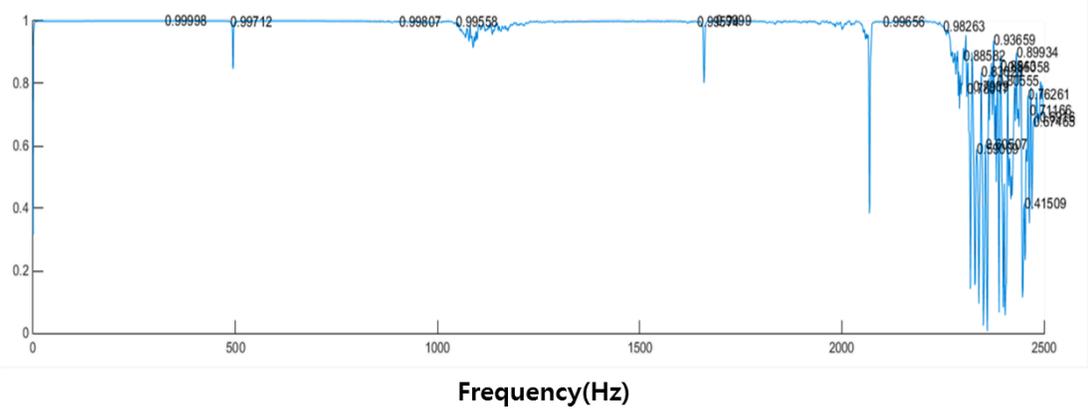
Figure 4.21 Specification of experimental equipment



(a) Magnitude



(b) Phase



(c) Coherence

Figure 4.22 Experiment output data

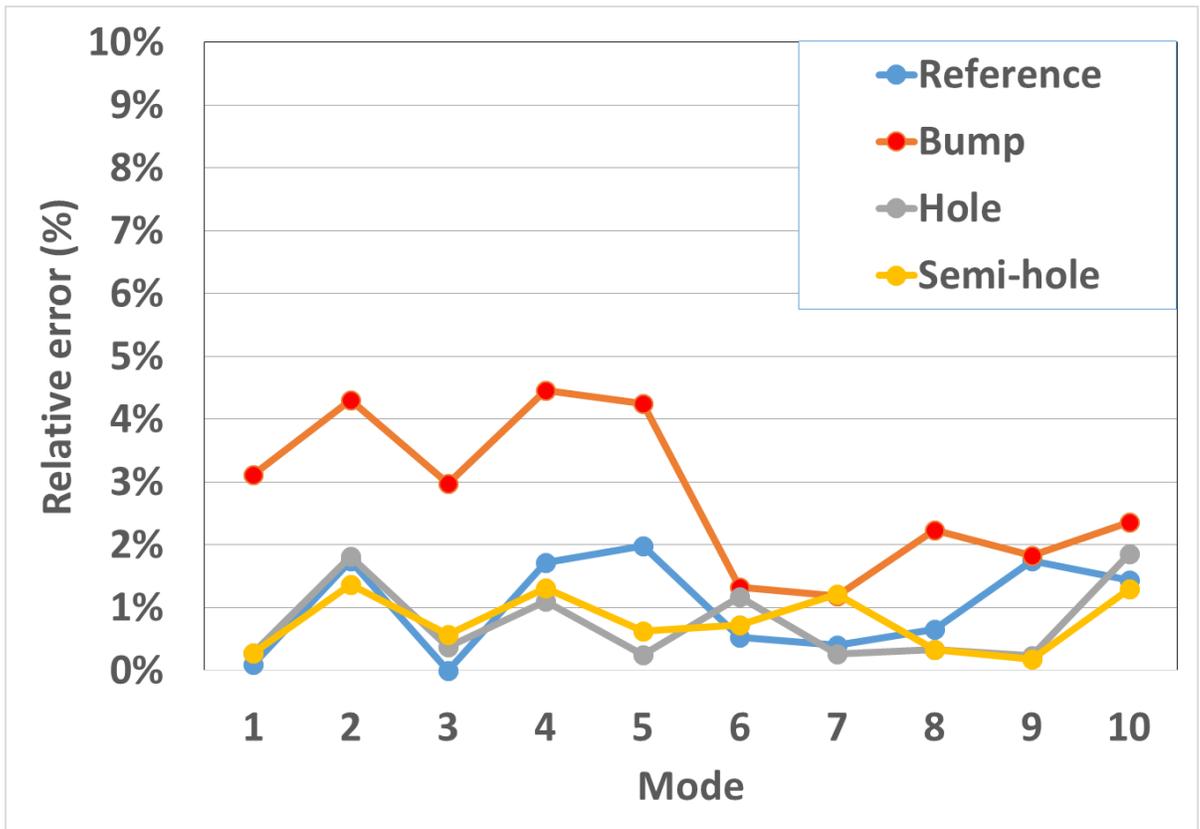


Figure 4.23 Natural frequency errors between experimental results and numerical results

Table 4.3 System identification results

Model	Used data	Thickness (mm)	S/F
Bump	Exact	30.0	
	Result with recommend node data (2, 3, 4, 6, 7, 10)	30.9	Success
	Result with all data (1~10)	-5.6	Fail
Hole	Exact	0.0	
	Result with recommend node data (1, 2, 3, 4, 7)	-2.9	Success
	Result with all data (1~10)	25.9	Fail
Semi-hole	Exact	5.0	
	Result with recommend node data (1, 3, 4, 5, 6, 7, 8)	5.6	Success
	Result with all data (1~10)	0.0	Fail

5. 최적 설계

본 장 2 장에서 제안한 축소 기법을 활용하여 최적 설계 문제에 적용하였다. 또한 서론에서 언급한 바와 같이 제안한 기법의 실용성을 높이기 위하여 기존의 유한요소 해석 상용 프로그램과의 연계를 통하여 제안된 방법인 병렬화와 기존 축소 행렬의 재활용을 장점을 그대로 활용하여 최적화를 수행하였다.

5.1 상용프로그램과의 연계를 통한 최적설계

종래 구조해석 기술을 위해 산업체에서 많이 사용되고 있는 상용 프로그램들(예 Nastran[34], Ansys[35], Abaqus[28] 등)은 개발 당시부터 최적설계가 아닌 구조 해석에 초점이 맞춰져서 개발되었기 때문에 구조물 중 일부만 변경되어도 해석 전반의 과정을 모두 다시 실행해야 한다. 이러한 해석 기반의 프로그래밍은 최적설계를 수행하는 많은 어려움을 가진다. 특히 최근에 대형구조물의 최적 설계에 대한 수요가 커짐에 따라서 이러한 최적화에 적합하지 않은 구조에 의한 단점이 부각되고 있다.

반면 대학 및 연구소에서 자체 개발해서 사용하고 있는 인하우스 코드(in-house code) 즉 프로그램언어(예 C 언어, Fortran 언어 등)로 직접 작성한 프로그램은 해당 최적화 문제에 맞게 설계 변수에 따라 변경되는 부분만을 효율적으로 고려하여 최적화를 수행하도록 코드 및 프로그램을 만들 수 있지만 코딩된 프로그램의 호환성이나 해석의 정확도에 대한 신뢰도 측면에서 볼 때 실제

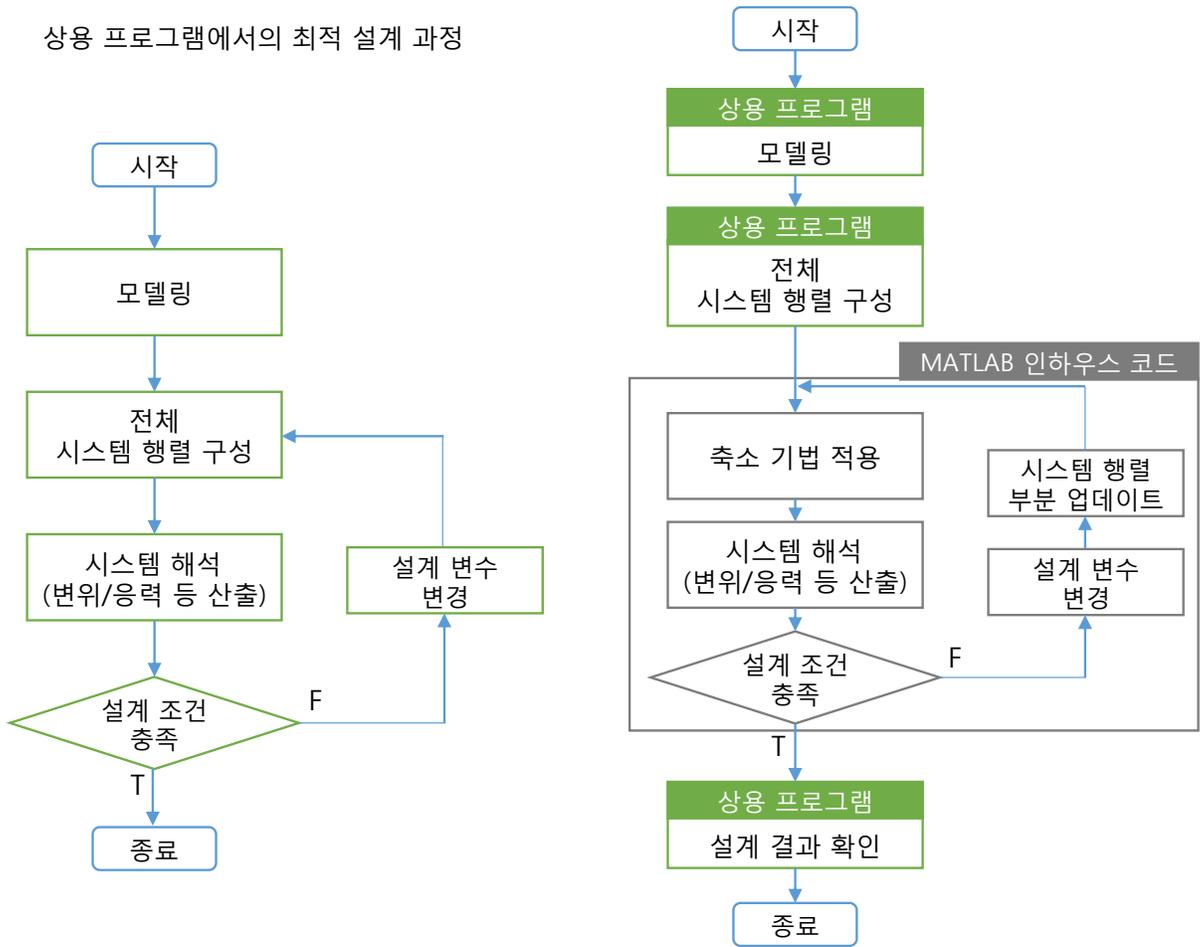
기업이나 산업에서 바로 사용하기에는 어려움이 존재한다. 특히 해당 기업이나 산업에서 사용하고 검증해왔던 상용프로그램과 달리 인하우스 코드를 해당 기업이 직접 정확도를 검증하기에는 현실적인 어려움이 존재하게 된다. 게다가 기업이나 특정 산업의 실무자가 인하우스 코드의 해석 결과에 따른 책임을 전부 감당하기에는 부담감이 큰 것이 사실이다. 또한 이러한 검증을 마친다고 해도 여러 상황에 의해 모델의 변경 및 대상이 변경될 경우, 상용 프로그램과 달리 다양한 모델에서 인하우스 코드가 제대로 작동한다는 보장을 얻기 어렵다.

따라서 본 논문에서는 구조 해석 상용 프로그램과 인하우스 코드를 연동하여 각 방법의 단점을 극복하고자 한다. 그림 5.1 과 같이 인하우스 코드의 단점인 해석의 정확성/신뢰도를 확보하고 모델의 다양성을 반영할 수 있도록 기본적인 모델링과 해석에 필요한 정보는 상용 프로그램에서 작업하여 얻는다. 그리고 이렇게 얻은 정보는 프로그램 작성과 인터페이스 기능이 용이하며 범용성을 가지고 있는 Matlab 프로그램을 통하여 불러들인 뒤 최적화를 수행한다. 이 때 2 장에서 설명한 기법을 통하여 최적화 알고리즘에 의해 변경된 부분(예 부품의 두께, 크기, 물성, 하중 크기 등)의 정보만을 갱신하여 최적값을 찾기 위한 반복적인 해석을 수행한다.

상용 프로그램으로부터 원하는 정보를 얻기 위해서는 상용 프로그램으로 원하는 정보를 요청하는 작업과 상용 프로그램에서 만든 행렬 정보를 읽는 작업이 필요하다. 본 논문에서는 이를 Matlab 에서 상용 프로그램을 제어하는 형태로 반복적인 최적화 과정에서도 원하는 정보를 상용 프로그램에서 자동적으로 얻도록

구현하였다. 또한 불러온 정보 중 필요한 행렬 정보는 축소기법을 통하여 축소된다. 그림 5.2 는 상용 프로그램 중 하나인 Abaqus 를 사용하여 축소된 행렬을 얻는 과정을 나타낸다. 본 논문에서는 아바쿠스 뿐만 아니라 구조해석에 주로 사용되는 나머지 상용 프로그램인 Ansys, Nastran 또한 필요한 정보를 Matlab 으로 불러올 수 있게 구현하였다. 표 5.1 에 표시한 바와 같이 각 상용 프로그램에 제공하는 명령스크립트를 활용하여서 해당 프로그램에 맞은 파일을 찾아내고 해당 문법에 맞게 Matlab 에서 읽을 수 있는 자체 함수를 코딩하였다. 작성한 함수를 통하여 주로 모델의 강성 행렬과 질량행렬을 로딩하였다. 이 때 불러온 행렬의 자유도 배열과 실제 모델의 모델링에서의 자유도 배열이 맞는 경우가 발생한다. 이는 경계조건에 의한 자유도 감소나 다양한 접촉조건이나 MPC(multi point constraint)이나 상용 프로그램의 자체 renumbering 과정에 의하여 발생한다. 따라서 이를 고려해주는 것이 상용 프로그램에서 행렬 정보를 부르는데 가장 중요한 포인트이다. 모델링 상의 자유도 배열과 불러온 행렬의 자유도 배열을 맞추기 위해서 해당 프로그램에서 제공하는 numbering vector 를 읽어야 한다. 본 논문에서는 메쉬 데이터 파일에서 모델링 상의 자유도 배열을 읽어드리고 별도로 파일에서 numbering vector 를 읽어서 행렬의 자유도 배열과 매치를 하였다. 각 상용 프로그램에서 사용한 명령어종류와 해당 파일 유형은 표 5.1 과 같다.

상용 프로그램에서의 최적 설계 과정



(a) Previous method
(Only using commercial package)

(b) Proposed method
(Combined with Matlab)

Figure 5.1 Flow chat of design optimization process

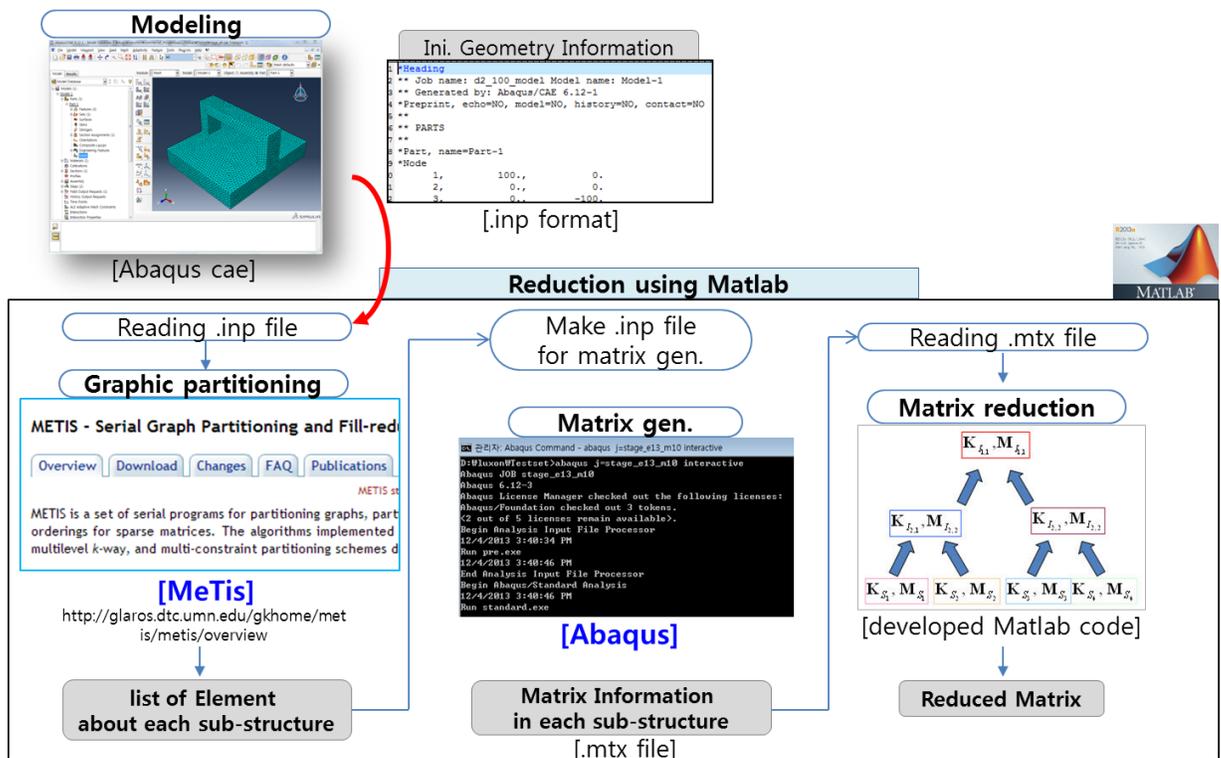


Figure 5.2 Process of generation reduced matrix using Matlab and Abaqus

Table 5.1 Used method and file to load matrix information

	Abaqus	Ansys	Nastran
Used script	Input file script	APDL	DMAP
Mesh data file	*.inp file	*.cdb or *.dat file	*.bdf file
Matrix file (file format)	*.mtx file (ASCII)	*.full file (ASCII)	*.op4 file (Binary)
Numbering file (file format)	*.mtx file (ASCII)	*.mapping file (ASCII)	*.f06 file (ASC ii)

제안된 방법의 전체 순서는 그림 5.3 과 같다. 최적설계 문제가 주어지면, 대상 구조에 대한 모델링은 상용프로그램에서 수행한다. 상용프로그램에서 시스템 행렬을 구축하며, Matlab 에서 구조 모델, 시스템 행렬 및 해석에 필요한 정보를 앞서 설명한 방식으로 받는다. Matlab 에서는 상용 프로그램의 정보를 불러들인 뒤, Matlab 의 제공하는 다양한 최적화 알고리즘을 그대로 사용하여 최적 설계를 수행한다. 설계 조건이 충족되면, 해당 설계 결과를 다시 상용 프로그램에 전송하여 해석을 수행한다. 이를 통하여 기존 설계 방법의 정확도를 그대로 유지할 수 있으면서도 효과적인 최적화를 수행할 수 있다. 클러스터 단위에 병렬 연산이 아직 완벽하지 못하는 상용 프로그램에 비해 제안된 방법에서는 Octave 란 프로그램을 통하여 기존 Matlab 코드를 최대한 그대로 유지하는 상태에서 클러스터 환경에서의 병렬화 연산을 구현할 수 있다.

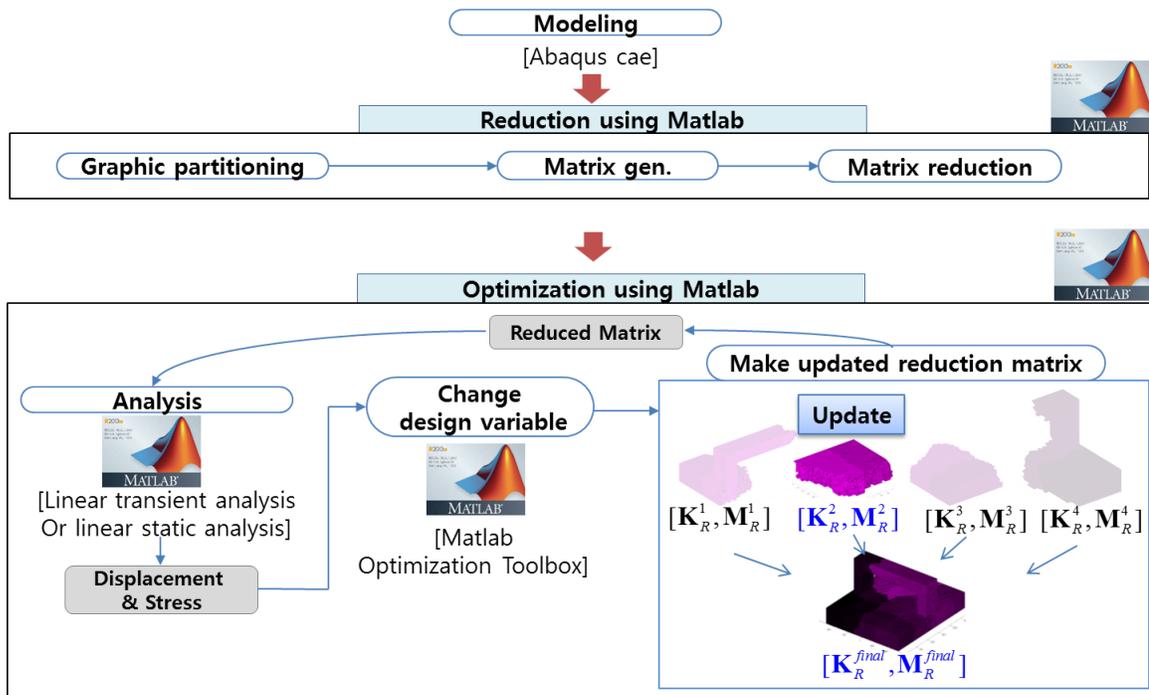
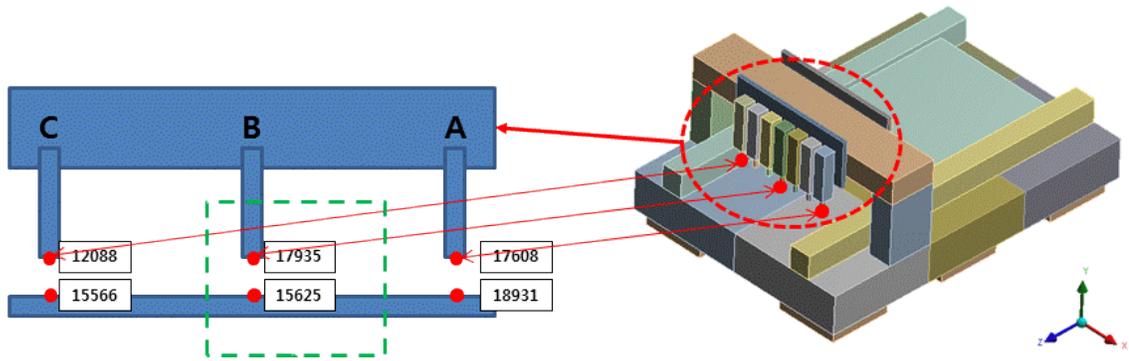


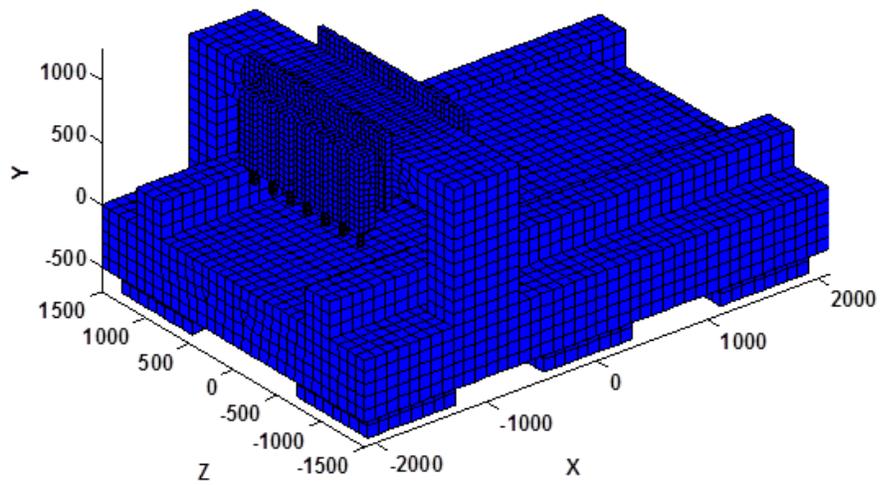
Figure 5.3 Optimization process using Matlab combined with Abaqus

5.2 유전 알고리즘을 활용한 최적화 수치 예제

본 절에서는 위에서 언급한 상용 프로그램과 연동한 최적화기법의 예제로 유전알고리즘을 활용한 최적설계예제를 수행하였다. 해석 모델은 그림 5.4 와 같이 스테이지(stage) 모델이다. 스테이지는 6 개의 지지대로 지지되어 있으면 지지대 밑이 지면에 구속되어 있다. 설계 변수는 지지대의 위치로 정의 하였으며, 특정 하중 조건하에서 스테이지 과도응답해석을 수행하였다. 지지대 위치를 변경하여 스테이지 위에 특정 측정 장비와 스테이지 평판 사이에 상대 변위가 최소화하는 최적화를 수행하였다. 2 가지 경우로 나누어서 최적화를 수행되었으며, A 경우는 그림 5.4(a)에 ‘A’ 로 표시한 위치와 아래 평판과의 시간에 따른 상대 변위를 최소화한 경우이며 B 경우는 그림 5.4(a)에 ‘B’ 로 표시된 부분과 아래지점의 상대 변위를 하중은 아래 평판의 정 가운데 하중을 부여하였다. 실제 스테이지에서는 다양한 하중이 동시에 들어오거나 다양한 작동 환경에서 진동을 최소화하는 것이 요구된다. 고안된 프로그램도 다양한 하중을 동시에 구현하고 효과적으로 해석할 수 있다. 다만 실제 산업에서 요구되는 하중 조건을 구하는 데서의 어려움과 이에 관한 보안의 문제로 인해 본 논문에서는 간단한 모델의 단순한 하중을 부여하였다.



(a) Configuration of stage model



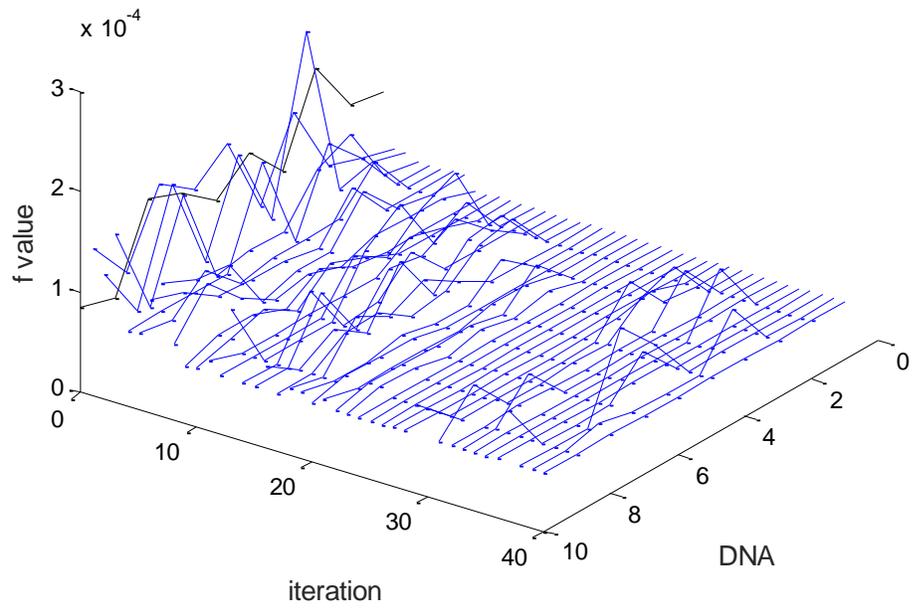
(b) Mesh model

Figure 5.4 Numerical model to perform design optimization

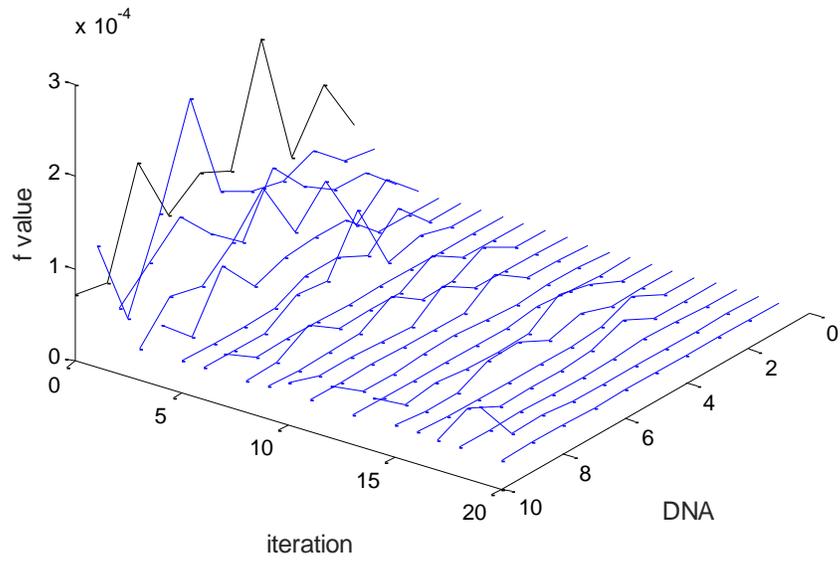
그림 5.5 은 두 경우의 유전 알고리즘을 통해 생성된 염색체들의 iteration 마다 목적 함수 값의 변화를 나타낸다. 모든 염색체의 목적함수의 값의 차이가 1%이하가 되면 최적화 연산을 종료하였다.

그림 5.6 은 A 경우의 최적설계 결과이다. 그림 5.6(a)는 지지대와 스테이지가 만나는 면의 절점을 표현한 것으로 지지대의 초기위치와 최종 위치를 나타낸다. 그림에서 볼 수 있듯이 지지대의 위치가 비대칭적으로 나오는 것을 알 수 있다. 이는 관측하고자 하는 점의 위치가 하중 점과 비대칭적으로 존재하기 때문에 지지대의 위치도 비대칭적으로 나온 것으로 생각된다. 그림 5.6(b)에서 볼 수 있듯이 변경된 위치에서의 관측하는 두 점의 상대 거리의 폭이 줄어드는 것을 확인 할 수 있다.

그림 5.7 은 B 경우의 최적 설계 결과로 그림 5.7(a)에서 확인 할 수 있듯이 A 경우와 달리 지지대 위치가 대칭적으로 나오는 것을 확인 할 수 있다. 이는 B 지점이 전체 스테이지의 중앙에 있고 하중이 이 중앙선 상에 존재하기 때문에 지지대 위치도 대칭적으로 나온 것을 생각된다. A 경우와 같이 그림 5.7(b)에서 확인 할 수 있듯이 관측한 두 점 사이의 상대 거리가 초기 형상보다 줄어드는 것을 알 수 있다.

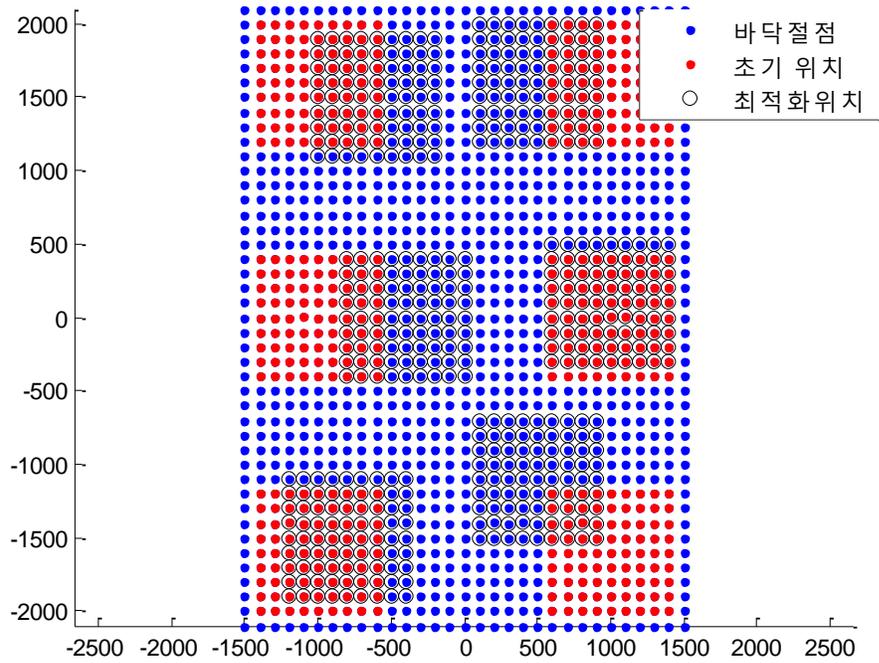


(a) A case

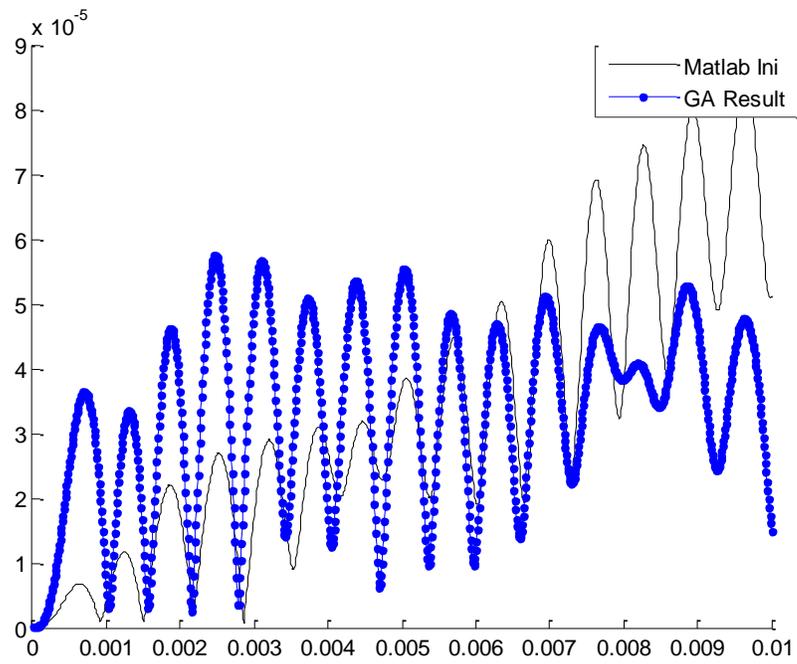


(b) B case

Figure 5.5 Object function value during optimization iteration using genetic algorithm

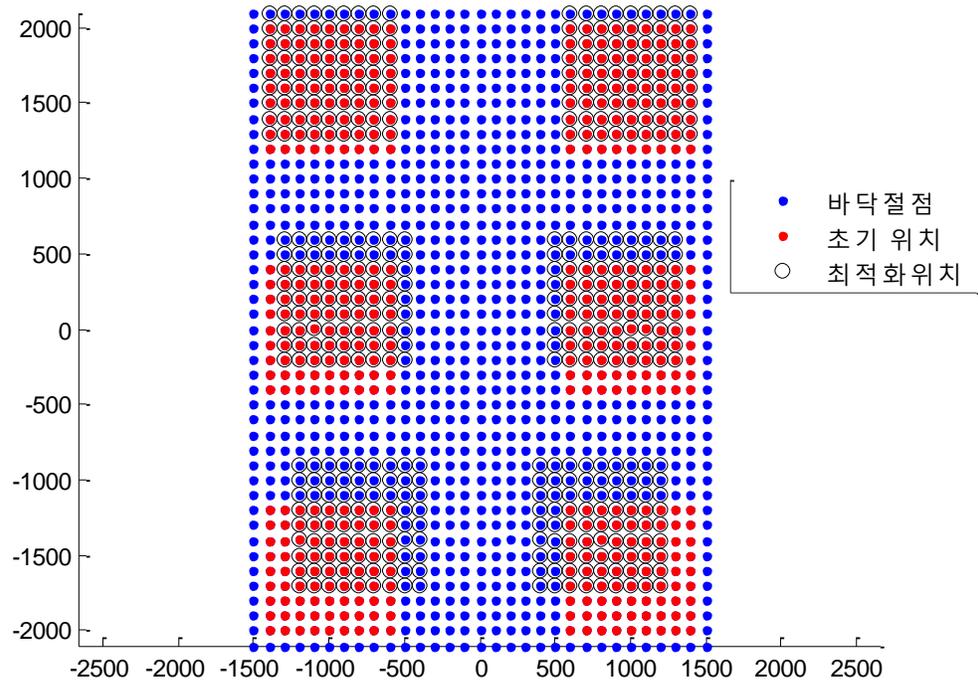


(a) Location of support

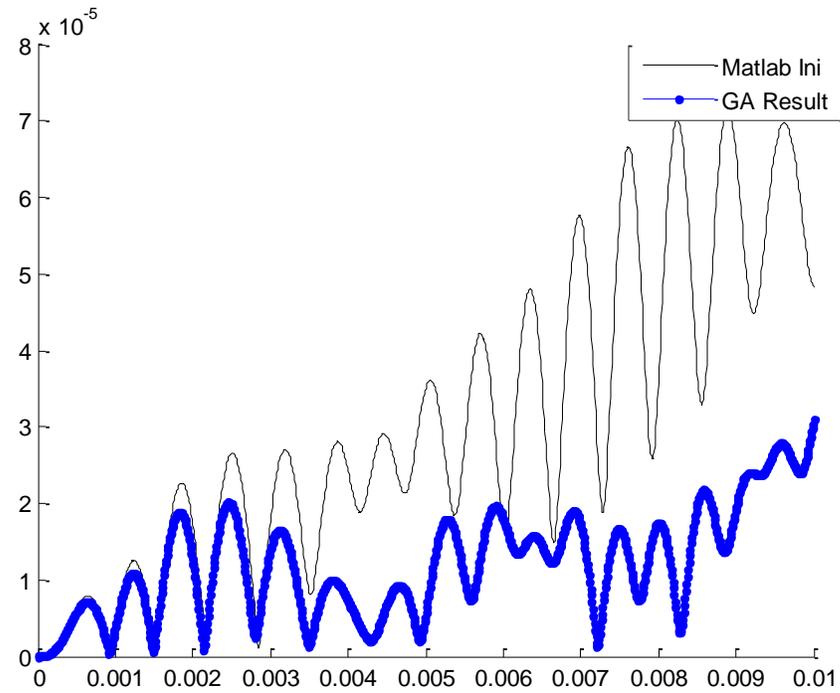


(b) Distance

Figure 5.6 Optimization result in 'A case'



(a) Location of support



(b) Distance

Figure 5.7 Optimization result in 'B case'

6. 결론

본 연구에서는 병렬화와 반복 연산에 적합한 자유도 기반 축소 기법을 제안하고 이를 기반으로 시스템 식별과 최적설계를 수행하였다. 또한 실제 진동 실험을 통하여 시스템 식별을 위해 제안된 기법들을 검증하였으며 상용 프로그램과 연동하여 제안된 기법의 활용성을 증가 시켰다. 자세한 연구 결과는 아래와 같다.

(1) 자유도 기반 축소기법을 병렬화 및 반복 연산에 적합한 형태로 개선하기 위하여 기존의 축소기법을 수식적으로 분석하였다. 강성행렬과 질량행렬을 부구조 단위로 행렬을 묶고 부구조 별로 기존의 축소기법을 수식적으로 전개하여 축소 과정 중 각 CPU 에서 동시에 실행 가능한 형태로 구성하였다. 또한 최적설계와 시스템 식별을 위한 반복 연산의 효율성을 높이기 위해 이전 연산에서 사용된 축소 행렬을 다음 연산에 재사용하는 기법을 고안하였다. 고안한 기법의 정확성을 수치 예제를 통해 확인하였다.

(2) 자유도 기반 축소 기법을 활용하여 측정 오차를 고려한 시스템 식별기법을 구성하였다. 또한 대형 구조물의 요소단위 시스템 식별을 위하여 시스템 식별에 적합한 형태의 역문제 해석 알고리즘들을 고안하였다. 고안된 알고리즘들은 초기 유한요소 모델과 실제 모델의 차이 즉 구조 변화의 크기만을 고려하여 많은 시스템

변수를 그대로 포함한 기존 시스템 식별 기법과 달리 구조변화의 크기와 위치를 모두 고려하는 형태로 시스템 식별 기법의 효율성을 높였다. 제안된 알고리즘들은 다양한 기법(계층적 군집 기법, 유전 알고리즘)을 시스템 식별에 접목하여 구조변화를 가진 요소 부분의 시스템 변수만을 선정하고 선정된 변수만으로 시스템 식별을 수행한다. 정확한 시스템 식별이 이루어지지 않으면 다시 시스템 변수를 재선정한다. 이를 통하여 많은 수의 미지수를 가진 역문제형태의 시스템 식별을 적은 수의 미지수만으로 효과적인 시스템 식별을 수행하였다. 이러한 시스템 변수의 영역을 설정하고 이를 역문제 해석 도중에 변경하는 방법은 시스템 식별 외의 최적화 등의 다른 역문제에도 활용 할 수 있을 것으로 기대된다.

(3) 주자유도 선정 기법을 활용하여 센서 위치 선정 기법을 제안하고 실제 진동 실험을 수행하여 시스템 식별 기법과 센서 위치 선정 기법을 검증하였다. 임팩트 해머와 가속도 센서를 통하여 하중에 따른 동적 거동을 가속도 센서로 측정하였다. 측정된 진동 응답을 통해 고유 진동수와 고유 벡터를 얻고 이를 통해 실제 평판의 두께를 찾은 시스템 식별을 수행하였다. 센서 위치 선정은 추천 영역과 비 추천 영역을 동시에 설정하였다. 실제 실험 결과를 통해 비 추천 영역의 특정 센서의 정보는 포함되었을 경우 시스템 식별의 해를 오히려 저해시키는 것을 확인하였다.

(4) 제안된 기법들의 다양한 산업체에서의 활용성을 높이기 위하여 산업체에서 많이 사용되는 프로그램 (Nastran, Abaqus, Ansys) 과 제안된 기법을 구현한 Matlab 프로그램을 연동하여 최적설계를 수행하였다. 초기 모델링과 구조물의 정보는 상용 프로그램에서 생성하고 이를 자동으로 Matlab 으로 불러오는 기능을 개발함으로써 인하우스의 다양한 해석 기법을 그대로 사용하면서도 상용 프로그램의 검증된 해석의 신뢰성과 다양한 모델링의 장점을 그대로 유지 할 수 있다. 이를 통하여 별도의 인하우스 코드의 검증 없이도 제안된 기법을 다양한 산업에 활용할 수 있을 것으로 생각된다. 이러한 상용 프로그램과 Matlab 의 연동은 제안된 기법뿐만 아니라 다양한 수치해석과 최적 설계의 학술적인 기법의 실제 산업에 활용을 보다 가속화 시킬 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

- ¹ Guyan RJ. Reduction of stiffness and mass matrices, AIAA Journal 1965;3(2): 380
- ² Paz M. Modal analysis using dynamic condensation method, Proceedings of the 3rd International Modal Analysis Conference, Orlando, Florida 1985
- ³ Miller CA. Dynamic Reduction of Structural Models, Journal of Structural Division ASCE 1980:2097-2108
- ⁴ Conti P. A Higher Order Generation of Guyan Reduction method, Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference, Las Vegas, Nevada 1989
- ⁵ O'Callaghan J. A Procedure for an improved reduced system (IRS) model, Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference, Las Vegas, Nevada 1989;17-21
- ⁶ Gordis J. An analysis of the improved reduced system (IRS) model, Proceedings of the 10th International Modal Analysis Conference, San Diego, California 1992;471-479
- ⁷ Kim KO, Kang MK. Convergence Acceleration of iterative Modal Reduction Methods, AIAA Journal 2001;39(1):134-140
- ⁸ Friswell MI, Garvey SD, Penny JET. Model reduction using dynamic and iterative IRS techniques, Journal of Sound and Vibration 1995;186(2):311-323
- ⁹ Friswell MI, Garvey SD, Penny JET. The convergence of the iterated IRS method, Journal of Sound and Vibration 1998;211(1):123-132
- ¹⁰ Xia Y, Lin R. Improvement on the iterated IRS method for structural eigensolution, Journal of Sound and Vibration 2004;270:713-727
- ¹¹ Shan VN, Raymund M. Analytical selection of masters for the reduced eigenvalue problem, International Journal for Numerical Method In Engineering 1982;18(1):89-98
- ¹² Kammer DC. Optimal sensor placement for modal identification using system realization methods, Journal of Guidance 1995;19(3):729-731
- ¹³ Kim KO, Choi YJ. Energy method for selection of degree of freedom in condensation, AIAA Journal 2000;38(7):1253-1259
- ¹⁴ Cho M, Kim H. Element-Based Node Selection Method for Reduction of Eigenvalue Problem, AIAA Journal 2004;42(8):1677-1684
- ¹⁵ Kim H, Cho M. Two-level Scheme for Selection of Primary Degrees of Freedom and Semi-analytic Sensitivity Based on the Reduced System, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 2006;195:4244-4268

- ¹⁶ Jeong J, Baek S, Cho M. Dynamic Condensation in a Damped System through Rational Selection of Primary Degrees of Freedom, *Journal of Sound and Vibration* 2011;331(7): 1655-1668
- ¹⁷ Doebling SW, Farrar CR, Prime MB, Shevitz DW. Damage identification and health monitoring of structural and mechanical systems from changes in their vibration characteristics: A literature review, Los Alamos National Report LA-13070-MS 1996
- ¹⁸ Ni YQ, Xia Y, Liao WY, Ko JM. Technology innovation in developing the structural health monitoring system for Guangzhou New TV Tower. *Structural Control & Health Monitoring* 2009;16:73-83.
- ²⁰ Zhan JW, Xia H, Chen SY, Roeck GD. Structural damage identification for railway bridges based on train-induced bridge responses and sensitivity analysis. *Journal of Sound and Vibration* 2011;330:757-770
- ¹⁹ Worden K, Manson G, Allman D. Experimental validation of a structural health monitoring methodology: Part I. Novelty detection on a laboratory structure, *Journal of Sound and Vibration*, 2000;230(2):357-378
- ²⁰ Mottershead JE, Friswell MI. Model Updating In Structural Dynamics: A Survey, *Journal of Sound and Vibration*, 1993;167(2):347-375.
- ²¹ Friswell MI, Penny JET, Garvey SD. Parameter subset selection in damage location, *Inverse Problems in Engineering*, 1997;5(3):189–215
- ²² Penny JET, Friswell MI, Garvey SD. Automatic choice of measurement locations for dynamic testing, *AIAA Journal*, 1994;32(2):407–414.
- ²³ Kim KO, Cho JY, Choi YJ. Direct approach in inverse problems for dynamic systems. *AIAA Journal*, 2004;42(8):1698–1704
- ²⁴ Juneja V, Haftka RT, Cudney H. Damage detection and damage detectability-analysis and experiments, *Journal of Aerospace Engineering*, 1997;10(4):135-142
- ²⁵ Gul M, Catbas FN. Identification of structural changes by using statistical pattern recognition, *The 6th International Workshop on Structural Health Monitoring*, Stanford, CA, US., 2007;11-13
- ²⁶ Cho M, Baek S, Kim H, Kim KO. The Identification of Structural Systems using an Iterative, Improved Method for System Reduction, *AIAA Journal*, 2009;47(9):2255-2259
- ²⁷ Woodbury MA, Inverting modified matrices, *Statistical Research Group, Memo. Rep. no. 42*, Princeton University, Princeton, N. J., 1950;
- ²⁸ Abaqus. <http://www.3ds.com/products-services/simulia/portfolio/abaqus/>

- ²⁹ HyperMesh. <http://www.altairhyperworks.com/Product,7,HyperMesh.aspx>
- ³⁰ Ward JH, Hierarchical grouping to optimize an objective function, Journal of the American Statistical Association 1963;58: 236-244.
- ³¹ Murtagh F, Legendre P. Ward's hierarchical clustering method: clustering criterion and agglomerative algorithm, arXiv preprint 2011; arXiv:1111.6285
- ³² Zhang G, Ma J, Chen Z, Wang R. Automated eigensystem realisation algorithm for operational modal analysis, Journal of Sound and Vibration 2014;333(15):3550-3563
- ³³ Chenga W, Lee S, Zhang Z, He Z. Independent component analysis based source number estimation and its comparison for mechanical systems, Journal of Sound and Vibration 2012;331(23):5153-5167
- ³⁴ Nastran. <http://www.mscsoftware.com>
- ³⁵ Ansys. <http://www.ansys.com/>

Abstract

System condensation for design optimization and finite element model updating of large structures

Seongmin Chang

Department of Mechanical and Aerospace Engineering

The Graduate School

Seoul National University

For large-scaled system identifications and design optimizations, in this thesis, a condensation method suitable for parallel computing and repeated calculation is developed, and system identification method considering experimental noise is developed, and inverse problem algorithms customized system identification are devised.

Due to increasing computational technology and needs of detailed and accurate description of structure, the importance of efficient structure analysis has being increased. Model sizes of structure analysis are increased from simple components to assembled overall structures. A simple static analysis as well as dynamic analyses with various dynamic condition are required. Moreover, the range of numerical analysis is extended from a simple analysis to practical design optimizations. Thus, even increasing computational resource, an efficient condensation method is required.

Recently, while increasing CPU clock speed is almost stopped, the number of cores dramatically increases. Moreover, requirement of practical design optimizations has been

steadily increasing. Although previous condensation methods have these advantages, few previous methods have a special process or algorithm for parallel computing and repeated calculation. Thus, it is necessary to develop a condensation method suitable for parallel computing and repeated calculation.

To reflect this tendency, in this thesis, the condensation method is modified and improved to be suitable for parallel computing. In the devised method, previous condensation methods are investigated, and the calculation processes are divided to separable processes in each core and inseparable processes. The separable processes are parallelized, and ineffective and repeated processes are erased through applying reduced matrixes in the previous calculation. The devised method is applied to system identification and design optimization.

Moreover, in this thesis, large structural system identifications method are proposed applying the devised method. For practical system identifications, system identification method considering experimental noise is constructed, and inverse problem algorithms customized system identification are devised. Sensor positioning method suitable in proposed system identification method is also proposed. To verify the proposed positioning method, dynamic responses were obtained from first-hand experiments, and system identification are carried out with the measured responses.

Lastly, the Matlab with the proposed methods is combined with commercial programs (Nastran, Abaqus, and Ansys) to encourage utilization of the proposed methods in various industry fields. The Matlab is main program and carry out design optimization. During optimization, required information about geometric and matrix data of model is automatically loaded from the commercial programs. For the automatic loading process,

many commands to export the wanted information were acquired in each commercial program, and Matlab functions that generate the commercial program input file were created. Commercial program is finally carried out with a result calculated from Matlab optimization function. Thus, this proposed method can use in-house code with various methods as well as ensure the advantage of the commercial program.

Keywords: Condensation, System identification, Optimization, Parallel computing, Sensor positioning, Commercial program

Student Number: 2004-20789