

Proyecto Fin de Grado
Grado en Ingeniería de las Tecnologías
Industriales

Aplicación de la Teoría de Juegos a la programación
de vuelos

Autor: Miguel Gómez de Agüero Ortiz

Tutores: Andrés Jiménez Losada

Manuel Ordoñez Sánchez



Proyecto Fin de Grado
Grado en Ingeniería de las Tecnologías Industriales

Aplicación de la Teoría de Juegos a la programación de vuelos

Autor:

Miguel Gómez de Agüero Ortiz

Tutores:

Andrés Jiménez Losada

Manuel Ordoñez Sánchez

Dpto. de Matemática Aplicada II
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla
Sevilla, 2019

Autor: Migeul Gómez de Agüero Ortiz

Tutores: Andrés Jiménez Losada

Manuel Ordoñez Sánchez

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2019

El Secretario del Tribunal

A Dios

*A mi familia, mi novia y mis
amigos*

A mis profesores

Agradecimientos

Resumen

Estudiamos en este trabajo una situación de tres compañías aéreas que vuelan a cinco ciudades desde un aeropuerto ficticio. Todas las compañías son análogas en costes y beneficios pero saturan la capacidad del aeropuerto. Creamos un grafo de colores, un color por cada compañía aérea, que une las distintas ciudades a donde vuelen.

Creamos a su vez un valor basado en Myerson y en los grafos de colores para medir la importancia de cada compañía en función de la posición de las ciudades a donde vuelan en el grafo de colores.

En nuestro caso no hay resultados muy sorprendidos ya que eliminamos una compañía que vuela a 3 ciudades y parece que esto debe pasar ante la que vuela a 4 aunque esto no es verdad en general debido a que el valor depende de la posición de las ciudades en el grafo de colores.

Abstract

We study in this work a situation of three airlines that fly to five cities from a fictitious airport. All companies are analogous in costs and benefits but they saturate the capacity of the airport. We create a graph of colors, a color for each airline, which links the different cities where they fly.

We also create a value based on Myerson and the color graphs to measure the importance of each company based on the position of the cities where they fly in the color graph.

In our case there are no very surprising results since we eliminate a company that flies to 3 cities and it seems that this should happen before the one that flies to 4 although this is not true in general because the value depends on the position of the cities in the color graph.

Índice

Agradecimientos	ix
Resumen	xi
Abstract	xiii
Índice	xiv
Índice de Tablas	xv
Índice de Ilustraciones	xvii
Notación	xx
1 Introducción	1
2 Motivación real del problema	5
3 Descripción del problema	11
4 Teoría de Juegos	17
4.1 <i>Juegos cooperativos.</i>	17
4.2 <i>Estructuras de comunicación.</i>	17
4.3 <i>Juegos en estructuras de comunicación coloreadas.</i>	19
4.4 <i>Descripción del valor y solución a nuestro problema</i>	19
5 Aplicación a nuestro problema	21
5.1 <i>Primera fase</i>	21
5.2 <i>Segunda fase</i>	27
5.3 <i>Programas en matlab.</i>	28
6. Conclusiones	30
7. Bibliografía	31

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Horarios de vuelo de nuestro ejemplo	14
Tabla 2. Cálculo de $v(S)$ para el grafo general L	22
Tabla 3. Cálculo de $v(S)$ para el grafo L23	24
Tabla 4. Cálculo de $v(S)$ para el grafo L13	25
Tabla 5. Cálculo de $v(S)$ para el grafo L12	27

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1. Cifras preliminares difundidas por la OACI del crecimiento en 2018 de los pasajeros-kilómetros de pago (RPK) de los servicios regulares internacionales.	5
Ilustración 2. Mapa de FlightRadar24 que muestra el tráfico aéreo el día de mayor congestión aérea del año.	6
Ilustración 3. Aeropuerto LaGuardia	8
Ilustración 4. Vista aérea del aeropuerto de Merrill Field.	9
Ilustración 5. Diagrama del aeropuerto de Merrill Field.	9
Ilustración 6. Imagen del aeropuerto colapsado de Gander el día 12 de septiembre de 2001.	10
<i>Ilustración 7.</i> Grafo con compañías aéreas y sus destinos	13
<i>Ilustración 8.</i> Grafo de colores de nuestro problema general L	23
<i>Ilustración 9.</i> Grafo de colores L23	23

Ilustración 10. Grafo de colores L13

25

Ilustración 11. Grafo de colores L12

26

Notación

A^*	Conjugado
c.t.p.	En casi todos los puntos
c.q.d.	Como queríamos demostrar
■	Como queríamos demostrar
e.o.c.	En cualquier otro caso
e	número e
Re	Parte real
Im	Parte imaginaria
sen	Función seno
tg	Función tangente
arctg	Función arco tangente
sen	Función seno
$\sin^x y$	Función seno de x elevado a y
$\cos^x y$	Función coseno de x elevado a y
Sa	Función sampling
sgn	Función signo
rect	Función rectángulo
Sinc	Función sinc
$\partial y \partial x$	Derivada parcial de y respecto
x°	Notación de grado, x grados.
$\Pr(A)$	Probabilidad del suceso A
SNR	Signal-to-noise ratio
MSE	Minimum square error
:	Tal que
<	Menor o igual
>	Mayor o igual
\	Backslash
\Leftrightarrow	Si y sólo si

1 INTRODUCCIÓN

Si Dios quisiera que el hombre volara, habría sido más fácil llegar al aeropuerto.

-George Winters-

EL coste de las compañías aéreas para los aeropuertos puede medirse a través de variados factores. Por ejemplo, las infraestructuras para los aviones de las diversas compañías. Al respecto se necesitan hangares suficientemente grandes y bien equipados para aviones de reserva o que vuelan en días diferentes. El uso y la conservación de las pistas, el personal asociado al despegue y aterrizaje de los aviones. Autobuses y personal de atención de los viajeros. Sistemas electrónicos de información, etc...

Por otro lado el hecho de un número elevado de pasajeros o mucho tráfico de compañías también es un problema de gestión complicado ya que se necesita un alto grado de eficiencia para que los pasajeros fluyan de manera normal.

Otro problema es el poder surtir de combustible a los aviones, los técnicos de mantenimiento y lo referido a la puesta a punto de las aeronaves.

También las tiendas, comedores, agencias de alquileres de vehículos, mostradores de billetes, facturación y cadenas para el equipaje.

Podríamos hablar de muchos más tipos de costes pero baste esta muestra para introducir nuestro problema.

Si el aeropuerto es grande y está en una metrópolis relativamente extensa estos problemas son paliados normalmente a base de dinero invertido por los distintos gobiernos locales o nacionales. Sin embarco en lugares con aeropuertos pequeños o remotos este problema no tiene fácil solución ya que no son aeropuertos de primera necesidad.

Hemos estado revisando aeropuertos en Alaska y sus características son las mencionadas antes. El problema que intentamos abordar es el de un aeropuerto ficticio pero pequeño el cual no puede asumir muchas compañías aéreas y que bajo ciertas condiciones de gasto muy similares para todas las compañías debe decidir de cuál o cuáles descarta para su aeropuerto pero siempre que las comunicaciones se mantengan.

Para esta comparativa establecemos un grafo que una las ciudades que surte el aeropuerto por cada compañía donde los links entre las ciudades son los vuelos existentes de esa compañía para esas ciudades. Por cada compañía tenemos un grafo distinto que coloreamos para distinguirlos. Luego generalizamos un valor tipo Myerson sobre el grafo de colores para establecer un pago para cada ciudad.

En una segunda parte hacemos un promedio de los valores calculados antes de la siguiente manera. Una compañía se lleva el valor promedio de los valores a donde vuela.

Al final la compañía con menos valor se elimina debido a que su influencia en el grafo de comunicaciones es la menor.

La coloración de gráficos se utiliza especialmente en diversas áreas de investigación de la informática, como la extracción de datos, la segmentación de imágenes, la agrupación de imágenes, la captura de imágenes, la creación de redes, etc. De manera similar, el modelado de las topologías de red se puede hacer usando conceptos gráficos. De la misma manera, las aplicaciones más importantes de la coloración de gráficos son la asignación de recursos o la programación. Además, las rutas, los paseos y los circuitos en la teoría de grafos se utilizan en numerosas aplicaciones, como el problema de los vendedores ambulantes, los conceptos de diseño de bases de datos y las redes de recursos. Esto lleva al desarrollo de nuevos algoritmos y nuevos teoremas que se pueden usar en muchas otras aplicaciones.

Existen varios métodos de coloración disponibles y se pueden utilizar según los requisitos. La coloración adecuada de un gráfico es la coloración de los vértices y bordes adyacentes con un número mínimo de colores, de modo que no haya dos vértices adyacentes que tengan el mismo color. El número mínimo de colores se denomina número cromático y el gráfico se denomina gráfico de color adecuado.

Hay otros ejemplos que podrían ser estudiados como los siguientes.

1. Programación de aeronaves: Supongamos que tenemos k aeronaves, y tenemos que asignarlas a n vuelos, donde el vuelo i -th es durante el intervalo de tiempo (a_i, b_i) . Claramente, si dos vuelos se superponen, entonces no se puede asignar el mismo avión a ambos vuelos. Los vértices del gráfico de conflicto corresponden a los vuelos, dos vértices están conectados si los intervalos de tiempo correspondientes se superponen. Por lo tanto, el gráfico de conflicto es un gráfico de intervalo, que se puede colorear de manera óptima en el tiempo polinomial. Entonces, podemos decidir qué vuelo es más importante en ese momento.

2. Tareas del biprocesador: suponga que tenemos un conjunto de procesadores (máquinas) y un conjunto de tareas, cada tarea debe ejecutarse en dos procesadores preasignados simultáneamente. Un procesador no puede trabajar en dos trabajos al mismo tiempo. Por ejemplo, tales tareas del biprocesador surgen cuando queremos programar transferencias de archivos entre procesadores o en el caso de pruebas de diagnóstico mutuo de procesadores. Considere la gráfica cuyos vértices corresponden a los procesadores, y si hay una tarea que debe ejecutarse en los procesadores i y j , entonces agregamos un borde entre los dos vértices correspondientes. Ahora, el problema de programación se puede modelar como una coloración de bordes de este gráfico: no podemos tener dos bordes del mismo color incidente en el mismo vértice. ¿Cuál sería el procesador más importante para el mantenimiento del sistema?

3. Coloración de mapas y redes de telefonía móvil GSM: Grupos de movilidad especial (GSM) es una red de telefonía móvil donde el área geográfica de esta red está dividida en regiones o celdas hexagonales. Cada celda tiene una torre de comunicación que se conecta con teléfonos móviles dentro de la celda. Todos los teléfonos móviles se conectan a la red GSM buscando celdas en el vecindario. Dado que GSM funciona solo en cuatro rangos de frecuencia diferentes, está claro por el concepto de la teoría de gráficos que solo se pueden usar cuatro colores para colorear las regiones celulares. Estos cuatro colores diferentes se utilizan para la coloración adecuada de las regiones. Por lo tanto, el algoritmo de coloreado de vértice se puede usar para asignar a lo más cuatro frecuencias diferentes para cualquier red de telefonía móvil GSM. ¿Podemos dar un orden de importancia a estas regiones celulares?

Respecto al trabajo en el capítulo 2 y 3 motivamos y planteamos un caso que es real, el de aeropuertos pequeños que conectan ciudades aisladas y los cuales no pueden soportar sobrecarga de compañías por su falta de infraestructura.

En el capítulo 4 introducimos la Teoría de juegos como herramienta de modelización y solución de este tipo de problemas.

En el capítulo 5 aplicamos estas herramientas a nuestro problema en concreto dando una solución plausible a

la situación planteada.

Finalmente establecemos unas conclusiones.

2 MOTIVACIÓN DEL PROBLEMA

En lo que sigue vamos a desarrollar los fundamentos que han motivado la realización de este trabajo de fin de grado y los argumentos que avalan el tema escogido de investigación.

En la actualidad, el transporte aéreo se está convirtiendo poco a poco en la principal forma de viaje para trayectos de media-larga distancia. El globalismo que se está desarrollando con las nuevas tecnologías alrededor de todo el mundo, está haciendo que el sector aeronáutico y el transporte aéreo se conviertan en uno de los principales campos de investigación e implementación del desarrollo de las nuevas tecnologías y de la ingeniería.

Según el informe preliminar de la Organización de Aviación Civil Internacional (OACI), durante 2018, el tráfico mundial de pasajeros ha superado los 4.300 millones de pasajeros que viajaron en vuelos regulares, un 6,1% más que en 2017. A pesar de la desaceleración que ha sufrido este crecimiento con respecto al año anterior, el crecimiento es considerable en todo el mundo.

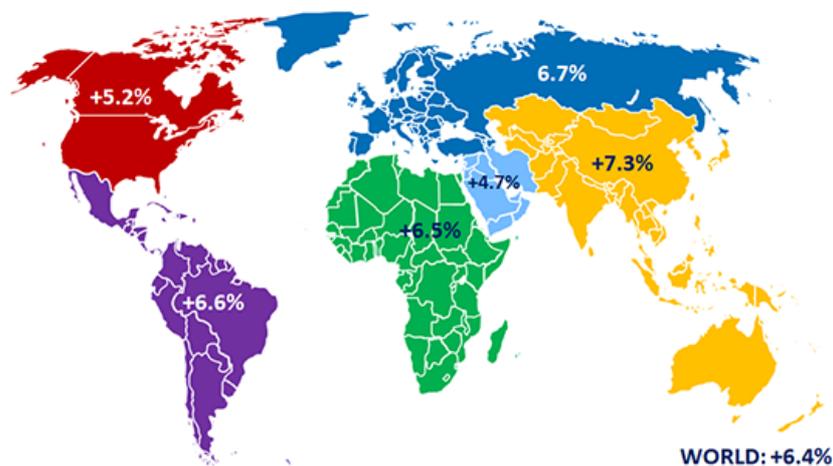


Ilustración 1. Cifras preliminares difundidas por la OACI del crecimiento en 2018 de los pasajeros-kilómetros de pago (RPK) de los servicios regulares internacionales.

En España, en concreto, la situación también es de crecimiento y en 2018 fueron 263.753.406 los pasajeros que viajaron en los aeropuertos españoles, incrementando la cifra del año anterior un 5,8%. Asimismo, destacan el número de operaciones en el año 2018, que ascendió a 2.300.189 y el crecimiento que vivió el transporte de mercancías respecto al año 2017, que fue del 9,9%. Todo esto según datos de la empresa pública española Aena, SME S. A.

Todo esto nos hace ver que desde hace unos años el campo del transporte aeronáutico se ha desarrollado de manera muy rápida. La respuesta que ha tenido esto es la de un gran crecimiento en todo el mundo, especialmente del número de pasajeros que han volado a través de los diferentes medios que actualmente ofrecen las aerolíneas en la mayoría de los países del mundo.

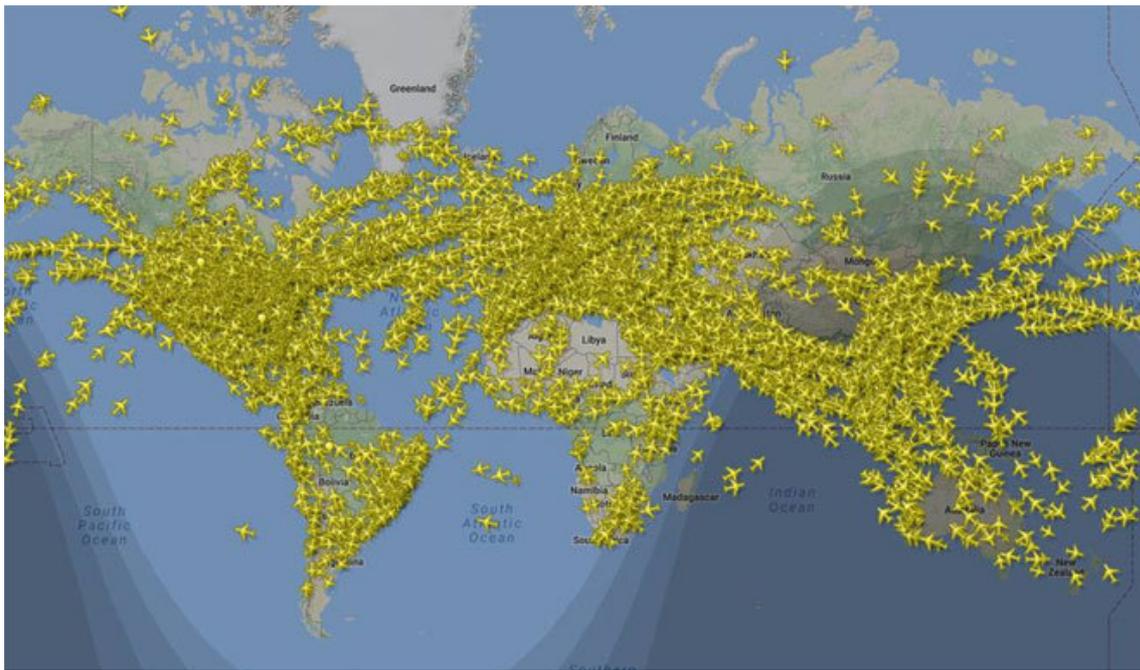


Ilustración 2. Mapa de FlightRadar24 que muestra el tráfico aéreo el día de mayor congestión aérea del año.

Existen numerosos artículos que constatan la importancia de este crecimiento, su repercusión en la sociedad y sobre todo su magnitud de cara a un futuro no muy lejano.

Nuestra sociedad se mueve hacia un futuro con una interconexión entre países mucho más desarrollada, rápida y fluida. Esto solamente será posible combinando la aplicación de nuevas posibilidades tecnológicas al sector con la organización y optimización de su funcionamiento adecuado para sacar el máximo partido de éstas.

Por lo general, el estudio de las nuevas tecnologías y sus aplicaciones a diversos campos relacionados con la aeronáutica está actualmente bastante desarrollado. Existen numerosas aplicaciones e investigaciones en desarrollo para potenciar el uso de las nuevas tecnologías.

Sin embargo, complementariamente a esto, es necesario el desarrollo de una aplicación fundamentada en teoría contrastada con modelos matemáticos que nos permita optimizar el uso y la aplicación de todas estas nuevas tecnologías para ser capaces no solamente de progresar con nuevas aplicaciones tecnológicas, sino también de exprimir estas herramientas y sacar el mejor provecho de su uso.

Esta investigación en teoría que sea capaz de dar respuesta a grandes problemas que podemos encontrar en el día a día de los aeropuertos es la que ha motivado el trabajo que se desarrolla.

Además, existen numerosos trabajos de investigación sobre temas bastante relacionados con el que tratamos aquí. “Algoritmos para reducir los retrasos aéreos causados por los fenómenos meteorológicos” o “Detección

y Resolución de Conflictos en Tráfico Aéreo Convergente” son el título de alguno de ellos. En ellos se tratan algunos problemas que para ser solventados necesitan algo más que el uso de la tecnología.

Esto se debe a que la problemática en torno a los aeropuertos es numerosa, no solamente en problemas cotidianos resolubles con el factor humano y la tecnología, sino problemática de mayor envergadura a veces inabarcable y otras veces de una dificultad llamativa que necesita de herramientas matemáticas para su resolución.

En diferentes artículos periodísticos observamos la incidencia en este tipo de problemas. Estos son algunos de los titulares que encontramos en diferentes periódicos respecto al tema: “Aeropuertos, ¿un problema a punto de estallar?”, “Control aéreo: España asumirá 160 vuelos más al día este verano para evitar el caos”, “Las aerolíneas denuncian la congestión del tráfico aéreo: los retrasos suben un 60,5% hasta agosto” o “El plan de Fomento y Vueling para evitar otro verano caótico en El Prat”.

Y es que, a pesar del incremento del uso de la tecnología, numerosos aeropuertos actualmente se encuentran con abundantes problemas que poco o nada tienen que ver con la tecnología, como la problemática de las colas de aviones y del excesivo tráfico aéreo.

Por fin vamos acercándonos a la situación de aplicación de nuestro problema, sin embargo, nos queda una última aproximación.

Ya que la problemática de cola de aviones es de una envergadura excesivamente grande e inabarcable en un trabajo como este nos centraremos en estudiar un caso concreto de aplicación de decisión para situaciones muy concretas. Situaciones de aeropuertos muy desconectados de otros aeropuertos, aeropuertos con una demanda muy alta de vuelos para poca población, o una excesiva conectividad de vuelos de diferentes orígenes en un mismo lugar.

A continuación, veremos algún ejemplo detallado de aplicación de esta situación:

Un primer ejemplo es el aeropuerto LaGuardia (LGA), NYC, Estados Unidos donde con frecuencia hay atascos de tráfico aéreo, debido a la gran proximidad de los aeropuertos de JFK y Newark. Llega hasta tal punto la problemática en este aeropuerto del tráfico aéreo que incluso la web “travel and leisure” lo propone como uno de los 5 aeropuertos más frustrantes del mundo.

Según la CNN los vuelos a los aeropuertos LaGuardia se retrasan un promedio de 41 minutos.

Otros medios como Usatoday también se han hecho eco de las malas condiciones del aeropuerto estadounidense de La Guardia.

Estas fueron las palabras del vicepresidente Joe Biden en 2014 sobre el aeropuerto LaGuardia: "Si te llevara y te vendara los ojos y te llevara al aeropuerto LaGuardia en Nueva York, pensarías: 'Debo estar en un país del tercer mundo'. Es vergonzoso y estúpido. Es estúpido"

Y vemos que esta situación se alarga hasta hoy en día donde seguimos encontrando este tipo de problemas. “Hemos experimentado un ligero incremento de las bajas por enfermedad en dos de nuestras instalaciones. Estamos mitigando el impacto aumentando el número de trabajadores, redirigiendo el tráfico aéreo e incrementando el espacio entre aviones cuando se necesite”

Para entender bien el porqué de toda esta situación caótica debemos entender bien la situación de localización del aeropuerto LaGuardia.

El aeropuerto LaGuardia se encuentra en plena Nueva York (EE. UU.).

El aeropuerto tiene un par de pistas de dimensión: 2134 x 46 metros.

Su localización es muy particular ya que se encuentra muy cerca del centro de Nueva York, muy próximo a Manhattan (a unos 13 km del centro), frente a la bahía de Flushing.

El aeropuerto carece de servicios de inmigración y de aduanas. En él no están permitidos los vuelos que excedan los 2400 km, ni para llegar ni para salir. Esto ocurre con algunas excepciones, como los sábados o los vuelos procedentes de Denver.

Esto significa que la mayor parte de los vuelos que son internacionales se reciben en los otros aeropuertos de la

ciudad: JFK o Newark.

Excepto algunos casos, la mayoría de los vuelos que salen del aeropuerto LaGuardia tienen como destino una ciudad dentro de los Estados Unidos. Estas excepciones son: Bahamas (Freeport y Nassau), Bermuda y Canadá (Ottawa).

Todas estas peculiaridades pueden hacernos entender la necesidad de una reorganización del aeropuerto y sobre todo del orden en su flujo aéreo.



Ilustración 3. Aeropuerto LaGuardia

Otro ejemplo de situación particular es el aeropuerto de Merrill Field, un aeropuerto peculiar por su localización, muy cercano a Anchorage, un pueblo en el estado de Alaska, en los Estados Unidos. Su apertura data de 1930 y el nombre se le debe a Russel Merrill, un piloto que desapareció en un vuelo al pueblo de Bethel en 1929.

La peculiaridad que tiene es que es uno de los aeropuertos con mayor tráfico aéreo de avionetas per cápita del mundo. Desde este aeropuerto salen la mayoría de los vuelos al “Bush” que es cómo se denomina a la zona de los pueblos aislados de Alaska, a donde solamente se puede llegar en avioneta y que además ocupa más del 75% del estado.

Este aeropuerto es de una importancia vital para la economía del estado de Alaska debido a que este estado tiene una gran dependencia del tráfico aéreo de avionetas.

Como curiosidad, en este aeropuerto, destacó la llegada y el aterrizaje de un vuelo Boeing 727 en febrero de 2013, debido a la envergadura de este avión, se tuvieron que pedir permisos especiales y habilitar servicios extra en la ciudad y se tuvieron que realizar inspecciones y estudios a las pistas para asegurar el aterrizaje seguro de este avión.

Los aviones en el aeropuerto son 844 de las cuales 786 son aviones con un solo motor, 41 aviones con varios motores, 16 helicópteros y 1 avión planeador.

El número de operaciones al día es de 346 de media del cual un 53% es de tránsito general, un 47% es de aviación local y menos de un 1% es de taxi aéreo.

La dificultad de organización en este aeropuerto es la cantidad de vuelos particulares y de diferentes destinos muy concretos que existen en él. Al contrario que muchos otros aeropuertos, presenta muchos vuelos para muy pocos pasajeros.

Por ello nos sirve también de ejemplo para motivar el estudio y la aplicación del problema que presentamos.

Adicionalmente existen otros muchos aeropuertos que cumplirían con unas características semejantes, sobre todo en lugares recónditos, como por ejemplo los aeropuertos de la Antártida, como el aeropuerto de Marambio con cerca de 100 vuelos intercontinentales al año.

Por último, vamos a destacar un ejemplo muy particular, como situación de congestión del tráfico aéreo puntual en un aeropuerto pequeño. Este caso se dio en 2001 con motivo de los ataques terroristas el 11 de septiembre.

Esto ocurrió en el aeropuerto de Gander, un pueblo situado en la isla canadiense de Terranova. Debido a la consecución de los atentados, las autoridades federales de la aviación ordenaron el cierre del espacio aéreo. Ningún avión podía despejar y los aviones en el aire estaban obligados a aterrizar en el aeropuerto más cercano. A esta operación se le denominó “Yellow Ribbon” (lazo amarillo).

Durante esa época el aeropuerto operaba menos de 10 vuelos al día, la mayoría de baja capacidad. En las horas que siguieron a los atentados recibió a 38 aviones de fuselaje ancho, entre ellos algún Boeing 747. Esta operación supuso un aumento del 70% de la población del pueblo en tan solo unas pocas horas.

Este hecho constituye simplemente un aporte anecdótico al problema del tráfico aéreo ya que se trató de una actividad meramente puntual, pero que requirió del esfuerzo de una adecuada organización del tráfico aéreo y de un adecuado discernimiento en la prioridad de los aviones sobre todo a la hora de aterrizar y acoger vuelos que por suerte salió bien.

Todos estos ejemplos tienen algo en común: la problemática que aparece en algunos aeropuertos en el manejo de la congestión aérea y la pregunta de cómo establecer prioridades entre distintos vuelos. En los siguientes capítulos abordaremos esta problemática proponiendo una posible solución.



Ilustración 6. Imagen del aeropuerto colapsado de Gander el día 12 de septiembre de 2001.

El texto debe comenzar con una introducción que muestre las investigaciones previas existentes sobre el tema y destacar los objetivos y métodos seguidos para llevar a cabo la investigación o análisis del tema tratado.

Para finalizar se deben escribir las conclusiones que deben estar en relación con los objetivos marcados previamente.

3 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

El objeto de nuestro estudio es la resolución mediante la matemática de un problema muy actual y común al que vamos a tratar de dar solución. Más concretamente, estudiaremos este problema y trataremos de resolverlo desde la rama de la matemática que es la teoría de juegos.

La problemática que vamos a abordar es una problemática de carácter general. Esta problemática es qué orden de importancia debemos seguir en la toma de decisiones importantes en función de muchos factores.

Para ello crearemos un modelo basado en grafos coloreados que nos permitirá a través de la generalización del valor de Myerson determinar una medida de la importancia de las diferentes posibilidades que se nos presentan y así decidir de cual podemos prescindir.

Para hacer más visible y comprensible la utilidad de nuestra resolución vamos a exponer un caso práctico a modo de ejemplo en el que aplicaremos nuestro método basado en grafos.

Vamos a desarrollar un problema de decisión con respecto a aerolíneas, pero esto es simplemente un ejemplo concreto, la resolución de nuestro problema tendría un carácter mucho más amplio.

El caso es el siguiente:

Tres compañías aéreas diferentes deciden participar en un concurso público para darle comunicación a una determinada región con sus vuelos. Debido a la geografía de esta región es muy costoso volar a todos los destinos de esta.

Así las compañías estudian sus propuestas volando al mayor número de puntos posibles de la región sin presentar pérdidas de beneficios.

Una vez que las compañías han estudiado y elaborado sus propuestas, las envían a las autoridades. Al encontrarse con las tres diferentes propuestas las autoridades se tienen que enfrentar a los siguientes problemas:

1. Si superponen las agendas de vuelos de las tres compañías diferentes, se produce una saturación en el número de vuelos que sobrepasa las necesidades de la región y produce conflictos técnicos importantes, así como un coste excesivo de los mismos.
2. Si se prescinde de una de las tres propuestas, tienen que asegurar que las otras dos compañías sean capaces de llegar a todos los puntos de la región.
3. Si los intervalos de vuelo de dos aviones que van al mismo sitio se solapan sólo puede volar uno.

Ante este problema se crea un comité para simplificar la situación. Este comité llega a la conclusión de que sólo puede costear a dos de las tres compañías. También nota que si elige a cualquier par de compañías tienen cubiertas sus necesidades ya que pueden volar a cualquier punto.

La pregunta que les queda por resolver es a qué compañía dejan fuera ya que económicamente no encuentran gran diferencia entre ellas. En función de estos datos se decide por eliminar una compañía y trabajar sólo con dos.

El problema es cómo decidir esto.

Ante esta circunstancia nosotros vamos a dar una medida de la importancia de las distintas compañías en función de los lugares a los que puede llegar.

Es aquí donde entra en juego el modelo que crearemos basado en grafos coloreados que como hemos dicho nos permitirá a través de la generalización del valor de Myerson determinar una medida de la importancia, en este caso, de las compañías y así podremos decidir de cual prescindir.

Ahora procedemos a exponer un ejemplo más extenso en el que podamos ver esta situación de una forma más clara.

En este ejemplo, analizaremos la situación de 3 compañías de vuelos:

- Compañía A (C_A)
- Compañía B (C_B)
- Compañía C (C_C)

y de 5 posibles destinos

- Destino A (A)
- Destino B (B)
- Destino C (C)
- Destino D (D)
- Destino E (E)

De los 5 posibles destinos:

- C_A volará a A, B y C
- C_B volará a C, D y E
- C_C volará a A, B, D y E

Para visualizar mejor esto, a continuación, se exponen dos ilustraciones con los destinos de las compañías y sus distintos horarios de vuelo.

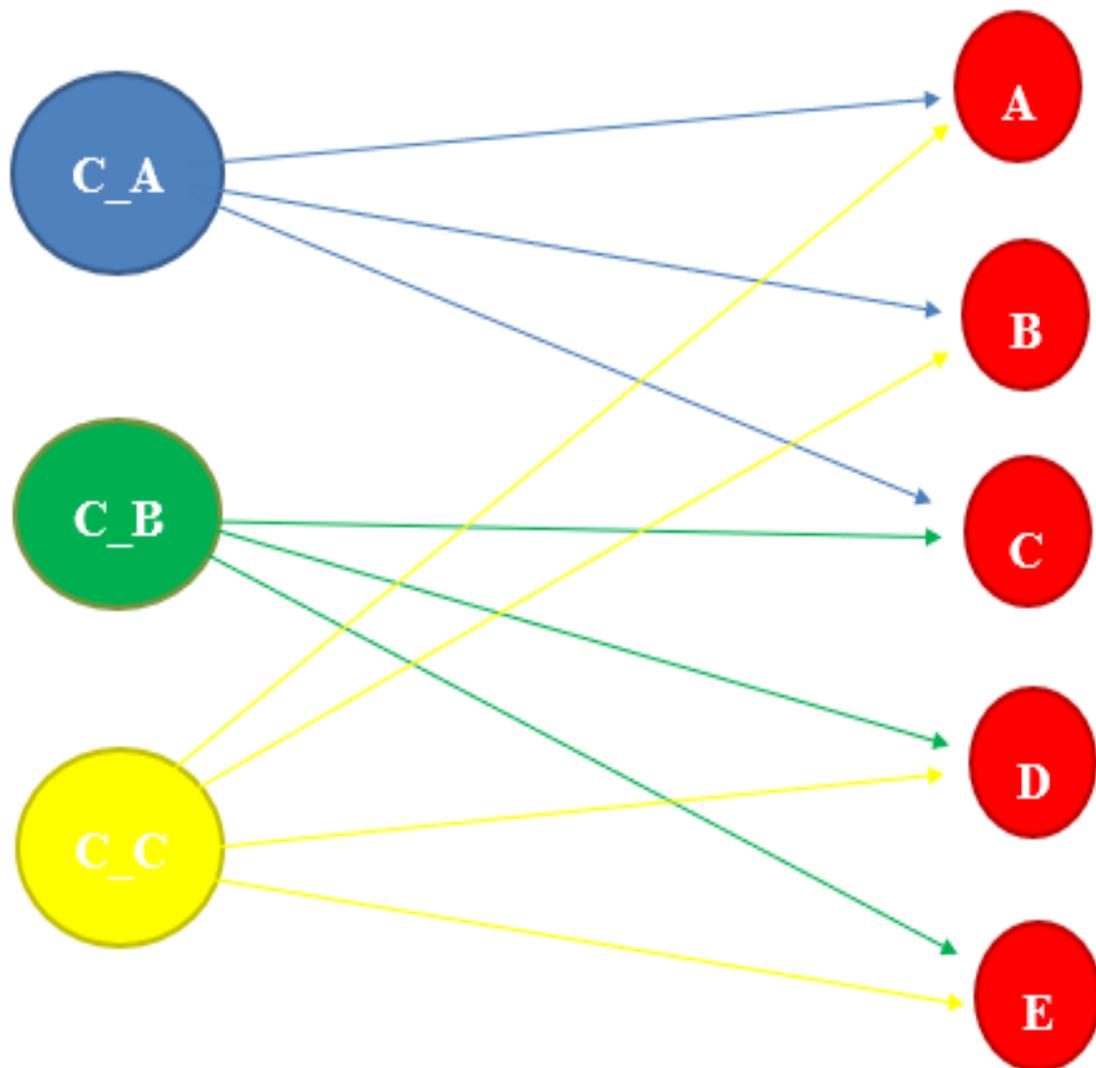


Ilustración 7. Grafo con compañías aéreas y sus destinos

Tabla 1. Horarios de vuelo de nuestro ejemplo

COMPañÍA	DESTINO	HORA DE SALIDA
C_A	A-B	12:00
		15:00
		17:00
		19:00
		20:00
	B-C	13:00
		21:00
	C-A	10:00
		16:00
		22:00
C_B	C-D	11:00
		15:00
		17:00
		19:00
		21:00
	D-C	10:00
		12:00
		14:00
		16:00
		20:00
		22:00
	E-C	12:00
		20:00
C_C	A-B	15:00
	B-C	12:00
		14:00
		18:00
		20:00
		22:00
	C-D	15:00

		18:00
		20:00
	D-E	11:00
		16:00
		18:00
		20:00
		22:00

4 TEORÍA DE JUEGOS

A Continuación desarrollaremos brevemente la teoría que más adelante aplicaremos a nuestro problema, Para ello desarrollaremos las ideas básicas de juegos cooperativos y las estructuras de comunicación. Terminaremos con una descripción teórica del valor que aplicaremos al problema.

4.1 Juegos cooperativos.

Un juego cooperativo con utilidad transferible, juego desde ahora, es un par (N, v) donde $N = \{1, n\}$ es un conjunto de elementos finito y es una aplicación en las partes de N que satisfacen $v(\emptyset) = 0$. Los elementos de N se denominan jugadores, los subconjuntos de jugadores se denominan coaliciones y la aplicación v es la función característica del juego. Si (N, v) es un juego y $S \subset N$, entonces (S, v) es un juego nuevo donde v ahora es la restricción de la función característica a 2^S

Un valor para juegos es una función sobre juegos que determina para cada (N, v) un vector $\phi: (N, v) \rightarrow R^N$. El vector asignado a cada juego generalmente se interpreta como un vector de pago, una asignación de los beneficios de cooperación entre todos los jugadores.

El valor Shapley es el valor más conocido para juegos. Está definido para todo el juego (N, v) y todo jugador i como

$$Sh_i(N, v) = \sum_{\{S \subset N: i \in S\}} \frac{1}{s} \binom{n}{s}^{-1} (v(S) - v(S \setminus \{i\}))$$

4.2 Estructuras de comunicación.

Sea N un conjunto finito de jugadores y $LN = \{\{i, j\} \in N \times N: i \neq j\}$ el conjunto de pares de elementos no ordenados s en N . Usamos $ij = \{i, j\}$ de ahora en adelante. Una estructura de comunicación para N es un grafo (N, L) donde el conjunto de nodos es N y el conjunto de aristas $L \subset LN$ es el conjunto de enlaces factibles (comunicaciones) entre los jugadores en N . Por lo tanto, identificamos una estructura de comunicación para un conjunto fijo N con el conjunto de enlaces L . Si $L = \emptyset$, obtenemos un grafo solo con nodos aislados (sin enlaces).

Un juego con estructura de comunicación es una tripleta (N, v, L) donde (N, v) es un juego cooperativo y L es una estructura de comunicación para N . Un juego cooperativo habitual (N, v) se identifica con el juego con comunicación estructura (N, v, LN) .

Sea (N, v, L) un juego con estructura de comunicación. Dos jugadores $i, j \in N$ están conectados por L si hay un camino en L desde i hasta j , es decir, existe $\{i_1, \dots, i_h\} \in N$ con $i_1=i$ e $i_h=j$.

Una coalición $S \subseteq N$ cuyos nodos están conectados por las aristas de L se llama conexa. Las coaliciones conexas maximales corresponden a los conjuntos de nodos de las componentes conectadas del grafo (N, L) y los denominamos N / L . Esta familia N / L es en realidad una partición de N .

Si $S \subseteq N$ es una coalición, entonces $LS = \{ij \in L: i, j \in S\}$ es una nueva estructura de comunicación sobre N que usa solo las aristas de L entre jugadores de S . En particular (S, v, LS) representa la restricción a S del juego y la estructura de comunicación tomando solo los nodos en S . Usaremos la notación $S / L = S / LS$.

El modelo de Myerson [9] asume que las coaliciones conectadas son las únicas coaliciones factibles en el juego en el sentido de que las otras cambian sus ganancias dependiendo de las coaliciones conectadas que contienen. Por lo tanto, un valor para juegos con estructuras de comunicación es una aplicación sobre esta familia de juegos que obtiene un vector de pago para cada juego con estructura de comunicación. El valor de Myerson es un valor para juegos con estructura de comunicación basada en el valor de Shapley.

Dado (N, v, L) , Myerson [9] define un nuevo juego (N, v^L) , el juego grafo, que incorpora la información de la estructura de comunicación, $v^L(S) = \sum_{T \in S/L} v(T)$ para todo $S \subseteq N$. Entonces, el valor de Myerson es

$$\mu(N, v, L) = Sh(N, v^L).$$

Las propiedades más interesantes del valor de Myerson, que maximizan este valor, son la eficiencia por componentes, y la justicia, para cada $ij \in L$ tenemos:

$$\mu_i(N, v, L) - \mu_i(N, v, L \setminus \{ij\}) = \mu_j(N, v, L) - \mu_j(N, v, L \setminus \{ij\}).$$

4.3 Juegos en estructuras de comunicación coloreadas.

En esta sección presentamos la notación sobre gráficos de colores que necesitaremos para describir nuestro problema general para juegos en estructuras de comunicación de colores.

Un grafo de colores (por enlaces) sobre N es un conjunto finito $L = \{L_1, \dots, L_m\}$ de grafos sobre N . Identificamos cada gráfica L_k con un color k . Por lo tanto, diremos que $M = \{1, \dots, m\}$ la paleta del grafo de colores.

Sea $L = \{L_1, \dots, L_m\}$ un grafo de color sobre N y $M = \{1, \dots, m\}$. Si $A \subset M$ definimos L_A como $L_A = \{L_p\}_{p \in A}$, es decir, un nuevo grafo de colores que reduce la paleta a A .

Denotamos

$$L_A = \bigcup_{p \in A} L_p$$

que es la unión de todos los gráficos pintados con colores en A .

Podemos considerarlo como otro grafo de un nuevo color.

Decimos que un gráfico de color L está conectado a nivel k , si al eliminar los enlaces de cualesquiera k colores de la paleta, la suma de los $n - k$ colores restantes está conectada, y si eliminamos $k + 1$ colores, el gráfico restante no está siempre conectado.

Por lo tanto, si L está conectado a k , entonces k es el número máximo de colores que podemos eliminar de la paleta para que la suma de todos los gráficos de colores restantes permanezca conectada. Particularmente, L está conectado a nivel 0 si L es conexo, pero $L \setminus \{p\}$ no está conectado para todas las $p \in M$. El número k se denomina nivel de conexión de L .

4.4 Descripción del valor y solución a nuestro problema

Para describir nuestro problema, seleccionamos un conjunto de agentes N . Tenemos un juego sobre N con una función característica que establece el valor de cada grupo de agentes según nuestros criterios.

Un grafo de color L sobre N representa diferentes sistemas de comunicación cuya suma garantiza la conexión, aunque hasta cierto número k (el nivel de conexión) a partir del cual la conexión de los sistemas falla.

Finalmente, definimos una distribución de probabilidad decreciente σ sobre $\{0, 1, \dots, k\}$, es decir, con $\sigma(0) \geq \sigma(1) \dots \geq \sigma(k)$ que muestra la robustez del sistema. Obviamente suponemos que $\sigma(r) = 0$ o insignificante para todo $r > k$.

Definimos un juego sobre una estructura de comunicación coloreada como una quintupla (N, v, L, k, σ) donde (N, v) es un juego, $L = \{L_1, \dots, L_m\}$ es un grafo de con nivel de conexión $k \leq m - 1$ y siendo σ es una distribución de probabilidad decreciente sobre $\{0, \dots, k\}$.

Denotamos como \wp a la familia de juegos en una estructura de comunicación de color.

Un valor para juegos en una estructura de comunicación coloreada es una aplicación sobre \wp en \mathbb{R}^N . Este valor permite conseguir un vector de pago para los agentes en N para cada $(N, v, L, k, \sigma) \in \wp$.

Definición del valor: Sea $(N, v, L, k, \sigma) \in \wp$ un juego en una estructura de comunicación de colores. El valor de Myerson en la estructura de colores se define para un jugador i como:

$$\mu_i(N, v, L, k, \sigma) = \frac{1}{C(m, k, \sigma)} \sum_{r=0}^k \sigma(r) \sum_{\{A \subset M; |A|=r\}} \mu_i(N, v, L_{M \setminus A})$$

donde $C(m, k, \sigma) = \sum_{r=0}^k \sigma(r) \binom{m}{r}$.

Observar que el recíproco de la última expresión es la probabilidad de que, borrando cualquier conjunto de colores de la suma, el resto de los colores formen un grafo conexo.

5 APLICACIÓN A NUESTRO PROBLEMA

Dividiremos nuestro problema en dos partes. En primer lugar, calcularemos el valor para grafos de colores en cada ciudad ya que en la primera fase estas actúan de nodos.

En la segunda fase asignaremos a cada compañía la media de los valores de las ciudades que enlaza según el grafo original. Esta será la medida de la importancia de la compañía en el mapa de destinos.

5.1 Primera fase

Normalmente un juego suele expresar el coste o el beneficio de la cooperación de un conjunto de jugadores. Como el comité de expertos han llegado a la conclusión de que en este caso estos no son factores determinantes hemos decidido tomar un juego donde el valor de una coalición de ciudades es el número de vuelos que salen de ellas según el grafo. Aquí una arista de una ciudad a otra se cuenta solo una vez.

Pensamos que este juego es más apropiado primero por su simplicidad y segundo porque dentro es una medida de la presencia de las compañías en la ciudad.

A continuación, observemos que si eliminamos cualquier compañía las otras dos cubren todos los puntos de destino. Sin embargo, si eliminamos dos cualesquiera hay puntos de destino que se quedan incomunicados. Es decir, el nivel de conexión del grafo de colores formado por las compañías es 1. Dicho de otra manera. Si eliminamos un color cualquiera el grafo suma resultante es conexo, pero si eliminamos 2 deja de serlo. Esto se ve bien en el grafo.

Consideremos ahora una distribución de probabilidad decreciente $\sigma(0) \geq \sigma(1)$ donde $\sigma(0)$ es la probabilidad de que todas las compañías funcionen y $\sigma(1)$ es la probabilidad de que una compañía deje de funcionar y sólo

una. Supondremos que

$$\sigma(0) = 0.75, \quad \sigma(1) = 0.25$$

El juego sería en nuestro caso: $v(S)$

Tabla 2. Cálculo de $v(S)$ para el grafo general L

S	V(S)	S	V(S)
\emptyset	0	CD	8
A	4	CE	8
B	4	DE	6
C	4	ABD	9
D	5	ABE	9
E	3	ACD	10
AB	6	ACE	9
AC	7	ADE	9
AD	8	BDE	9
AE	7	CDE	9
BC	6	ABC	8
BD	8	BCD	9
BE	7	BCE	8
ABCD	10	ACDE	10
ABCE	10	ABDE	10
BCDE	9	ABCDE	10

Nuestro grafo de colores puede ser representado como:

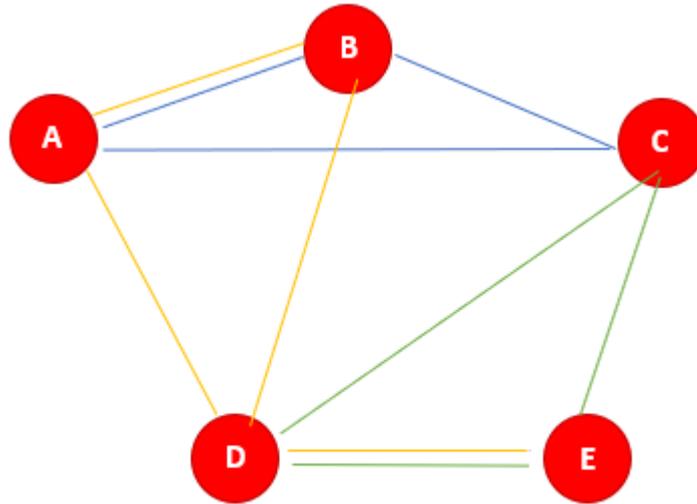


Ilustración 8. Grafo de colores de nuestro problema general L

En esta representación el grafo azul indica las ciudades a donde vuela la compañía 1, el verde la compañía 2 y el amarillo la 3. Hemos representado el grafo por bloques completos de color indicando con que dos ciudades están relacionadas por una compañía si ésta vuela a ambas.

Nuestra paleta entonces es $L = \{L_1, L_2, L_3\}$ de donde $M = \{1, 2, 3\}$

Eliminación del color azul: Grafo L_{23}

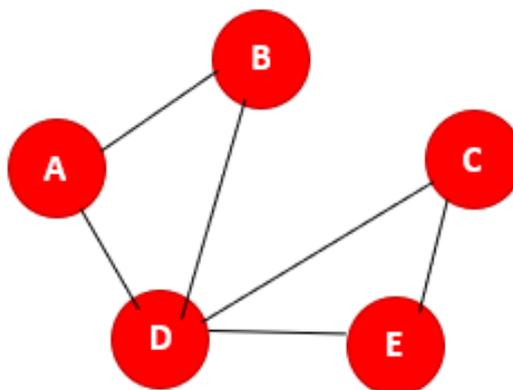


Ilustración 9. Grafo de colores L_{23}

El juego $v^{L_{23}}$ será:

Tabla 3. Cálculo de $v^{L_{23}}(S)$

S	$v^{L_{23}}(S)$	S	$v^{L_{23}}(S)$
\emptyset	0	CD	8
A	4	CE	6
B	4	DE	6
C	4	ABD	9
D	5	ABE	$V(AB)+v(E)=9$
E	3	ACD	10
AB	6	ACE	$V(A)+V(CE)=12$
AC	$v(A)+v(C)=8$	ADE	9
AD	8	BDE	9
AE	$v(A)+v(E)=7$	CDE	9
BC	$V(B)+v(C)=8$	ABC	$V(AB)+v(C)=10$
BD	8	BCD	9
BE	$v(B)+v(E)=7$	BCE	$V(B)+V(CE)=12$
ABCD	10	ACDE	10
ABCE	$V(AB)+v(CE)=12$	ABDE	10
BCDE	9	ABCDE	10

Eliminación del color amarillo: Grafo L_{13} :

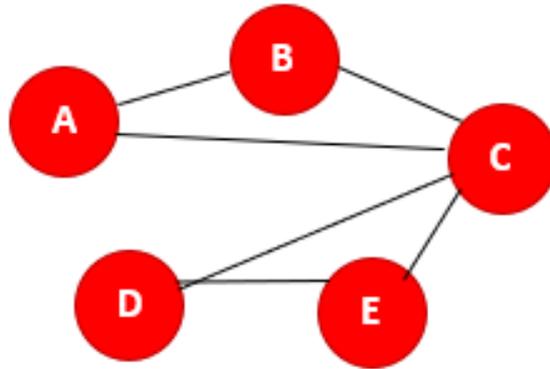


Ilustración 10. Grafo de colores L_{13}

Juego $v^{L_{13}}(S)$:

Tabla 4. Cálculo de $v^{L_{13}}(S)$

S	$v^{L_{13}}(S)$	S	$v^{L_{13}}(S)$
\emptyset	0	CD	8
A	4	CE	8
B	4	DE	6
C	4	ABD	$V(AB)+V(D)=11$
D	5	ABE	$V(AB)+V(E)=9$
E	3	ACD	10
AB	6	ACE	9
AC	7	ADE	$V(A)+V(DE)=12$
AD	$V(A)+V(D)=9$	BDE	$V(B)+V(DE)=12$
AE	$V(A)+V(E)=7$	CDE	9
BC	6	ABC	8

BD	$V(B)+V(D)=9$	BCD	9
BE	$V(B)+V(E)=7$	BCE	8
ABCD	10	ACDE	10
ABCE	10	ABDE	$V(AB)+V(DE)=12$
BCDE	9	ABCDE	10

Eliminación del verde: Grafo L_{12} :

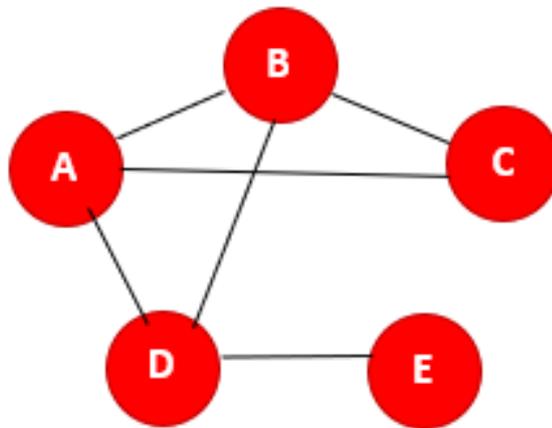


Ilustración 11. Grafo de colores L_{12}

Juego $v^{L_{12}}(S)$:

Tabla 5. Cálculo de $v^{L_{12}}(S)$

S	$v^{L_{12}}(S)$	S	$v^{L_{12}}(S)$
\emptyset	0	CD	$V(C)+V(D)=9$
A	4	CE	$V(C)+V(E)=7$
B	4	DE	6
C	4	ABD	9
D	5	ABE	$V(AB)+V(E)=9$
E	3	ACD	10
AB	6	ACE	$V(AC)+V(E)=10$
AC	7	ADE	9
AD	8	BDE	9
AE	$V(A)+V(E)=7$	CDE	$V(C)+V(DE)=10$
BC	6	ABC	8
BD	8	BCD	9
BE	$V(B)+V(E)=7$	BCE	$V(BC)+V(E)=9$
ABCD	10	ACDE	10
ABCE	$V(ABC)+V(E)=11$	ABDE	10
BCDE	9	ABCDE	10

Con la eliminación del azul y el amarillo tendremos desconexión. Por tanto, despreciamos los grafos que nos quedan inconexos.

Vamos a calcular ahora los elementos del valor de Myerson:

1. $C(5,1, \sigma) = 0,75 \binom{3}{0} + 0,25 \binom{3}{1} = 0,75 + 0,75 = 1,5$
2. $\mu_A(N, v, L, 1, \sigma) = \frac{1}{1,5} (0,75[\mu_A(N, v, L)] + 0,25[\mu_A(N, v, L_{23}) + \mu_A(N, v, L_{13}) + \mu_A(N, v, L_{12})]) = \frac{1}{1,5} (0,75[2.0333] + 0,25[2.2833 + 2.3333 + 0.9]) = 1.9361$
3. $\mu_B(N, v, L, 1, \sigma) = \frac{1}{1,5} (0,75[\mu_B(N, v, L)] + 0,25[\mu_B(N, v, L_{23}) + \mu_B(N, v, L_{13}) + \mu_B(N, v, L_{12})]) = \frac{1}{1,5} (0,75[2.0333] + 0,25[1.8667 + 2 + 0.7833]) = 1.7916$
4. $\mu_C(N, v, L, 1, \sigma) = \frac{1}{1,5} (0,75[1.9500] + 0,25[2.4167 + 1.2833 + 1.7833]) = 0.9750$
5. $\mu_D(N, v, L, 1, \sigma) = \frac{1}{1,5} (0,75[2.4500] + 0,25[1.5833 + 2.1167 + 2.5333]) = 2.2639$
6. $\mu_E(N, v, L, 1, \sigma) = \frac{1}{1,5} (0,75[1.5333] + 0,25[1.6667 + 2.8667 + 1.5333]) = 1.7778$

Juego $v^{L_{23}}(S)$, Shapley value

2.3333 2.0000 2.4167 1.5833 1.6667

Juego $v^{L_{13}}(S)$, Shapley value

0.9500 0.7833 1.2833 2.1167 2.8667

Juego $v^{L_{12}}(S)$, Shapley value

2.2833 1.8667 1.7833 2.5333 1.5333

Juego v^L

2.0333 2.0333 1.9500 2.4500 1.5333

5.2 Segunda fase

En esta segunda fase asignamos el valor a cada compañía. Para ello hacemos un promedio de los valores asignados a cada destino al que vuela. Por ejemplo. Si una compañía vuela a las ciudades A, B y D su valor asignado será $(\mu_A(N, v, L, 1, \sigma) + \mu_B(N, v, L, 1, \sigma) + \mu_D(N, v, L, 1, \sigma))/3$.

En nuestro caso tenemos los siguientes valores

Compañía 1, vuela a A, B y C. Su valor será el promedio de los valores de Myerson de las 3 ciudades.
 $(1.9361+1.7916+0.9750)/3=1.5676$

Compañía 2, vuela a C, D y E. Su valor será el promedio de los valores de Myerson de las 3 ciudades.
 $(0.9750+2.2639 +1.7778)/3= 1.6722$

Compañía 3, vuela a A, B D y E. Su valor es $(1.9361+1.7916+2.2639 +1.7778)/4=1.9424$

Según nuestro método la compañía que se eliminará será la compañía 1.

El hecho de que la compañía 3 sea la más valiosa no implica que tenga que volar a más ciudades aunque en este caso coincida.

Las compañías 1 y 2 son cercanas en valor. Aún así podemos descartar la 1 ya que está a más de 1 punto por debajo de la 2.

5.3 PROGRAMAS PARA EL CÁLCULO DE LOS VALORES.

Programas e matlab para el cálculo del valor de Myerson.

Función coalition

```
function A1=coalition(n);
% This program calculates the 2^2-2 coalition constraints for
% cooperative game.If the no of players are more than 15 the execution
% time will be more.

for i=1:n-1
    k(i)=nchoosek(n,i);
end
A=zeros(2^n-2,n);
A1=A;
k1=1:n;
nn1=1;
for i=1:n
    x=nchoosek(k1,i);
    [n1 n2]=size(x);
    A(nn1:nn1+n1-1,1:n2)=x;
    nn1=nn1+n1;
end
m=sum(k);
for i=1:m
    for j=1:n
        kk=A(i,j);
        if kk>0
            A1(i,kk)=1;
        else
            end
        end
    end
end
```

función shap1

```
function S=shap1(n,v);
% This program determines the shapley value .Shapley value is one of
```

```

% important solution concept for Transferable utility cooperative game
cooperative game.
m=2^n-1;
% The 2^2-1 coalition contrains of the transferable utility game.
A=coalition(n);
ss=ones(1,n);
A=[A' ss']';
    for k=1:n
        k1=zeros(1,m);
    k2=k1;
    A2=0*A;
    for i=1:m
        if A(i,k)>0
            k1(i)=v(i);
            A2(i,:)=A(i,:);
        else
            end
    end
    end
    A3=A2;
    A3(:,k)=0;
    for i=1:m
        for j=1:m
            if A3(i,1:n)==A(j,1:n);
                k2(i)=v(j);
            else
                end
        end
    end
    end
    k3=k1-k2;
    k4=sum(A2. ');
    r=zeros(1,m);
    mm=factorial(n-1);
    for i=1:m
        if k4(i)>0
            r(i)=mm./nchoosek(n-1,k4(i)-1);
        else
            end
    end
    end
    S(k)=sum(k3.*r)/sum(r);
end

```

función test

```

clear;
clc
%Developed by RM Saloman danaraj(salorajan@gmail.com) ,Asst professor
,Aurora's technologicl
%research institute,Parvathpur,Hyderabad.
% n is the number of players
n=5;
m=2^n-1;
A=coalition(n);
ss=ones(1,n);
A=[A' ss']';
% v1=round(10*rand(n,1));
v1=[1 2 3 4 5]';
r=round(2*rand(m,1));
%Creating an pure additive game and adding some noise.
v=(A*v1)+r;
% determining shapley value
S=shap1(n,v)

```

6 CONCLUSIONES

En este trabajo hemos intentando dar solución a un problema en el cual hay un exceso de oferta por varios agentes con el agravante de que todos dan unos servicios muy similares al demandante. En concreto hemos abordado el problema de un aeropuerto con sobrecarga de compañías aéreas que comunican a un conjunto de ciudades. El aeropuerto debe decidir el eliminar una compañía para normalizar su infraestructura pero no hay diferencias significativas económicas o estructurales entre ellas.

Para ello diseña un grafo coloreado en el cual cada compañía tiene un color. Se establece un valor basado en Myerson que ha sido explicado en el trabajo que tiene en cuenta el hecho esencial de que las ciudades siguen comunicadas sea cual sea la compañía que eliminemos, lo que en el trabajo se conoce como 1-conexo.

En este trabajo de las tres compañías hemos descartado la primera y que es la que menor valor nos ha dado. Aunque en este caso no ocurre, el resultado no tiene porqué ser la eliminación de la compañía que tiene menos vuelos y la seguridad de que no eliminamos la que tenga más vuelos ya que esto depende de la importancia posicional en el grafo de las ciudades y del número de vuelos que llegan a ella.

El trabajo puede aplicarse a situaciones de incertidumbre ante una decisión del tipo trabajado en la cual uno o varios de los oferentes deben ser eliminados por un exceso de oferta bajo la hipótesis de que sus servicios son muy similares.

7 BIBLIOGRAFÍA

Aeropuertos y compañías estudiadas

1. Ted Stevens Anchorage International Airport
2. McGrath Airport
3. McKinley National Park Airport
4. Kantishna Airport (FAA LID: 5Z5)
5. Gustavus Airport
6. Fairbanks International Airport
7. Edward G. Pitka Sr. Airport

Artículos

- [1] E. K. Burke, J. Newall and R.F. Weare. A Memetic Algorithm for University Exam Timetabling. In: Burke, E.; Ross, P. (eds.): Practice and Theory of Automated Timetabling, First International Conference, Edinburgh, U.K., August/September 1995. Selected Papers. Lecture Notes in Computer Science 1153, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 241-250, 1996.
- [2] E. G. Coffman, Jr., M. R. Garey, D. S. Johnson, and A. S. LaPaugh. Scheduling file transfers, SIAM J. Comput., 14(3):744-780, 1985.
- [3] R. Diestel. Graph theory, 5th edition. Springer-Verlag, Heidelberg. Graduate texts in Mathematics 173, 2016.
- [4] A. Graf, M. Stumpf, and G. Weienfels. On coloring unit disk graphs, Algorithmica, 20(3):277-293, 1998.
- [5] I. Holyer. The NP-completeness of link-coloring, SIAM J. Comput., 10(4):718-720, 1981.
- [6] J. A. Hoogeveen, S. L. van de Velde, and B. Veltman. Complexity of scheduling multiprocessor tasks with prespecified processor allocations, Discrete Appl. Math., 55(3):259-272, 1994.
- [7] F. T. Leighton. A Graph Coloring Algorithm for large Scheduling Problems, Journal of Research of the National Bureau Standard, 84 pp 79-100, 1979.
- [8] R. Mulot. Les documents écrits de la numérisation l'indexation par le contenu, Editeur : Hermes science Publication, 365 pages, 2006.

- [9] R. B. Myerson. Graphs and cooperation in games. *Mathematics of Operations Research* 2, 225-229, 1977.
- [10] T. Nishizeki and K. Kashiwagi. On the 1:1 link-coloring multigraphs, *SIAM J. Discrete Math.*, 3(3):391-410, 1990.
- [11] L. S. Shapley. A Value for n-person Games. In *Contributions to the Theory of Games*, volume II, by H.W. Kuhn and A.W. Tucker, editors. *Annals of Mathematical Studies* v. 28, pp. 307-317. Princeton University Press, 1953.
- [12] H. Terashima-Marn, P. Ross, and M. Valenzuela-Rendón. Clique-Based Crossover for Solving the Timetabling Problem with Gas, *Proc. of the Congress on Evolutionary Computation*, pp. 1200-1206, 1996.
- [13] C. Viard-Gaudin, D Barba. A multi-resolution approach to extract the address block on flat mail pieces, *ICASSP-91, International Conference*, vol.4, Pages: 2701 - 2704, 1991.
- [14] C. H. Wang, P. W. Palumbo, S.N. Srihari. Object recognition in visually complex environments: an architecture for locating address blocks on mail pieces, *Pattern Recognition*, 1988., 9th International Conference, IEEE, vol.1, Pages: 365-367, 1988.