

Proyecto Fin de Grado Ingeniería Electrónica, Robótica y Mecatrónica

Análisis y Modelado de un Vehículo VTOL Híbrido. Caso Bidimensional.

Autor: Samuel Yanes Luis.

Tutores:

Manuel Vargas Villanueva.

Manuel Gil Ortega Linares.

**Dpto. Ingeniería de Sistema y
Automática
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla**

Sevilla, 2019



Proyecto Fin de Grado
Ingeniería Electrónica, Robótica y Mecatrónica.

Análisis y Modelado de un Vehículo VTOL Híbrido. Caso Bidimensional.

Autor:

Samuel Yanes Luis

Tutor:

Manuel Vargas Villanueva

Profesor titular

Manuel Gil Ortega Linares

Catedrático de Universidad

Dpto. de Ingeniería de Sistemas y Automática
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2019

Proyecto Fin de Grado: Análisis y Modelado de un Vehículo VTOL Híbrido. Caso Bidimensional.

Autor: Samuel Yanes Luis

Tutores: Manuel Vargas Villanueva y
Manuel Gil Ortega Linares

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2019

El Secretario del Tribunal

A Raquel.

Agradecimientos

Este trabajo no es el fin de una etapa, sino el comienzo de un proceso radicalmente nuevo.

Quisiera agradecer en primer lugar a mis tutores, Manuel Vargas y Manuel Gil Ortega, por la oportunidad que se me brindó al participar en este proyecto. Gracias a ellos, he abrazado la Teoría de Control como campo de estudio. Ellos me han regalado la visión de un mundo dinámico, vivo y dispuesto a ser descubierto, modelado y controlado. Por eso, siempre perdurarán en mi carrera como los artífices de la pasión que siento por la Ingeniería.

En segundo lugar, este trabajo no podría haber sido posible sin el poderoso e imparable apoyo de mi familia. El cariño de mis padres y su confianza de acero en mí han sido el combustible que permitió que pudiera terminar este documento y seguir adelante ante cada circunstancia adversa. La educación que me dieron, los valores de esfuerzo, justicia y valentía me han hecho lo que soy ahora. Junto con mi hermana, quien estoy seguro de que estaría más orgullosa de mí que nadie, han formado una tríada necesarísima para que cada gráfica pudiese figurar en su lugar correcto. A ellos no les debo mi trabajo, sino mi felicidad entera.

En tercer lugar, mis amigos. Han sido una caja de resistencia donde guardar lo malo y recuperar lo bueno. El lugar donde refugiarse ante la tormenta. Sin ellos, la vuelta al hogar estaría incompleta. Han sido la *estabilidad inherente* dentro del caos. Para ellos, todo mi cariño.

En último lugar, me gustaría agradecer a la Escuela Técnica de Ingeniería Superior de Sevilla los 4 años más intensos de mi vida. Sus paredes me han moldeado, formado y forjado regalándome el tesoro más preciado que tengo: un amor infinito por el estudio, la ciencia y la técnica. Si volviera a vivir, volvería a escoger este edificio rojo para estudiar, al que recordaré siempre como un hogar, no por las horas que he pasado bajo su techo, sino por las innumerables historias que me vieron crecer como persona y como profesional.

Samuel Yanas Luis

Sevilla, 2019

Resumen

En este documento se ha realizado un análisis de la dinámica de una aeronave tipo *Tilt-Wing UAV (Unmanned Aerial Vehicle)* desde el punto de vista mecánico, aerodinámico y propulsivo para su posterior modelado e implementado en un simulador dentro de Matlab™.

Habiéndose descrito la dinámica del sistema, se disponen las ecuaciones de los modelos sobre los que se linealizará posteriormente con el objetivo de plantear dos estrategias de control distintas: por un lado, tendremos una estrategia de control desacoplado por linealización y por otro, una mecánica de control basada en la prelinealización por realimentación. Ambas estrategias son comparadas según distintos criterios de viabilidad y efectividad. Se plantean dos métodos derivados de estas dos estrategias de control para realizar la transición entre los dos modos extremos de vuelo (modo helicóptero a baja velocidad aerodinámica y modo de vuelo longitudinal a alta velocidad aerodinámica). Estas dos estrategias plantearán las líneas iniciales de investigación en el aspecto del control de la aeronave *Emergentia*.

Por último, se realiza un breve análisis de la dinámica de bajo nivel de los actuadores (motores BLCD y servomotores) con el objetivo de dimensionar dicho hardware para la posterior implementación en el prototipo real de la aeronave.

Abstract

In this document an analysis of the dynamics of a Tilt-Wing UAV (*Unmanned Aerial Vehicle*) has been developed from the point of view of the mechanics, aerodynamics and propulsive system in order to obtain a model and a simulator in Matlab™.

Once described the dynamics of the system, the equations of the models are set for a posterior linearization with the aim to establish two different control strategies: in one hand, a linearization and decoupling control strategy; in the other hand, a prelinearization by feedback control scheme. Both techniques are compared under different criteria of viability and effectivity. Two methods are set to achieve the transition between the two flight complementary modes (Helicopter mode with a low airspeed and Longitudinal Flight mode with high airspeed). These strategies lay the basis of the control research for the *Emergentia* aircraft.

Finally, a brief analysis of the low level actuators dynamics is obtained (BLDC motors and servomotors) with the objective of dimensioning the hardware which could be implemented in the real prototype of the aircraft.

Índice

Lista de Figuras	17
I Introducción, organización y objetivos	21
1. Organización de la memoria y objetivos	21
2. Introducción y descripción de la aeronave	23
2.1. Descripción del vehículo	23
2.2. Proyecto <i>Emergentia</i>	24
2.3. Hipótesis y simplificaciones	24
II Modelado de la dinámica de la aeronave e implementación del simulador	26
1. Descripción de los sistemas de referencia	26
2. Modelado dinámico y cinemático	27
2.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange	27
2.1.1. Fuerzas externas no conservativas (generalizadas):	28
2.2. Modelado cinemático	29
2.3. Modelado dinámico	29
3. Fuerzas y pares	32
3.1. Modelo propulsivo - Fuerzas de propulsión	32
3.2. Modelo aerodinámico - Fuerzas y momentos aerodinámicos	34
4. Modelo completo	38
III Trimado	39
1. Principios matemáticos	39
2. Resolución del trimado en Matlab TM	40
2.1. Trimado en vuelo longitudinal (Ala Fija)	41
2.1.1. Código de cálculo de trimado	43
2.2. Trimado en Hovering	46
2.2.1. Código de cálculo de trimado	47
2.3. Trimado en puntos de θ_P intermedios	49
IV Linealización y modelo simplificado	50
1. Modelo dinámico para baja velocidad aerodinámica	50
2. Modelo dinámico general con $V_a > 0$	53
V Primer planteamiento de control: control PID desacoplado	56

1. Control del ángulo de inclinación del proprotor θ_P	57
1.1. Controlador del servomotor del proprotor	58
1.2. Realimentación de los términos gravitatorios	60
2. Control en Hovering	61
2.1. Control en altura (z_B)	61
2.2. Control en posición longitudinal (x_B)	63
2.3. Control del ángulo θ_B	
.	63
2.4. Experimentos de vuelo	65
3. Control en ala fija	69
3.1. Control de la velocidad aerodinámica V_a	69
3.2. Controlador de altura $h = -z_B$	70
3.3. Experimentos de vuelo	72
VI Transición secuencial basada en desacople	75
1. Planteamiento general	75
2. Transición de modo Helicóptero a modo Ala Fija	76
2.1. Experimento y resultados	80
2.2. Análisis del resultado	81
3. Transición de modo Ala Fija a modo Helicóptero	82
3.1. Experimento y resultados	84
3.2. Análisis del resultado	85
VII Control mediante prelinealización por realimentación	86
1. Planteamiento introductorio	86
2. Planteamiento matemático	87
3. Resolución de la prelinealización	90
3.1. Resolución de las ecuaciones. Procedimiento de cálculo:	90
3.2. Caso particular para baja velocidad aerodinámica	93
4. Control PID	94
5. Experimentos y resultados	97
5.1. Hovering	97
5.2. Vuelo horizontal	100
VIII Transición mediante prelinealización por realimentación	102
1. Planteamiento de la estrategia	102

2. Experimentos y resultados	106
2.1. Transición Vuelo Horizontal - Hover	106
2.1.1. Análisis del resultado	107
2.2. Transición Hover - Vuelo Horizontal	108
2.2.1. Análisis del resultado	109
IX Comparación de los métodos de control implementados	110
1. Comparación de las diferentes metodologías	110
2. Comparación del desempeño del control	113
2.1. Comparación en modo Hover	113
2.2. Comparación en modo vuelo horizontal	116
2.3. Comparación de la transición Hover - Vuelo Horizontal	118
2.4. Comparación de la transición Vuelo Horizontal - Hover	119
X Conclusiones y horizonte de la investigación	121
A. Descripción de la dinámica de bajo nivel	126
A.1. Subsistema de accionamiento del ángulo de los proptores	126
A.1.1. Dimensionado del motor de Tilt de los proptores	127
A.2. Subsistema de accionamiento de la velocidad de las hélices	128
A.2.1. Control de la velocidad de giro del motor Brushless	130
A.2.2. Conmutación del bobinado del estátor	131
A.2.3. Implementación y simulación del sistema	132
A.3. Subsistema de accionamiento de los elevadores	134
B. Simscape Multibody	136
B.1. Simulación de sistemas Multicuerpo - Emergentia	136
B.2. Simulación gráfica - Mechanics Explorer	141
C. Linealización de las ecuaciones	142
C.1. Expresiones dinámicas	142
C.2. Linealización	142
C.2.1. Ecuación de V_a	142
C.2.2. Ecuación de γ	143
C.2.3. Ecuación de θ_B	144
C.2.4. Ecuación de θ_B	144
D. Referencias	145

Lista de Figuras

1.1.	Vista en perspectiva del V22-Osprey	23
1.2.	Aeronave <i>Emergentia</i>	24
2.1.	Sistemas de referencia del cuerpo	26
2.2.	Sistemas de referencia del proprotor	27
2.3.	Fuerza y par propulsivo	31
2.4.	Simulación del modelo propulsivo.	33
2.5.	Fuerza y par propulsivo	33
2.6.	Modelo propulsivo	34
2.7.	Ejes viento y ejes de estabilidad	34
2.8.	Fuerzas y pares aerodinámicos	35
2.9.	Elevadores del V22	36
2.10.	Magnitudes físicas alares	36
2.11.	Curvas del coeficiente de sustentación hayadas por [1].	37
2.12.	Subsistema de fuerzas y momentos aerodinámicos	37
2.13.	Caja del modelo completo	38
3.1.	Definición de las entradas y salidas en Simulink TM	40
3.2.	Gráficas de equilibrio - Vuelo longitudinal	45
3.3.	Curva de nivel para $\dot{z}_B(\theta_B, \Omega_{Thrust}) = 0$	46
3.4.	Característica estática de un doble integrador.	46
4.1.	Fuerzas en ausencia de velocidad aerodinámica	50
4.2.	Fuerzas en ausencia de velocidad aerodinámica	52
4.3.	Esquema de bloques de un sistema descrito como espacio de estados.	54
5.1.	Bucle de control	56
5.2.	Estructura PID paralela	56
5.3.	Esquema de simplificación de sistema para $BW \gg 1$	59
5.4.	Experimento de control de θ_P	60
5.5.	Bloque controlador de θ_P	60
5.6.	Esquema PID en cascada	61
5.7.	Bloque controlador de z_B	62
5.8.	Bode comparativo	64
5.9.	Bloque controlador de x_B	65
5.10.	Experimento I - Vuelo en ascenso	66
5.11.	Experimento II - Vuelo en avance	67
5.12.	Experimento III - Trayectoria genérica	68
5.13.	Lugar de las raíces del controlador de V_a	69
5.14.	Esquema de control para el autopiloto en modo Alt-Hold	70
5.15.	Bloque controlador de z_B en vuelo horizontal	71
5.16.	Experimento I - Vuelo horizontal	72
5.17.	Experimento I - Vuelo horizontal	73
5.18.	Fuerzas en el cambio de elevación.	74
6.1.	Región de estabilidad (θ_P frente a V_a). Fuente: [1]	75
6.2.	Trayectoria deseada sobre el mapa de operación de la aeronave	77
6.3.	Algoritmo secuencial de transición H-FW	78
6.4.	Configuración de autopiloto para transición H-FW	79
6.5.	Gráficas de control de transición directa	80
6.6.	Seguimiento de la trayectoria mapeada sobre el campo de operación	81
6.7.	Algoritmo secuencial de transición H-FW	83
6.8.	Gráficas de control de transición inversa	84
7.1.	Linealización en torno a varios puntos de operación en un sistema SISO	86

7.2.	Esquema ideal de inversión	87
7.3.	Esquema de prelinealización	88
7.4.	Proyección del vector de empuje T	92
7.5.	Proyección del vector de empuje T	94
7.6.	Gestión de las señales de referencia	96
7.7.	Experimento I - Vuelo en avance	97
7.8.	Experimento II - Vuelo en ascenso	98
7.9.	Experimento I - Vuelo siguiendo el perfil de altura variable	100
7.10.	Experimento II - Cambio de V_a	101
8.1.	Esquema para la transición	103
8.2.	Esquema para la transición	104
8.3.	Perfil de velocidad aerodinámica durante la transición.	105
8.4.	Resultado de la transición I	106
8.5.	Trayectoria ($\theta_P - V_a$) dentro de la región de estabilidad (rosado).	107
8.6.	Resultado de la transición II	108
8.7.	Trayectoria ($\theta_P - V_a$) dentro de la región de estabilidad (rosado) II.	109
9.1.	Comparación - Experimento en modo Hover	113
9.2.	Comparación - Experimento con trayectoria genérica	114
9.3.	Comparación - Experimento de vuelo axial II	115
9.4.	Comparación - Experimento con trayectoria genérica II	115
9.5.	Comparación - Experimento de vuelo horizontal	116
9.6.	Comparación - Experimento de vuelo horizontal II	117
9.7.	Comparación - Transición Hover \rightarrow Vuelo Horizontal	118
9.8.	Comparación - Transición Vuelo Horizontal \rightarrow Hover	119
10.1.	Perfil inicial del proprotor.	122
10.2.	Modelo de un motor DC	127
10.3.	Servomotor DX-117	128
10.4.	Esquema interno de funcionamiento de un BLDC en configuración estrella. Fuente: www.renesas.com	129
10.5.	Circuito interno BLDC en estrella	129
10.6.	Sensores Hall en el interior de un BLDC	130
10.7.	Perfil de la fuerza contra-electromotriz y la terna Hall.	131
10.8.	Esquema de un inversor trifásico	131
10.9.	Motor utilizado	132
10.10.	Modelo en Simulink	133
10.11.	Decodificador de los sensores Hall (izq.) y Lógica de conmutación basada en el cuadrante EMF (der.)	133
10.12.	Resultado experimento	133
10.13.	Tensiones y corrientes	134
10.14.	Comparativa con el modelo simplificado	134
10.15.	Creación del SR global	137
10.16.	Creación del SR global	138
10.17.	Colocación de los sistemas de referencia y articulaciones	138
10.18.	Geometría y colocación de los ejes.	139
10.19.	Geometría del proprotor.	140
10.20.	Diagrama completo del simulador gráfico.	140
10.21.	Resultado final del modelado gráfico	141

Diccionario de términos

VTOL	<i>Vertical Take Off and Landing.</i>
(\hat{x}_B, \hat{z}_B)	Ejes del sistema de coordenadas inerciales.
θ_B	Ángulo de orientación del vehículo reANspecto de su línea de simetría.
θ_P	Ángulo de inclinación de los proprotos.
δ_e	Ángulo de inclinación de los elevadores.
Ω	Velocidad angular de las hélices de los propulsores (rev/s).
$\{\mathcal{I}\}$	Sistema de referencia inercial.
$\{\mathcal{B}\}$	Sistema de referencia de coordenadas cuerpo. Centrado en el CDM de la aeronave y girado θ_B .
$\{\mathcal{P}\}$	Sistema de referencia de ligado al CDM del proprotor.
CDM	Centro de masas.
\mathcal{L}	Función escalar lagrangiana.
E_p	Energía potencial
E_c	Energía cinética
(q, \dot{q})	Posición y velocidad de las coordenadas generalizadas del sistema mecánico.
\mathbf{J}	Matriz jacobiana
\mathbf{p}_a	Posición del CDM del elemento \mathbf{a} respecto del sistema de referencia <i>inercial</i> .
\mathbf{p}_a^b	Posición del CDM del elemento \mathbf{a} respecto del sistema de referencia \mathbf{b} .
\mathbf{v}_a^b	Velocidad lineal del CDM del elemento \mathbf{a} respecto del sistema de referencia \mathbf{b} .
$\boldsymbol{\omega}_a^b$	Velocidad angular del CDM del elemento \mathbf{a} respecto del sistema de referencia \mathbf{b} .
\mathbf{a}_a^b	Aceleración lineal del CDM del elemento \mathbf{a} respecto del sistema de referencia \mathbf{b} .
m_P	Masa de los proprotos (Kg).
m_B	Masa de la aeronave (Kg).
I_P	Inercia de los proprotos ($Kg \cdot m^2$).
I_B	Inercia de la aeronave ($Kg \cdot m^2$).
I_y	Suma de las inercias I_P y I_B .
g	Aceleración de la gravedad ($Kg \cdot m \cdot s^{-2}$).
J	Factor de avance del propulsor.
D_r	Diámetro de las hélices de propulsión.
C_T	Coefficientes de propulsión.
T	Fuerza de propulsión.
ρ	Densidad del aire.
n	Número de proprotos. En nuestro caso $n = 2$.
V_a	Velocidad aerodinámica.
S	Superficie aerodinámica efectiva.

c	Longitud de la línea de cuerda alar.
\bar{q}	Velocidad aerodinámica equivalente.
(C_L, C_M, C_D)	Coefficientes de sustentación, de <i>pitch</i> y de arrastre respectivamente.
(L, D, M)	Fuerzas de sustentación, arrastre y momento de <i>pitch</i> respectivamente.
α	Ángulo de ataque.
γ	Ángulo de asentamiento de la velocidad aerodinámica.
(K_p, K_i, K_d)	Constantes proporcional, integral y derivativa de un controlador PID.
BW	<i>Bandwidth</i> - Ancho de banda.
U	Señal de control virtual.

Capítulo I. Introducción, organización y objetivos

1. Organización de la memoria y objetivos

El trabajo tiene como objetivo el modelado de la dinámica longitudinal (bidimensional) de un vehículo aéreo de tipo *Tilt-Rotor* con capacidad de despegue y aterrizaje vertical diseñado para un despliegue rápido y eficiente y el diseño de controladores que permitan conducir la aeronave de una manera segura y robusta. El trabajo puede descomponerse en una serie de hitos

Capítulo 1 Organización de la memoria, objetivos y descripción de la aeronave.

Capítulo 2 Descripción y verificación de la dinámica del caso bidimensional. Se han descrito las fuerzas (mecánicas, propulsivas y aerodinámicas) que intervienen en la aeronave y se ha desarrollado un simulador basado en los resultados y parámetros obtenidos gracias a una investigación anterior de la aerodinámica del prototipo en cuestión.

Capítulo 3 Desarrollo de un algoritmo para obtener los puntos de equilibrio y los posteriores mapas de operación. Se ha desarrollado una técnica basada en diferentes herramientas de análisis matemático (MatLab, Control Toolbox, etc.) para encontrar de manera sistemática los puntos de equilibrio (*trimado*) de la nave conformada como una caja negra dependiente de sus parámetros, con el fin de caracterizar sus regímenes de vuelo y sus limitaciones (velocidad máxima y de entrada en pérdida, condiciones para vuelo horizontal, ...).

Capítulo 4 Diseño de un modelo simplificado atendiendo al régimen de vuelo de la aeronave (Hover o vuelo horizontal) con el objetivo de entender mejor la dinámica del sistema, linealizar en torno a los puntos de operación anteriormente determinados y conocer los límites de cada modo de vuelo.

Capítulo 5 Diseño de controladores lineales desacoplados basados en el modelo simplificado anterior. Se proponen distintas estrategias de control basadas en el desacople de las

variables de salida (x, z en el caso del modo de vuelo axial / Hover y z, V_a en el caso del vuelo en avance horizontal) y se somete a diferentes experimentos con el fin de demostrar su validez.

Capítulo 6 Diseño de un algoritmo de transición basada en un proceso secuencial para la transición de un modo a otro. Se plantea un algoritmo basado en una secuencia de accionamiento para llevar a cabo una transición directa (de modo Hover/Helicóptero a modo avión) y una transición inversa (de modo avión a modo helicóptero) con seguridad y robustez.

Capítulo 7 Diseño de otra técnica de control basada en el conocimiento intensivo del sistema (modelo aerodinámico basado en datos de túnel de viento con una caracterización muy realista de los coeficientes aerodinámicos). Se plantea una estructura de prelinealización del sistema de modo que se obtenga un modelo resultante lineal que permita el control en sus dos modos sin tener que limitarnos a un controlador por cada punto de operación.

Capítulo 8 Diseño de la estrategia de transición basada en el control prelinealización por realimentación. Se plantea la estrategia de transición basada en la estructura anterior, que resulta casi inmediata gracias a la prelinealización.

Capítulo 9 Comparación de los resultados de control.

Capítulo 10 Conclusiones y líneas futuras de investigación.

Anexo A Caracterización de la dinámica de bajo nivel relacionada con los actuadores (servomotores y motores *brushless* de los propulsores) y el algoritmo de control de los mismos.

Anexo B Desarrollo de una herramienta de visualización en 3D de la aeronave.

Anexo C Desarrollo de las expresiones derivadas de la linealización del modelo dinámico.

2. Introducción y descripción de la aeronave

El objetivo de esta parte es exponer detalladamente la física y la dinámica como sólido rígido del sistema basada en una serie de hipótesis y simplificaciones. Se dedicará espacio también para las convenciones matemáticas utilizadas y para la definición de los modelos propulsivo y aerodinámico considerado. Además, se concluirá con la descripción del simulador gráfico 3D (realizado en MatlabTM) que servirá como complemento de visualización de los experimentos posteriores a este capítulo.

2.1. Descripción del vehículo

El vehículo aéreo sujeto de este estudio se podría clasificar como un VTOL convertible (o híbrido, como suele encontrarse en la literatura científica). Esto implica que el vehículo tiene la capacidad de operar de dos modos bien distintos en cuanto a dinámica: un modo helicóptero y un modo avión (ala fija - fixed wing). Esta dicotomía se debe a la morfología de construcción, que permite la operabilidad y la manejabilidad eficiente de cada modo, gracias a la capacidad de los rotores de abatirse con cierto ángulo. Estos rotores móviles (a partir de ahora *proprotos*) sirven de propulsores en ambos modos de funcionamiento y son la base del movimiento y sustentación del vehículo. La morfología mecánica recuerda definitivamente a la del vehículo militar V22-Osprey, con dos proprotos orientables gracias a un sistema servomecánico a cada lado. Mientras otros vehículos parecidos (tipo *Tilt-Rotor* - «motor con inclinación») orientan el ala, como la nave LTV XC-143 o el histórico Canadair CL-84, la aeronave que describimos orientará solo el proprotor y su carenado, dejando el ala completamente fija respecto al cuerpo, cosa no trivial, que afectará decididamente a la aerodinámica, desacoplando en cierta medida el ángulo de los mismos de la aerodinámica general del conjunto cuerpo-alas.

Dicha morfología es capaz de aprovechar las particularidades de un helicóptero y de un avión de ala fija en un mismo vehículo. Es bien sabido que los helicópteros son mucho más versátiles en cuanto a su posicionamiento y agilidad se refiere (capacidad de aterrizaje y despegue vertical, maniobrabilidad alta...), no obstante, a la hora de realizar desplazamientos a altas velocidades (vuelo longitudinal) la eficiencia energética es muy baja y se prefiere, para los desplazamientos longitudinales de larga distancia, un avión clásico de ala fija que aprovecha la aerodinámica del fuselaje para sostenerse. El coste de la gran operabilidad de esta clase de vehículos está en el diseño de un control robusto capaz no solo de estabilizar el vehículo en ambos modo de vuelo sino de llevar a cabo una transición limpia y segura.



Figura 1.1: Vista en perspectiva del V22-Osprey

2.2. Proyecto *Emergentia*

Este trabajo se enmarca en la investigación orientada al desarrollo de una aeronave con la morfología anteriormente descrita denominada *Emergentia* (http://aero.us.es/sesteban/pages/EMERGENTIA_design.html). El proyecto *Emergentia* propone el diseño e implementación de un vehículo no tripulado convertible de estas características para un despegue y aterrizaje rápido en situaciones de emergencia. Para situaciones de riesgo o de difícil acceso humano, la capacidad y eficiencia que reside en la morfología VTOL resulta una solución muy conveniente.

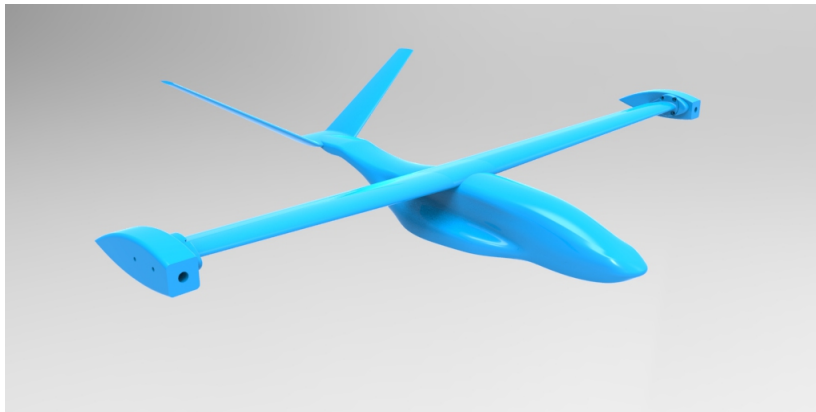


Figura 1.2: Aeronave *Emergentia*

Para el desarrollo del simulador y posterior autopiloto, se han utilizado los resultados de las investigaciones y diseños realizados por los investigadores (Roncero, S. et al.) en términos de los parámetros aerodinámicos, geométricos y propulsivos necesarios para caracterizar fielmente la aeronave en un simulador. Asimismo, se han utilizado los resultados y conclusiones del análisis de sensibilidad de este mismo prototipo realizado por alumna Marta Núñez Reyes en el marco de su trabajo de fin de grado ([1]).

El objetivo último de este proyecto es el diseño de un autopiloto para este prototipo aún en proceso de diseño y construcción. Aún cuando los controladores y estructuras son provisionales (se requerirá un diseño iterativo y verificación posterior después del análisis de resultados) se pretende sentar las líneas de diseño en términos del control con este proyecto y contrastar las hipótesis de diseño inicial mediante la observación del comportamiento dinámico simulado del prototipo y su posterior casación con las distintas estrategias aquí desarrolladas.

2.3. Hipótesis y simplificaciones

Antes de proceder al modelado de las ecuaciones, es necesario exponer las hipótesis y simplificaciones asumidas para tener una idea de lo aproximado que estaremos de la realidad:

- En este trabajo se tratará el caso bidimensional del modelo (plano de movimiento longitudinal), limitando los grados de libertad del sistema a 4: coordenada \hat{x}_B , coordenada \hat{z}_B y los ángulos del cuerpo y de los protores respectivamente (θ_B, θ_P) .
- Se supondrá, como parte de la simplificación anterior, que los protores de la aeronave giran simétricos respecto de un eje común y son idénticos físicamente. Esta hipótesis, por construcción, viene a ser bastante fiel a la realidad del vuelo de este tipo de naves. En todo caso, se considera que se puede sumar tanto las masas como las inercias de ambos protores en una sola expresión.

- Aún cuando en los helicópteros reales existe la posibilidad de que las hélices cambien su ángulo de colectivo y cíclico (orientación del plano de propulsión sobre el punto de conexión del rotor), se supondrá ambos ángulos nulos y que la estabilización de θ_B estará a cargo de los mismos proptores y de las superficies de deflexión.
- Consideraremos que las únicas variables de control que afectan al sistema serán: el ángulo de los elevadores (δ_E), el par de los rotores (causante del ángulo de los mismos, θ_P) y la velocidad de giro de las hélices que afectarán en el marco del modelo propulsivo propuesto (Ω).
- En lo que respecta a la aerodinámica, solo consideraremos el modelo de fuerzas de arrastre y empuje (*drag* y *lift*) para el cuerpo y las alas de la aeronave, no incluyendo los efectos aerodinámicos del carenado de los proptores. Se asume que en una casuística real, la incertidumbre no superaría cotas demasiado altas como para tener que realizar experimentos en tunel de viento para modelar dichos efectos en el comportamiento de la aeronave.

Capítulo II. Modelado de la dinámica de la aeronave e implementación del simulador

1. Descripción de los sistemas de referencia

Para el modelado cinemático será conveniente describir los marcos de referencia adecuados para la correcta representación de las fuerzas y pares del sistema mecánico. En este sentido, es importante tener en cuenta que una correcta definición de los marcos de referencia permiten expresar fácilmente las magnitudes vectoriales que, posteriormente, podrán trasladarse a otro marco en pos del cálculo de la dinámica gracias a sus matrices de transformación. Definiremos los siguientes S.R.:

Sistemas de referencia del cuerpo principal

- $\{\mathcal{I}\}$: Sistema de referencia inercial o sistema de referencia fijo. Es el marco absoluto sobre el que expresaremos la posición del *cdm* del vehículo. Es un sistema dextrógiro fijo con el eje $\hat{x}_{\{\mathcal{I}\}}$ positivo hacia la derecha y el eje $\hat{z}_{\{\mathcal{I}\}}$ positivo hacia abajo.
- $\{\mathcal{B}\}$: Sistema de referencia de coordenadas cuerpo. Este sistema está definido en el *cdm* del cuerpo del avión y está orientado según el eje longitudinal de la aeronave, $\hat{x}_{\{\mathcal{B}\}}$, apuntando al morro y $\hat{z}_{\{\mathcal{B}\}}$ hacia abajo. Este sistema **gira** con el cuerpo de la aeronave, de modo que el tensor de inercia medido respecto de $\{\mathcal{B}\}$ será constante y no dependerá de la orientación del cuerpo. Esto es importante debido a que simplifica tremendamente las expresiones finales de las ecuaciones dinámicas.

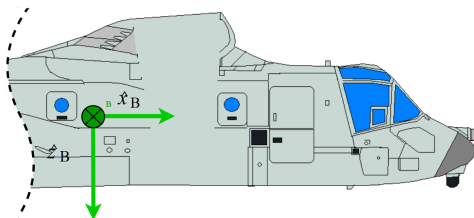


Figura 2.1: Sistemas de referencia del cuerpo

Sistemas de referencia del proprotor

- $\{\mathcal{P}\}$: Sistema de referencia ligado al cuerpo del proprotor, con origen en su *cdm*.
- $\{\mathcal{J}\}$: Sistema de referencia auxiliar centrado en el punto de rotación (conexión con el cuerpo de la aeronave en forma de articulación rotatoria), alineado con el sistema $\{\mathcal{P}\}$.
- $\{\mathcal{D}\}$: Sistema de referencia ligado al plano de propulsión del rotor (disco de rotación) centrado en el centro del mismo y orientado según su eje de rotación. En el caso que nos ocupa, como el ángulo del colectivo es 0° , sus ejes serán paralelos a los de $\{\mathcal{P}\}$.

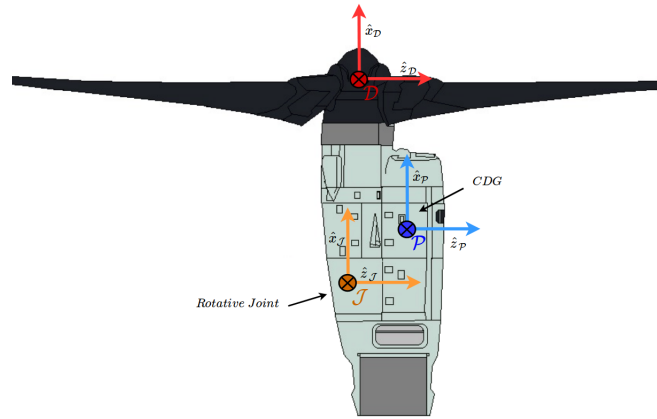


Figura 2.2: Sistemas de referencia del proprotor

2. Modelado dinámico y cinemático

En este apartado estableceremos los paradigmas para obtener el modelo dinámico de la aeronave basándonos en la formulación lagrangiana. Primero presentaremos las convenciones teóricas del método para, a continuación, reseñar las especificidades del modelado de las fuerzas aerodinámicas que entran en juego.

2.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange

Definimos la expresión lagrangiana de un sistema dinámico (lagrangiano a partir de ahora) como:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = E_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - E_p(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (2.1)$$

Siendo E_c y E_p la energía cinética y potencial respectivamente del sistema.

Conociendo el Lagrangiano, se plantea la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q} \quad (2.2)$$

Donde \mathbf{Q} es un vector real de fuerzas generalizadas compuestas por las fuerzas no conservativas que actúan sobre el sistema. Estas fuerzas cumplirán el Principio de D'Alembert, de modo que dichas fuerzas (activas, por definición) cumplirán:

$$\delta W_{neto} = \sum_i Q_{NC} \cdot \delta q_i \quad (2.3)$$

Esto quiere decir que serán candidatas todas las fuerzas que, sobre el cuerpo, ejerzan un algún tipo de trabajo neto (no conservativo) en el marco del principio de las fuerzas virtuales, donde una fuerza virtual es aquella que genera un desplazamiento infinitesimal (desplazamiento virtual) dado un sistema de referencia fijo.

Como ocurre en los sistemas mecánicos, se puede expresar el Lagrangiano como:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - E_p \quad (2.4)$$

Donde $M(q)$ es la matriz de inercia del sistema hermítica definida positiva.

Sustituyendo la ecuación 2.2 con la expresión del Lagrangiano 2.4 obtendremos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right) + \frac{\partial E_p}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q} \quad (2.5)$$

Reordenando los términos y aplicando las derivadas:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \underbrace{\left(\frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right) \right)}_{\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})} + \underbrace{\frac{\partial E_p}{\partial \mathbf{q}}}_{\mathbf{G}(\mathbf{q})} = \mathbf{Q} \quad (2.6)$$

Se explicitan de esta forma las ecuaciones dinámicas en su forma matricial (notación muy usual en la robótica). Definiremos $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ como la matriz de esfuerzos de Coriolis y fuerzas centrípetas y $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ como la matriz de gravedad del sistema (derivada de la energía potencial, que al ser de la forma: $E_p = g \cdot \sum_i h_i m_i$, siendo h_i la cota del centro de masa de cada eslabón respecto de la referencia de potencial, será el único término dependiente de la gravedad).

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{Q}(\mathbf{q}) \quad (2.7)$$

2.1.1. Fuerzas externas no conservativas (generalizadas):

Para definir el vector de fuerzas generalizadas habremos de transformar las fuerzas referenciadas en el marco inercial $\{\mathcal{I}\}$ aplicadas sobre un punto P del cuerpo del vehículo en su expresión generalizada a través del jacobiano. El jacobiano viene a darnos una transformación coherente entre el dominio de las coordenadas generalizadas del sistema y la velocidad de un punto físico del mismo. De este modo, se *mapea* la fuerza externa en las coordenadas del punto de aplicación, perteneciente al sólido rígido¹:

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{J}_P^v)' \mathbf{f}^{\mathcal{I}}, \quad \mathbf{J}_P^v \stackrel{def}{=} \frac{\partial \mathbf{v}_{\mathcal{I},P}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \quad (2.8)$$

¹Esto es aplicable tanto con las fuerzas como con los pares, pero utilizando el jacobiano de las velocidades angulares (\mathbf{W}_P).

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{J}_P^w)' \boldsymbol{\tau}^T, \quad \mathbf{J}_P^w \stackrel{def}{=} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{I},P}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \quad (2.9)$$

2.2. Modelado cinemático

Para terminar con el modelado dinámico del sistema debemos obtener el modelo cinemático del sistema multicuerpo, esto es, las relaciones que rigen las velocidades y aceleraciones de cada eslabón. En dichas expresiones, las velocidades y aceleraciones angulares de cada cuerpo se expresarán en el marco de referencia del propio cuerpo para evitar que, más adelante, los tensores de inercia que intervienen en las ecuaciones dinámicas introduzcan expresiones complicadas provenientes de la orientación del cuerpo en el sistema de referencia absoluto. Por el contrario, las velocidades y aceleraciones lineales se expresarán, normalmente, en ejes inerciales.

Para el proprotor:

$$\mathbf{p}_P = \mathbf{p}_B + \mathbf{R}_B^T \cdot \mathbf{p}_P^B \quad (2.10)$$

Derivando la expresión anterior obtendremos la velocidad del *cdm* del proprotor en ejes absolutos:

$$\mathbf{v}_P^{\mathcal{I}} = \mathbf{v}_B^{\mathcal{I}} + \mathbf{R}_B^T [\boldsymbol{\omega}_B^{(B)} \times \mathbf{p}_P^B + \boldsymbol{\omega}_P^B \times (\mathbf{p}_P^{\mathcal{J}})^{(B)}] \quad (2.11)$$

Derivamos otra vez para obtener la aceleración en ejes absolutos:

$$\mathbf{a}_P^{\mathcal{I}} = \mathbf{a}_B^{\mathcal{I}} + \mathbf{R}_B^T [\dot{\boldsymbol{\alpha}}_B^{(B)} \times \mathbf{p}_P^B + \boldsymbol{\omega}_B^{(B)} \times (\boldsymbol{\omega}_B^{(B)} + \boldsymbol{\omega}_P^{\mathcal{J}})] + \mathbf{R}_P^T [\dot{\boldsymbol{\alpha}}_P^{(P)} \times \mathbf{p}_P^{\mathcal{J}} + \boldsymbol{\omega}_P^{(\mathcal{J})} \times (\boldsymbol{\omega}_P^{(P)} + \boldsymbol{\omega}_P^{\mathcal{J}})] \quad (2.12)$$

Dado que solo hemos considerado un eslabón aparte del cuerpo principal (caso bidimensional), no hará falta más expresiones cinemática puesto que las velocidades y posiciones del cuerpo principal son libres.

2.3. Modelado dinámico

Una vez consideradas las ecuaciones de la cinemática podemos calcular el modelo dinámico según se explicaba en el apartado 2.1. Calcularemos en primer lugar la energía cinética asociada al vehículo tal como sigue:

$$E_c = E_{c,cuerpo} + E_{c,proprotor} \quad (2.13)$$

$$E_{c,cuerpo} = \frac{1}{2} m_B \|\mathbf{v}_B\|^2 + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}_B^{\mathcal{I}})^T I_B (\boldsymbol{\omega}_B^{\mathcal{I}}) \quad (2.14)$$

$$E_{c,proprotor} = \frac{1}{2} m_P \|\mathbf{v}_P\|^2 + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}_P^{\mathcal{I}})^T I_P (\boldsymbol{\omega}_P^{\mathcal{I}}) \quad (2.15)$$

La energía potencial tendrá la siguiente expresión:

$$E_p = E_{p,cuerpo} + E_{p,proprotor} \quad (2.16)$$

$$E_{p,cuerpo} = -m_B \cdot g \cdot z_B \quad (2.17)$$

$$E_{p,proprotor} = -m_P \cdot g \cdot z_P \quad (2.18)$$

Calcularemos entonces el lagrangiano y aplicaremos la formula 2.2. El resultado, expresado por las matrices \mathbf{M} , \mathbf{C} y \mathbf{G} , vendrá a proporcionar las ecuaciones de movimiento que rigen los 4 grados de libertad del sistema (posicione X y Z del cuerpo, su orientación en el espacio y la orientación del proprotor). Las ecuaciones se traducen en las expresiones de fuerzas y pares de actuación sobre cada grado de libertad (F_x, F_z, τ_B, τ_P) y tienen la siguiente expresión²:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & * & * & * \\ M_{12} & M_{22} & * & * \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} & * \\ M_{14} & M_{24} & M_{34} & M_{44} \end{bmatrix}$$

$$M_{11} = m_B + m_P$$

$$M_{12} = 0$$

$$M_{13} = -m_P(x_J^P \cdot \sin(\theta_B + \theta_P) - z_B^J \cdot \cos(\theta_B + \theta_P) + x_B^J \cdot \sin(\theta_B))$$

$$M_{14} = -m_P \cdot x_J^P \cdot \sin(\theta_B + \theta_P)$$

$$M_{22} = m_B + m_P$$

$$M_{23} = -m_P(x_J^P \cdot \cos(\theta_B + \theta_P) + x_B^J \cdot \cos(\theta_B) + z_B^J \cdot \sin(\theta_B))$$

$$M_{24} = -m_P \cdot x_J^P \cdot \cos(\theta_B + \theta_P)$$

$$M_{33} = m_P \cdot x_B^{J2} + 2m_P \cos(\theta_P) \cdot x_B^J \cdot x_J^P + m_P \cdot x_J^{P2} - 2m_P \sin(\theta_P) \cdot z_B^J \cdot x_J^P + m_P z_B^{J2} + I_B + I_P$$

$$M_{34} = I_P + m_P \cdot x_J^{P2} + m_P \cdot x_B^J \cdot x_J^P \cdot \cos(\theta_P) - m_P \cdot x_J^P \cdot z_B^J \cdot \sin(\theta_P)$$

$$M_{44} = m_P \cdot x_J^{P2} + I_P$$

²En las matrices, * indica simetría.

$$\mathbf{V} = \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} V_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_4 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = -m_P(\dot{\theta}_B^2 \cdot x_J^P \cdot \cos(\theta_B + \theta_P) + \dot{\theta}_P^2 \cdot x_J^P \cdot \cos(\theta_B + \theta_P) + \dot{\theta}_B^2 \cdot x_B^J \cdot \cos(\theta_B) + \dot{\theta}_B^2 \cdot z_B^J \cdot \sin(\theta_B) + 2\dot{\theta}_B \dot{\theta}_P x_J^P \cos(\theta_B + \theta_P))$$

$$V_2 = m_P(\dot{\theta}_B^2 \cdot x_J^P \cdot \sin(\theta_B + \theta_P) + \dot{\theta}_P^2 \cdot x_J^P \cdot \sin(\theta_B + \theta_P) - \dot{\theta}_B^2 \cdot z_B^J \cdot \cos(\theta_B) + \dot{\theta}_B^2 \cdot x_B^J \cdot \sin(\theta_B) + 2\dot{\theta}_B \dot{\theta}_P x_J^P \sin(\theta_B + \theta_P))$$

$$V_3 = -m_P \cdot \dot{\theta}_P \cdot x_J^P \cdot (2\dot{\theta}_B + \dot{\theta}_P) \cdot (z_B^J \cdot \cos(\theta_P) + x_B^J \cdot \sin(\theta_P))$$

$$V_4 = m_P \cdot \dot{\theta}_B^2 \cdot x_J^P \cdot (z_B^J \cdot \cos(\theta_P) + x_B^J \cdot \sin(\theta_P))$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \end{bmatrix}$$

$$G_1 = 0$$

$$G_2 = -g \cdot (m_B + m_P)$$

$$G_3 = g \cdot m_P \cdot (x_J^P \cdot \cos(\theta_B + \theta_P) + x_B^J \cdot \cos(\theta_B) + z_B^J \cdot \sin(\theta_B))$$

$$G_4 = g \cdot m_P \cdot x_J^P \cdot \cos(\theta_B + \theta_P)$$

Así, finalmente podremos obtener un sistema dinámico multi-cuerpo que tenga como entradas las fuerzas y pares ejercidos sobre los centros de gravedad del cuerpo principal y proprotor y como salidas la posición y orientación de cada cuerpo:



Figura 2.3: Fuerza y par propulsivo

3. Fuerzas y pares

Si bien hemos descrito y desarrollado un subsistema asociado a la dinámica de los sólidos rígidos que componen la aeronave, para concluir con el diseño del simulador de la misma tendremos que modelar los subsistemas asociados a la generación de las distintas fuerzas que actúan como entradas del bloque dinámico. Estas fuerzas (y pares) tienen distinta naturaleza, atendiendo al fenómeno que las origina. A saber:

- Fuerzas y pares propulsivos: Generadas por efecto del giro de las hélices de los rotores, en el marco del modelo propulsivo.
- Fuerzas y pares aerodinámicos: Se generarán por el movimiento relativo del vehículo respecto del aire (medio fluido), dependiendo de las superficies efectivas de control y otros parámetros físicos de del avión y del proprotor.

3.1. Modelo propulsivo - Fuerzas de propulsión

Para el caso que nos ocupa, hemos obviado la posibilidad de un ángulo de paso de las hélices con un ángulo de colectivo y cíclico nulo (Apartado 1.2). De este modo, coincidirá el sistema de referencia $\{\mathcal{D}\}$ con $\{\mathcal{P}\}$. Podemos acudir a un modelo propulsivo lineal típico de los sistemas turbopropulsados, definiendo el vector de fuerza aplicada en el *cdm* del proprotor:

$$\mathbf{f}_{\mathcal{P}}^T = \begin{bmatrix} C_T(J)\rho\Omega^2 D_r^4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Esta fuerza, expresada en el sistema de referencia $\{\mathcal{P}\}$ (el más conveniente), dependerá de las velocidad de giro de los rotores y de un parámetro adimensional C_T . Dicho parámetro es denominado coeficiente de empuje y está relacionado con la fuerza que se ejerce en el rotor debido a la diferencia de presión del extradós y el intradós del perfil alar de las aspas del propulsor generada por la velocidad angular de las mismas. Así:

$$J = \frac{V_a}{\Omega D_r} \left(\frac{m/s}{rev/s \cdot m} \right) \text{ (parámetro de empuje adimensional)} \quad (3.2)$$

Tal y como figura en [2], el coeficiente de propulsión C_T puede modelarse lo suficientemente bien mediante un polinómico de segundo grado de J :

$$C_T = C_{T_0} + C_{T_1}J + C_{T_2}J^2 \quad (3.3)$$

Todos los coeficientes de esta ecuación pueden ser inferidos mediante experimentación en un túnel de viento. El modelo plantea unas curvas dependientes tanto de la velocidad del rotor como de la velocidad aerodinámica de la aeronave. Como la propulsión se basa en la diferencia de velocidades del aire a la entrada y a la salida de las palas, con una velocidad aerodinámica de avance vista por la hélice alta, deberemos girar el rotor mucho más rápido para generar la misma fuerza de propulsión. Como una especificación de diseño relacionada con los motores utilizados, se establece que la velocidad angular máxima de las hélices está en 100 rev/s. Podemos observar en la siguiente gráfica el comportamiento estático de los propulsores:

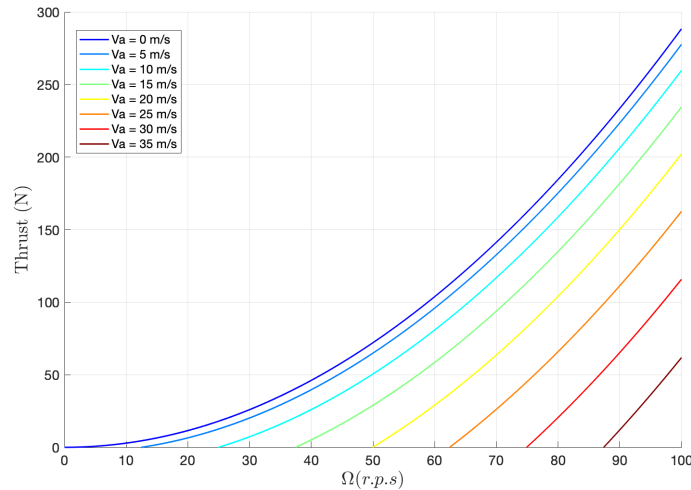


Figura 2.4: Simulación del modelo propulsivo.

Estas gráficas vienen a plantear dos condiciones importantes en el modelo: por un lado, tendremos el régimen de rotación necesario para poder generar una sustentación suficiente. Por otro lado, se evidencia lo anteriormente expuesto y que la velocidad aerodinámica debe ajustarse para no perder capacidad de propulsión.

Esta fuerza podrá expresarse en el marco de referencia $\{\mathcal{I}\}$ mediante su la proyección sobre los ejes inerciales absolutos:

$$\mathbf{f}_{\mathcal{I}}^T = \left| \mathbf{f}_{\mathcal{P}}^T \right| \begin{bmatrix} \cos(\theta_B + \theta_P) \\ -\sin(\theta_B + \theta_P) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

El valor escalar del par que genera el esfuerzo de propulsión se puede obtener mediante el producto escalar con el brazo de dicha fuerza:

$$\tau_{\mathcal{I}}^T = \left| \mathbf{f}_{\mathcal{I}}^T \right| \cdot (x_J^B \sin(\theta_P) + z_J^B \cos(\theta_P)) \quad (3.5)$$

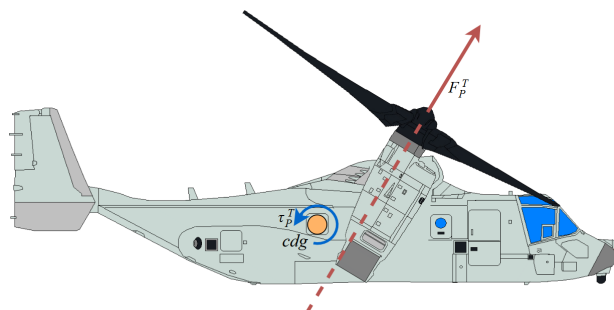


Figura 2.5: Fuerza y par propulsivo

Finalmente queda establecido el subsistema propulsivo de la aeronave que recibirá los valores del ángulo del proprotor (θ_P), el la magnitud de la velocidad del aire (V_a) y la velocidad angular de las hélices (Ω).

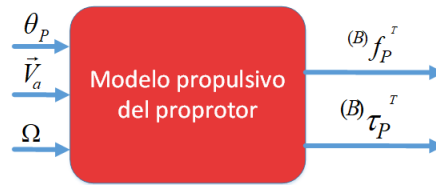


Figura 2.6: Modelo propulsivo

3.2. Modelo aerodinámico - Fuerzas y momentos aerodinámicos

Hablamos de fuerzas y pares aerodinámicos cuando tenemos un sólido moviéndose con cierta velocidad en el seno de un fluido. Es el movimiento relativo respecto a ese fluido lo que genera una distribución de presiones en las paredes exteriores de todo cuerpo que se enfrenta al movimiento en un medio de dichas características. En nuestro caso bidimensional, son bien conocidas las fuerzas que se generan en el fuselaje de la aeronave cuando existe un desplazamiento por el medio: fuerza de sustentación (*lift*), fuerza de arrastre (*drag*) y momento de inclinación (*pitch momentum*). [3]

Llegados a este punto, sería conveniente hablar del sistema de referencia utilizado en aeronáutica para expresar dichas fuerzas. Según se indica en [2], las fuerzas de empuje y arrastre están alineadas con el sistema de referencia de estabilidad. Este sistema de referencia viene a tener la dirección X según la proyección del vector de velocidad relativa al viento (\vec{V}_a) sobre el plano de simetría de la aeronave. Estos sistema de referencia vienen a coincidir totalmente cuando el ángulo de resbalamiento de la velocidad aerodinámica de la nave (β) es nulo. Así, definiremos el ángulo de ataque (α), como el ángulo que forma el vector de velocidad relativa al viento (\vec{V}_a) y el eje X del sistema de coordenadas cuerpo. Este ángulo es fundamental en la aeronáutica, puesto que viene a influir directamente en la resistencia aerodinámica que tiene la aeronave y define mayoritariamente su sustentación.

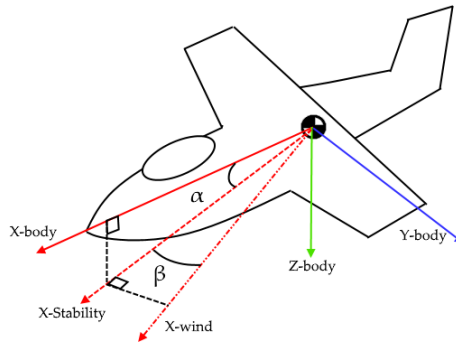


Figura 2.7: Ejes viento y ejes de estabilidad

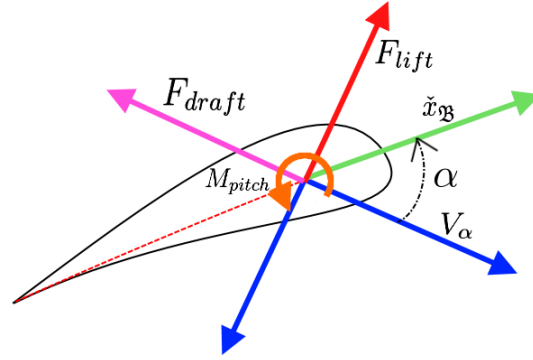


Figura 2.8: Fuerzas y pares aerodinámicos

Comúnmente se expresan las fuerzas anteriormente citadas como:

$$\begin{cases} F_{lift} = \frac{1}{2}\rho V_a^2 S C_l \\ F_{drag} = \frac{1}{2}\rho V_a^2 S C_D \\ M_{pitch} = \frac{1}{2}\rho V_a^2 S c C_m \end{cases} \quad (3.6)$$

Estas fuerzas están expresadas en ejes viento, anteriormente tratados. Para computarlas en nuestro modelo dinámico podemos pasarlas a ejes cuerpo mediante la transformación siguiente:

$$\mathbf{R}_{V_a}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_a) & -\sin(\alpha_a) \\ \sin(\alpha_a) & \cos(\alpha_a) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$(\mathbf{f}_{\mathcal{B}}^a)^{(\mathcal{B})} = \mathbf{R}_{V_a}^{\mathcal{B}} \cdot (\mathbf{f}_{\mathcal{B}}^a)^{(V_a)} \quad (3.8)$$

En las ecuaciones (3.6) aparecen los términos de velocidad aerodinámica (\vec{V}_a), densidad del aire ρ ($\frac{Kg}{m^3}$), superficie de contorno del ala (S), la cuerda media del perfil alar (c) y los coeficientes adimensionales aerodinámicos (C_l, C_D, C_m). Estos coeficientes están muy relacionados con el perfil del ala, el ángulo de ataque, el número de Reynolds y de las superficies de control [2, 3, 1].

Los coeficientes aerodinámicos se comportan de forma no lineal y dependen de muchos parámetros. Una estrategia común para describir su comportamiento trabaja con la hipótesis de que el ángulo de ataque es pequeño y que tenemos condiciones de vuelo estables. Comúnmente vienen a expresarse los coeficientes por su aproximación de Taylor de primer orden en función de las variables más significativas que influyen en su valor: el ángulo de ataque y la inclinación de las superficies de control. No obstante, como explicaremos más adelante, nosotros haremos uso de una expresión mucho más precisa, desde el punto de vista de una descripción más global, de los coeficientes de sustentación.

Antes de exponer las expresiones finales para los coeficientes, habremos de indicar cómo son las superficies de control. Generalmente, toda aeronave de ala fija suele tener 3 superficies controlables: elevadores (*elevators*) para controlar el ángulo de *pitch*, timón de cola (*rudder*) para el control del *yaw* y alerones (*ailerons*) para el control del *roll*. Un ángulo de ataque grande en dichas superficies implica una resistencia al avance mayor y una fuerza de sustentación aerodinámica alta (aún cuando no son la única contribución a dichas fuerzas). En el

caso bidimensional que nos ocupa, la única superficie efectiva son los elevadores, que ejercerán una fuerza (luego un par) para poder controlar el ángulo de *pitch* de la aeronave. Siguiendo la nomenclatura frecuente en la literatura, la señal de control de los elevadores vendrá dada por el ángulo de la superficie respecto de la horizontal del cuerpo (δ_e).

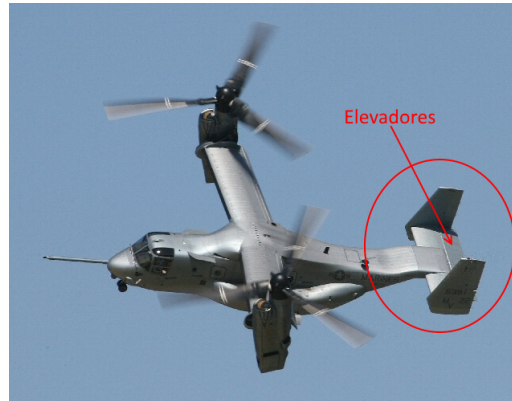


Figura 2.9: Elevadores del V22

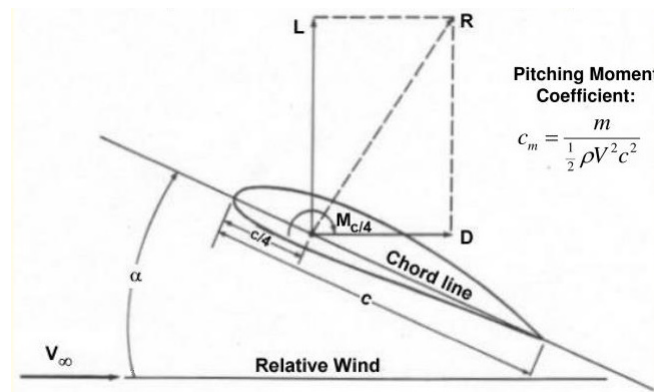


Figura 2.10: Magnitudes físicas alares

Generalmente, a falta de mejores datos, se suele utilizar la expresión lineal proveniente del desarrollo en serie de Taylor para C_l . Esta expresión, que no es más que una forma muy aproximada del fenómeno de sustentación, tiene validez hasta cierto valor del ángulo de ataque, a partir del cual comienza a caer, efecto que no queda representado por la aproximación lineal. Para este trabajo académico contamos con la aportación de [1], que analiza y estima de manera muy precisa la curva de C_l como un polinomio de orden 41 para la misma aeronave que trataremos (*Emergentia*). Podemos entonces contar con esta contribución para el modelo aerodinámico. El coeficiente C_l quedaría de la siguiente forma:

$$C_l(\alpha, \delta_E) = C_{L\alpha}(\alpha) + C_{L\delta_E} \cdot \delta_E \quad (3.9)$$

La curva $C_{L\alpha}(\alpha)$ tendrá la siguiente forma, atendiendo a su forma:

$$\begin{aligned} C_{l, \text{lineal}} &= C_{L,0} + C_{L,\alpha} \cdot \alpha \\ C_{l, \text{cúbica}} &= C_{L,0} + C_{L,1} \cdot \alpha + C_{L,2} \cdot \alpha^2 + C_{L,3} \cdot \alpha^3 \\ C_{l, \text{polinómica}} &= C_{L,0} + C_{L,1} \cdot \alpha + \dots + C_{L,41} \cdot \alpha^{43} \end{aligned} \quad (3.10)$$

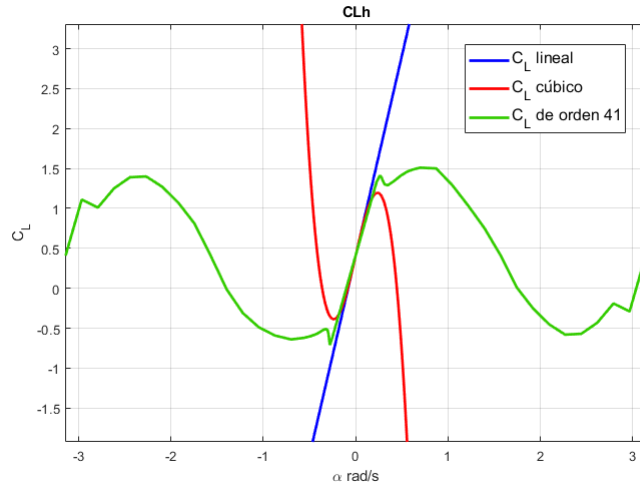


Figura 2.11: Curvas del coeficiente de sustentación hayadas por [1].

Si nos fijamos en el comportamiento de la sustentación con el ángulo de ataque, existe un punto en el que la sustentación comienza a caer. Será especialmente importante el tener en cuenta en el simulador especificar este límite, puesto que no es conveniente sobrepasarlo y entrar en pérdida de sustentación (*stall*). Del mismo modo, podremos expresar el coeficiente aerodinámico para el *drag* como función del mismo C_l :

$$C_D = C_{D0} + C_{D1} \cdot C_l(\alpha, \delta_E) + C_{D2} \cdot C_l(\alpha, \delta_E)^2 \tag{3.11}$$

La expresión para el coeficiente del momento de *pitch* viene a seguir una expresión semejante. Esta vez, se ha modelado mediante un desarrollo lineal de los términos estimados también en túnel de viento:

$$C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta_E}\delta_E + C_{m\dot{\theta}_B}\dot{\theta}_B \tag{3.12}$$

Finalmente, hemos modelado las fuerzas y momentos aerodinámicos asociados a la aeronave y podemos constituir el subsistema aerodinámico que se integrará debidamente en el simulador:

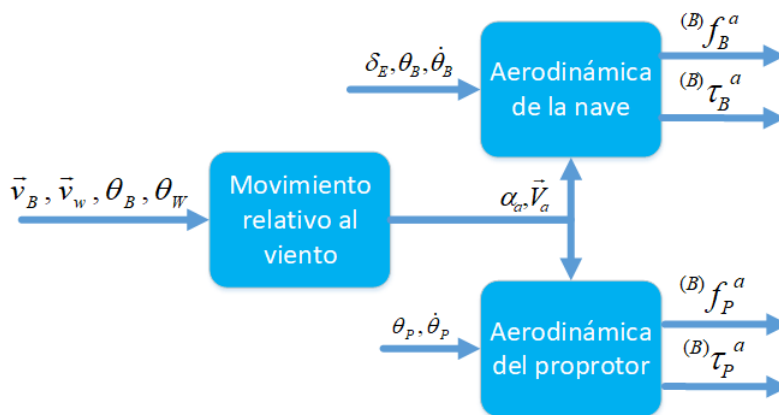


Figura 2.12: Subsistema de fuerzas y momentos aerodinámicos

4. Modelo completo

Para concluir con esta parte, reunimos todos los subsistemas (dinámica del cuerpo, modelo propulsivo y modelo aerodinámico) en un solo sistema integral:

La inclusión de las fuerzas generalizadas dentro del modelo dinámico derivado de las ecuación de Euler-Lagrange, tal y como habíamos dicho en el apartado 2.1, ha de hacerse mediante el mapeo de las fuerzas con el jacobiano (de velocidades lineales en las fuerzas y de angulares en los pares). Así, una vez calculadas las fuerzas anteriormente descritas, habrá que aplicar las ecuaciones (2.8) y (2.9)

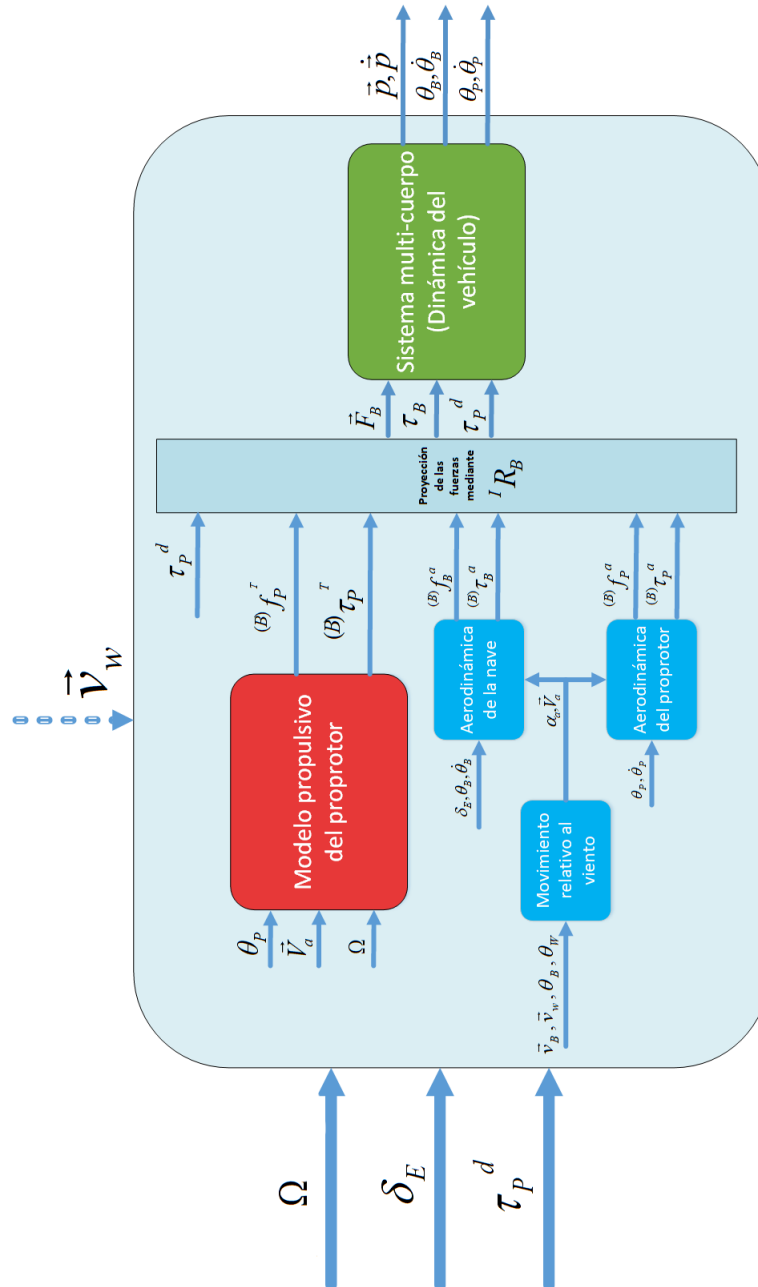


Figura 2.13: Caja del modelo completo

Capítulo III. Trimado

1. Principios matemáticos

Una vez obtenido un modelo completo del sistema (dentro de las hipótesis y simplificaciones anteriormente enumeradas), será necesario, con el objetivo de diseñar los controladores para los distintos modos de vuelo, obtener un modelo linealizado de la aeronave. La linealización del sistema se hace en torno a un punto de operación (también llamado punto de equilibrio). La definición formal de *punto de equilibrio* la da [4]:

Corolario. «*Considérese el siguiente sistema de ecuaciones vectoriales dependientes del tiempo:*

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) := \begin{cases} f_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ f_2(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \vdots \end{cases} \quad (1.1)$$

donde $\mathbf{x}(t)$ es una función vectorial del tiempo que toma valores en el espacio de n -dimensiones y representa el estado completo del sistema, $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}(t)$ es una función escalar del tiempo que representa las entradas del sistema, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$, y las funciones de F presentan continuidad C_1 , definidas de tal forma que $f_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Definiremos los puntos de equilibrio como todos los valores de $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{u}(t)$ con los que se cumple que $\dot{\mathbf{x}}(t) = 0$.»

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_{eq}, \mathbf{u}_{eq}) = 0 \quad (1.2)$$

En el caso de la aeronave, el vector de estados está compuesto por las variables de salida del sistema previamente modelado, que dará una descripción completa del mismo (dado unos valores de $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{u}(t)$, el sistema queda caracterizado unívocamente):

$$\mathbf{x}(t) = [x_B, z_B, \theta_B, \theta_P, \dot{x}_B, \dot{z}_B, \dot{\theta}_B, \dot{\theta}_P]^T \quad (1.3)$$

$$\mathbf{u}(t) = [\delta_e, \Omega_{Thrust}] \quad (1.4)$$

Las ecuaciones que rigen el movimiento de la aeronave (una por cada grado de libertad) se expresarán así:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) := \begin{cases} F_x^{Res} = F_{x, \{B\}}^{\{I\}} - F_{aer, x}^{\{I\}} - F_{x, Thrust}^{\{I\}} - F_{x, gen}^{\{I\}} \\ F_z^{Res} = F_{z, \{B\}}^{\{I\}} - F_{aer, z}^{\{I\}} - F_{z, Thrust}^{\{I\}} - F_{z, gen}^{\{I\}} \\ \tau_y^{Res} = \tau_{y, \{B\}}^{\{I\}} - \tau_{aer, y}^{\{I\}} - \tau_{y, Thrust}^{\{I\}} - \tau_{gen}^{\{I\}} \end{cases} \quad (1.5)$$

El problema se reduce entonces al siguiente:

$$\text{Minimizar } \|F(\mathbf{x}_{eq}, \mathbf{u}_{eq})\|$$

$$\text{Donde } \mathbf{x}_{eq} = [x_B, z_B, \theta_B, \theta_P, \dot{x}_B, \dot{z}_B, \dot{\theta}_B, \dot{\theta}_P]_{eq}^T$$

$$\text{y } \mathbf{u}_{eq} = [\delta_{e,eq}, \Omega_{Thrust,eq}].$$

Por lo general (y en este caso será así), las ecuaciones son no lineales, acopladas e implícitas, por lo que solo se puede aislar una solución mediante técnicas numéricas. El enfoque que aquí se ha aplicado se basa en la utilización de las herramientas de optimización que brinda la plataforma MatlabTM disponibles en los paquetes *Optimization ToolboxTM* y *Control System ToolboxTM*. El algoritmo de búsqueda de los puntos mínimos está basado en los métodos denominados *Sequential Quadratic Programming*, «que constituyen el estado del arte de la resolución de ecuaciones diferenciales numéricas actualmente» ([5])

El método consiste en la aproximación numérica del Lagrangiano del sistema para el posterior cálculo de la matriz hessiana y la resolución de un subproblema QP (*Quadratic Problem*). La explicación desarrollada de este método escapa del alcance de este trabajo académico pero tiene cierta analogía con el método de Newton-Euler con restricciones de las variables (aportadas por el usuario en base a un conocimiento previo del sistema) para el cálculo de dicha matriz hessiana. De esa matriz se pueden obtener los máximos y mínimos locales de una función no lineal multivariable como se explica en [6].

2. Resolución del trimado en MatlabTM

Para que MatlabTM pueda calcular las condiciones de trimado mediante la función *trim* o *findop* (para nuestro caso no existen diferencias de uso), hemos de preparar el entorno. Aprovechando que hemos desarrollado un simulador en SimulinkTM crearemos un espacio de entradas y salidas definidas para que el sistema entienda cuales son los estados a determinar y qué entradas tiene disponibles. Como decíamos en el apartado anterior, *Control System ToolboxTM* proporciona la forma de determinar qué señales son de entrada y cuáles son de salida tal y como se indica en la figura 3.1.

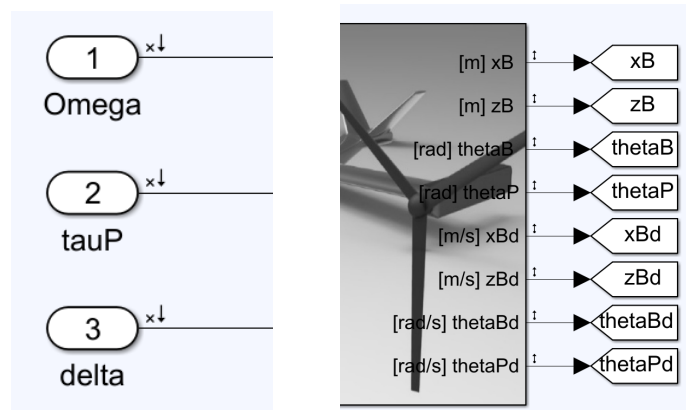


Figura 3.1: Definición de las entradas y salidas en SimulinkTM

Una vez establecidas las entradas y salidas del sistema podemos escribir un programa que permita calcular numerosos puntos de equilibrio dadas diferentes condiciones de contorno variantes. El problema del equilibrio tiene múltiples soluciones dependiendo de la configuración de vuelo de la aeronave. Para facilitar la convergencia del problema, reduciremos las ecuaciones mediante una parametrización del trimado, que consiste en calcular las soluciones suponiendo los valores de una o varias variables. Matlab requerirá una estructura de punto de operación (*Operating Point*) donde se especificará para cada variable (ya sea entrada o salida) si se desea buscar un valor estable, el intervalo máximo de valores que han de buscarse, un punto inicial de búsqueda y si el valor es conocido previamente. Una vez especificada esa tabla de valores en la estructura, el programa se dispondrá a hacer los cálculos pertinentes. En este punto, habremos de considerar qué condiciones de contorno hemos de especificar para las condiciones de vuelo que buscamos. Además, es importante entender que con una mala especificación de dichas condiciones el programa podría encontrar una solución absurda o ni siquiera converger. También se ha de tener muy en cuenta si las condiciones que especificamos son demasiado restrictivas como para que exista un punto de operación que cumpla todas las condiciones y, en ese caso, relajar las restricciones y volver a calcular el punto de operación.

2.1. Trimado en vuelo longitudinal (Ala Fija)

En condiciones de vuelo longitudinal la aeronave se comporta de la misma forma que un avión de ala fija. Así, podemos especificar que el ángulo de los protores debe estar fijo a 0° .³ Por otro lado, bajo estas condiciones, especificaremos que la velocidad en Z es 0, puesto que lo que buscamos es un vuelo estable a lo largo del eje X (en el sistema de referencia inercial). Por otro lado debemos especificar que los valores de posición han de ser, para X y Z, no estables y 0 respectivamente (no hacerlo así indicaría al problema que buscamos un valor concreto de X, cosa absurda cuando el avión vuela horizontalmente). Mediante este tipo de hipótesis no demasiado restrictivas especificaremos las condiciones de contorno del problema de optimización. Las condiciones iniciales del cálculo, si bien no son determinantes, facilitan la velocidad de convergencia substancialmente. En este estudio se utilizarán las condiciones de solución calculadas en [1] para la aeronave *Emergentia* (la nave que estamos trimando), que aunque los sistemas no son exactamente iguales físicamente, sí suponen un buen punto de partida para el cálculo numérico iterativo.

Una forma también de facilitar la convergencia es realizar un barrido de cálculo especificando alguna de los estados o entradas. Parametrizamos de esta forma el problema obligando a la convergencia con unas condiciones precalculadas reduciendo el número de estados a despejar. Nosotros hemos querido barrer el sistema con la entrada de *velocidad de los motores de propulsión* y con el *ángulo del cuerpo de la aeronave* ya que, de esta forma, podremos obtener el valor de equilibrio dada una dupla $[\theta_B, \Omega_{Thrust}]$ que nos servirá, con la vista puesta en el control, para encontrar qué ángulo y qué rps del motor debemos aplicar para alcanzar cierto equilibrio dinámico y para caracterizar la propia estabilidad del sistema dado un ángulo de vuelo.

La tabla del problema de optimización quedaría así:

³Esta condición estará garantizada por un lazo de control que se verá más adelante.

Variable	Estado estable (?)	Valor conocido (?)	Valor mínimo	Valor máximo
<i>Estados del sistema</i>				
$x_{\mathcal{B}}$	NO	NO	-	-
$z_{\mathcal{B}}$	NO	NO	-	-
$\theta_{\mathcal{B}}$	SÍ	θ_{PARAM}	$-\pi/2$	$\pi/2$
$\theta_{\mathcal{P}}$	SÍ	0 (rads)	-	-
$\dot{x}_{\mathcal{B}}$	SÍ	NO	0	$+\infty$
$\dot{z}_{\mathcal{B}}$	SÍ	NO	-	-
$\dot{\theta}_{\mathcal{B}}$	SÍ	0 (rads/s)	-	-
$\dot{\theta}_{\mathcal{P}}$	SÍ	0 (rads/s)	-	-
<i>Entradas</i>				
Ω_{Thrust}	SÍ	Ω_{PARAM}	0	100
δ_e	SÍ	NO	-60°	60°

Cuadro 1: Condiciones de contorno e iniciales para el trimado en vuelo horizontal.

El rango de $[\theta_{\mathcal{B}}, \Omega_{Thrust}]$ se fija en el entorno de $[-5^\circ, 30^\circ]$ y $[30$ y 100 rps] respectivamente. El valor del ángulo se toma atendiendo al valor límite donde la sustentación pasa a ser casi nula. Lo mismo ocurre con la velocidad del propulsor, donde se han tomado los valores extremos que se utilizaron en [1].

2.1.1. Código de cálculo de trimado

```

1  %% Búsqueda de los puntos de operación de vuelo - Modelo:
   PlanarTiltRotor_for_TRIMMING.
2
3  %% Modelo de Simulink preparado:
4  model = 'PlanarTiltRotor_for_TRIMMIN';
5
6  aux = load('op.mat', 'op')
7  op = aux.op;
8
9  % Creamos el objeto de especificaciones del punto de operación:
10 opspec = operspec(model);
11
12 % Establecemos las condiciones de contorno y de rangos de optimización
   de los estados del sistema:
13 % Condiciones iniciales:
14
15 Omega_ini = 30;
16 increment = 2;
17 Omega_fin = 100;
18
19 Omega_trimmed_matrix = [];
20 delta_trimmed_matrix = [];
21 tauP_trimmed_matrix = [];
22 Va_trimmed_matrix = [];
23 thetaB_trimmed_matrix = [];
24 zBd_trimmed_matrix = [];
25 xBd_trimmed_matrix = [];
26
27 thetaB_ini = -0.0873;
28 increment2 = 0.0305;
29 thetaB_fin = 0.5236;
30
31 for Omega_of_equilibrium = Omega_ini:increment:Omega_fin
32
33     % En ausencia de viento thetaB = alpha %
34     Omega_trimmed_vector = [];
35     delta_trimmed_vector = [];
36     tauP_trimmed_vector = [];
37     Va_trimmed_vector = [];
38     thetaB_trimmed_vector = [];
39     zBd_trimmed_vector = [];
40     xBd_trimmed_vector = [];
41
42     for thetaB_equilibrium = thetaB_ini:increment2:thetaB_fin
43         % Esto es importante - The defaults for all states are:
44         % - Known = false,
45         % - SteadyState = true,
46         % - Min = -Inf, Max = Inf, dxMin = -Inf, and dxMax = Inf.
47
48         % Se entiende:
49         % State(1) -> xB,zB,thetaB,thetaP ...
50         % State(2) -> xBd,zBd,thetaBd,thetaPd ...
51
52         % Especificaciones para State(1)op
53         opspec.States(1).x = [0;0;thetaB_equilibrium;0]; % Estado inicial
   de búsqueda %

```

```

54 opspec.States(1).SteadyState = [false;false>true>true]; %¿Son
    estables los estados que buscamos?
55 opspec.States(1).Known = [false,false,true,true];
56
57 % Especificaciones para State(2)
58 opspec.States(2).x = [36;0;0;0]; % Estado inicial de búsqueda %
59 opspec.States(2).Known = [false,false,true,true];
60
61 % Lo mismo para las entradas del sistema (Omega, tauP y delta_e)
62 % The defaults for all inputs are Known = false, Min = -Inf, and
    Max = Inf.
63
64 % Input (1) - Omega
65 % - Condiciones iniciales y de contorno de la entrada Omega
66 opspec.Inputs(1).Known = true;
67 opspec.Inputs(1).u = Omega_of_equilibrium;
68
69 % Input (2) - tauP
70 % - Condiciones iniciales y de contorno de la entrada tauP
71 opspec.Inputs(2).u = 0;
72
73 % Input (3) - delta
74 %- Condiciones iniciales y de contorno de la entrada delta
75 opspec.Inputs(3).u = 0;
76 opspec.Inputs(3).Max = 60*pi/180;
77 opspec.Inputs(3).Min = -60*pi/180;
78
79 % Creamos el objeto de opciones
80 opt = findopOptions('DisplayReport','iter');
81
82 % Realizamos el trimado
83 [op,opreport] = findop(model,opspec,opt);
84 save('op','op');
85
86 % Guardamos las variables de equilibrio
87 Omega_trimmed_vector = [Omega_trimmed_vector; op.Inputs(1).u];
88 delta_trimmed_vector = [delta_trimmed_vector; op.Inputs(3).u];
89 tauP_trimmed_vector = [tauP_trimmed_vector; op.Inputs(2).u];
90 Va_trimmed_vector = [Va_trimmed_vector; norm([op.State(2).x(1)
    op.State(2).x(2)])];
91 zBd_trimmed_vector = [zBd_trimmed_vector; op.State(2).x(2)];
92 xBd_trimmed_vector = [xBd_trimmed_vector; op.State(2).x(1)];
93 thetaB_trimmed_vector = [thetaB_trimmed_vector; op.State(1).x(3)];
94
95 end
96
97 Omega_trimmed_matrix = [Omega_trimmed_matrix Omega_trimmed_vector];
98 delta_trimmed_matrix = [delta_trimmed_matrix delta_trimmed_vector];
99 tauP_trimmed_matrix = [tauP_trimmed_matrix tauP_trimmed_vector];
100 Va_trimmed_matrix = [Va_trimmed_matrix Va_trimmed_vector];
101 zBd_trimmed_matrix = [zBd_trimmed_matrix zBd_trimmed_vector];
102 xBd_trimmed_matrix = [xBd_trimmed_matrix xBd_trimmed_vector];
103 thetaB_trimmed_matrix = [thetaB_trimmed_matrix thetaB_trimmed_vector];
104
105 end
106
107 graficas_equilibrio;

```

Está claro que para ciertos valores de los parámetros el algoritmo no presentará convergencia. Esto tiene sentido porque no en todas las condiciones expuestas el avión puede alcanzar el equilibrio. Al final, los resultados se traducirán en unas superficies de equilibrio con ejes $[\theta_B, \Omega_{Thrust}]$:

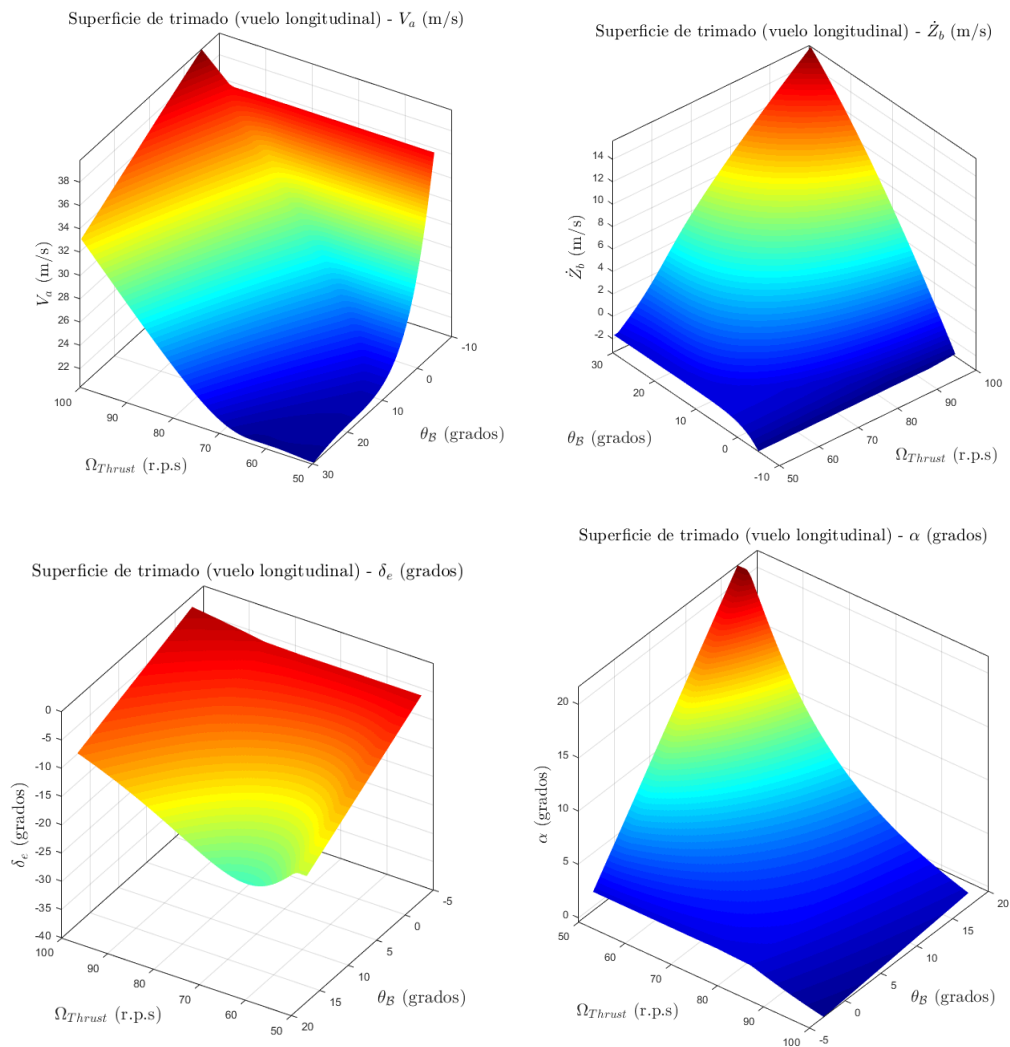
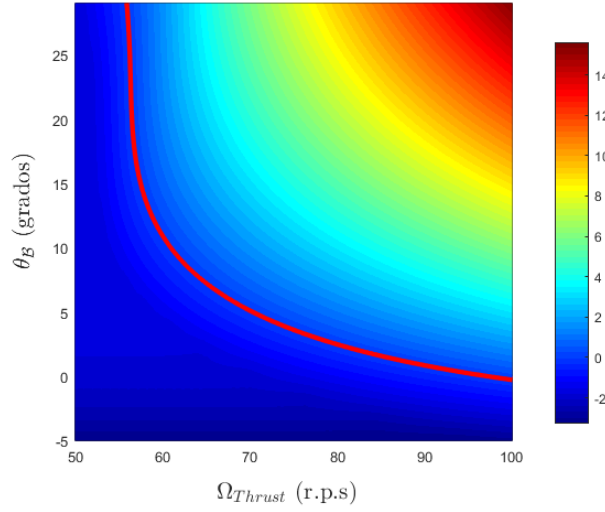


Figura 3.2: Gráficas de equilibrio - Vuelo longitudinal

Vuelo longitudinal horizontal

De estas gráficas pueden obtenerse las condiciones de vuelo horizontal simplemente buscando los puntos donde la velocidad en el eje Z absoluto (\dot{z}_B) se anula. Esto se traduce en una trayectoria con los valores correspondientes para el caso de vuelo completamente horizontal:

Superficie de trimado (vuelo longitudinal) - \dot{z}_b (m/s)Figura 3.3: Curva de nivel para $\dot{z}_B(\theta_B, \Omega_{Thrust}) = 0$

2.2. Trimado en Hovering

En el modo *hovering* tendremos la aeronave con los proprotos situados perpendiculares al suelo (a 90°). En estas condiciones, buscaremos el punto de operación especificando que queremos una posición fija en el espacio. Esta restricción es importante dentro del algoritmo, puesto que una condición de equilibrio asume $\sum F = 0$, $\sum M = 0$ y esta condición bien podría ser cierta tanta para una velocidad constante de ascenso/descenso o para una velocidad nula (hovering). La dinámica del sistema en hovering se comportará grosso modo como un doble integrador con cierta ganancia, puesto que las fuerzas que interactúan en el hovering serán, sin pérdida de generalidad, la sustentación debida a los propulsores y el peso de la aeronave. Esto es, previsiblemente:

$$F_{grav} = F_{propulsión} \xrightarrow{\mathcal{L}} z_B(s)s^2 = K_{Thrust}\Omega_{Thrust}(s) \quad (2.1)$$

$$\frac{z_B(s)}{\Omega_{Thrust}(s)} = \frac{K_{Thrust}}{s^2} \quad (2.2)$$

La característica estática de dicho sistema simplificado se corresponderá con la figura 3.4.

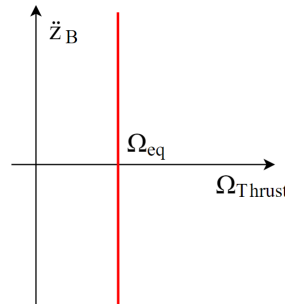


Figura 3.4: Característica estática de un doble integrador.

Ejecutaremos el algoritmo del mismo modo que antes con la siguiente tabla de restricciones:

Variable	Estado estable (?)	Valor conocido (?)	Valor mínimo	Valor máximo
<i>Estados del sistema</i>				
x_B	SÍ	0	-	-
z_B	SÍ	0	-	-
θ_B	SÍ	NO	$-\pi/2$	$\pi/2$
θ_P	SÍ	NO	$-\pi/2$	$\pi/2$
\dot{x}_B	SÍ	0	-	-
\dot{z}_B	SÍ	0	-	-
$\dot{\theta}_B$	SÍ	0 (rads/s)	-	-
$\dot{\theta}_P$	SÍ	0 (rads/s)	-	-
<i>Entradas</i>				
Ω_{Thrust}	SÍ	NO	0	100
δ_e^4	-	-	-	-

Cuadro 2: Condiciones de contorno e iniciales para el trimado en hovering.

2.2.1. Código de cálculo de trimado

```

1 %% Búsqueda de los puntos de operación de vuelo - Modelo:
  PlanarTiltRotor_for_TRIMMING.
2 % MODO DE EQUILIBRIO: HOOVERING
3
4 %% Modelo de Simulink preparado:
5 model = 'PlanarTiltRotor_for_TRIMMIN';
6
7 Omega_trimmed_value = 0;
8 tauP_trimmed_value = 0;
9 delta_trimmed_value = 0;
10
11 aux = load('op.mat', 'op')
12 op = aux.op;
13
14 %% Creamos el objeto de especificaciones del punto de operación:
15 opspect = operspect(model);
16
17 %% Establecemos las condiciones de contorno y de rangos de optimización
  de los estados del sistema:
18 % Condiciones iniciales:
19 Omega_trimmed_vector = [];
20 delta_trimmed_vector = [];
21 tauP_trimmed_vector = [];
22 Va_trimmed_vector = [];
23 thetaB_trimmed_vector = [];
24 thetaP_trimmed_vector = [];

```

⁴No se aplica puesto que las fuerzas aerodinámicas en hovering son poco significativas.

```

25 zBd_trimmed_vector = [];
26 xBd_trimmed_vector = [];
27 Omega_ini = 50;
28 increment = 1;
29 Omega_fin = 100;
30
31 for Omega_of_equilibrium = Omega_ini:increment:Omega_fin
32 % Esto es importante - The defaults for all states are:
33 %   - Known = false,
34 %   - SteadyState = true,
35 %   - Min = -Inf, Max = Inf, dxMin = -Inf, and dxMax = Inf.
36
37 % Se entiende:
38 % State(1) -> xB,zB,thetaB,thetaP ...
39 % State(2) -> xBd,zBd,thetaBd,thetaPd ...
40
41 % Especificaciones para State(1)
42 opspec.States(1).x = [0;0;0;pi/2]; % Estado inicial de búsqueda %
43 opspec.States(1).SteadyState = [true>true>true>true]; %¿Son estables
    los estados que buscamos?
44 opspec.States(1).Known = [true>true>false>false];
45
46 % Especificaciones para State(2)
47 opspec.States(2).x = [0;0;0;0]; % Estado inicial de búsqueda %
48 opspec.States(2).SteadyState = [true,true,true,true];
49 opspec.States(2).Known = [false>false>false>false];
50
51 % Lo mismo para las entradas del sistema (Omega, tauP y delta_e)
52 % The defaults for all inputs are Known = false, Min = -Inf, and Max =
    Inf.
53
54 % Input (1) - Omega
55 % - Condiciones iniciales y de contorno de la entrada Omega
56 opspec.Inputs(1).Known = false;
57 opspec.Inputs(1).u = Omega_of_equilibrium;
58 opspec.Inputs(1).Min = 50;
59 opspec.Inputs(1).Max = 100;
60
61 % Input (2) - tauP
62 % - Condiciones iniciales y de contorno de la entrada tauP
63 opspec.Inputs(2).u = 0;
64
65 % Input (3) - delta
66 % - Condiciones iniciales y de contorno de la entrada delta
67 opspec.Inputs(3).u = 0;
68
69
70 % Creamos el objeto de opciones
71 opt = findopOptions('DisplayReport','iter');
72
73
74 % Realizamos el trimado
75 [op,opreport] = findop(model,opspec,opt);
76 save('op','op');
77
78 % Guardamos las variables de equilibrio
79 Omega_trimmed_vector = [Omega_trimmed_vector; op.Inputs(1).u];
80 delta_trimmed_vector = [delta_trimmed_vector; op.Inputs(3).u];

```



```

81 tauP_trimmed_vector = [tauP_trimmed_vector; op.Inputs(2).u];
82 Va_trimmed_vector = [Va_trimmed_vector; norm([op.State(2).x(1)
      op.State(2).x(2)])];
83 zBd_trimmed_vector = [zBd_trimmed_vector; op.State(2).x(2)];
84 xBd_trimmed_vector = [xBd_trimmed_vector; op.State(2).x(1)];
85 thetaB_trimmed_vector = [thetaB_trimmed_vector; op.State(1).x(3)];
86 thetaP_trimmed_vector = [thetaP_trimmed_vector; op.State(1).x(4)];
87
88 end

```

El resultado de dicho cálculo arroja unos resultados esperables. Para mantener el equilibrio en hovering necesitaremos un empuje determinado tal que se compense el peso del vehículo. El trimado devuelve un punto único de equilibrio en esas condiciones, cosa que no es de extrañar puesto que para una velocidad aerodinámica 0 (situación de Hover), solo existe una combinación de condiciones que mantienen la aeronave en equilibrio:

$\Omega_{Thrust,OP}$	73.13 (rps)
$\theta_{B,OP}$	5 ($^{\circ}$)
$\theta_{P,OP}$	85 ($^{\circ}$)
$\delta_{e,OP}$	Indiferente ⁵

Cuadro 3: Punto de operación en hovering.

2.3. Trimado en puntos de θ_P intermedios

Es previsible que, en el momento de la transición entre los dos modos de vuelo y durante ciertos momentos, la aeronave pudiera estar en un vuelo donde el ángulo θ_P pudiera no ser 0° ni 85° . En estos casos, podemos aplicar el algoritmo anterior para un numerosos casos concreto y obtener las condiciones necesarias para llevar a cabo la simulación.

La técnica es perfectamente reproducible, aún cuando las condiciones de contornos quedan más abiertas. Si quisiéramos obtener un punto de operación dado un θ_P determinado, deberíamos rebajar las especificaciones y, tal y como se hizo en [1], barrer un intervalo de θ_P y V_a y verificar si existen o no puntos de equilibrio. Es previsible que en muchos caso pudieran no encontrarse un estado estable para cualquiera de los valores del proprotor, lo que indicaría que estamos en zona de pérdida y no podremos volar en esas condiciones.

⁵Más adelante veremos que la superficie de deflexión no interviene en el equilibrio en Hovering.

Capítulo IV. Linealización y modelo simplificado

En el diseño de un sistema de control automático debe existir siempre un compromiso entre el parecido del modelo con la realidad y la complejidad del mismo. Es muy importante poseer unas ecuaciones que hagan justicia al sistema real para reducir las posibles incertidumbres a la hora de trasladar el control a la implementación real, y sin embargo, unas expresiones muy complejas dificultan sobremanera el análisis y el diseño del control. La solución intermedia está en el planteamiento de unas expresiones derivadas del modelo completo que representen las dinámicas dominantes que den un punto de partida para el diseño.

Hemos visto que el simulador desarrollado posee una dinámica complicada y muy rica. Se ha decidido representar un modelo simplificado de las ecuaciones para dos casos diferenciados: el primero de ellos, para velocidades bajas, donde los efectos aerodinámicos no son especialmente importantes. El otro caso está pensado para representar la dinámica de la aeronave en desplazamiento horizontal, donde las fuerzas aerodinámicas sí que tienen que ser consideradas. Estas ecuaciones sentarán la base para una posterior linealización y diseño del control.

1. Modelo dinámico para baja velocidad aerodinámica

Se había dicho anteriormente que las fuerzas aerodinámicas se basaban en la velocidad aerodinámica de la aeronave. Esto es $F_{aerodinámicas} \propto V_a^2$. De este modo, cuando la velocidad aerodinámica está en valores cercanos al 0 podremos suponer que las fuerzas aerodinámicas son despreciables. Así, tendremos que las únicas fuerzas significativas ejercidas sobre el centro de masa serán la fuerza propulsiva y el efecto de la gravedad tal y como queda reflejado en la figura:

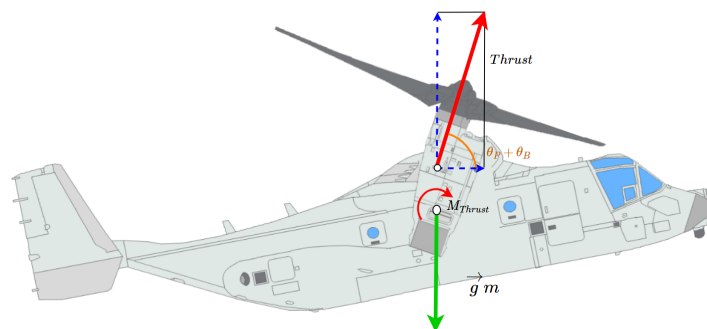


Figura 4.1: Fuerzas en ausencia de velocidad aerodinámica

Por otra parte, se asumirá que la velocidad angular del cuerpo y del proprotor es baja (una

hipótesis que es bastante válida, teniendo en cuenta que la aeronave no está diseñada para tener giros súbitos de la orientación y el efecto del control es el de estabilizar el ángulo):

$$\dot{\theta}_B \approx 0, \dot{\theta}_P \approx 0 \quad (1.1)$$

Podemos simplificar las matrices M , V y G gracias a esta suposición, lo que conduce a desprestigiar los términos de Coriolis presentes en V y considerar solo los efectos de las masas y las inercias del cuerpo. Presentamos entonces el equilibrio de fuerzas como:

$$S_{Hover} := \begin{cases} \sum F_x = m \cdot \ddot{x}_B = T(\Omega) \cdot \cos(\theta_P + \theta_B) \\ \sum F_z = m \cdot \ddot{z}_B = -T(\Omega) \cdot \sin(\theta_P + \theta_B) + g \cdot m \\ \sum M_y = I_y \ddot{\theta}_B = T(\Omega) \cdot (\cos(\theta_P) \cdot z_{JB} + \sin(\theta_P) \cdot x_{JB}) \end{cases} \quad (1.2)$$

Definimos ahora cada señal siguiendo el modelo de pequeñas variaciones:

$$\begin{aligned} x &= X_{eq} + \Delta x \\ u &= U_{eq} + \Delta u \end{aligned} \quad (1.3)$$

Este submodelo válido para velocidades bajas puede linealizarse en torno al punto de operación obtenido en el capítulo anterior. En general:

$$f(x) = f(x_{eq}) + \underbrace{\left. \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{eq} \cdot \Delta y + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \Big|_{eq} \cdot \Delta \dot{y} + \dots + \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \Big|_{eq} \cdot \Delta y^{(n)} + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{eq} \cdot \Delta u + \frac{\partial f}{\partial \dot{u}} \Big|_{eq} \cdot \Delta \dot{u} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u^{(m)}} \Big|_{eq} \cdot \Delta u^{(m)} \right.}_{\delta x} \quad (1.4)$$

Identificando $y = \ddot{x}_B, u = [\Omega, \theta_P]$ y trasladando las variaciones de y al dominio de Laplace tendremos:

$$\Delta x_B(s) = \frac{\frac{\partial T}{\partial \Omega} \Big|_{eq} \cos(\theta_{P,eq} + \theta_{B,eq})}{m \cdot s^2} \cdot \Delta \Omega(s) - \frac{T_{eq} \sin(\theta_{P,eq} + \theta_{B,eq})}{m \cdot s^2} \cdot \Delta \theta_P(s) \quad (1.5)$$

donde

$$T(\Omega) = 2D_r^2 \rho (CT_0 D_r^2 \Omega^2 + CT_1 D_r \Omega V_a + CT_2 V_a^2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \Omega} = 2D_r^2 \rho (2CT_0 D_r^2 \Omega + CT_1 D_r V_a)$$

Siguiendo el mismo procedimiento para z_B :

$$\Delta z_B(s) = \frac{-T(\Omega)_{eq} \cdot \cos(\theta_{B,eq} + \theta_{P,eq})}{m \cdot s^2} \cdot \Delta \theta_P(s) - \frac{\frac{\partial T}{\partial \Omega} \Big|_{eq} \cdot \sin(\theta_{B,eq} + \theta_{P,eq})}{m \cdot s^2} \cdot \Delta \Omega(s) \quad (1.6)$$

Ahora, para θ_B :

$$\Delta\theta_B(s) = \frac{\frac{\partial T}{\partial \Omega} \cdot (\cos(\theta_{P,eq}) \cdot z_{JB} + \text{sen}(\theta_{P,eq}) \cdot x_{JB})}{I_y \cdot s^2} \cdot \Delta\Omega(s) - \frac{T(\Omega)_{eq} \cdot (-\sin(\theta_{P,eq}) \cdot z_{JB} + \cos(\theta_{P,eq}) \cdot x_{JB})}{I_y \cdot s^2} \cdot \Delta\theta_P(s) \quad (1.7)$$

Observación. El sistema resultante posee 3 grados de libertad (x, z, θ_B) y dos señales de actuación (θ_P, Ω) . Si suponemos que los valores de desplazamiento del punto de encaje del proprotor no son nulos (es decir, $z_{JB}, x_{JB} \neq 0$), entonces se lee de la ecuación (1.7) que tenemos capacidad de actuación. Cuanto mayor sea el valor de desplazamiento, mayor será el efecto que genera el empuje de los motores (T) sobre el centro de masas. En el caso límite en el que $(z_{JB}, x_{JB}) = 0$, toda acción de T pierde efecto sobre θ_B y pasamos de tener un sistema subactuado a perder un grado de libertad por la ausencia de acción de control sobre el mismo. Esto no es del todo conveniente, puesto que la ausencia de controlabilidad de el ángulo de orientación de la nave en ausencia de fuerzas aerodinámicas implica que ante bajas velocidades (Hovering o vuelo en avance), dejamos a la merced de la aerodinámica residual, no incluida en el modelo, el ángulo, que, por otra parte, va a aumentar el efecto aerodinámico si se inclina en exceso. Se tiene que el ángulo de equilibrio de la aeronave en hovering es, en el equilibrio (véase la imagen):

$$\theta_{B,eq} = \frac{\pi}{2} - \text{tg}^{-1} \left(\frac{x_{JB}}{z_{JB}} \right) \quad (1.8)$$

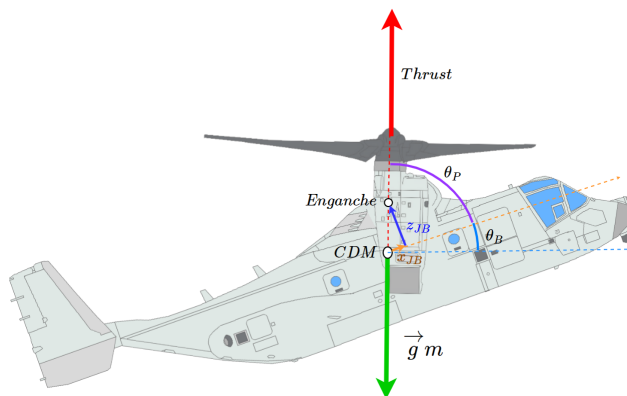


Figura 4.2: Fuerzas en ausencia de velocidad aerodinámica

Observación. A nivel de diseño de la aeronave es muy importante que se parta de hovering con un ángulo no superior a 10° , puesto que la sustentación aumentaría de manera súbita, tal y como se espera de una aeronave normal y, si fuera mucho mayor incluso, podría partir de un estado de pérdida aerodinámica. Lo ideal sería reducir el valor x_{JB} lo máximo para, sin perder un grado de libertad, disminuir el ángulo de equilibrio a un valor aceptable que genere una sustentación adecuada en vuelo en avance en los primeros instantes.

Se puede observar también que, atendiendo al equilibrio de la aeronave en este caso, la suma de los ángulos $\theta_{B,eq} + \theta_{P,eq} = \pi/2$. Así, con la aeronave en equilibrio y garantizando que dicha suma cumpla que el vector de empuje esté alineado con la fuerza de la gravedad, podremos considerar que las variables (1.5) y (1.6) están desacopladas, pudiéndose plantear que, ante pequeñas variaciones de las señales de control, el movimiento en un eje no afecta al otro. Si sustituimos los valores de equilibrio en las ecuaciones tendremos:

$$\frac{\Delta x_B}{\Delta \theta_P}(s) = -\frac{9,854}{s^2} \quad (1.9)$$

$$\frac{\Delta z_B}{\Delta \Omega}(s) = -\frac{0,269}{s^2} \quad (1.10)$$

$$\Delta \theta_B(s) = \frac{11,84}{s^2} \cdot \Delta \theta_P(s) + \frac{5,753 \cdot 10^{-5}}{s^2} \cdot \Delta \Omega(s) \rightarrow \frac{\Delta \theta_B}{\Delta \theta_P}(s) = \frac{11,84}{s^2} \quad (1.11)$$

Este subsistema posee ciertas particularidades interesantes que debieran ser consideradas previamente a la fase del diseño del control:

- El desacoplo de la dinámica de los ejes x,z es asumible con variaciones pequeñas de las señales de control y siempre que el ángulo θ_B sea estable.
- Cuando la señal θ_P hace variar la velocidad en el eje x, genera un par perturbador en el ángulo θ_B , luego afectará a la dinámica en el eje z, además de introducir una fuente de inestabilidad en el sistema, puesto que variar θ_P , afecta a la suma $\theta_B + \theta_P$. Se hace necesario, por tanto, controlar θ_B .

2. Modelo dinámico general con $V_a > 0$

Cuando consideramos una velocidad aerodinámica significativa en el modo de ala fija, hemos de introducir los términos de las fuerzas y pares aerodinámicos que estarán muy presentes en las ecuaciones. En el modo ala fija dispondremos de tres señales de actuación: el ángulo del proprotor (θ_P), la velocidad angular de los rotores (Ω) y ahora, el ángulo de los elevadores traseros (δ_e). Planteamos unas ecuaciones que rigen la dinámica completa de la aeronave mediante el equilibrio de fuerzas y pares⁶. Interesa especialmente especificar cómo las variables de estado del sistema a la velocidad aerodinámica (V_a), el ángulo de asentamiento de dicha velocidad (denominado también *flight path angle* - γ) y el ángulo de orientación de la aeronave y su respectiva velocidad angular ($\theta_B, \dot{\theta}_B$).

Las ecuaciones dinámicas serán:

$$F_1 = \dot{V}_a = \frac{1}{m}(-D + T \cos(\theta_P + \theta_B - \gamma) - g \cdot m \cdot \sin(\gamma)) \quad (2.1)$$

$$F_2 = \dot{\gamma} = \frac{1}{mV_a}(L + T \sin(\theta_P + \theta_B - \gamma) - g \cdot m \cdot \cos(\gamma)) \quad (2.2)$$

$$F_3 = \ddot{\theta}_B = \frac{1}{2} \frac{\rho V_a^2 S c}{I_y} (C_{m,0} + C_{m,\alpha} \cdot (\theta_B - \gamma) + C_{m,q} \cdot \dot{\theta}_B + C_{m,\delta_e} \cdot \delta_e) + \frac{T}{I_y} (x_{JB} \sin(\theta_P) + z_{JB} \cos(\theta_P)) \quad (2.3)$$

La mejor manera de linealizar este sistema de varios grados de libertad y varias señales de control es acudir a una descripción en espacio de estados. Un sistema en espacio de estados viene a describir el comportamiento dinámico de un sistema mediante las relaciones entre su conjunto de entradas, salidas y sus variables de estado, que representan, mediante un espacio vectorial definido por su vector de estado, cómo se encuentra internamente el sistema con una nomenclatura matricial.

⁶Véase el anexo para la deducción de dichas ecuaciones basadas en el equilibrio de fuerzas y pares y su linealización

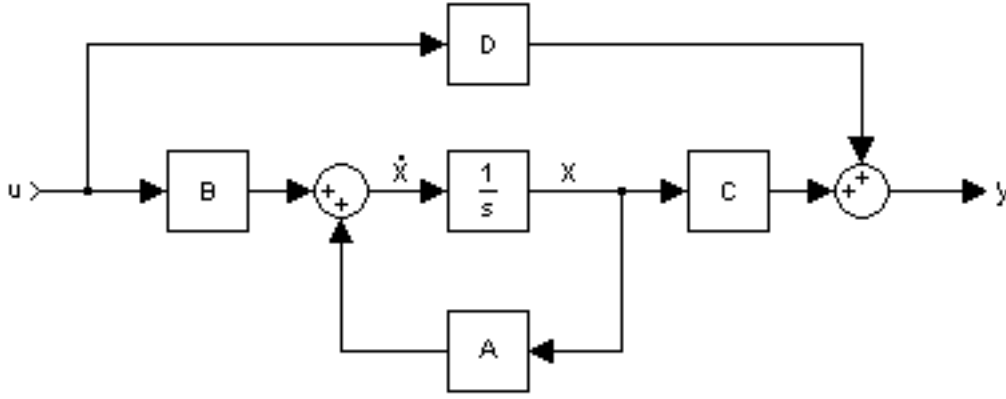


Figura 4.3: Esquema de bloques de un sistema descrito como espacio de estados.

Las matrices A y B definen la evolución de los estados ($\dot{\mathbf{x}}$) en función del estado actual (\mathbf{x}) y el valor de las entradas (\mathbf{u}). Las matrices C y D relacionan las salidas con el vector de estados y con las entradas respectivamente. Esta representación permite, en todo caso, obtener las funciones de transferencia de entrada salida para cada una de sus estados.

El sistema dinámico *lineal* descrito en espacio de estados derivado del sistema *no lineal* descrito por las ecuaciones 2.1 que queremos encontrar pasa por definir unas matrices A, B, C y D tales que:

$$\begin{aligned}\Delta\dot{\mathbf{x}} &= A \cdot \Delta\mathbf{x} + B \cdot \Delta\mathbf{u} \\ \Delta\mathbf{y} &= C \cdot \Delta\mathbf{x} + D \cdot \Delta\mathbf{u}\end{aligned}\quad (2.4)$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \right|_{eq} & \dots & \left. \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \right|_{eq} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial F_n}{\partial x_1} \right|_{eq} & \dots & \left. \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \right|_{eq} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial F_1}{\partial u_1} \right|_{eq} & \dots & \left. \frac{\partial F_1}{\partial u_n} \right|_{eq} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial F_n}{\partial u_1} \right|_{eq} & \dots & \left. \frac{\partial F_n}{\partial u_n} \right|_{eq} \end{bmatrix} \quad n = 4, m = 3 \quad (2.5)$$

y, especificando que cada vector de estado puede considerarse una salida del sistema (que deseamos controlar):

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = [\mathbf{0}_{4 \times 3}] \quad n = 4, m = 3 \quad (2.6)$$

Definimos el vector de estados y el vector de actuación como:

$$\mathbf{x} = [V_a \quad \gamma \quad \dot{\theta}_B \quad \theta_B]^T \quad \mathbf{u} = [\Omega \quad \delta_e \quad \theta_P]^T$$

Esta forma de expresar un sistema lineal nos permitirá estudiar la aeronave linealizando en torno a multitud de puntos de operación (obtenidos mediante el trimado), así como la dependencia y acoplamiento de las distintas variables. La obtención de las funciones de transferencia que relacionan las entradas con las salidas es inmediata con la siguiente fórmula:

$$H(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} B = \frac{|sI - A + BC| - |sI - A|}{|sI - A|} \quad (2.7)$$

Para estudiar cómo afecta cada una de las actuaciones a las variables, linealizaremos en torno a unos valores de equilibrio obtenidos del trimado en vuelo horizontal:

$$X_{eq} = [31 \quad 0 \quad 0 \quad 0,0374] \quad U_{eq} = [80 \quad -0,025 \quad 0]$$

tendremos el siguiente sistema linealizado⁷:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_a \\ \dot{\gamma} \\ \ddot{\theta}_B \\ \dot{\theta}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,68 & -5,4 & 0 & -4,4 \\ 0,009 & -3 & 0 & 6,2 \\ 3,5 & 10,34 & -283,1 & -10,34 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ \gamma \\ \dot{\theta}_B \\ \theta_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,27 & -0,25 & -0,44 \\ 0,0003 & 0,37 & 0,38 \\ 0,027 & -19,26 & -14,17 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega \\ \delta_e \\ \theta_P \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Si suponemos que en el modo de ala fija no variamos θ_P , hipótesis más que coherente para el control de un avión de morfología ala fija, tendremos las siguientes funciones de transferencia:

$$V_a(s) = \frac{0,265(s + 0,02671)}{(s^2 + 0,613s + 0,16)} \Delta\Omega(s) + \frac{-0,248(s - 1,13)}{(s^2 + 0,613s + 0,16)} \Delta\delta_e(s) \quad (2.9)$$

$$\dot{\theta}_B(s) = \frac{-0,318(s - 2,245)s}{(s + 283)(s^2 + 0,613s + 0,16)} \Delta\Omega(s) + \frac{-19,26 \cdot s \cdot (s + 0,96)}{(s + 283)(s^2 + 0,613s + 0,16)} \Delta\delta_e(s) \quad (2.10)$$

$$\Delta\gamma(s) = \frac{0,00032(s^2 - 12,43s + 45,6)}{(s + 3,1)(s^2 + 0,613s + 0,16)} \Delta\Omega(s) + \frac{0,365(s - 1,11)(s + 0,68)}{(s + 3,1)(s^2 + 0,613s + 0,16)} \Delta\delta_e(s) \quad (2.11)$$

Consideraciones del modelo linealizado y la actuación dominante en el sistema

El modelo en funciones de transferencia, a pesar de evidenciar mucho mejor la dinámica del sistema (mediante una descripción de los polos y los ceros) y el acoplamiento de las variables de control, necesita de especificar la naturaleza de las magnitudes operativas de la actuación. Si nos fijamos, las ganancias tienen sentido siempre y cuando se entienda que los incrementos de sus variables no son de la misma magnitud. Por ejemplo, para la variable de control Ω tendremos que el rango efectivo va de 0 a 100 (rps) mientras que para el incremento de control de $\Delta\delta_e$ es de $\pm 1,22$ rads ($\pm 70^\circ$). De esta forma, el orden de magnitud varía considerablemente y las ganancias estáticas de las funciones de transferencias de este apartado toman otro significado.

De este modo, tendremos que la actuación dominante en la velocidad aerodinámica (V_a) recae sobre la variable Ω y el control de la actitud de la aeronave, una vez controlada V_a , recae sobre δ_e .

⁷Aquí se ha escogido un punto de operación cualquiera, pero puede estudiarse el sistema para los múltiples puntos de operación obtenidos en el trimado para el posterior diseño de un conjunto de controladores PID.

Capítulo V. Primer planteamiento de control: control PID desacoplado

El planteamiento inicial para obtener un autopiloto de la aeronave parte de utilizar los modelos lineales que se han obtenido en el capítulo anterior para diseñar unos controladores PID que permitan tanto seguir las referencias de vuelo como rechazar las perturbaciones externas (viento) y las debidas al acoplamiento interno de las señales de control.

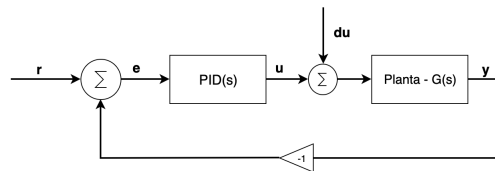


Figura 5.1: Bucle de control

Principios teóricos de un PID: Un PID es un mecanismo de control basado en la realimentación de la variable de salida en un esquema típico de bucle de realimentación. El controlador PID ejerce la acción de control a través de tres mecanismos simultáneos: control proporcional (P), control integral (I) y derivativo (D). Un PID puede expresarse en forma de función de transferencia así:

$$K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t) dt + K_d \frac{de}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} (K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s) e(s) \quad (0.1)$$

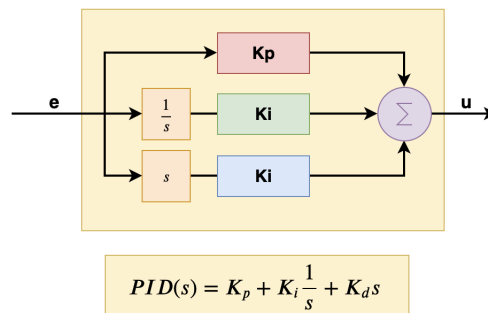


Figura 5.2: Estructura PID paralela

Este controlador permite la regulación de las salidas observables de un sistema basándose en el error instantáneo de la salida con la referencia, la integral de ese error y la velocidad del mismo. Los efectos de cada término se resumen en la siguiente tabla:

Control proporcional (Kp)
<ul style="list-style-type: none"> ▪ Permite disminuir el tiempo de respuesta del bucle de control. ▪ Disminuye el error en régimen permanente ▪ Disminuye la sensibilidad ante perturbaciones externas. ▪ Disminuye la estabilidad del sistema (efecto oscilatorio).
Control integral (Ki)
<ul style="list-style-type: none"> ▪ Disminuye el error en régimen permanente. ▪ Disminuye el tiempo de respuesta del sistema. ▪ Disminuye la estabilidad del sistema (efecto oscilatorio).
Control derivativo (Kd)
<ul style="list-style-type: none"> ▪ Aumenta la estabilidad del sistema (suaviza el transitorio). ▪ Disminuye la velocidad de respuesta del sistema.

La elección de los parámetros del controlador dependerá indudablemente del sistema para el que estemos diseñando el controlador. Mediante la técnica del *lugar de las raíces* se puede visualizar fácilmente dónde estarán los polos del bucle cerrado situando los polos, ceros y ganancia del controlador, permitiendo diseñar un controlador con un transitorio y un ancho de banda en bucle abierto adecuado para cada dinámica. A nivel teórico, sea $k \cdot G(s)C(s)$ la dinámica del bucle abierto:

$$G_{BC}(s) = \frac{k \cdot G(s)C(s)}{1 + k \cdot G(s)C(s)} \quad (0.2)$$

Se define el lugar de las raíces como:

Definición. El lugar de las raíces es el lugar del plano complejo que anula el polinomio característico de un sistema en bucle cerrado. Esto es, las soluciones de s que hacen $1 + k \cdot C(s)G(s) = 0$.

1. Control del ángulo de inclinación del proprotor θ_P

Hasta ahora se ha supuesto que el ángulo de inclinación del proprotor estaba dado como una señal de control. Realmente, en el sistema real no va a ser así y tal y como se explica y

desarrolla en el capítulo primero, se ha modelado el sistema teniendo en cuenta la dinámica de las góndolas del proprotor y el efecto que produce el par de dicha subestructura sobre el cuerpo principal de la nave. Esto es conveniente para ser fiel a la aplicación real, donde se tendrá un motor que deberá ser el que ejerza el par dependiendo de una consigna (de tensión o corriente). Lo necesario, por tanto, es diseñar un control que permita disponer de un ángulo de proprotor ante una consigna determinada.

Del análisis de las ecuaciones de la dinámica, y aplicando la simplificación expuesta en el capítulo anterior donde se despreciaban los efectos de Coriolis quedándonos solo con la diagonal de la matriz de inercias M , tenemos la siguiente ecuación diferencial para θ_P :

$$\tau_P = (x_{PJ}m_P + I_P)\ddot{\theta}_P + g \cdot m_P \cdot x_{PJ}\cos(\theta_B + \theta_P) \quad (1.1)$$

Asumiremos el término gravitatorio (al igual que el término de Coriolis despreciado) como una perturbación. Si linealizamos en torno al punto de operación de máximo par ($\theta_B + \theta_P = 0$), tendremos:

$$\tau_P = \tau_{eq} + \Delta\tau_P \quad (1.2)$$

$$\frac{\Delta\theta_P}{\Delta\tau_P}(s) = \frac{1}{(x_{PJ}^2 m_P + I_P)s^2} = \frac{15,28}{s^2} \quad (1.3)$$

A partir de aquí, podemos plantear un esquema de control basado en dos partes: un controlador PID y un mecanismo de *feedforward*.

1.1. Controlador del servomotor del proprotor

La síntesis del controlador PID debe seguir los criterios de robustez y rapidez debido a la función fundamental que tiene este bucle de bajo nivel dentro del control global de la aeronave. Dicho controlador debe estar diseñado tal que, desde fuera del mismo, se vea como una función de transferencia estática de ganancia 1:

$$\frac{G_{\theta_P}(s)}{G_{\theta_P,ref}(s)} \simeq 1$$

Esto se consigue cuando el ancho de banda del bucle interno es significativamente mayor que el ancho de banda del bucle exterior. Generalmente, un orden de magnitud mayor. Esto es:

$$BW_{\theta_P \rightarrow \theta_P,ref} = 10 \cdot BW_{ext \rightarrow \theta_P} \quad (1.4)$$

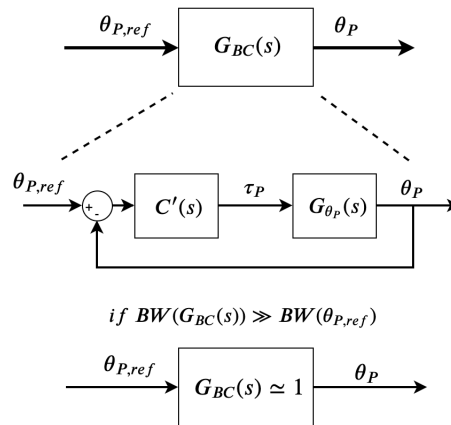


Figura 5.3: Esquema de simplificación de sistema para $BW \gg 1$

La única limitación que se impone por tanto es que, dado un ancho de banda del bucle interno, los bucles sucesivos exteriores deben tener un ancho de banda menor cada vez para asegurar la estabilidad del sistema completo. Esta morfología de control es denominada **control en cascada** y permite simplificar significativamente el diseño mediante el diseño sucesivos de bucles anidados.

Mediante un diseño basado en el lugar de las raíces, escogemos unos valores del PID, especificando un tiempo de subida de 0.1 segundos:

Valores PID del controlador de ángulo del proprotor	
K_p	5.98
K_i	6.92
K_d	1.29

Es importante prever el desempeño del controlador cuando introducimos ciertas no linealidades del sistema. El caso más importante es el de la saturación de la señal de control. Como es previsible, no dispondremos de un par ilimitado para el control del ángulo y será necesario ver cómo es capaz el controlador de lidiar con dicha limitación. Asimismo, es fundamental considerar que, a mayor par del motor en el control, mayor par se transmite al cuerpo de la nave, lo que podría afectar a la estabilidad de la nave. La solución de consenso está en encontrar un valor de saturación lo suficientemente alto como para que el control funcione pero que sea realista.

Hemos establecido un valor de saturación de 3 Nm para dicha señal de control . El resultado (con saturación y sin ella) es el que sigue:

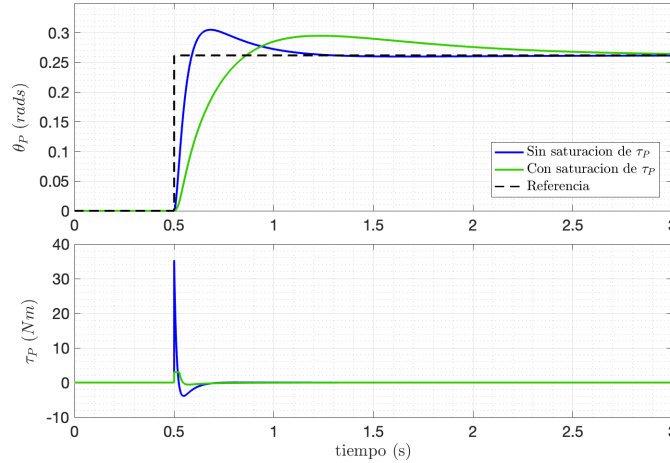


Figura 5.4: Experimento de control de θ_P

La saturación estropea el ancho de banda planteado en un principio y hace que la salida sea más lenta. No obstante, las variaciones de la referencia del ángulo serán, generalmente, suaves y en muchos casos, se deseará rechazar las perturbaciones en un ángulo dado, por lo que se puede asumir que el controlador funciona lo suficientemente bien.

Observación. Generalmente, los motores eléctricos generan un par relacionado linealmente con la corriente eléctrica que se le está suministrando. Debido a la naturaleza inductiva de dichos motores, la corriente no puede presentar cambios bruscos en las bobinas por lo que habríamos de considerar cierta dinámica de aún más bajo nivel que acotaría aún más el ancho de banda del control.

1.2. Realimentación de los términos gravitatorios

Una buena manera de mejorar el desempeño del control es establecer un control feedforward para ayudar al PID a rechazar las perturbaciones gravitatorias que previamente hemos descartado de la dinámica del modelo. Un control feedforward consiste en, dado un modelo de las perturbaciones, sumar a la acción de control el valor necesario para rechazar dichas perturbaciones. Para el caso que nos ocupa:

$$FF(\theta_P) = g \cdot m_P \cdot x_{PJ} \cdot \cos(\theta_B + \theta_P)$$

$$\tau_P = \tau_{eq} + \Delta\tau_{PID} + FF(\theta_P) \quad (1.5)$$

Finalmente, el bloque en Simulink resultante queda tal que así:

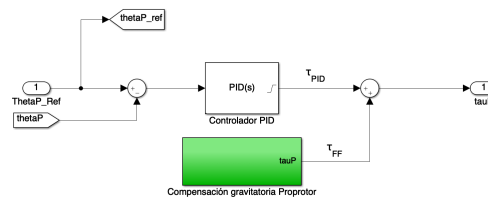


Figura 5.5: Bloque controlador de θ_P

2. Control en Hovering

2.1. Control en altura (z_B)

El regulador de la altura está diseñado para el sistema expuesto en el capítulo anterior:

$$\ddot{z}_B = -\frac{T(\Omega)}{m} \cdot \text{sen}(\theta_P + \theta_B) + g \rightarrow \frac{\Delta z_B}{\Delta \Omega}(s) = -\frac{0,269}{s^2}$$

Para el control del vuelo en el eje Z se plantea una estructura de PID en cascada. Esta estructura plantea dos bucles diferentes: uno interior (control de la velocidad) y otro exterior (control de la posición). El primer controlador (que cierra el bucle interior), se encarga de obtener la velocidad en el eje Z indicada por la consigna, que será la salida del segundo controlador (bucle exterior). Esta morfología presenta ciertas ventajas:

- Las perturbaciones se corrigen más fácilmente debido a que el bucle interior, que es más rápido, actúa sobre el origen de las perturbaciones (velocidad) antes de que se refleje significativamente sobre la posición.
- El bucle interior sirve para corregir las no linealidades del sistema y proporciona al bucle externo un sistema más fácil de controlar, minimizando los efectos negativos de las incertidumbres.
- Tenemos dos grados de libertad de diseño y la capacidad de saturar las variables de control para ajustar el comportamiento dinámico. Por ejemplo, se puede especificar la velocidad máxima que se pide (aspecto importante ya que en vuelo axial no interesa contribuir a los efectos aerodinámicos generados por V_a excesivamente grande).

Esta morfología es muy utilizada en los autopilotos de multitud de UAVs gracias a sus ventajas a la hora de controlar. No obstante, para que funcione será necesario garantizar ciertas especificaciones:

- En general, la variable controlada en el bucle interior debe influir necesariamente con la variable controlada en el bucle exterior. En este caso es así, puesto que hablamos de posición y velocidad en Z.
- El bucle interior debe ser significativamente más rápido que el exterior o rápidamente se perderá la estabilidad del bucle al completo.

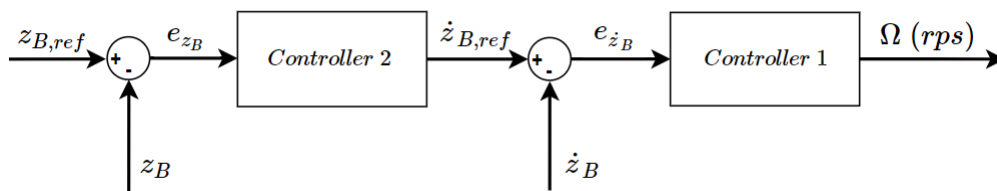


Figura 5.6: Esquema PID en cascada

Se diseña en primer lugar el controlador interior, que ha de ser sustancialmente rápido. La elección es obvia: un control proporcional de alta ganancia proporciona una rapidez grande aún cuando el error en régimen permanente no es nulo. Se descarta añadir efecto integral debido a que realentiza la dinámica del bucle, dejándose reservado para el exterior.

Para el diseño del PID se estudia el sistema expresado en velocidad:

$$\underbrace{\frac{\Delta \dot{z}_B(s)}{\Delta \Omega(s)} = -\frac{0,269}{s}}_{\text{Bucle interno}} \rightarrow \underbrace{\frac{\Delta z_B(s)}{\Delta \dot{z}_B(s)} = \frac{1}{s}}_{\text{Bucle externo}} \quad (2.1)$$

Para unas especificaciones de tiempo de subida de 1.5 segundos y una sobreoscilación máxima del 10 %, tendremos los siguientes controladores:

	Valores PID bucle interno	Valores PID bucle externo
K_p	-15	1
K_i	0	0.4
K_d	0	0

Implementación de un prefiltro

Debido a la disposición final de los polos en bucle cerrado externo, la estructura del PI aparece con un cero dominante en el semiplano derecho:

$$C(s) = \frac{1,6s + 0,64}{s}, G(s) = \frac{1}{s} \rightarrow G_{BC}(s) = \frac{G \cdot C}{1 + G \cdot C} = \frac{1,6(s + 0,4)}{(s + 0,8)^2} \quad (2.2)$$

Esto produce un efecto de sobreoscilación en la respuesta ante escalón. Para evitar esa sobreoscilación, se implementa un prefiltro para la señal de referencia que rebaja la exigencia de un cambio de consigna súbito en forma de escalón. La adición de dicho prefiltro supone una realentización del bucle cerrado pero con la mejora de una precisión mayor en el vuelo vertical. Este prefiltro puede desconectarse cuando la referencia no está dada en forma de escalón sino con una dinámica más relajada. Para evitar la sobreoscilación del 10 %, se propone el siguiente prefiltro:

$$F(s) = \frac{z_B^{ref}}{z_{B,prefiltred}^{ref}}(s) = \frac{1}{2s + 1} \quad (2.3)$$

Finalmente, el bloque en Simulink resultante queda tal que así:

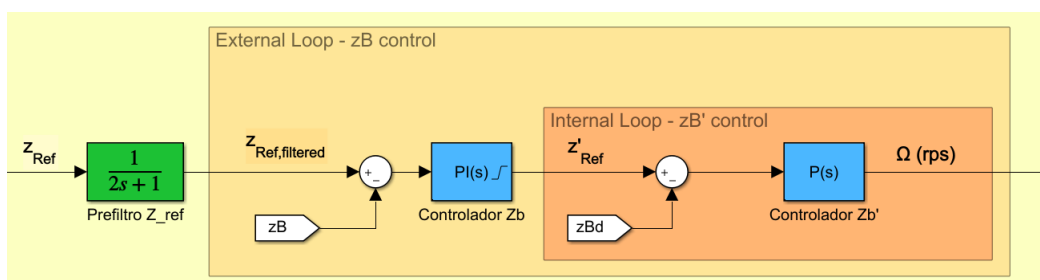


Figura 5.7: Bloque controlador de z_B

2.2. Control en posición longitudinal (x_B)

Para el vuelo axial procederemos de manera similar: diseñamos un controlador PID basado en el modelo derivado de la linealización de las ecuaciones dinámicas.

$$\frac{\Delta x_B(s)}{\Delta \theta_P(s)} = -\frac{9,854}{s^2}$$

Para ello, utilizaremos la misma estructura de PID anidado que se ha usado en el apartado anterior. Mediante el análisis del lugar de las raíces podemos plantear un PID interno que controle la velocidad axial \dot{x}_B y uno externo que se encargue de controlar la posición x_B :

$$\underbrace{\frac{\Delta \dot{x}_B(s)}{\Delta \Omega(s)} = -\frac{9,854}{s}}_{\text{Bucle interno}} \rightarrow \underbrace{\frac{\Delta x_B(s)}{\Delta \dot{x}_B(s)} = \frac{1}{s}}_{\text{Bucle externo}} \quad (2.4)$$

El PID diseñado tendrá los siguientes parámetros:

	Valores PID bucle interno	Valores PID bucle externo
K_p	-0.5	0.8
K_i	0	0.23
K_d	0	0.15

En este caso, la importancia de saturar el ángulo del proprotor se hace fundamental, puesto que con un ángulo muy acuciado la sustentación debida al empuje de los motores cae demasiado, haciéndose imposible mantener la altura. Por ello, se establece una limitación al ángulo de tal forma que nunca se pueda inclinar más de lo debidamente recomendado. Recordemos que la hipótesis de desacoplo se sostenía debido a que $\delta\theta_P$ es substancialmente pequeña. Así, fijaremos el ángulo máximo de θ_P en 25° , con los que obtendremos unas aceleraciones máximas en cada eje (con $\Omega = \Omega_{max} = 100 \text{ rps}$) de 15 m/s^2 en Z y de 8 m/s^2 en X.

2.3. Control del ángulo θ_B

Se había dicho en el capítulo anterior que con una velocidad aerodinámica lo suficientemente baja, la capacidad de actuación de δ_e desaparecía, quedando un sistema resultante subactuado. El único par de actuación que resulta, proviene del vector de empuje de los motores, definido en magnitud por $T(\Omega)$ y en ángulo por θ_P :

$$\ddot{\theta}_B = \frac{T(\Omega)}{I_y} (x_{JB} \sin(\theta_P) + z_{JB} \cos(\theta_P))$$

De este modo, cuando tenemos un T más o menos estable, θ_P puede actuar como señal de control también sobre θ_B ⁸. La dinámica de θ_B es más rápida que la de x_B , por lo que el interés está en diseñar un controlador que sea capaz de controlar θ_B a la misma vez que x_B a velocidades bien diferentes. El regulador del ángulo de inclinación debe ser significativamente

⁸Se escoge θ_P como señal de control puesto que es capaz de variar el signo del momento, no así $T(\Omega)$ que solo varía la magnitud del mismo.

más rápido que el controlador de posición horizontal. Tomando el modelo y diseñando un PD (no interesa la lentitud que añade el efecto integral, solo la estabilidad de θ_B en un punto de equilibrio), especificaremos que el ancho de banda es, al menos, 10 veces mayor que el ancho de banda del bucle de control de x_B :

$$BW_{x_B} = 1 \text{ rad/s} \rightarrow BW_{\theta_B} = 10 \cdot BW_{x_B} = 10 \text{ rad/s}$$

Así, tendremos el siguiente controlador:

Valores PID controlador θ_B	
K_p	2.8
K_i	0
K_d	0.8

Vemos en el siguiente diagrama de Bode que se verifica, para el bucle abierto, la condición del ancho de banda:

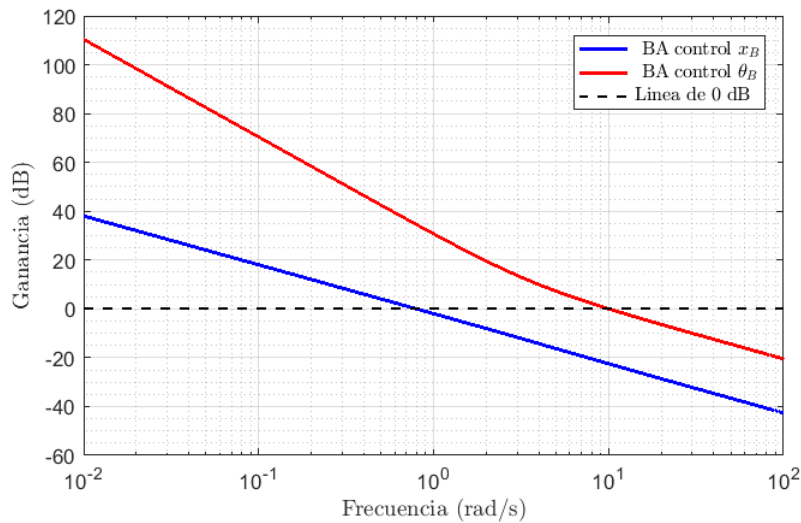


Figura 5.8: Bode comparativo

Finalmente, el controlador de la posición horizontal x_B se sintetiza como la suma de las acciones de control:

$$\theta_P^{ref} = \theta_P(e_{x_B}) + \theta_P(e_{\theta_B}) + \left(\frac{\pi}{2} - \theta_B\right)$$

La acción de control de $\theta_P(e_{\theta_B})$ tiende a estabilizar θ_B más rápido que $\theta_P(e_{x_B})$ estabiliza x_B , por lo que la dinámica dominante puede resumirse en una acción de control dependiente de e_{x_B} y una perturbación controlada debida a θ_B , donde el controlador más lento encuentra que $\theta_B \simeq \theta_{B,eq}$:

$$\theta_P^{ref} = \theta_P(e_{x_B}) + Perturbación(\theta_B) \quad (2.5)$$

El bloque en Simulink resultante queda tal que así:

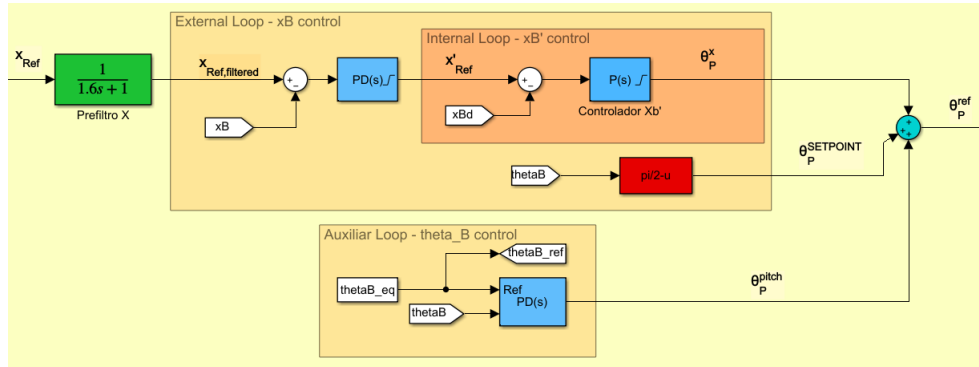
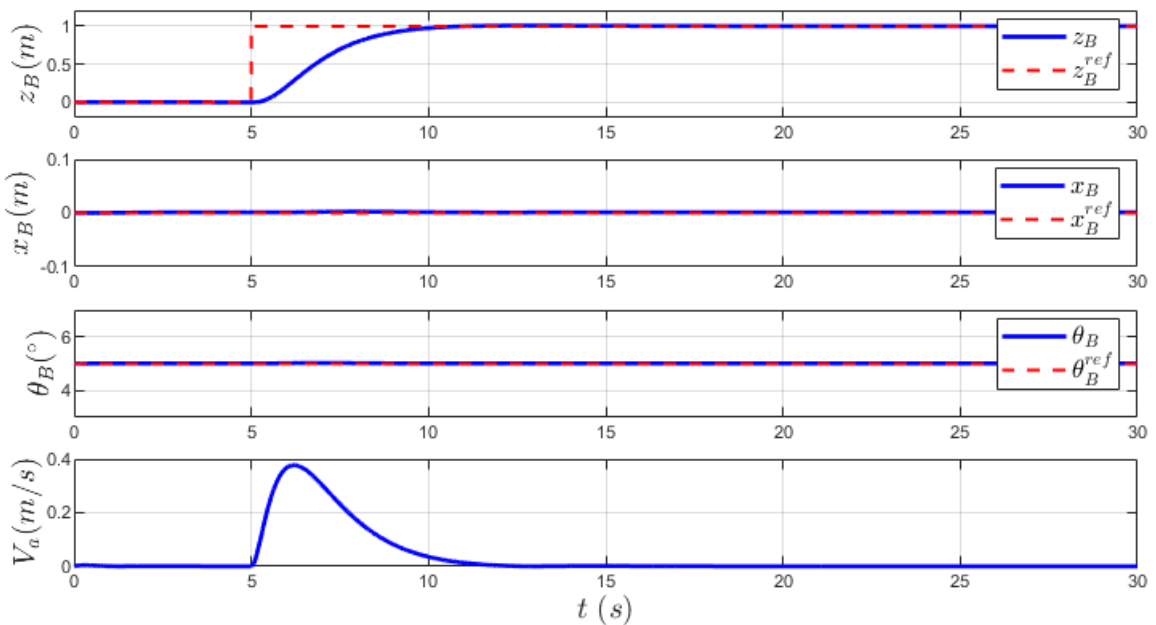


Figura 5.9: Bloque controlador de x_B

2.4. Experimentos de vuelo

Para validar el diseño, realizamos una serie de experimentos: un escalón en altura (vuelo en ascenso), un escalón en posición horizontal (vuelo en avance) y una trayectoria genérica.

Vuelo en ascenso:



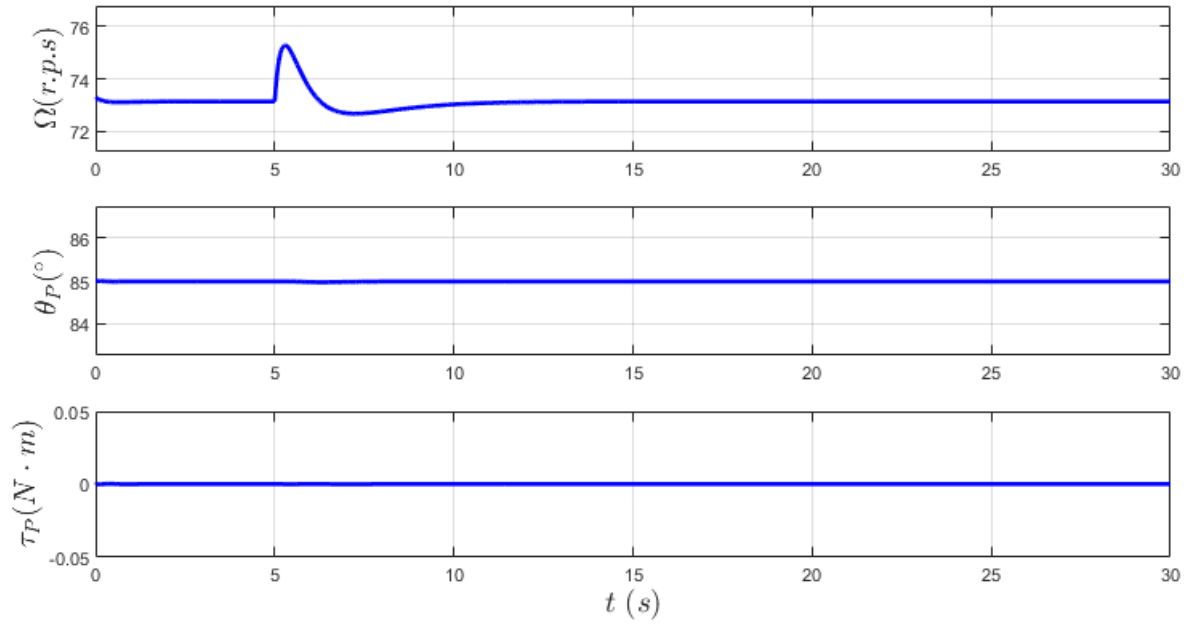
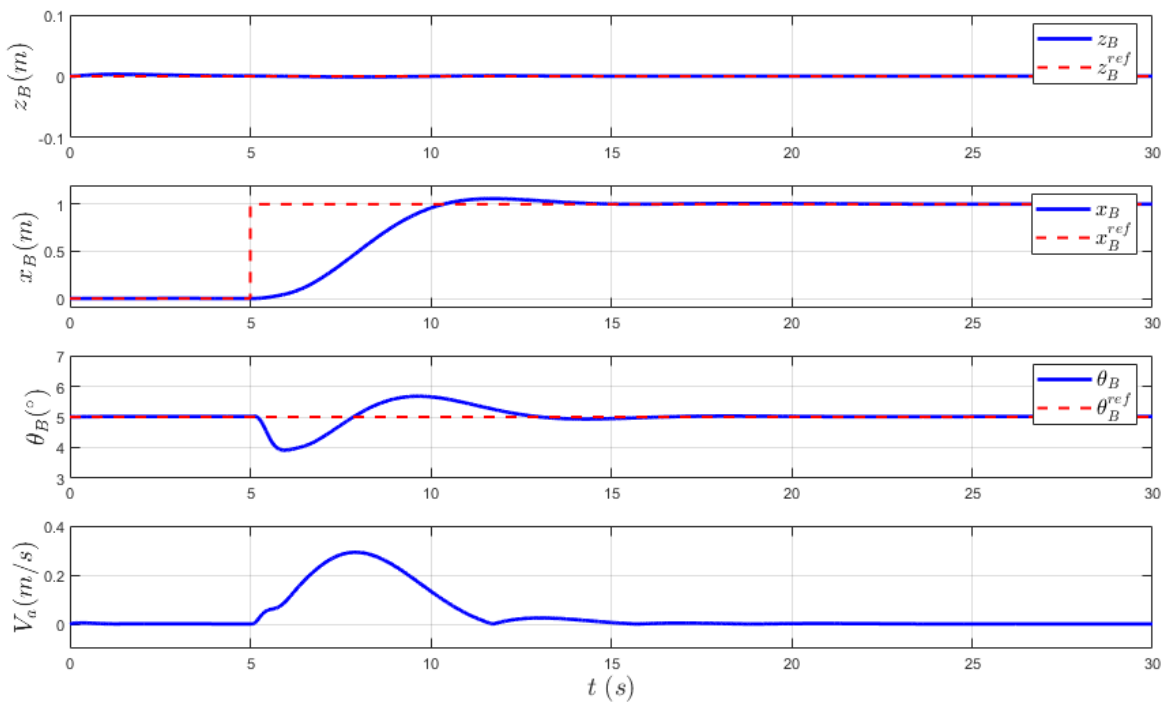


Figura 5.10: Experimento I - Vuelo en ascenso

Vuelo en avance:



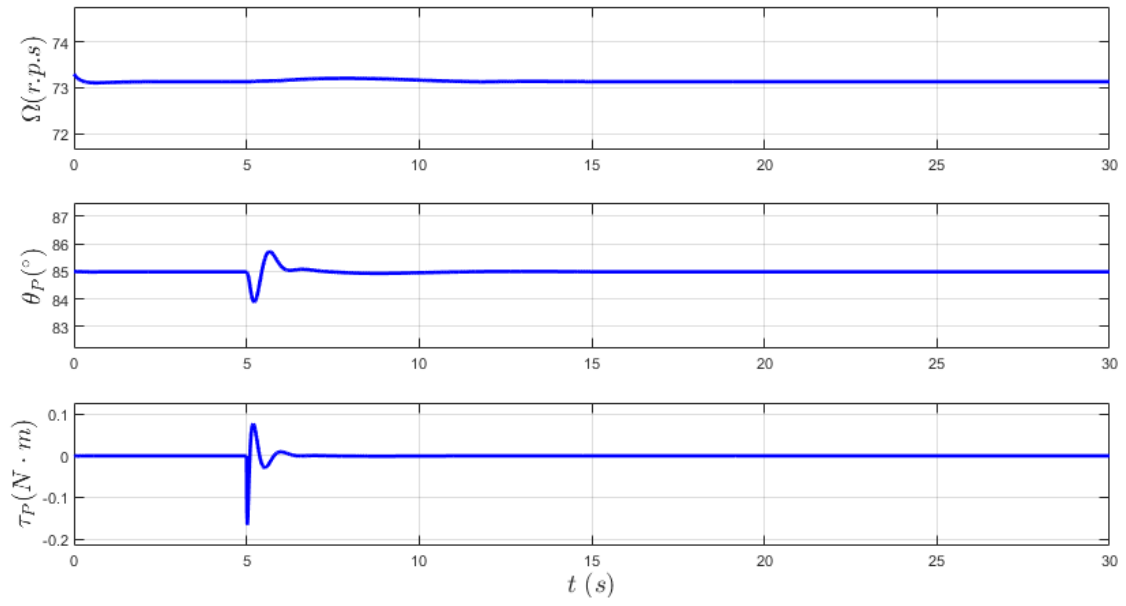


Figura 5.11: Experimento II - Vuelo en avance

Trayectoria combinada:

Se le especifica una trayectoria sinusoidal en el eje Z y una velocidad constante en el eje X:

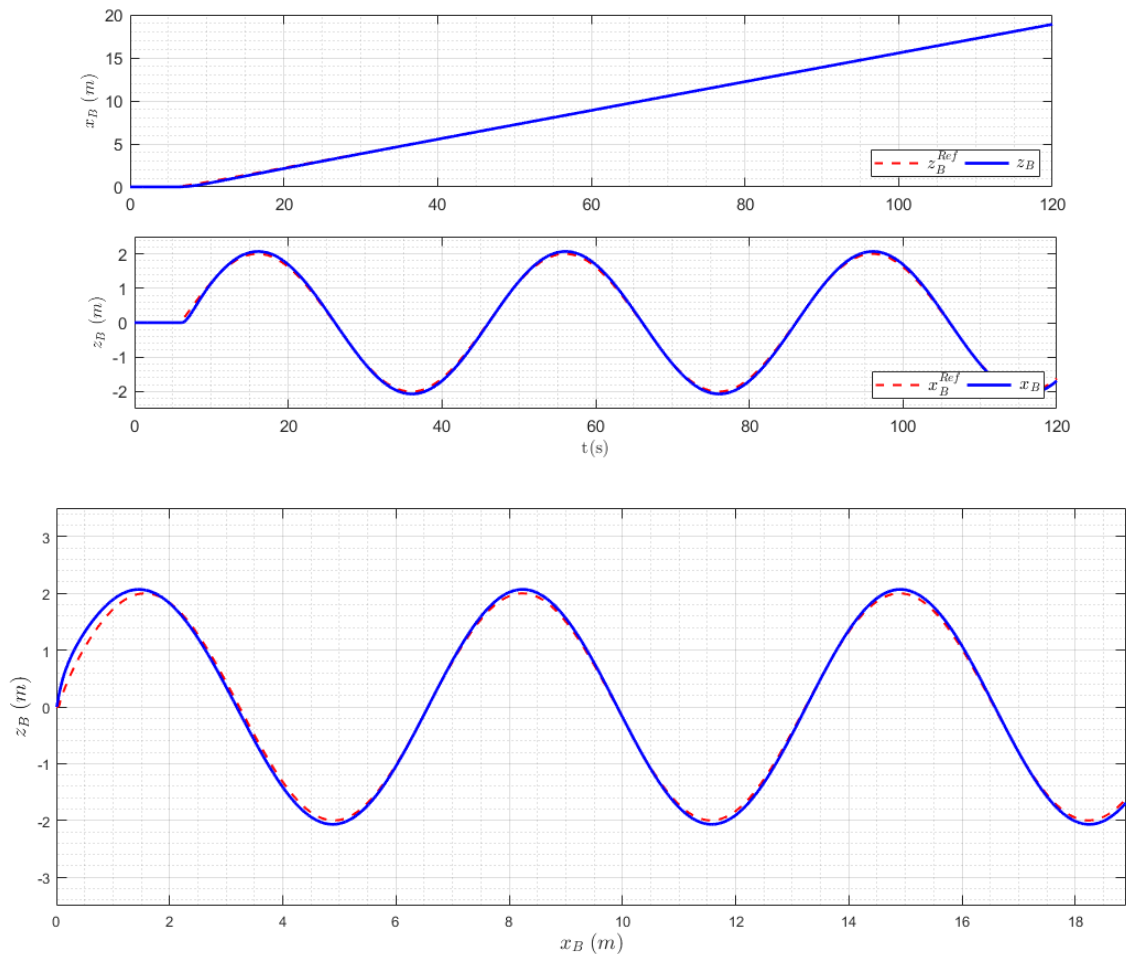


Figura 5.12: Experimento III - Trayectoria genérica

Valoración del desempeño del control

Se puede observar que el control en modo helicóptero se comporta de manera deseada. Tenemos que la dinámica del movimiento en el eje Z, ante velocidades bajas, no perturba en exceso el resto de variables del sistema (x_B y θ_B se ven inalteradas, como bien se expuso anteriormente, ante incrementos muy pequeños de θ_P).

El comportamiento del control de movimiento en el eje X también cumple con las especificaciones dispuestas en el apartado de diseño. Se comprueba que, efectivamente, existe una perturbación del ángulo de *pitch*, regulado de manera efectiva y con error nulo en régimen permanente. Las perturbaciones que ejerce el movimiento en dicho eje a la posición en Z se rechazan en tanto el incremento de θ_P sigue siendo pequeño. Estas perturbaciones serán más notables cuanto mayor velocidad alcance (un escalón de referencia mayor en el mismo tiempo).

3. Control en ala fija

En el control de vuelo horizontal el objetivo es controlar, por un lado, la velocidad aerodinámica (V_a) y por otro lado la altura de la aeronave ($h = -z_B$). Para ello, se fijará el ángulo del proprotor en una posición determinada (el caso límite está en $\theta_P = 0$) y se utilizarán las dos variables de control disponibles (Ω, δ_e) para estabilizar la aeronave. En este modo, debemos partir de cierta velocidad aerodinámica significativa, lo que significa que los términos aerodinámicos (lift, drag...) estarán presentes en todo momento.

En este modo se tiene que poner especial interés en el control de la velocidad aerodinámica de la aeronave. Los términos aerodinámicos dependen cuadráticamente de V_a y para que se pueda variar la altura mediante la acción de control de δ_e , hay que garantizar que V_a es constante en el entorno de su punto nominal. El diseño de un autopiloto parte de los principios expuestos en [2] y posee la siguiente estrategia:

- Se diseña un controlador PID para regular la velocidad aerodinámica V_a mediante Ω .
- Para el control de la altura se parte de una estructura PID en cascada que controla el ángulo θ_B , influyente en la sustentación, para disminuir o aumentar la altura.

3.1. Control de la velocidad aerodinámica V_a

Teníamos que la dinámica simplificada en el punto de equilibrio nominal ($V_a = 31$ m/s) responde a la siguiente función de transferencia:

$$\frac{\delta V_a(s)}{\delta \Omega(s)} = \frac{0,265(s + 0,02671)}{(s^2 + 0,613s + 0,16)}$$

Por el lugar de las raíces puede sintetizarse un controlador como el siguiente:

- Se especifica un ancho de banda de 1.57 rad/s (2 segundos de tiempo de subida) y un margen de fase de 60° ($< 5\%$ de oscilaciones).

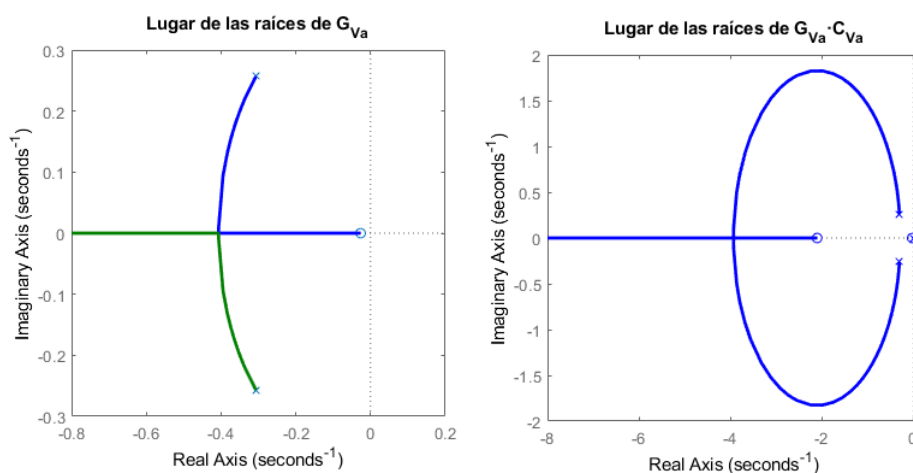


Figura 5.13: Lugar de las raíces del controlador de V_a

Los criterios de diseño del controlador estarán en la minimización de la sobreoscilación (amplio margen de fase) y una frecuencia del orden de la frecuencia natural del sistema (no es recomendable un control demasiado agresivo, pues la velocidad aerodinámica afecta en gran

medida a todas las demás variables del sistema). En este caso, la robustez es muy importante, pues una mala regulación de la velocidad aerodinámica compromete el comportamiento de la aeronave (tiene la dinámica dominante sobre otras variables).

Valores PID controlador de V_a	
K_p	10.2
K_i	2.76
K_d	0

Una vez quede la velocidad aerodinámica controlada, podemos pasar a diseñar un controlador para la altura. La estrategia seguida es muy parecida al control en cascada realizado para el modo Hovering. Una serie de PID anidados es la solución más utilizada en los autopilotos y, por lo general, da buenos resultados en las aeronaves de ala fija.

3.2. Controlador de altura $h = -z_B$

La dinámica real del movimiento a lo largo del eje Z es bastante compleja, pues intervienen numerosas fuerzas aerodinámicas y propulsivas. La ecuación que rige la velocidad de ascenso de la aeronave es⁹:

$$\dot{z}_B^{\{a\}} = -V_a \cdot \sin(\alpha) \quad (3.1)$$

Si suponemos que $\gamma \simeq 0$ (hipótesis de vuelo horizontal), tendremos que:

$$\dot{z}_B^{\{a\}} = \dot{z}_B, \quad \alpha = \theta_B \quad (3.2)$$

Entonces, podemos expresar la velocidad en el eje Z como:

$$\dot{z}_B = -V_a \cdot \sin(\theta_B) \quad (3.3)$$

Ahora, linealizando la ecuación (supuesta la variación de θ_B pequeña):

$$z_B = z_0 - \frac{V_a^{eq} \cdot \cos(\theta_B^{eq})}{s} \cdot \delta\theta_B \quad (3.4)$$

Atendiendo a esta ecuación, se plantea el siguiente esquema de control con dos controladores anidados: el más interior (más rápido) servirá para llevar θ_B hasta donde le indique el controlador exterior (más lento), que dispondrá su salida dependiendo del error de altura.

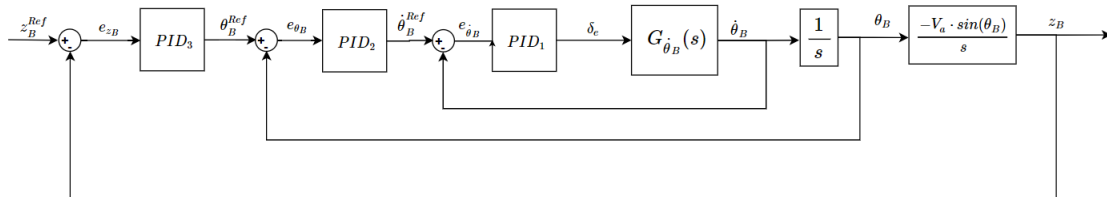


Figura 5.14: Esquema de control para el autopiloto en modo Alt-Hold

⁹Expresándola en ejes aerodinámicos.

El primer paso, es diseñar un controlador para obtener un ángulo θ_B deseado. Utilizamos el modelo que relaciona δ_e con $\dot{\theta}_B$ y aplicamos la misma estrategia que en los anteriores controladores:

$$G_{\dot{\theta}_B}(s) = \frac{\dot{\theta}_B}{\delta_e}(s) = \frac{-19,26(s + 0,96)}{(s + 283)(s^2 + 0,613s + 0,16)}$$

Para los PID de los lazos más interiores usaremos única y exclusivamente controladores proporcionales, que no garantizan error nulo en régimen permanente pero con una ganancia lo suficientemente alta cumplirán el objetivo de prelinealizar el bucle:

	Valores PID bucle interno	Valores PID bucle externo
K_p	-27	8
K_i	0	0
K_d	0	0

Para el controlador de la altura, sí que es conveniente utilizar un efecto integral para rechazar las perturbaciones y un efecto derivativo para evitar las sobreoscilaciones (respuesta amortiguada). Los valores escogidos finalmente son:

Valores PID bucle interno	
K_p	-0.01
K_i	-0.001
K_d	-0.008

El bloque en Simulink resultante de este diseño queda tal que así:

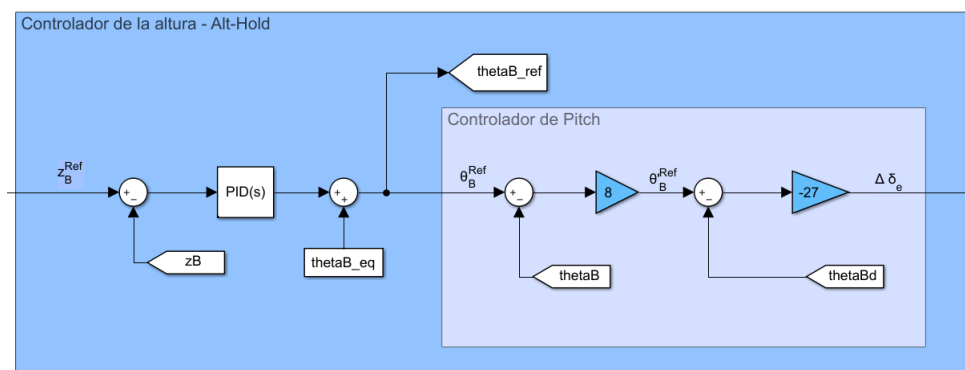


Figura 5.15: Bloque controlador de z_B en vuelo horizontal

3.3. Experimentos de vuelo

Para validar los controladores, se realizan dos experimentos: en el primero variamos la altura de referencia y vemos cómo se regula la velocidad aerodinámica, mientras que en el segundo experimento, mantenemos una altura constante mientras la velocidad aerodinámica de referencia cambia.

Experimento 1: cambio de altitud

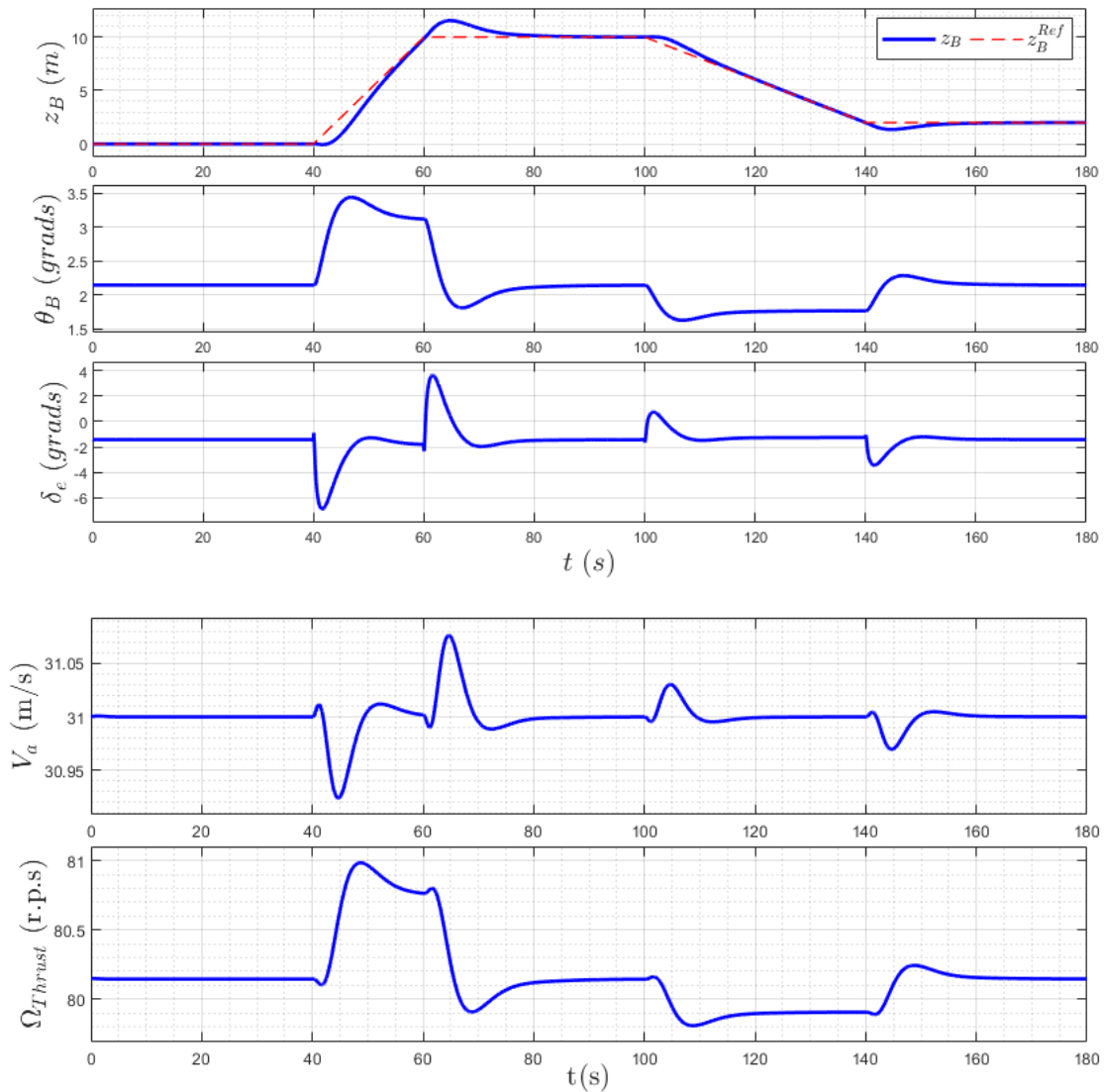


Figura 5.16: Experimento I - Vuelo horizontal

Experimento 2: cambio de velocidad aerodinámica

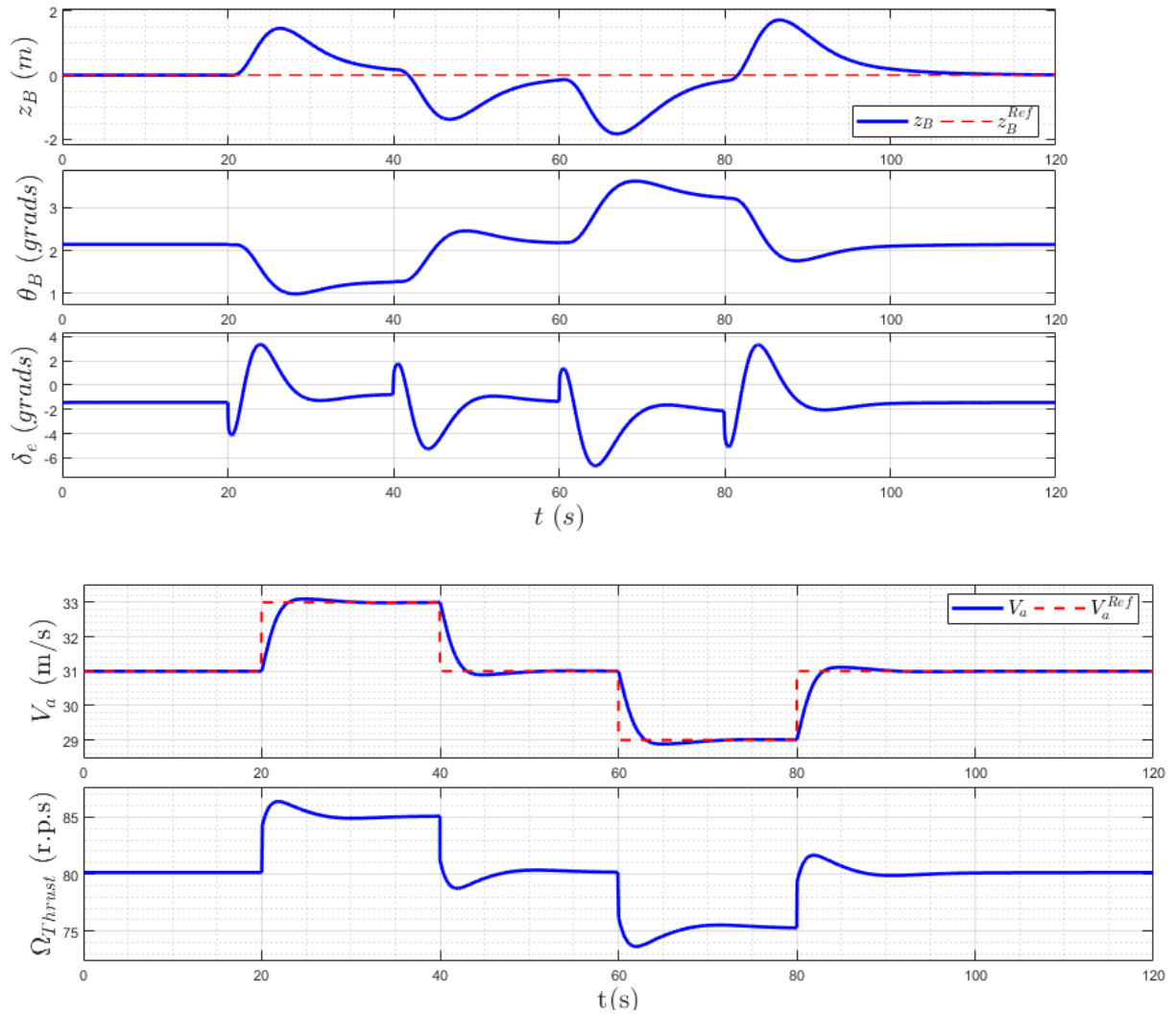


Figura 5.17: Experimento I - Vuelo horizontal

Valoración del desempeño del control

En el primer experimento (seguimiento de referencia de altura y regulación de la velocidad aerodinámica) se puede ver que la aeronave sigue de manera efectiva las referencias. La regulación aerodinámica, parte fundamental del control, garantiza que la altura pueda mantenerse y que recaiga sobre δ_e la capacidad para cambiar la magnitud del vector de sustentación aerodinámica a través del incremento del ángulo de ataque (α). En este sentido, se puede observar que la dinámica de seguimiento es mucho más lenta en el eje Z en este modo. El mecanismo de control de la altura a través de los elevadores requiere de incrementos pequeños del ángulo de *pitch*, lo que conlleva un control bastante lento pero robusto mientras se garantice la estabilidad de la velocidad aerodinámica de la nave.

En este sentido, la lentitud se ve acrecentada debido a la existencia de un cero de fase no mínima en el bucle cerrado. Este fenómeno se puede explicar físicamente debido a que los elevadores generan una fuerza en el sentido del descenso cuando lo que se pretende es ascender, lo que causa una pérdida de altura cuando en realidad se quiere ascender (ocurre lo mismo en el caso contrario). Esto se refleja en un decremento momentáneo inicial del factor de carga de la nave ($N_F = L/W$). En los aviones grandes, este fenómeno es despreciable puesto que el incremento de altura de referencia es muy grande frente a la pequeña pérdida inicial, pero en los modelos más pequeños puede apreciarse la resistencia inicial a seguir la referencia. Este fenómeno tan interesante puede modelarse mediante un retraso de la acción de control y se deja planteado, para la mejora de la implementación de esta red de controladores, la inclusión de alguna medida predictiva que solucione tal problema (por ejemplo, mediante la inclusión de un *predictor de Smith* - [7]).

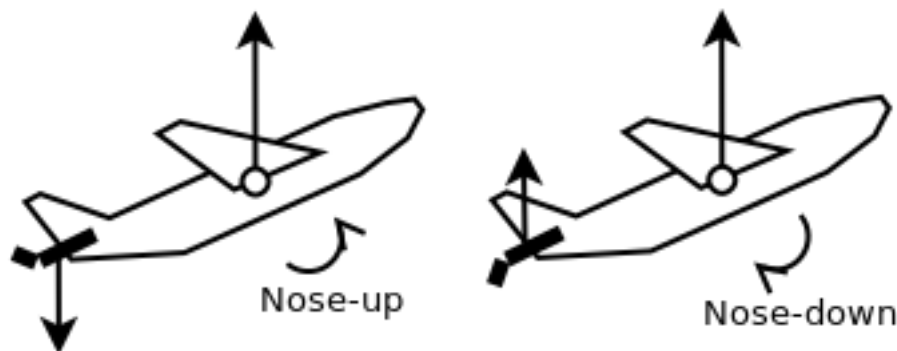


Figura 5.18: Fuerzas en el cambio de elevación.

En el experimento de seguimiento de una velocidad aerodinámica de referencia puede observarse la dificultad que tiene el controlador de altura de mantener una altura constante mientras varía V_a . Esto se entiende cuando se observa en las ecuaciones que el factor dominante sobre todas las demás variables recae en la velocidad aerodinámica. No obstante, el controlador permite acotar dicho error de altura en Z gracias a los movimientos de los elevadores. Se observa una pérdida máxima del entorno de 1m. Para cambios significativos en la velocidad aerodinámica se recomiendan variaciones lentas o prefiltradas para mantener acotada la pérdida de altura.

Capítulo VI. Transición secuencial basada en desacople

1. Planteamiento general

Una vez controlada la dinámica en los dos modos extremos (helicóptero y ala fija), se plantea el diseño de un sistema de control que permita transicionar entre estos dos modos. El principal problema radica en que los sistemas anteriormente descritos no son estables para cualesquiera valores de sus estados. Las regiones de estabilidad que marcan los mapas de operación descritos en el capítulo 2 y en el trabajo de [1] indican las trayectorias (en el espacio de estados) por las cuales se pueden alcanzar regiones estables de un modo a otro.

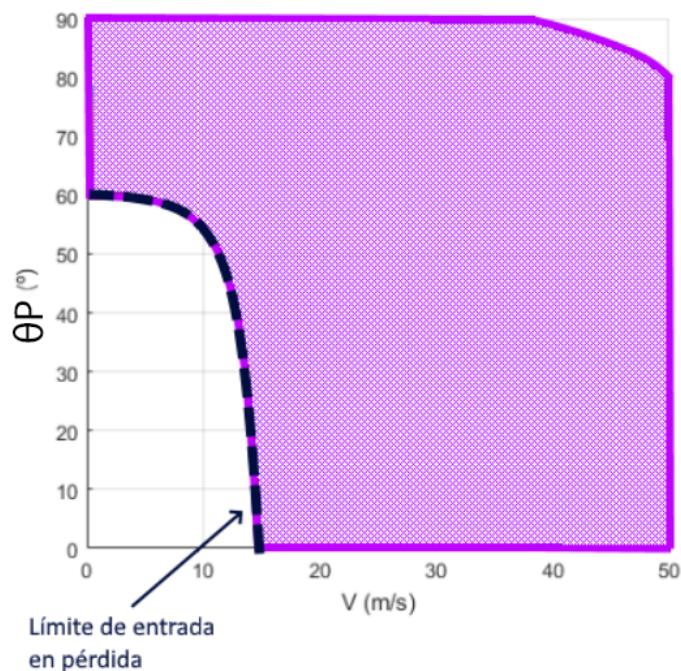


Figura 6.1: Región de estabilidad (θ_P frente a V_a). Fuente: [1]

Desde la perspectiva de la estrategia de diseño, se intentará realizar la transición llevando la aeronave de un punto de operación solo estable en uno de los modos a otro estable para el modo complementario, pasando por un punto estable intermedio. Las variables de estado significativas que marcan el modo en el que nos encontramos y sobre las que estableceremos el control para garantizar la estabilidad son la velocidad aerodinámica (V_a), el ángulo de

orientación de la nave (θ_B) y, en última instancia, el ángulo de los proptores, que hace las veces de acción de control. En resumen, el control desacoplado ha planteado el siguiente criterio de actuación:

Salida del sistema \ Modo	Modo Helicóptero	Modo Ala Fija
V_a/\dot{x}_B	θ_P	Ω
\dot{z}_B	Ω	$\theta_B \rightarrow \delta_e$

Si somos capaces, con esta elección, de llevar los estados adecuados a los niveles correctos, podremos intercambiar los controladores de ambos modos sin que la actitud y la velocidad de la nave se vean demasiado afectadas. Aquí, primará la elección de los puntos en los que se realiza dicha conmutación de los controladores y el filtrado de las acciones de control para evitar cambios súbitos en los actuadores.

2. Transición de modo Helicóptero a modo Ala Fija

Tras un análisis del sistema dinámico resulta obvio que la sustentación de la nave en el modo Helicóptero recae sobre el empuje de los motores. La ausencia de una cierta velocidad aerodinámica importante hace que, sin una orientación adecuada de los proptores, no se pueda sostener la nave de modo alguno puesto que la inclinación de los mismos va en detrimento de la sustentación. De esta forma, para obtener el efecto de sustentación aerodinámica antes de inclinar los motores, resulta lógico pensar que el primer paso es el de ganar velocidad (cuanto más alta más sustentación) y una vez la sensibilidad de los elevadores permita controlar el ángulo de ataque de la aeronave (luego la magnitud del vector de empuje), puede procederse a intercambiar los controladores.

Se puede resumir la estrategia en una secuencia o máquina de estados que haga las veces de árbitro a la hora de administrar las acciones de control:

- **Paso 1:** Cuando se activa la transición en modo helicóptero se ha de comandar la velocidad máxima posible que es capaz de alcanzar la aeronave, llevando el ángulo del proptor a su saturación en el sentido del avance. Esto impulsa el vehículo rápidamente, haciendo que ganemos velocidad en el eje X aún con los rotores prácticamente en vertical. El controlador del Thrust aún se encarga de hacer que la altura sea aproximadamente 0 (la robustez de este controlador garantiza el requisito en esta primera etapa).

En este periodo se va a activar también un control auxiliar proporcional para los elevadores. Aún cuando la sensibilidad en los primeros momentos es casi nula, debemos preparar el ángulo de ataque de la nave para que cuando aumente gradualmente V_a , la sustentación sea suficiente. Esto facilita la transición suave para el control de altura en FW.

- **Paso 2:** Cuando hayamos alcanzado cierto punto de V_a , seleccionado de las curvas de operación (la velocidad máxima que podemos generar con ese ángulo de Tilt), podemos comenzar a inclinar los proptores. Esto genera dos efectos: aumento de la velocidad aerodinámica debido al empuje creciente en el eje X y disminución de la sustentación debido al Thrust en el eje Z. La pérdida de sustentación se compensa con el ángulo de ataque ganado gracias a δ_e (ahora efectivo) y por acción del control de altura mediante Ω . La velocidad aerodinámica comienza a estabilizarse en su punto de equilibrio calculado y la altura ahora es más sensible a la misma que a la magnitud del Thrust.
- **Paso 3:** Una vez el ángulo de los proptores sea pequeño ($< 20^\circ$) y la velocidad aerodinámica comience a estabilizarse podemos cambiar el controlador de Z a través de

Ω por el de V_a a través de Ω con una transición suave debido al punto de equilibrio compartido entre ambos modos.

- Paso 4:** Adicionalmente, al alcanzar la velocidad aerodinámica correcta ya se puede conectar el control de altura Z mediante δ_e . Es importante que esto se haga siempre después de haber obtenido una V_a más o menos estable, puesto que, como se decía en capítulos anteriores, sin control de la velocidad aerodinámica (más lento), el control de altura a través de los elevadores no puede llegar a un equilibrio. Al final, los proprotadores quedan establecidos a 0° mientras que el ángulo θ_B quedará, ante un error 0 en altura, como el ángulo derivado del trimado a esa velocidad aerodinámica (9°).

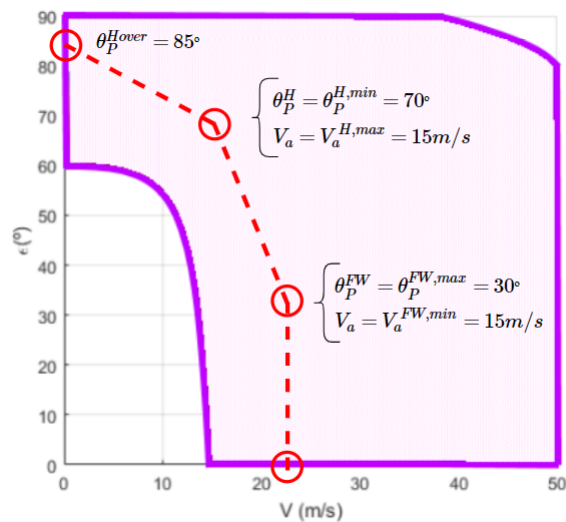


Figura 6.2: Trayectoria deseada sobre el mapa de operación de la aeronave

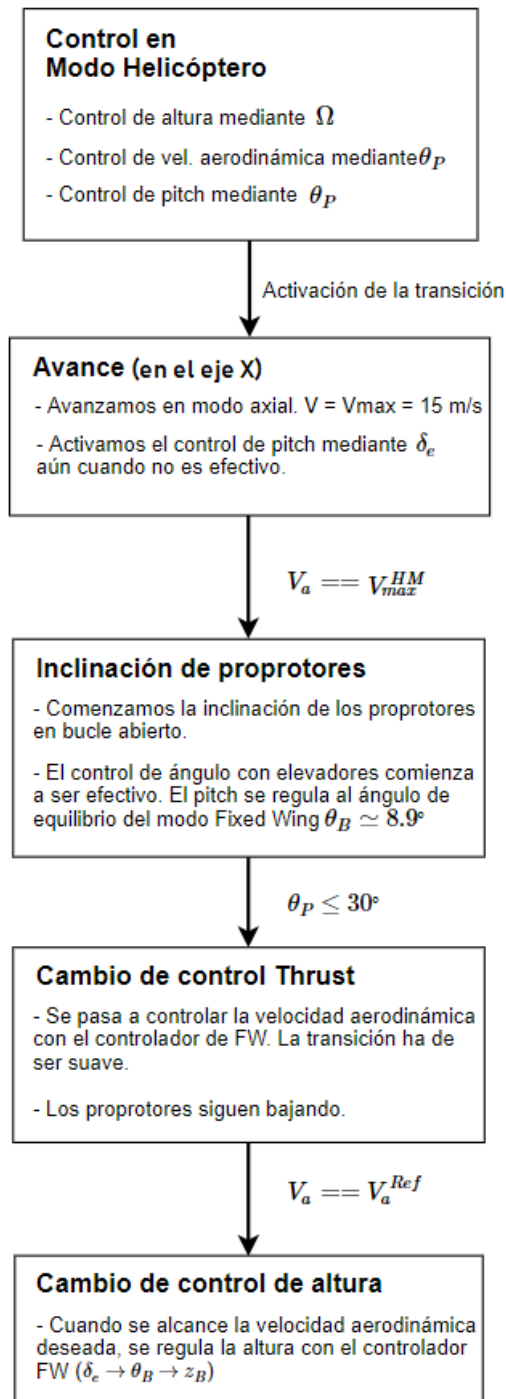


Figura 6.3: Algoritmo secuencial de transición H-FW

El sistema en Simulink quedaría tal como sigue:

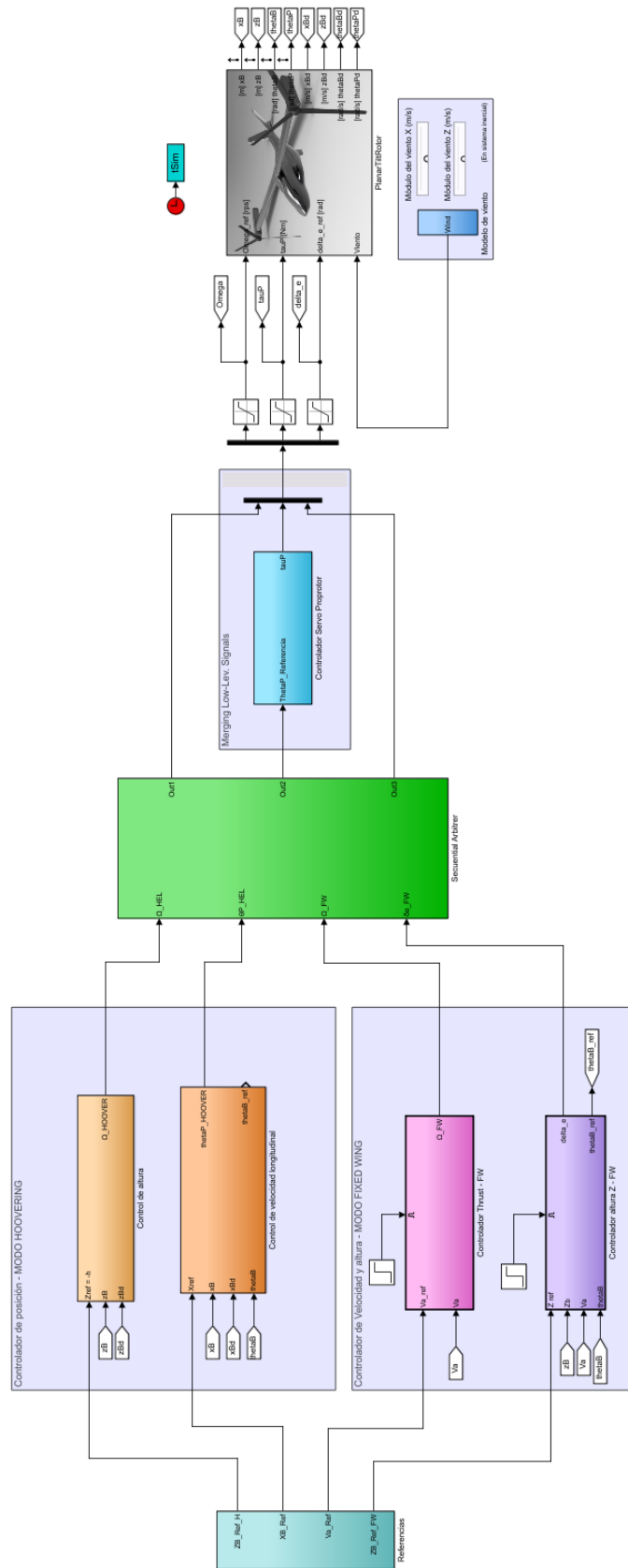


Figura 6.4: Configuración de autopiloto para transición H-FW

2.1. Experimento y resultados

Se ejecuta el experimento, que devuelve los siguientes resultados:

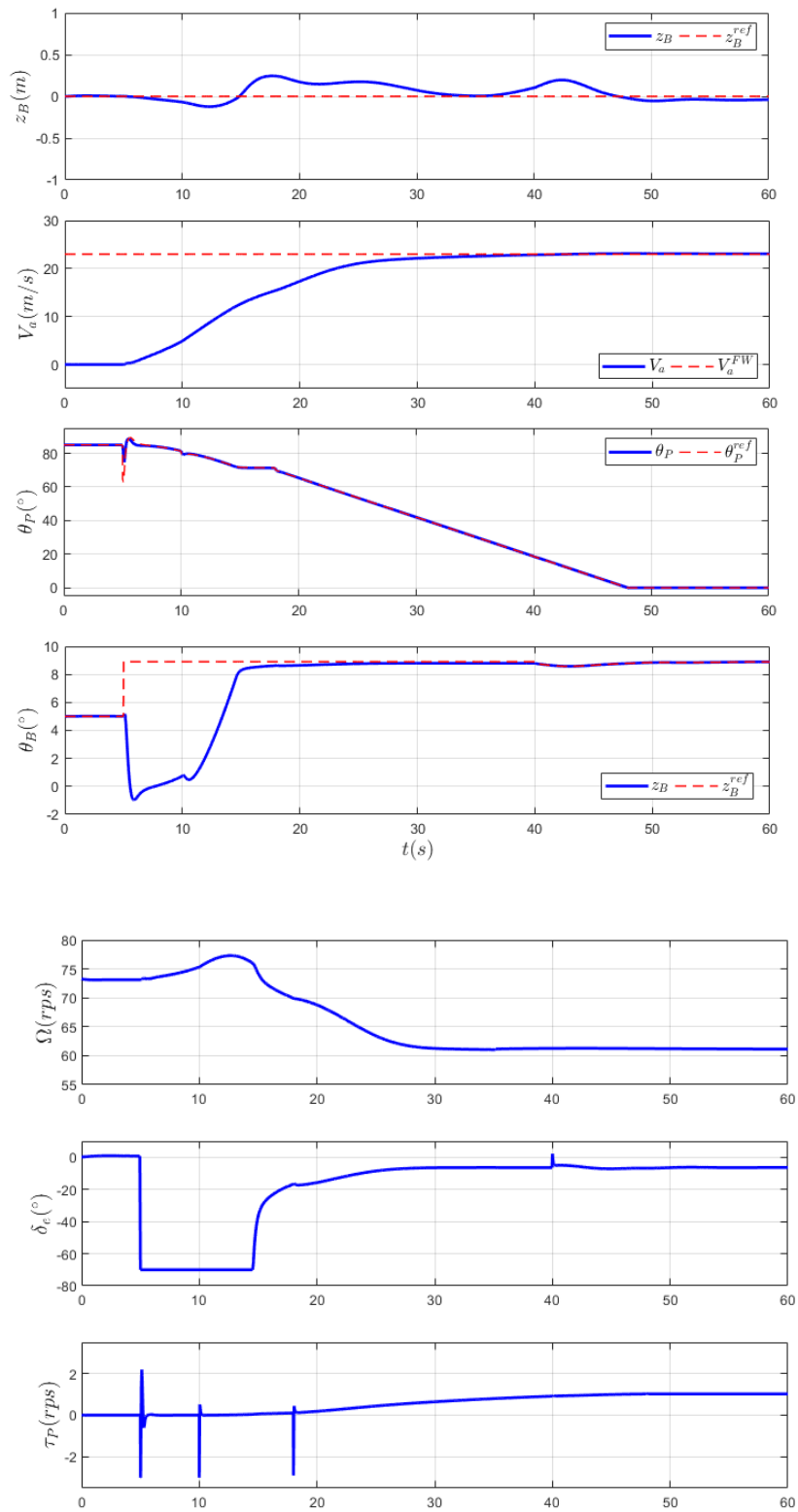


Figura 6.5: Gráficas de control de transición directa

2.2. Análisis del resultado

- Se puede observar que el resultado a la hora de realizar la transición de modo Helicóptero a modo Ala Fija es satisfactorio. Se consigue mantener la **altura Z** nivelada con un error máximo de 0.25m (en ejes inerciales) .
- El tiempo efectivo de transición (desde que se solicita tomar impulso hasta que se conecta el último controlador) es de 35 segundos. En ese tiempo, la aeronave recorre 448 metros a lo largo del eje X inercial. Si el viento incide de cola recorrerá más y al contrario si el viento incide de frente.
- La rapidez y eficiencia de la transición dependerá de la trayectoria de control utilizada y de la agresividad de los controladores. En este trabajo se plantea un posible control, más o menos eficiente, pero robusto. Cuanto más se aproxime la curva de trayectoria al límite, más rápida será la transición pero tanto menos robusta. Se ha decidido escoger esta trayectoria mientras no se tengan los datos precisos de la aeronave, en proceso de diseño y construcción.

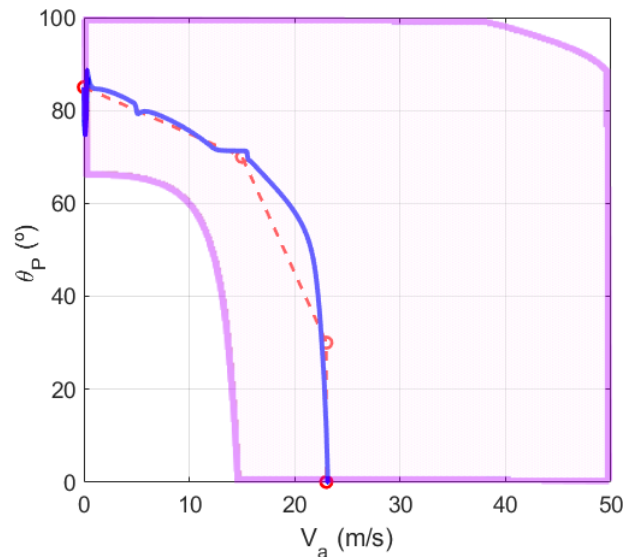


Figura 6.6: Seguimiento de la trayectoria mapeada sobre el campo de operación

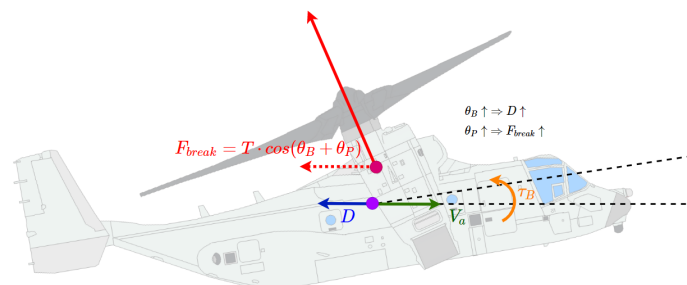
3. Transición de modo Ala Fija a modo Helicóptero

En el modo avión tenemos la particularidad de que los cambios de velocidad aerodinámica afectan sobremanera a la sustentación de la nave, lo que afecta mucho a la posición en el eje Z de la nave. Para la estrategia de transición inversa ha de tenerse en cuenta que, para reducir la velocidad aerodinámica debe existir una transición rápida del controlador de altura y un abatimiento también rápido de los proprotos. Igual que no se podía inclinar los rotores rápidamente en la transición directa, debido a la falta de velocidad en los instantes iniciales, en este caso ocurre al revés: no podemos bajar la velocidad aerodinámica tan rápidamente sin antes haber elevado los proprotos.

Aprovecharemos por tanto la sustentación temporal que ofrece la velocidad aerodinámica heredada del control anterior para poder inclinar los rotores y conmutar el control de Ω para garantizar la altura en $Z = 0$. Por otro lado, el proceso de frenado requiere de compensar la aceleración con el empuje de los motores y a su vez, mediante una fuerza de arrastre (*drag*) creciente gracias a un ángulo θ_B elevado (es el mismo comportamiento que se observa en un helicóptero intentando frenar).

El algoritmo queda resumido así:

- **Paso 1:** La velocidad aerodinámica es alta. Inclina los proprotos gradualmente para disminuir el efecto de Ω sobre V_a y ganar sustentación por empuje ante la caída de la sustentación aerodinámica.
- **Paso 2:** Cuando se supere cierto ángulo de los proprotos (40°), escogido como un punto de equilibrio de los mapas de trimado y mediante ajuste experimental, podemos conmutar el control de la velocidad aerodinámica. Ahora se controla z_B con Ω , lo que garantiza estabilidad en la altura mientras los proprotos siguen inclinándose y disminuyendo V_a .
- **Paso 3:** Para desacelerar rápidamente se conecta, una vez dentro del rango de actuación del controlador de \dot{x}_B , el regulador de los proprotos, que se inclinarán en sentido inverso al avance disminuyendo V_a significativamente hasta llevarla a 0. De forma paralela, para ayudar a frenar, se conmuta el controlador de la superficie de deflexión, aún con capacidad de actuación mientras no disminuya la velocidad de la aeronave, para obtener un ángulo θ_B elevado que a costa de aumentar el *lift* (rechazado por el controlador de z_B a través de Ω), aumenta significativamente la fuerza de arrastre (*drag*) contraria al movimiento.



- **Paso 4:** Cuando V_a sea prácticamente 0 y la transición se de por finalizada, entonces se desconecta el control de elevadores.

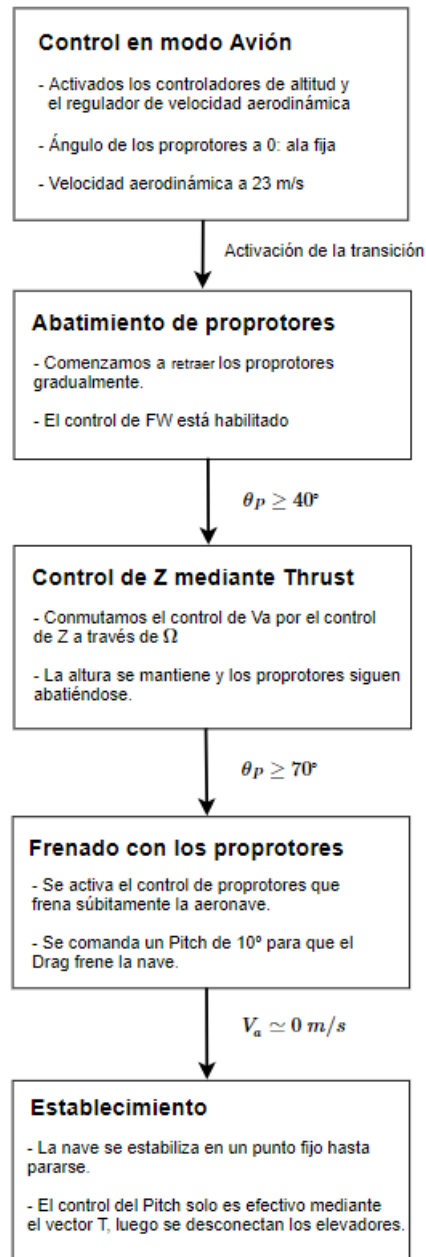


Figura 6.7: Algoritmo secuencial de transición H-FW

Algoritmo de transición Ala Fija - Hover

3.1. Experimento y resultados

Se ejecuta el experimento, que devuelve los siguientes resultados:

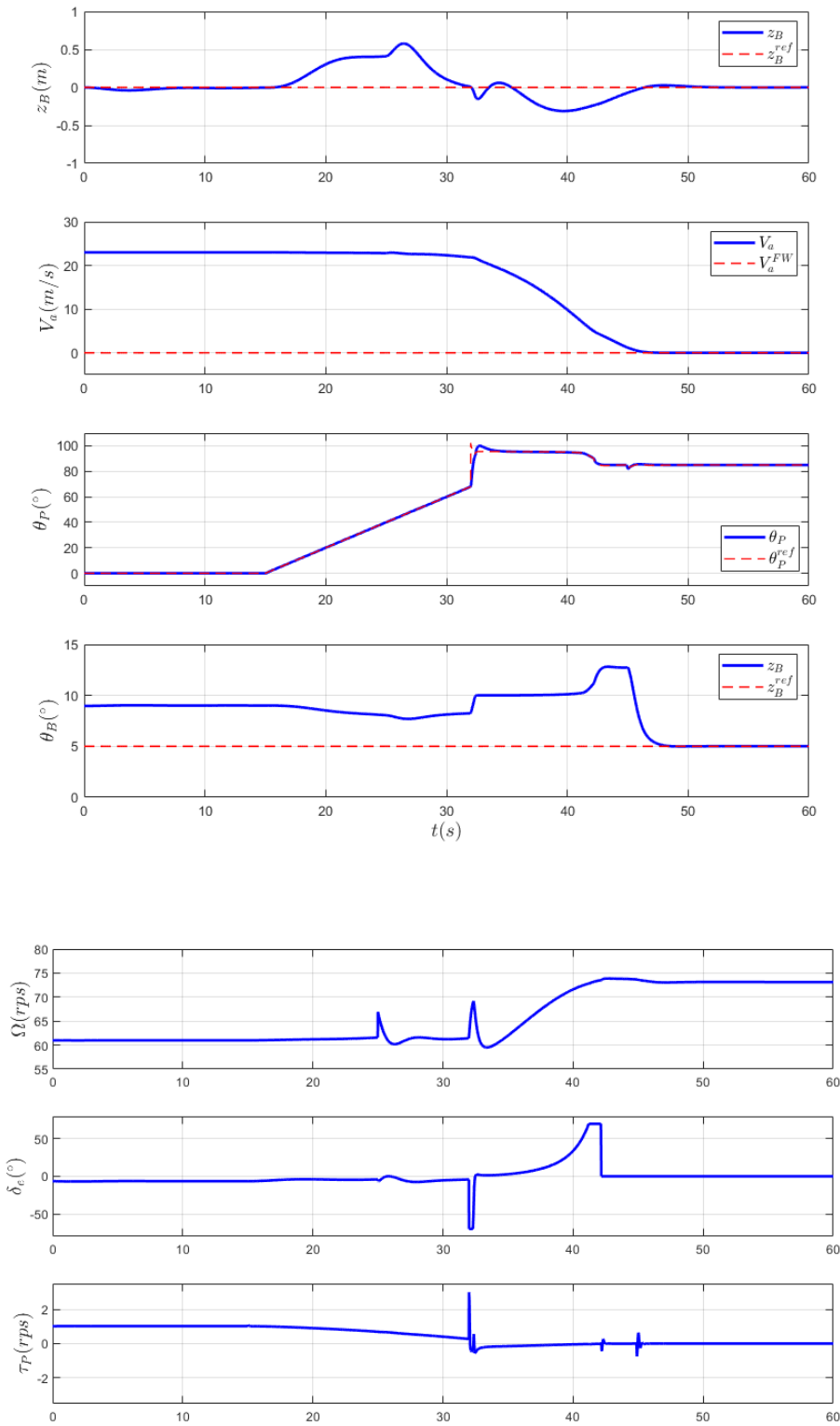


Figura 6.8: Gráficas de control de transición inversa

3.2. Análisis del resultado

- Se observa que la transición es satisfactoria. El error máximo en altura es de 0.58 metros en el eje Z inercial, lo que es un buen indicador de el desempeño final del control, al menos, en condiciones de vuelo estable y sin perturbaciones.
- El tiempo efectivo de transición (desde que se activa a los 15 segundos hasta que la velocidad aerodinámica es 0) es de 31 segundos. En este tiempo la aeronave recorre unos 545 metros en el eje X inercial. La rapidez del control dependerá en gran medida de la capacidad de frenado que tenemos. Un ángulo de frenado más acusado en el control de Hover implicará una disminución más súbita de la velocidad aerodinámica, pero puede introducir ciertos efectos indeseados: inclinación excesiva del ángulo θ_B (sustentación momentánea grande; peor para el control de altura) y los posibles efectos aerodinámicos sobre el modelo propulsivo cuando la hélice se orienta contra el sentido de V_a .
- La rapidez y eficiencia de la transición dependerá de la trayectoria de control utilizada y de la agresividad de los controladores. En este trabajo se plantea un posible control, más o menos eficiente, pero robusto. Cuanto más se aproxime la curva de trayectoria al límite, más rápida será la transición pero tanto menos robusta. Se ha decidido escoger esta trayectoria mientras no se tengan los datos precisos de la aeronave, en proceso de diseño y construcción.

Capítulo VII. Control mediante pre-linealización por realimentación

1. Planteamiento introductorio

Hasta ahora se ha planteado el control mediante la linealización de un sistema multiacoplado en el entorno de un punto de operación. A partir de ahí, se han desarrollado diversos controladores PID que sirven para estabilizar los estados del sistema y seguir ciertas referencias. La estrategia planteada solo requiere de un conocimiento local del sistema y de la robustez inherente de los controladores PID. Esto hace que estemos dejando de lado el conocimiento total de las ecuaciones que rigen la aeronave para quedarnos con una aproximación para el diseño, que será válida siempre en el entorno de ese mismo punto de operación y ante variaciones pequeñas de las señales de control.

Como se ha visto, si queremos transicionar el modo de vuelo de la aeronave, será necesario llevar al límite las hipótesis lineales planteadas en el control desacoplado, sufriendo las consecuencias de un cambio en la dinámica que empeore el comportamiento final del control. Tanto en el modo Hovering como en el de vuelo horizontal, tendremos que plantear numerosos controladores lineales para diversos puntos de operación del sistema tal y como se plantea en [8]. Esto puede resultar efectivo cuando tenemos sistemas de pocos grados de libertad y el esquema de control es simple, porque de otro modo, tendríamos que diseñar un conjunto grande de dichos controladores para múltiples puntos de las superficies de operación y acudir a grandes tablas de ajustes de parámetros (*Gain Scheduling Tables*) de laboriosa obtención. Adicionalmente, esto no garantiza ninguna clase de optimalidad y requiere de un suavizado efectivo a la hora de conmutar entre controladores.

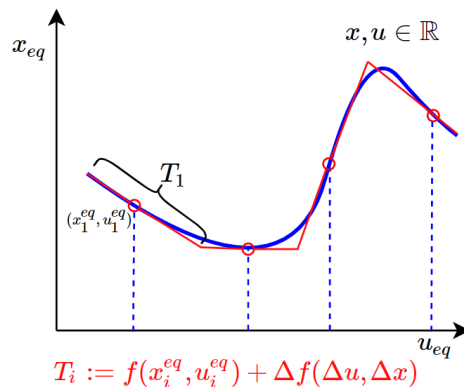


Figura 7.1: Linealización en torno a varios puntos de operación en un sistema SISO

Está visto que la no linealidad del sistema y lo fuertemente acoplado que está sugiere utilizar alguna técnica de control que permita *invertir* el sistema o, al menos, precompensarlo de cierta forma para que podamos controlarlo de manera efectiva con controladores lineales, garantizando su estabilidad.

Planteemos primero, como un ejercicio mental (e ingenuo), el siguiente control:

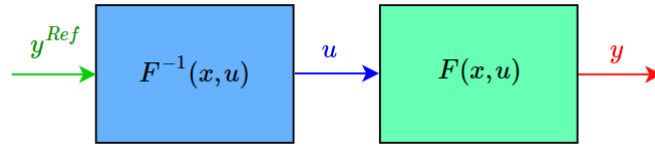


Figura 7.2: Esquema ideal de inversión

Está claro que, desde un punto de vista teórico e ideal, si se pudiera plantear tal esquema, tendríamos que $y^{Ref} = y$. No obstante, existen numerosos problemas por los cuales no es posible comenzar a dibujar sobre esta idea:

- Requiere que $F(x, u)$ sea completamente invertible (cosa generalmente imposible).
- Requiere que $F(x, u)$ sea estable (tampoco se cumple).
- O $F^{-1}(x, u)$ es **exactamente** la inversa de $F(x, u)$ o la incertidumbre hace imposible el seguimiento de referencia alguna.
- Es imposible lidiar con perturbación externa alguna, pues no estamos realimentando de ninguna forma.

No obstante, sí resulta interesante la idea de poder cancelar cierta dinámica no lineal presente en las ecuaciones que rigen el comportamiento del sistema para quedarnos con aquellas partes lineales. Este planteamiento se denomina *prelinealización por realimentación* y está presente por toda la literatura de control no lineal de sistemas (véase el caso, por ejemplo, del control por prelinealización en brazos robots manipuladores - *técnica del par calculado*).

2. Planteamiento matemático

Recordemos las ecuaciones que rigen el comportamiento dinámico (simplificado) del sistema, es decir, las ecuaciones de la mecánica de vuelo:

$$F_1 = \dot{V}_a = \frac{1}{m}(-D + T \cos(\theta_P + \theta_B - \gamma) - g \cdot m \cdot \sin(\gamma)) \quad (2.1)$$

$$F_2 = \dot{\gamma} = \frac{1}{mV_a}(L + T \sin(\theta_P + \theta_B - \gamma) - g \cdot m \cdot \cos(\gamma)) \quad (2.2)$$

$$F_3 = \ddot{\theta}_B = \frac{1}{2} \frac{\rho V_a^2 S c}{I_y} (C_{m,0} + C_{m,\alpha} \cdot (\theta_B - \gamma) + C_{m,q} \cdot \dot{\theta}_B + C_{m,\delta_e} \cdot \delta_e) + \frac{T}{I_y} (x_{JB} \sin(\theta_P) + z_{JB} \cos(\theta_P)) \quad (2.3)$$

Planteemos el siguiente cambio de variables, definiendo las siguientes señales virtuales de control:

$$\mathbf{U} := \begin{cases} m\dot{V}_a = U_T \\ mV_a\dot{\gamma} = U_{\theta_P} \\ I_y\ddot{\theta}_B = U_{\delta_e} \end{cases} \quad (2.4)$$

Queda el sistema de ecuaciones como:

$$\mathbf{F} := \begin{cases} U_T = -D + T\cos(\theta_P + \theta_B - \gamma) - g \cdot m \cdot \text{sen}(\gamma) \\ U_{\theta_P} = L + T\sin(\theta_P + \theta_B - \gamma) - g \cdot m \cdot \text{cos}(\gamma) \\ U_{\delta_e} = \bar{q} \cdot c \cdot (C_{m,0} + C_{m,\alpha} \cdot (\theta_B - \gamma) + C_{m,q} \cdot \dot{\theta}_B + C_{m,\delta_e} \cdot \delta_e) + T(x_{JB}\text{sen}(\theta_P) + z_{JB}\text{cos}(\theta_P)) \end{cases} \quad (2.5)$$

Si somos capaces de encontrar una solución, dado el valor de la terna \mathbf{U} y del vector de estados $\mathbf{x} = [V_a \ \gamma \ \theta_B \ \dot{\theta}_B]^T$, de los valores de las señales de actuación $\mathbf{u} = [\Omega \ \theta_P \ \delta_e]^T$ que cumplan la igualdad marcada por el sistema \mathbf{F} , tendremos la siguiente dinámica garantizada:

$$\begin{cases} U_T = m\dot{V}_a \rightarrow \frac{V_a(s)}{U_T(s)} = \frac{1}{m \cdot s} \\ U_{\theta_P} = mV_a \cdot \dot{\gamma} \rightarrow \frac{V_a(s)}{U_{\theta_P}(s)} = \frac{1}{V_a \cdot m \cdot s} \\ U_{\delta_e} = I_y\ddot{\theta}_B \rightarrow \frac{V_a(s)}{U_{\delta_e}(s)} = \frac{1}{I_y \cdot s^2} \end{cases} \quad (2.6)$$

El esquema de prelinealización quedaría de la siguiente forma:

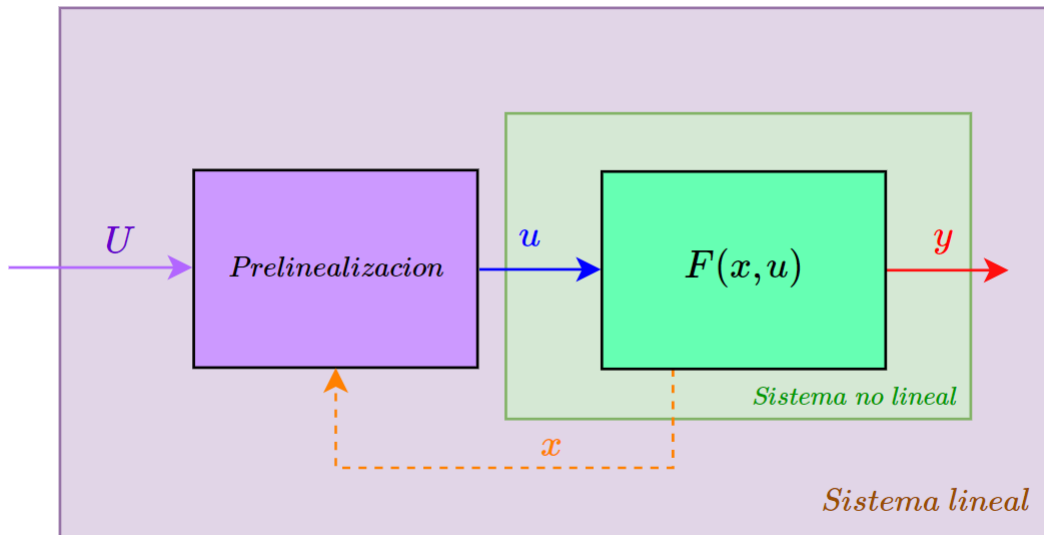


Figura 7.3: Esquema de prelinealización

El bloque de prelinealización quedará configurado por la resolución de las ecuaciones de \mathbf{F} , en un caso no trivial de sistema de ecuaciones no lineal al que habrá que prestar especial atención.

Es importante considerar los siguientes aspectos de este acercamiento:

- Cuanto más preciso sea el modelo que usemos para la prelinealización mejores resultados dará el método. Nosotros estamos usando las ecuaciones casi exactas de la dinámica del simulador, no obstante, no será así en el caso real, por lo que será necesario considerar cierta incertidumbre.
- Para asegurar la estabilidad del sistema, las señales de control virtuales U estarán dadas por tres controladores PID que sean capaces de paliar los efectos de las incertidumbres y las perturbaciones externas.
- Las ecuaciones no lineales no siempre tienen solución en todo el dominio de sus variables, por lo que habrá de estudiar su continuidad y resolubilidad.

3. Resolución de la prelinealización

Un vistazo al sistema de ecuaciones no lineales expuestos en la expresión (2.5) basta para deducir que la resolución no es trivial. Existen dos posibles formas de resolución de la prelinealización:

- **Método numérico:** Mediante una resolución numérica del sistema pueden llegar a obtenerse los valores correctos de las ecuaciones. No obstante, los métodos numéricos consumen tiempo de cálculo y requieren tiempo de computación, lo que plantea un reto desde el punto de vista del volcado del algoritmo en un microcontrolador, que tiene recursos y velocidad de cálculo limitada. Además, los métodos numéricos no lineales no suelen tener un tiempo de convergencia fija, lo que complica aún más la resolución.
- **Método analítico:** Se entiende, una vez descartada la implementación mediante métodos numéricos, que es necesario buscar una expresión analítica para la resolución de la prelinealización. El método analítico sí que es determinista en cuanto al tiempo de cálculo y casa perfectamente con las limitaciones del tiempo real. Por contra, tiene como desventaja que es necesaria una resolución unívoca del sistema que muchas veces no existe. En este caso, hemos planteado una resolución correcta debido a que la dinámica tiene pocas incógnitas, pero en sistemas mayores podría resultar una causa perdida.

3.1. Resolución de las ecuaciones. Procedimiento de cálculo:

Para resolver las ecuaciones, primero identificaremos los valores de las incógnitas (en rojo) donde todas las demás variables se suponen conocidas en cada bucle del algoritmo de control. Adicionalmente, resolveremos el sistema considerando primero T como una incógnita en sí misma y luego trasladaremos de T a Ω^{10} :

- Para la ecuación 1:

$$U_T = -\bar{q} \cdot \underbrace{(CD_0 + CD_1 \cdot [CL_\alpha(\alpha) + CL_{\delta_e} \cdot \delta_e] + CD_2 \cdot [CL_\alpha(\alpha) + CL_{\delta_e} \cdot \delta_e]^2)}_D + T \cos(\theta_P + \alpha) - g \cdot m \cdot \text{sen}(\gamma) \quad (3.1)$$

- Para la ecuación 2:

$$U_{\theta_P} = \bar{q} \cdot \underbrace{(CL_\alpha(\alpha) + CL_{\delta_e} \cdot \delta_e)}_L + T \text{sen}(\theta_P + \alpha) - g \cdot m \cdot \text{cos}(\gamma) \quad (3.2)$$

- Para la ecuación 3:

$$U_{\delta_e} = \bar{q} \cdot c \cdot (C_{m,0} + C_{m,\alpha} \cdot \alpha + C_{m,\delta_e} \cdot \dot{\theta}_B + C_{m,\delta_e} \delta_e) + T[x_{JB} \text{sen}(\theta_P) + z_{JB} \text{cos}(\theta_P)] \quad (3.3)$$

Ahora, agrupemos los las incógnitas:

¹⁰ $\bar{q} = \frac{1}{2} \rho S V_a^2$

- Ecuación 1:

$$\underbrace{-\bar{q}[CD_1CL_{\delta_e} + 2 \cdot CD_2CL_{\delta_e}CL_{\alpha}(\alpha)]\delta_e}_{\epsilon_1} - \underbrace{\bar{q}(CD_2CL_{\delta_e}^2)\delta_e^2}_{\epsilon_2} + T \cos(\theta_P + \alpha) = \quad (3.4)$$

$$\underbrace{U_T + gm \cdot \text{sen}(\gamma) + \bar{q}(CD_0 + CD_1CL_{\alpha} + CD_2CL_{\alpha}^2)}_{E_1}$$

- Ecuación 2:

$$\underbrace{\bar{q}CL_{\delta_e} \cdot \delta_e}_{\epsilon_3} + T \text{sen}(\theta_P + \alpha) = \underbrace{U_{\theta_P} - \bar{q}CL_{\alpha}(\alpha) + g \cdot m \cdot \cos(\gamma)}_{E_2} \quad (3.5)$$

- Ecuación 3:

$$\underbrace{\bar{q} \cdot c \cdot C_{m,\delta_e} \cdot \delta_e}_{\epsilon_4} + x_{JB} T \text{sen}(\theta_P) + z_{JB} T \cos(\theta_P) = \underbrace{U_{\delta_e} - \bar{q} \cdot c \cdot (C_{m,0} + C_{m,\alpha} \cdot \alpha + C_{m,\delta_e} \cdot \dot{\theta}_B)}_{E_3} \quad (3.6)$$

Finalmente, tendremos el sistema siguiente:

$$\begin{cases} \epsilon_1 \delta_e + \epsilon_2 \delta_e^2 + T \cos(\theta_P + \alpha) = E_1 \\ \epsilon_3 \delta_e + T \text{sen}(\theta_P + \alpha) = E_2 \\ \epsilon_4 \delta_e + x_{JB} \cdot T \text{sen}(\theta_P) + z_{JB} \cdot T \cos(\theta_P) = E_3 \end{cases} \quad (3.7)$$

Para facilitar el encontrar la solución analítica, pues todavía resulta difícil de resolver, podemos acudir a las expresiones trigonométricas de la suma de ángulos:

$$T \cdot \cos(\theta_P + \alpha) = T \cdot \cos(\theta_P) \cdot \cos(\alpha) - T \cdot \text{sen}(\theta_P) \cdot \text{sen}(\alpha) \quad (3.8)$$

$$T \cdot \text{sen}(\theta_P + \alpha) = T \cdot \text{sen}(\theta_P) \cdot \cos(\alpha) + T \cdot \cos(\theta_P) \cdot \text{sen}(\alpha)$$

Podemos hacer un cambio de variable, explicitando las componentes normal y tangencial de T:

$$\begin{cases} T \cdot \cos(\theta_P) = T_{\parallel} \\ T \cdot \text{sen}(\theta_P) = T_{\perp} \end{cases} \quad (3.9)$$

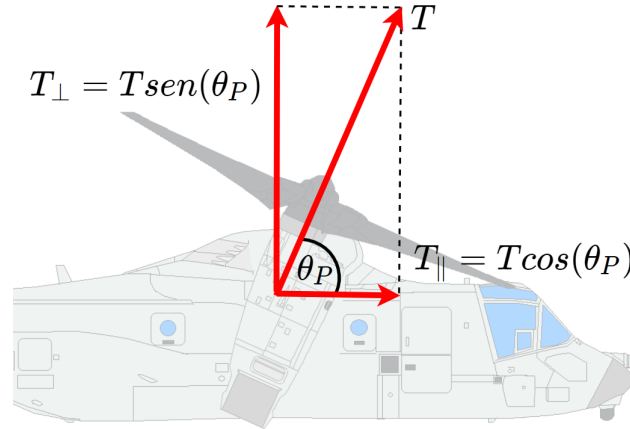


Figura 7.4: Proyección del vector de empuje T

Sustituyendo en el sistema final, las ecuaciones quedan tal que así:

$$\begin{cases} \epsilon_1 \delta_e + \epsilon_2 \delta_e^2 + \cos(\alpha) T_{\parallel} - \sin(\alpha) T_{\perp} = E_1 \\ \epsilon_3 \delta_e + \sin(\alpha) T_{\parallel} + \cos(\alpha) T_{\perp} = E_2 \\ \epsilon_4 \delta_e + x_{JB} \cdot T_{\perp} + z_{JB} \cdot T_{\parallel} = E_3 \end{cases} \quad (3.10)$$

Tendremos así un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas. Habiendo descompuesto T en sus dos componentes, tendremos que queda en una forma mucho más presta a resolverse analíticamente, pues queda un sistema de ecuaciones casi lineal, exceptuando el término cuadrático de δ_e .

El resultado puede ser computado en una expresión analítica, ahora que está en una forma deseable, mediante Matlab. El resultado es notablemente extenso como para ponerlo por escrito, pero lo suficientemente acotado como para resultar procesable en poco tiempo.

Habiendo obtenido los valores de T_{\parallel} , T_{\perp} y δ_e , podemos operar para obtener θ_P y T como¹¹:

$$T = \sqrt{T_{\perp}^2 + T_{\parallel}^2} \quad (3.11)$$

y

$$\theta_P = \text{atan} \left(\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \right) \quad (3.12)$$

Observación. Debido a la existencia de un término cuadrático, existirán 2 soluciones para cada incógnita. Es importante escoger qué soluciones son las adecuadas y las que cumplen con las ecuaciones. A falta de un criterio analítico único, se ha optado por realizar distintas simulaciones analizando cuál es la adecuada. En última instancia, la solución escogida de las dos posibles es única para las condiciones normales de vuelo.

Finalmente, el bloque de prelinealización debe terminar trasladando la variable T en términos de Ω . Sabemos, del modelo propulsivo, que:

¹¹En el programa usaremos la función $\text{atan2}(x,y)$ que permite distinguir el signo de los términos para discernir el cuadrante del ángulo.

$$T = n \cdot \rho \cdot D_r^2 \cdot (C_{T,0} D_r^2 \Omega^2 + C_{T,1} D_r V_a \Omega + C_{T,2} V_a^2) \quad (3.13)$$

De este modo:

$$\Omega = n \rho D_r^2 \cdot \frac{-C_{T,1} D_r V_a + \sqrt{(C_{T,1} D_r V_a)^2 - 4 C_{T,0} D_r^2 \cdot (C_{T,2} V_a^2 - T)}}{2 \cdot C_{T,0} D_r^2} \quad (3.14)$$

3.2. Caso particular para baja velocidad aerodinámica

La resolución de las ecuaciones plantea una solución en todo el dominio de las variables exceptuando un único punto donde no existe solución definida. Está claro que cuando la velocidad aerodinámica es 0, el ángulo γ no queda definido. Por tanto, la solución de las ecuaciones arroja una indeterminación y no es computable. Para solventar esto, se ha planteado un modelo simplificado que sirva para el caso en el que $V_a < V_a^{Thresh}$.

Despreciando los términos aerodinámicos, podemos plantear las ecuaciones dinámicas expuestas en el capítulo 3, en términos de aceleraciones en ejes inerciales:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_B &= \frac{1}{m} \cdot T(\Omega) \cdot \cos(\theta_P + \theta_B) \\ \ddot{z}_B &= \frac{1}{m} \cdot (-T(\Omega) \cdot \sin(\theta_P + \theta_B) + g \cdot m) \\ \ddot{\theta}_B &= \frac{T(\Omega)}{I_y} (\cos(\theta_P) \cdot z_{JB} + \sin(\theta_P) \cdot x_{JB}) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Como ya se dijo, la capacidad de actuación de δ_e desaparece y el sistema se convierte en subactuado. El esquema de control que se plantea consiste en un bloque de prelinealización (del mismo modo que en el apartado anterior) donde se consiga controlar a baja velocidad el movimiento en ejes inerciales mediante dos acciones de control virtual (U_T, U_{θ_P}) para que el sistema resultante tenga una dinámica en esos ejes casi lineal.

La resolución de las ecuaciones en este caso particular es trivial. Definiendo las señales de control virtual como:

$$\begin{aligned} U_T &= m \cdot \ddot{z}_B \\ U_{\theta_P} &= m \cdot \ddot{x}_B \end{aligned} \quad (3.16)$$

Se resuelve:

$$\begin{aligned} -U_{\theta_P} + g \cdot m &= T(\Omega) \cdot \sin(\theta_P + \theta_B) \\ U_T &= T(\Omega) \cdot \cos(\theta_P + \theta_B) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Dividiendo una expresión por otra:

$$\frac{-U_{\theta_P} + g \cdot m}{U_T} = \tan(\theta_P + \theta_B) \longrightarrow \theta_P = \text{atan} \left(\frac{-U_{\theta_P} + g \cdot m}{U_T} \right) - \theta_B \quad (3.18)$$

Una vez calculado θ_P , la acción de control Ω se calcula sustituyendo y aplicando la ecuación dada en (3.14):

$$\frac{U_T}{\cos(\theta_B + \theta_P)} = T(\Omega) \longrightarrow \Omega \quad (3.19)$$

El esquema de prelinealización quedaría así:

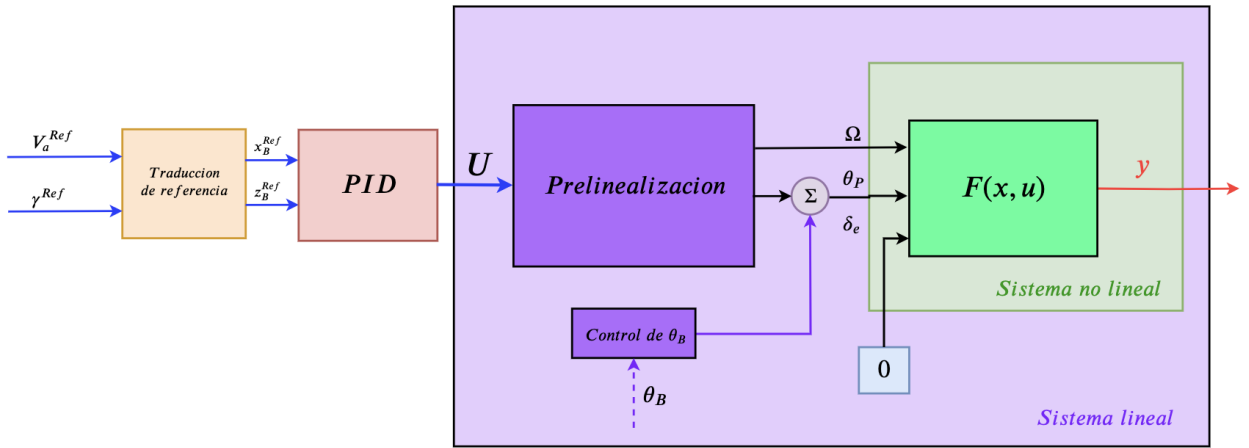


Figura 7.5: Proyección del vector de empuje T

Mientras el sistema siga teniendo una deficiencia de sensibilidad en θ_B por parte de δ_e , debemos seguir incluyendo el controlador PID diseñado para la estabilización del ángulo de orientación de la nave que se planteó en el capítulo anterior y se fijará $\delta_e = 0^\circ$.

4. Control PID

Una vez prelinealizado el sistema (independientemente del modo que sea), podemos plantear unos controladores PID para la dinámica resultante. Recordemos la dinámica lineal expuesta en 2.6.

Para la dinámica con $V_a > V_a^{THRESHOLD}$:

$$\begin{cases} \frac{V_a(s)}{U_T(s)} = \frac{1}{m \cdot s} \\ \frac{\gamma(s)}{U_{\theta_P}(s)} = \frac{1}{m \cdot V_a s} \\ \frac{\theta_B(s)}{U_{\delta_e}(s)} = \frac{1}{I_y s^2} \end{cases} \quad (4.1)$$

Para la dinámica con $V_a < V_a^{THRESHOLD}$:

$$\frac{z_B(s)}{U_T(s)} = \frac{x_B(s)}{U_{\theta_P}} = \frac{1}{m \cdot s^2} \quad (4.2)$$

Es notable el hecho de que la dinámica del ángulo de asentamiento de la velocidad aerodinámica (γ) depende directamente de V_a . Por tanto, debemos asegurar para garantizar la estabilidad, que la velocidad aerodinámica sea prácticamente constante. Así, es necesario diseñar los controladores con un ancho de banda diferenciado de modo que se cumpla la siguiente condición:

$$BW_{U_T} \geq 10 \cdot BW_{U_{\theta_P}} \quad (4.3)$$

Atendiendo a esta característica, diseñaremos los controladores lineales según las especificaciones enumeradas en el capítulo anterior (Control Desacoplado - Lugar de las Raíces).

Para la dinámica a baja velocidad:

	U_T/z_B	U_{θ_P}/x_B ⁽¹²⁾
K_P	16	18
K_I	2	0.5
K_D	35	45

Cuadro 4: Valores PID del control de baja velocidad

Para la dinámica de alta velocidad:

	U_T/V_a	U_{θ_P}/γ	U_{δ_e}/θ_B
K_P	13.36	1.82	12
K_I	7.86	0.14	0
K_D	0	0	8

Cuadro 5: Valores PID del control de alta velocidad

Gestión de las referencias de movimiento

Las referencias en el modo Hover estarán dadas en forma de posición (x, z) pues resulta conveniente guiar en posición la aeronave a baja velocidad para despegue, aterrizaje y colocación. No obstante, también pueden transformarse las referencias en el marco inercial en referencias de velocidad aerodinámica y ángulo de movimiento. Este cambio a polares constituye el bloque de referencias que nos ayudará a cuando en la transición se haya de especificar una curva de velocidad aerodinámica de referencia. El cambio de variables es el siguiente:

$$\begin{cases} x_B^{Ref}(s) = \frac{V_a^{Ref} \cdot \cos(\gamma^{Ref})}{s} \\ z_B^{Ref}(s) = \frac{-V_a^{Ref} \cdot \sin(\gamma^{Ref})}{s} \end{cases} \quad (4.4)$$

¹²Estos valores se han sometido a un ajuste fino tras ciertos experimentos.

Para el modo en vuelo horizontal tendremos 3 referencias resultantes de la prelinealización: V_a^{Ref} , γ^{Ref} , θ_B^{Ref} . Estas tres variables de referencia no pueden especificarse con cualesquiera valores tal y como se ha visto en los mapas de operación. De esta forma, si queremos un conformar un autopiloto que disponga de una entrada de z_B^{Ref} , deberemos crear una etapa previa de configuración que permita obtener la altura deseada mediante unas referencias de ángulo adecuado.

Este problema se ha solventado mediante una técnica ya utilizada. El ángulo de *pitch* viene a resultar de un lazo exterior que es proporcional al error en la altura deseada. Tal y como se configuró en el control desacoplado, θ_B^{Ref} aumentará cuando tengamos que ascender y disminuye cuando tengamos que descender. En régimen permanente, el ángulo será el de equilibrio con el error en $Z = 0$.

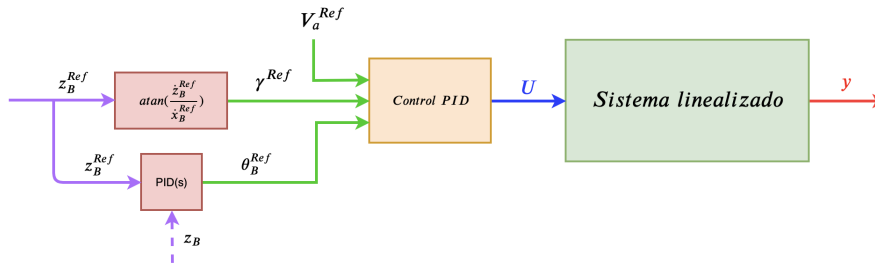


Figura 7.6: Gestión de las señales de referencia

5. Experimentos y resultados

5.1. Hovering

El primer experimento consiste en comandar una serie de escalones en las referencias tanto de x como de z :

Vuelo en ascenso

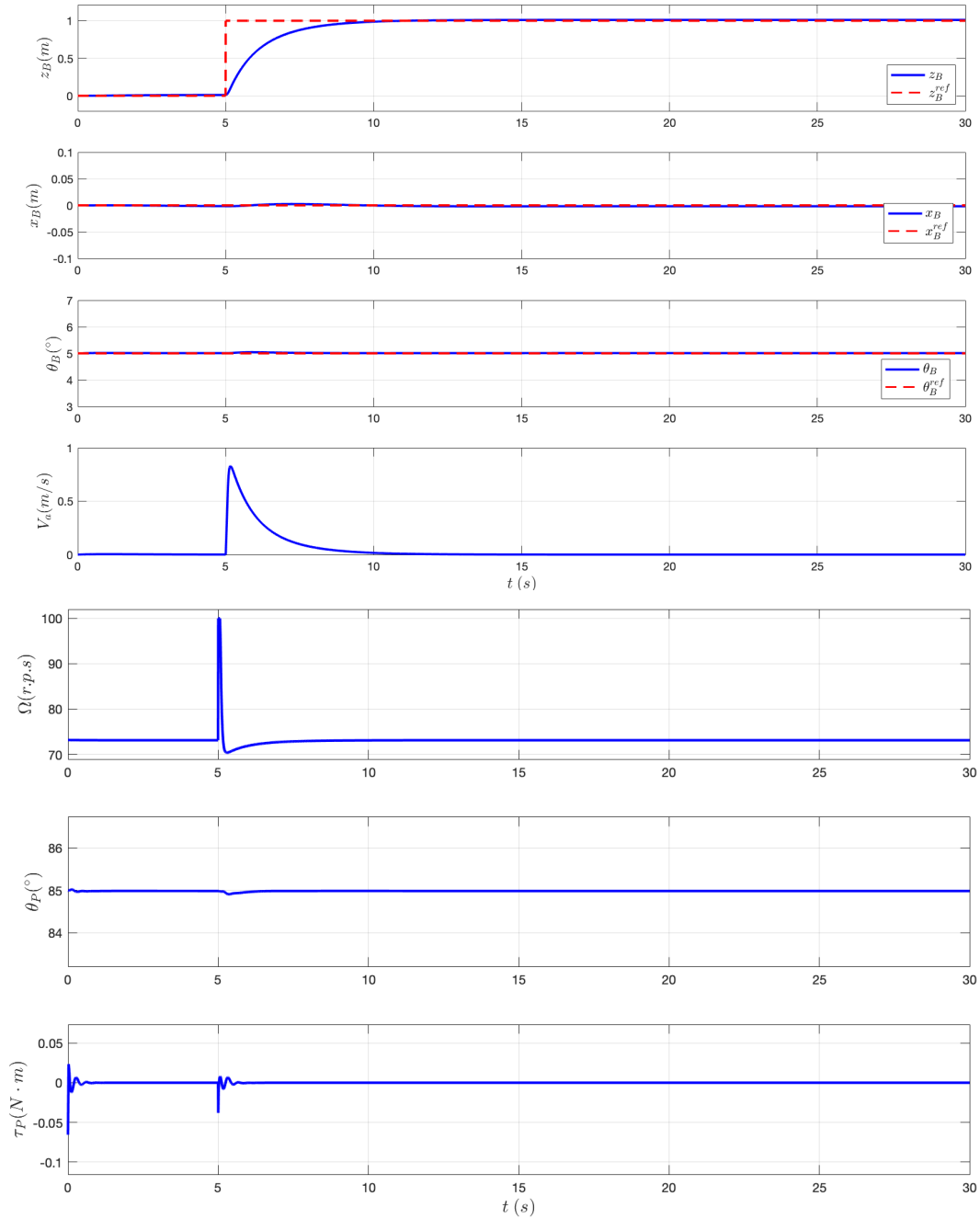


Figura 7.7: Experimento I - Vuelo en avance

Vuelo en avance

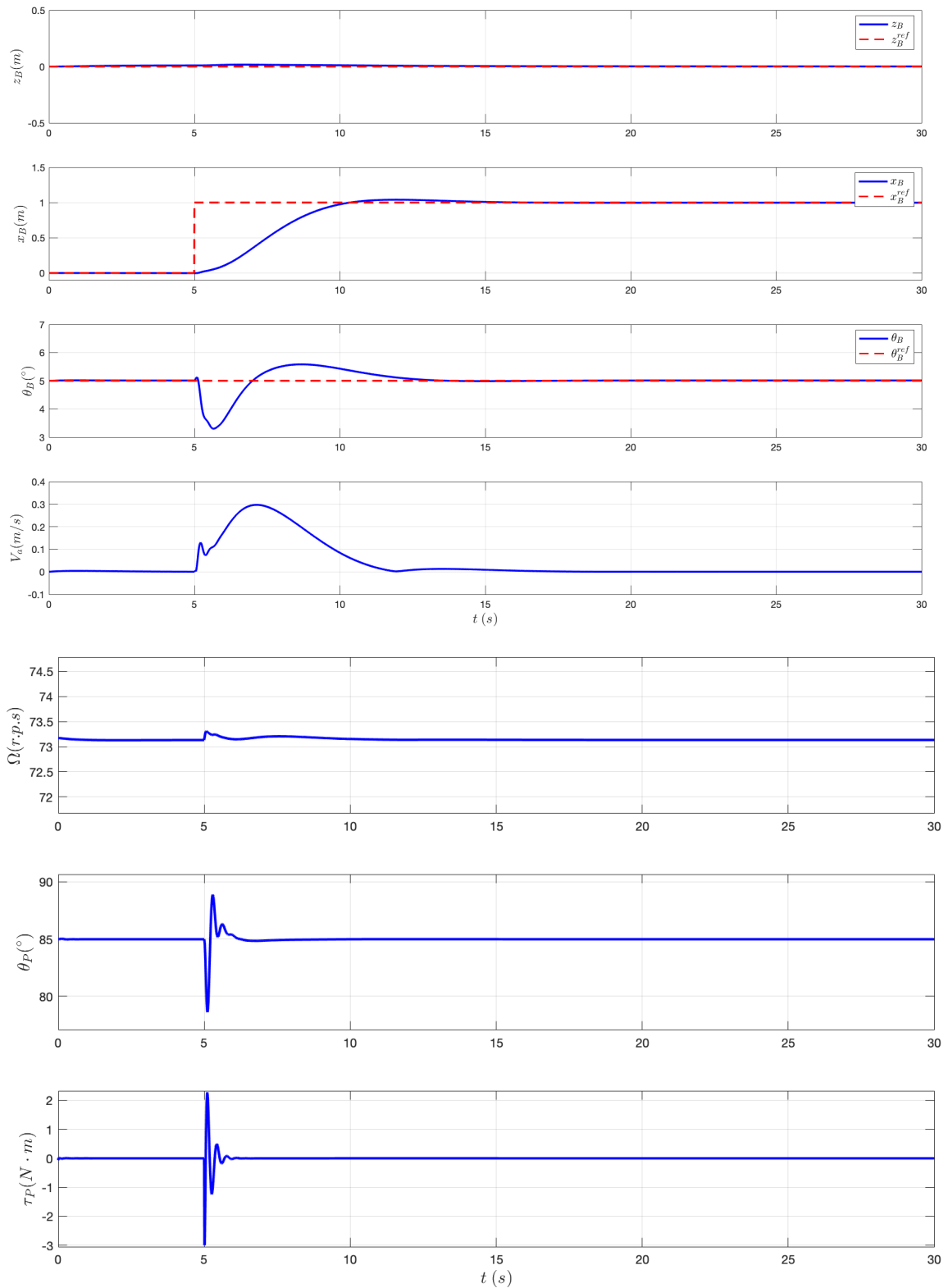
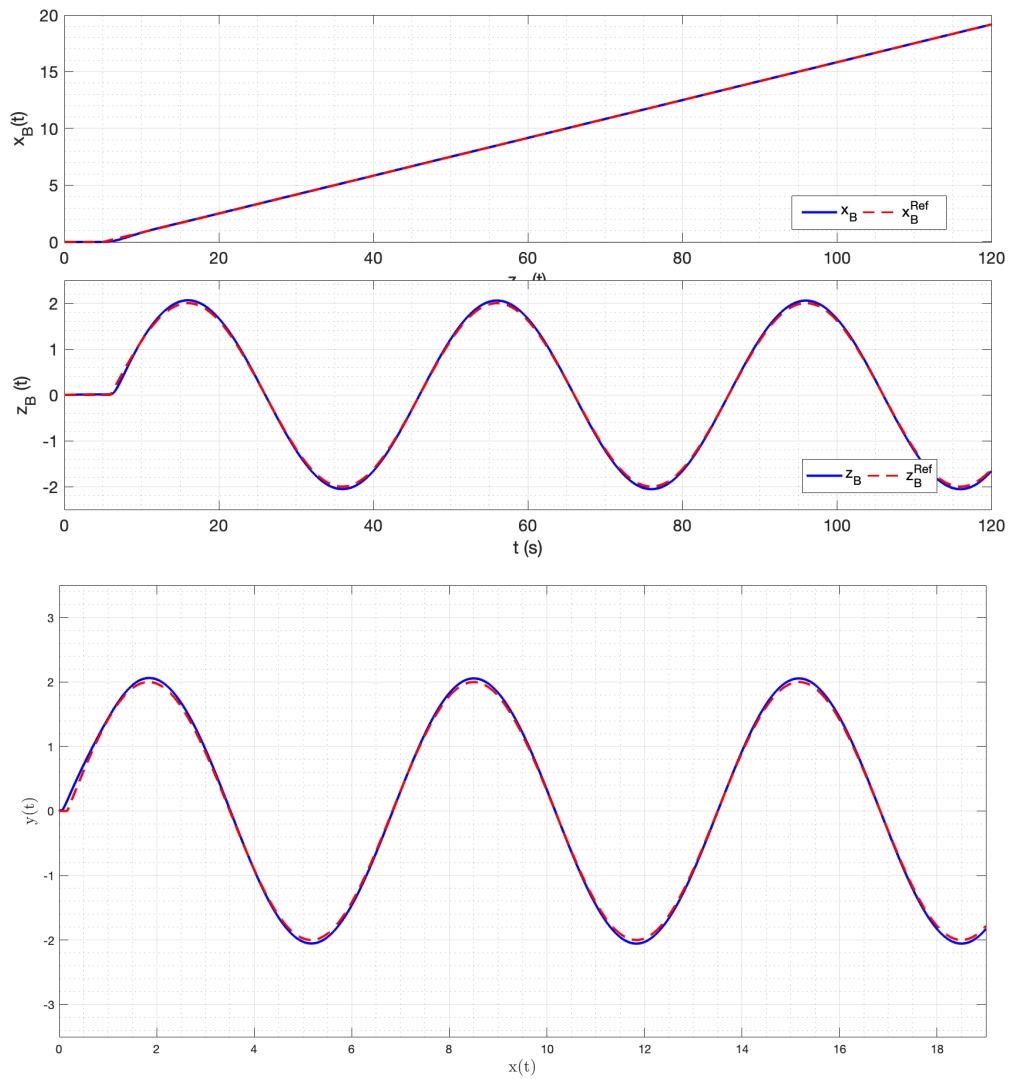


Figura 7.8: Experimento II - Vuelo en ascenso

Trayectoria combinada:

Utilizando la trayectoria genérica que especificamos en el anterior diseño de control.



5.2. Vuelo horizontal

Realizamos los mismos experimentos que con el control desacoplado con el fin de comparar más adelante los resultados:

Experimento I: Cambio de altura

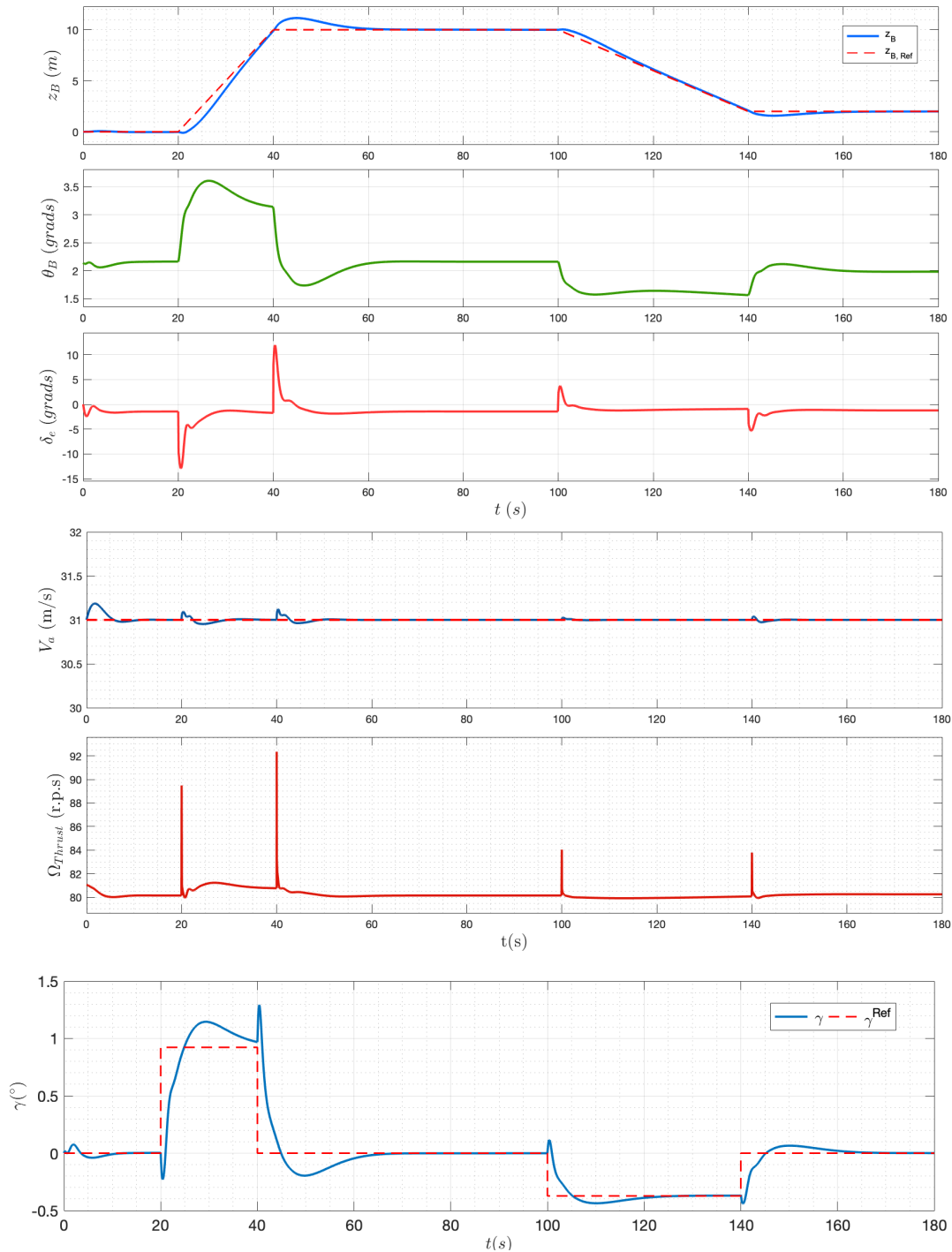
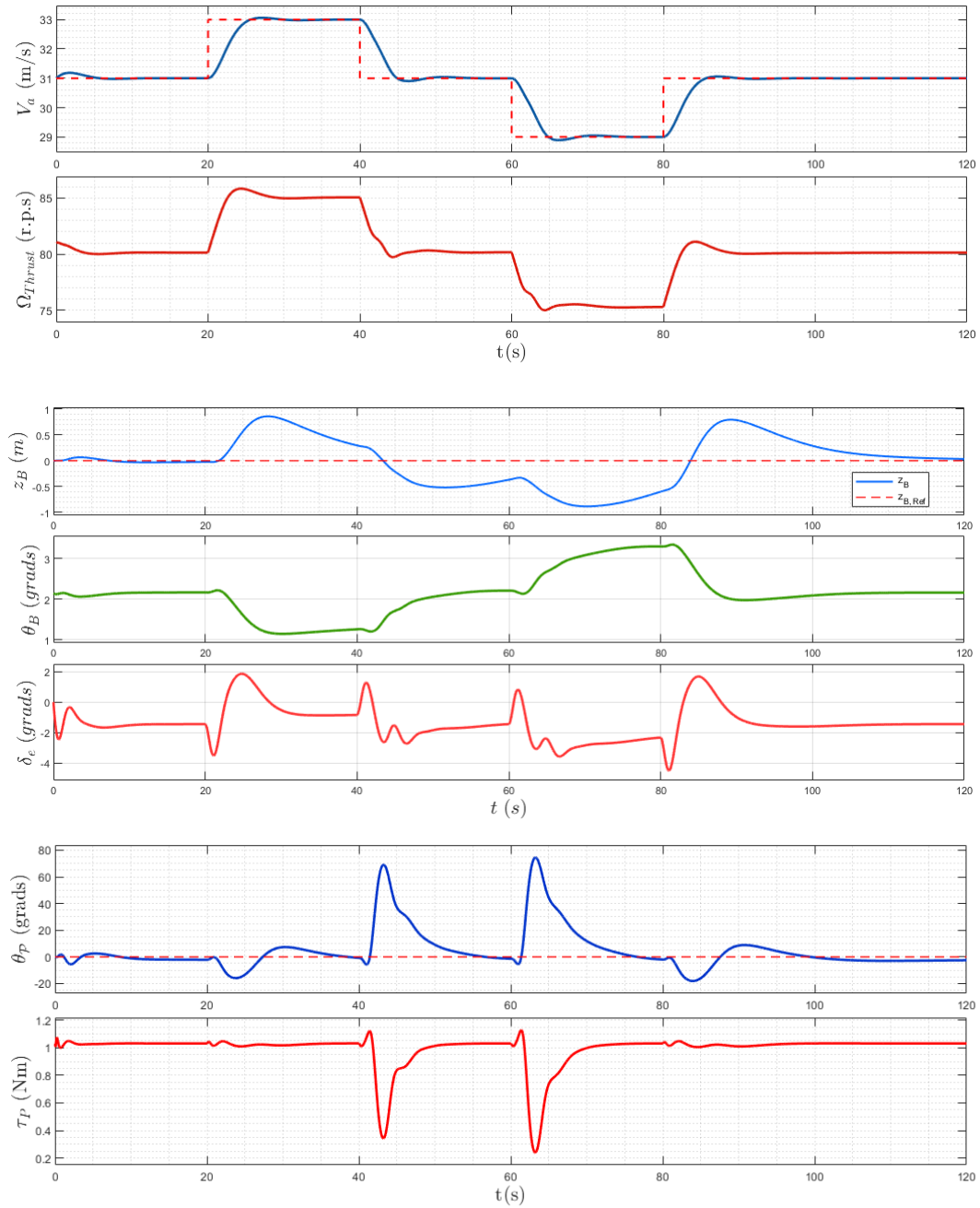


Figura 7.9: Experimento I - Vuelo siguiendo el perfil de altura variable

Experimento II: Cambio de velocidad aerodinámica

Figura 7.10: Experimento II - Cambio de V_a

Capítulo VIII. Transición mediante prelinealización por realimentación

1. Planteamiento de la estrategia

Una vez prelinealizado el sistema y comprobado que se obtienen resultados satisfactorios en ambos modos de vuelo se ha de plantear la estrategia adecuada para obtener unas transiciones seguras y rápidas. A pesar de que la aeronave es capaz de volar en cualquier régimen de velocidad aerodinámica con un ángulo de los protores concreto (limitado por dicha velocidad), se asume que en una misión genérica, se querrá partir de una velocidad aerodinámica 0 (Hover) hasta una velocidad aerodinámica generalmente alta (vuelo horizontal) para un despliegue ágil en una situación de emergencia. En el contexto de esta estrategia de control, se especificará una curva de velocidad aerodinámica de referencia que partirá de una de las dos condiciones a la otra.

Si el control sigue la referencia de velocidad aerodinámica, junto a las referencias adecuadas de θ_B y γ , se tendrá que el sistema pasa de un punto de operación a otro de manera estable. Tal y como se veía en el capítulo de *Transición por Control Desacoplado*, estaremos planteando una trayectoria en las superficies de equilibrio por las que movernos. No obstante, a diferencia de el anterior caso, con este método, solo podemos especificar el movimiento en la dimensión de V_a , puesto que θ_P se controla indirectamente mediante la resolución de las ecuaciones en el bloque de prelinealización. Esta característica del método plantea que no es inmediato escoger la trayectoria en el espacio de estados de la aeronave, pues depende indirectamente de las condiciones iniciales de vuelo y las finales. Esto se entiende cuando observamos que, para una misma velocidad aerodinámica (pongamos 30 m/s), la aeronave puede viajar con un ángulo $\gamma = 0$ con distintos valores de θ_P y Ω . Esto tiene mucho que ver con que, en muchos sistemas dinámicos, las ecuaciones no son ni inyectivas (puesto que no existe una correspondencia única entre las entradas y las salidas) ni sobreyectivas (porque no todas las entradas se traducen en un punto estable). En el control de transición, no seremos capaces, por tanto, de escoger explícitamente dentro del modo de vuelo horizontal, la *actitud* de vuelo (ángulo de protores, ángulo de ataque, etc) pero sí de que sea estable en esos términos.

Adicionalmente se ha de pensar en que la prelinealización tiene sus limitaciones en el punto en el que la velocidad aerodinámica es despreciable. Cuando V_a sea lo suficientemente pequeña deberemos cambiar las ecuaciones despreciando los términos aerodinámicos. Este cambio de controladores introduce ciertos transitorios en las señales virtuales que habrá que filtrar debidamente para obtener un cambio suave en las señales de control físicas. El umbral de V_a se escogerá atendiendo a un criterios tanto experimentales como basados en las curvas de equilibrio.

Esquema de control

Para el control de transición se ha añadido una etapa previa de control del ángulo γ^{Ref} . Tal y como se hizo con θ_B en el capítulo anterior, resulta conveniente suavizar el error de γ y adecuarlo a la altura de referencia. De este modo, se especifica que γ^{Ref} será proporcional al error de la altura en un esquema de PID anidado. Esto evita una situación contradictoria en las referencias que podría llevar a la inestabilización: si tenemos cierto error en Z, la tendencia del controlador de θ_B será el de variar el ángulo para establecerse en la altura objetivo. No obstante, esto implica inevitablemente que el ángulo γ ha de variar mientras dure esta regulación. Si especificamos un ángulo de referencia 0 para γ , tendremos que el autopiloto pretende corregir la altura y mantenerla recta al mismo tiempo, cosa imposible. De esta forma, con este arreglo se tiene que ante cierto error de altura, γ se acomoda convenientemente. Así, volvemos a tener un control con dos entradas de referencia: V_a y z_B^{Ref} :

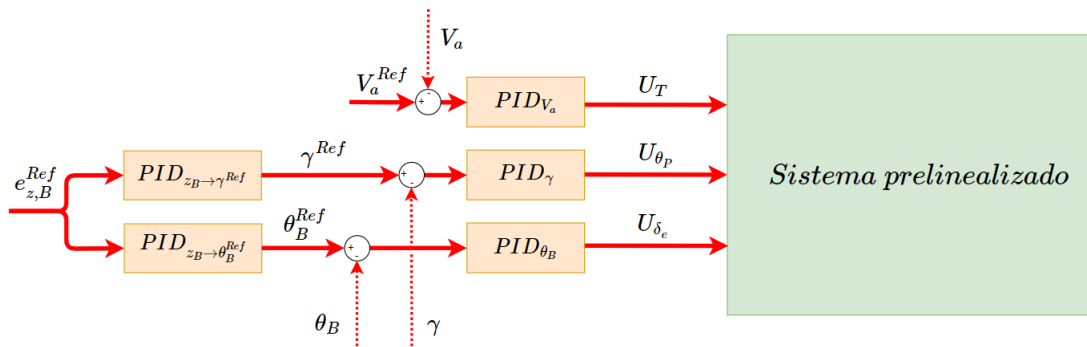


Figura 8.1: Esquema para la transición

Este PID se diseña pensando en que un valor máximo admisible de error en Z (5 metros) tiene que generar un ángulo γ máximo de 25° , así:

	Valores del PID ¹³
K_P	-0.09
K_I	-0.03
K_D	-0.05

Cuadro 6: PID $z_B \rightarrow \gamma_{Ref}$

Finalmente, el esquema de control del autopiloto para la transición será:

¹³Estos valores fueron ligeramente retocados posteriormente mediante un ajuste fino basado en los experimentos.

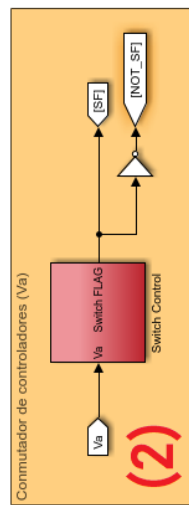
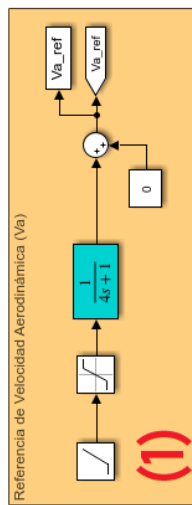
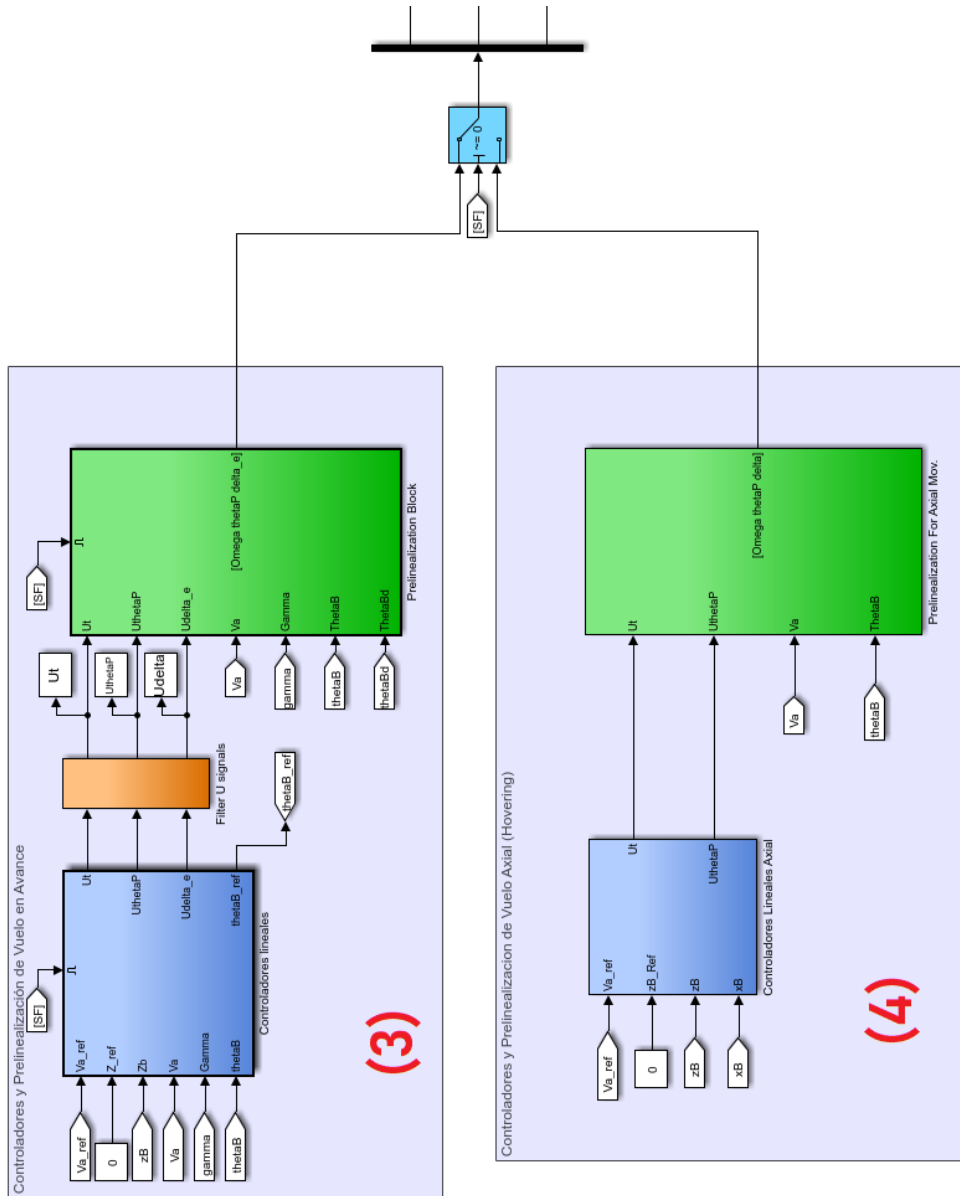


Figura 8.2: Esquema para la transición

1. **Generador de la referencia de V_a :** se generará como una rampa saturada y filtrada por un sistema de primer orden.

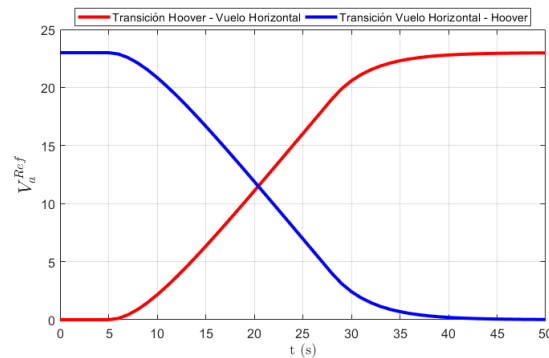


Figura 8.3: Perfil de velocidad aerodinámica durante la transición.

2. **Interruptor de conmutación de los controladores:** como se había dicho, la singularidad que plantea el bloque de prelinealización cuando V_a se acerca a 0 requiere de ser tratada mediante un cambio de controladores. Para tal fin, conmutaremos los controladores cuando alcancen cierto nivel de V_a . Al conmutar, se generan transitorios que pueden estropear el desempeño final pero que pueden eliminarse con un filtrado de las señales de control virtuales. Hay que tener en cuenta que para el control de movimiento axial en baja velocidad las señales virtuales no se corresponden directamente con las señales virtuales en el control en avance horizontal. A falta de un modelo general que pueda lidiar con ambos modos a la vez, se plantea esta solución de consenso que lejos de ser óptima, es efectiva gracias en parte a la robustez de los controladores PID.
3. **Controlador en el modo de vuelo horizontal:** Se implementan los controladores del modo horizontal junto con el bloque de prelinealización correspondiente. Adicionalmente, se incluye un filtrado para las señales de control $(U_T, U_{\theta_P}, U_{\delta_e})$.
4. **Controlador en el modo Hovering:** Aparte de los correspondientes controladores y su prelinealización, tendremos el bloque de traducción de la velocidad aerodinámica de referencia a sus correspondientes referencias de posición inercial (x_B^{Ref}, z_B^{Ref}) .

2. Experimentos y resultados

2.1. Transición Vuelo Horizontal - Hover

El resultado de la transición es el siguiente:

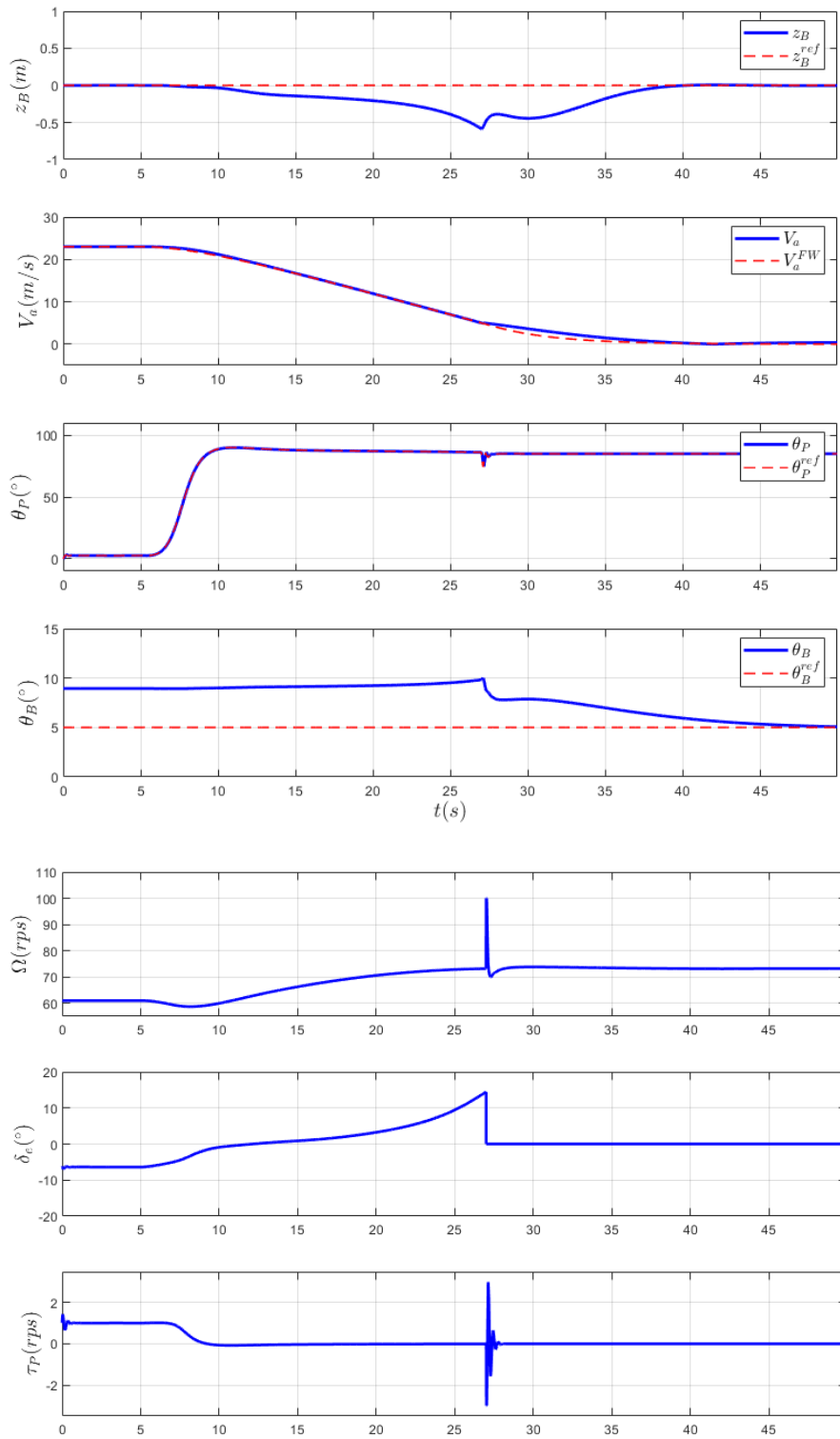


Figura 8.4: Resultado de la transición I

2.1.1. Análisis del resultado

- La transición comienza a los 5 segundos y tarda unos 35 segundos. En ese tiempo, recorre unos 480 metros.
- La altura en Z máxima de desviación es de 0.58 metros.
- En el segundo 27 es cuando se alcanza la velocidad aerodinámica umbral (5 m/s) y se cambian las ecuaciones del bloque de prealimentación. Las señales de control son filtradas para evitar un cambio demasiado brusco, pero como se ve, el resultado final no se ve demasiado alterado por la conmutación de controladores.

La trayectoria proyectada sobre la región de estabilidad será:

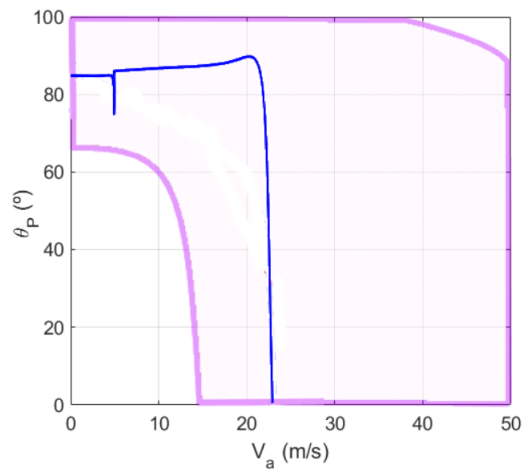


Figura 8.5: Trayectoria ($\theta_P - V_a$) dentro de la región de estabilidad (rosado).

2.2. Transición Hover - Vuelo Horizontal

El resultado de la transición es el siguiente:

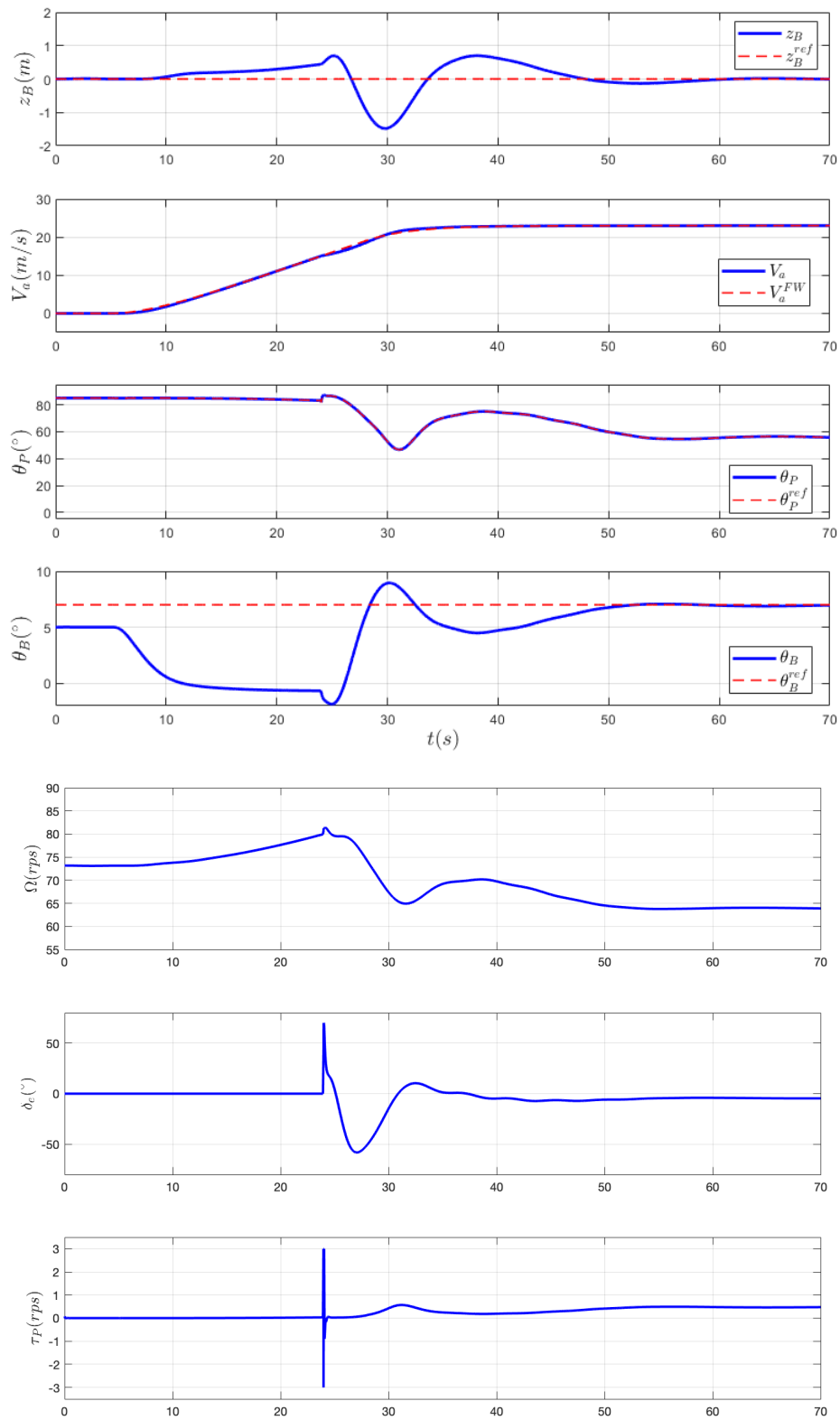


Figura 8.6: Resultado de la transición II

2.2.1. Análisis del resultado

- La transición comienza a los 5 segundos y tarda unos 45 segundos. En ese tiempo, recorre unos 680 metros.
- La altura en Z máxima de desviación es de 1.84 metros.
- En el segundo 27 es cuando se alcanza la velocidad aerodinámica umbral (15 m/s) y se cambian las ecuaciones del bloque de prealimentación. Las señales de control son filtradas para evitar un cambio demasiado brusco, pero como se ve, el resultado final no se ve demasiado alterado por la conmutación de controladores, del mismo modo que ocurre en el caso anterior.

La trayectoria proyectada sobre la región de estabilidad será:

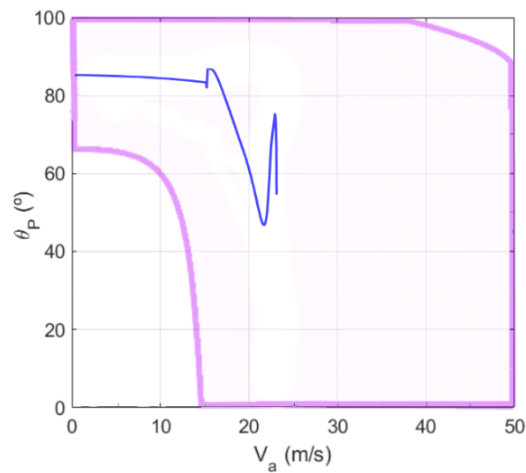


Figura 8.7: Trayectoria ($\theta_P - V_a$) dentro de la región de estabilidad (rosado) II.

Capítulo IX. Comparación de los métodos de control implementados

1. Comparación de las diferentes metodologías

Un objetivo importante de esta trabajo supone la comparación entre dos metodologías de control basadas una en un control PID desacoplado y transición secuencial y otra en el conocimiento aerodinámico de la nave para su prelinealización por realimentación. Es obvio que ambos métodos tienen sus ventajas y desventajas:

	Control desacoplado	Control por prelinealización
Conocimiento del sistema	<ul style="list-style-type: none">▪ Basta con diferentes puntos de operación derivados del trimado y un modelo aproximado de dicha dinámica.No es necesario un conocimiento intensivo del modelo aerodinámico ni propulsivo de la aeronave.	<ul style="list-style-type: none">▪ Es necesario un modelo completo y preciso del sistema (tanto propulsivo como aerodinámico), lo que implica que hemos de tener los coeficientes aerodinámicos obtenidos mediante ensayos en túnel de viento.▪ Cuanto más fiel sea el modelo a la realidad mejor desempeño tendrá esta estrategia.

	Control desacoplado	Control por prelinealización
Dificultad del diseño del control de los distintos modos de vuelo	<ul style="list-style-type: none"> El diseño de los controladores basados en la linealización sigue los estándares clásicos de control. No obstante, es necesario diseñar estrategias de <i>feedforward</i> y numerosos controladores además de un ajuste fino de cada uno de ellos para compensar la dinámica no incluida en el control lineal. 	<ul style="list-style-type: none"> El número de controladores a realizar es muchísimo menor. La dificultad radica en el filtrado de las señales virtuales y en el diseño previo del algoritmo, que es válido para todo el rango de estados estables del sistema. Por otra parte, la estrategia de linealización no es inmediata y requiere de un estudio intensivo de las ecuaciones y del modelo (o modelos) que describen la dinámica.
Dificultad del diseño del control de transición	<ul style="list-style-type: none"> El control de transición por desacople debe hacerse con cuidado, realizando numerosas pruebas y experimentos y bajo unas condiciones normalmente poco variables (secuencia de control). Se necesita poner especial interés en el cambio sucesivo de los distintos controladores de cada mecanismo de vuelo (empuje, elevadores, etc). 	<ul style="list-style-type: none"> La prelinealización, al permitir el vuelo estable bajo casi cualquier condición de vuelo (θ_P se adapta a las condiciones de vuelo), permite tener una transición suave simplemente variando V_a^{Ref}. La dificultad radica en la conmutación de los controladores a falta de un modelo unificado que permita prelinealizar a baja y alta velocidad aerodinámica sin cambiar de señales de control.

	Control desacoplado	Control por prelinealización
Comportamiento durante la transición	<ul style="list-style-type: none"> Con el control desacoplado θ_P es una variable controlada en bucle abierto, por lo que el resto del autopiloto se acomoda a dicha variable. Esto permite que la aeronave se convierta a su morfología de ala fija una vez terminada la transición, que es, sin pérdida de generalidad, la postura óptima de vuelo horizontal (menor nivel de Ω con $\theta_P = 0$). 	<ul style="list-style-type: none"> Como θ_P es una señal de control pasiva, la conversión hacia el vuelo horizontal depende de las condiciones iniciales. El algoritmo garantiza la estabilidad gracias a la compensación de los términos no lineales, pero la actitud de la aeronave viene dada por trayectorias en las superficies de trimado no conocida a priori.
Implementación en un microcontrolador (discretización)	<ul style="list-style-type: none"> El control PID desacoplado consiste en un conjunto de PIDs clásicos que pueden implementarse fácilmente en un microcontrolador. Es necesario revisar el ancho de banda de cada uno para comprobar si la frecuencia de muestreo de un microcontrolador es capaz de cumplir con la frecuencia de Nyquist del controlador más rápido (control de la velocidad del <i>pitch</i>). Más allá de las implementaciones de los PID, será necesario tener las medidas de $z_B, x_B, \theta_B, \dot{\theta}_B$ y de V_a o, al menos, una estimación fiel de las mismas. 	<ul style="list-style-type: none"> Debe ejecutarse en cada ciclo de control el algoritmo de prelinealización (a la tasa del controlador más rápido). Aún cuando el tiempo de cálculo está acotado, se requieren numerosas operaciones (multiplicaciones, divisiones, sumas y restas) para sacar un resultado. Esto acota el ancho de banda <i>aguas arriba</i> del control y el desempeño final. Se necesita, además de las variables $z_B, x_B, \theta_B, \dot{\theta}_B$ y V_a, el valor del ángulo γ, que será normalmente pequeño y difícil de medir/estimar (ya sea por medición del ángulo de ataque o de otra forma). Esto podría ser potencialmente problemático a nivel de implementación.

2. Comparación del desempeño del control

2.1. Comparación en modo Hover

El comportamiento de ambas mecánicas de control se refleja en los siguientes experimentos:

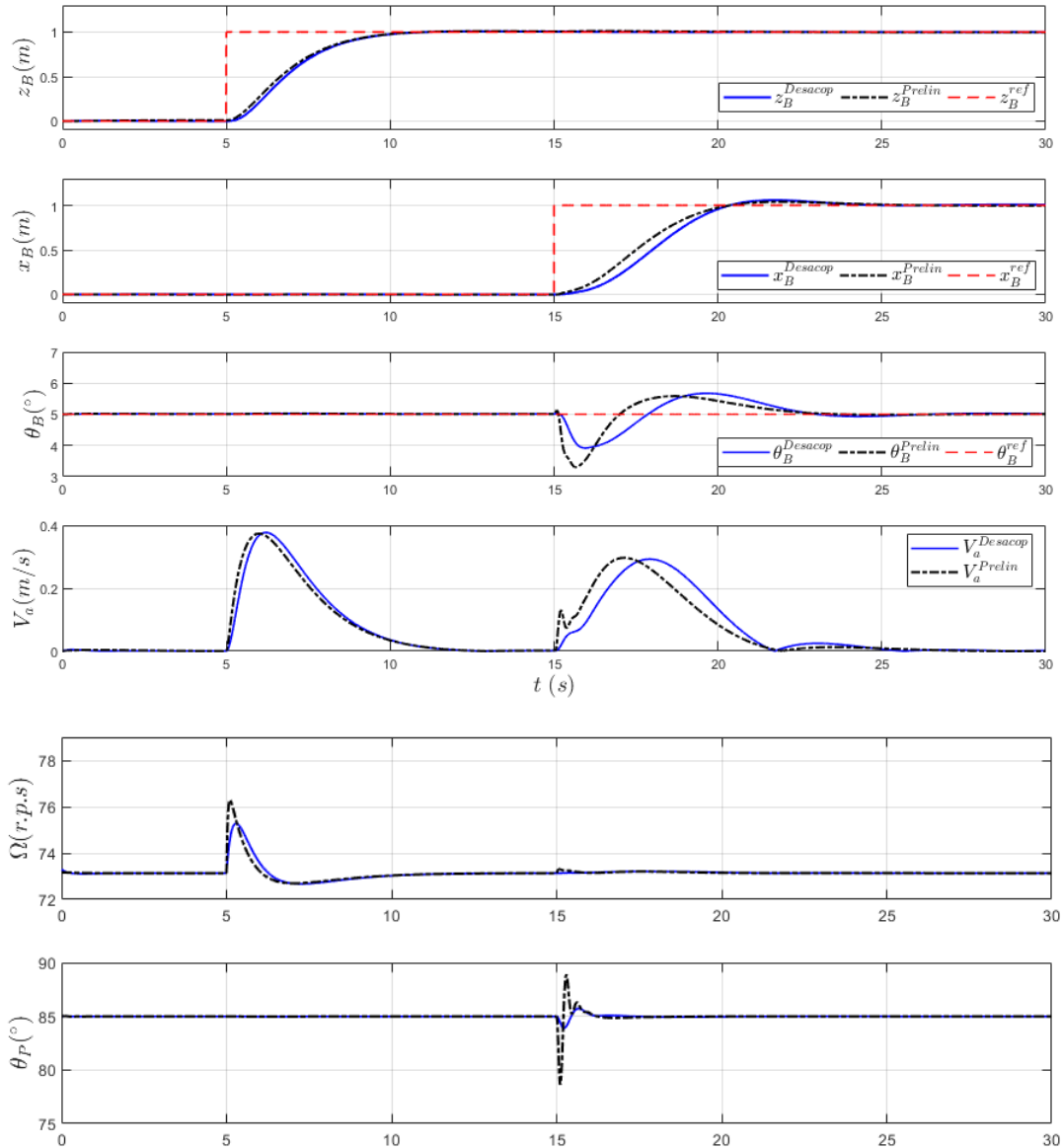


Figura 9.1: Comparación - Experimento en modo Hover

Se observa que el comportamiento a baja velocidad es muy parecido con ambos algoritmos. No obstante, en la mecánica de prelinealización, se tiene un control más agresivo (con las mismas especificaciones a la hora de diseñar los PID de ambas partes) lo que se traduce en un seguimiento de las referencias más rápido a costa de señales de control más bruscas.

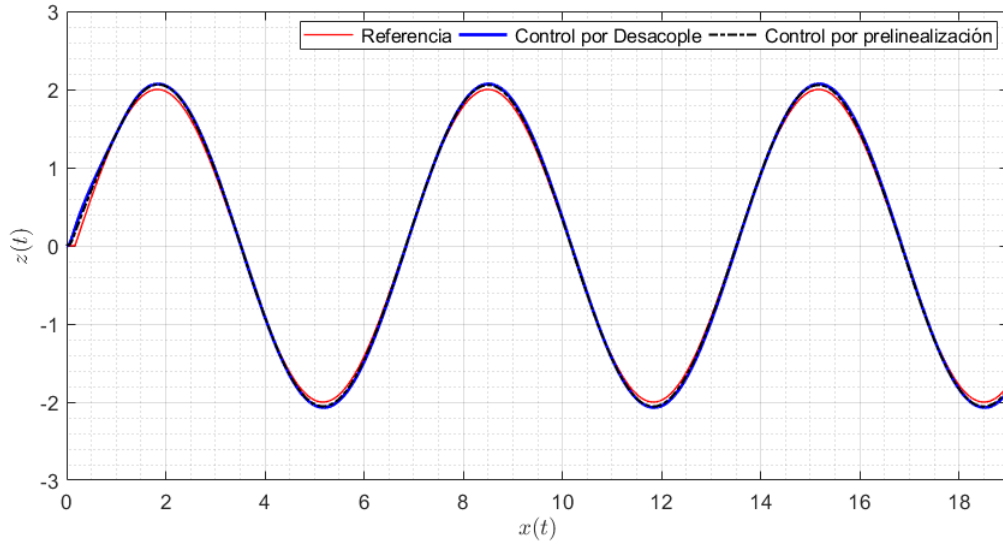
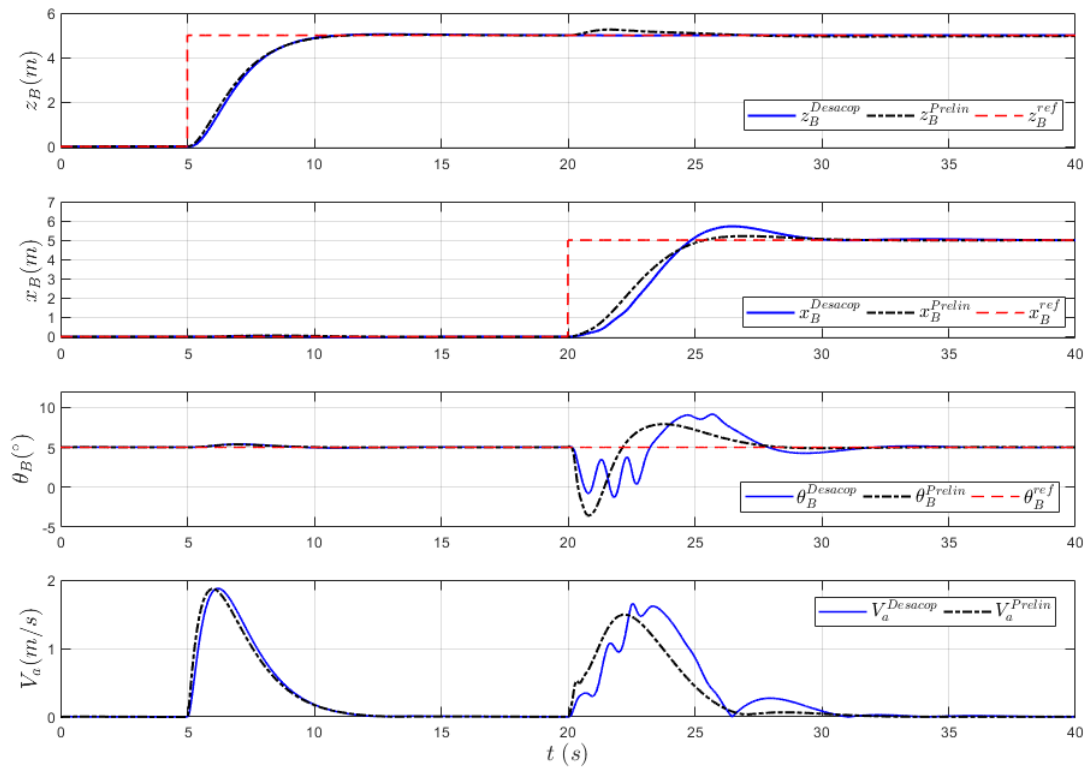


Figura 9.2: Comparación - Experimento con trayectoria genérica

Cuando especificamos una trayectoria genérica, el algoritmo se comporta exactamente igual. El resultado evidencia que, a baja velocidad, el desempeño del control es el mismo para ambas alternativas. No obstante, no será así para cualquier rango de operación.

Veamos qué ocurre cuando sometemos a ambos algoritmos a referencias más bruscas (mayores escalones, mayor velocidad):



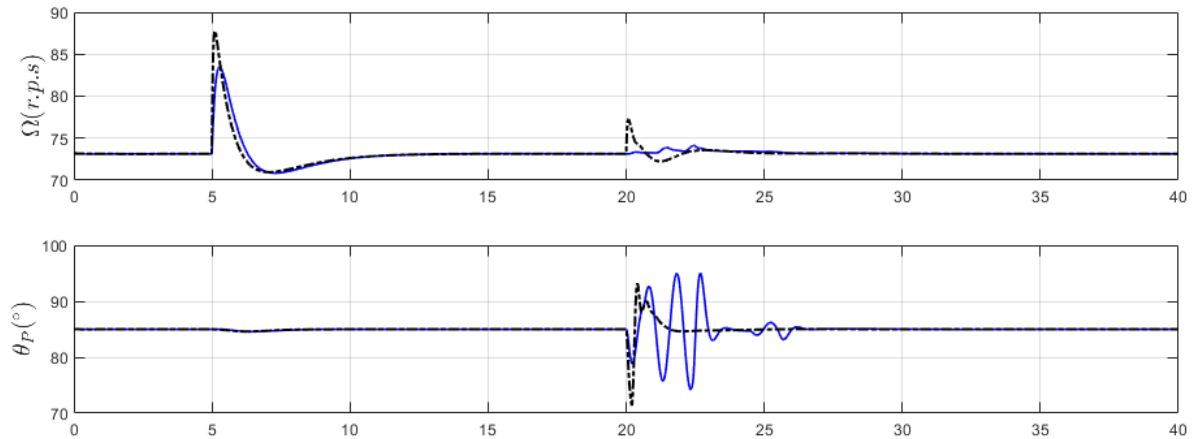


Figura 9.3: Comparación - Experimento de vuelo axial II

Resulta evidente que el algoritmo de prelinealización obtiene unos resultados significativamente mejores. Esto es así debido a una razón esencial: el controlador PID desacoplado sufre las consecuencias de una velocidad alta (recordemos que fue diseñado en un punto de operación donde $V_a^{eq} = 0$) y la no linealidad se pierde (sobre todo en el movimiento en el eje X), por lo que el seguimiento a esa velocidad ($> 1\text{ m/s}$) se sale de las condiciones de diseño. En el control desacoplado no ocurre así ya que, al tener en cuenta toda la dinámica del sistema, es capaz de gestionar Ω y θ_P conjuntamente obteniéndose una respuesta prácticamente lineal. Así, será necesario limitar la velocidad de las referencias en el control desacoplado para evitar comportamientos bruscos de la aeronave. El único inconveniente en el mecanismo de prelinealización se plantea en el hecho de que, al utilizar también Ω en el movimiento por el eje X y no solo θ_P , se tiene un acoplamiento más fuerte que en la mecánica desacoplada (se observa una sobreoscilación del 5 % (0.25 m) cuando se aplica el escalón de referencia a la posición x_B).

Si realizamos nuevamente un experimento con una trayectoria genérica mucho más agresiva (2.5 m/s de velocidad en X y ± 5 metros en Z):

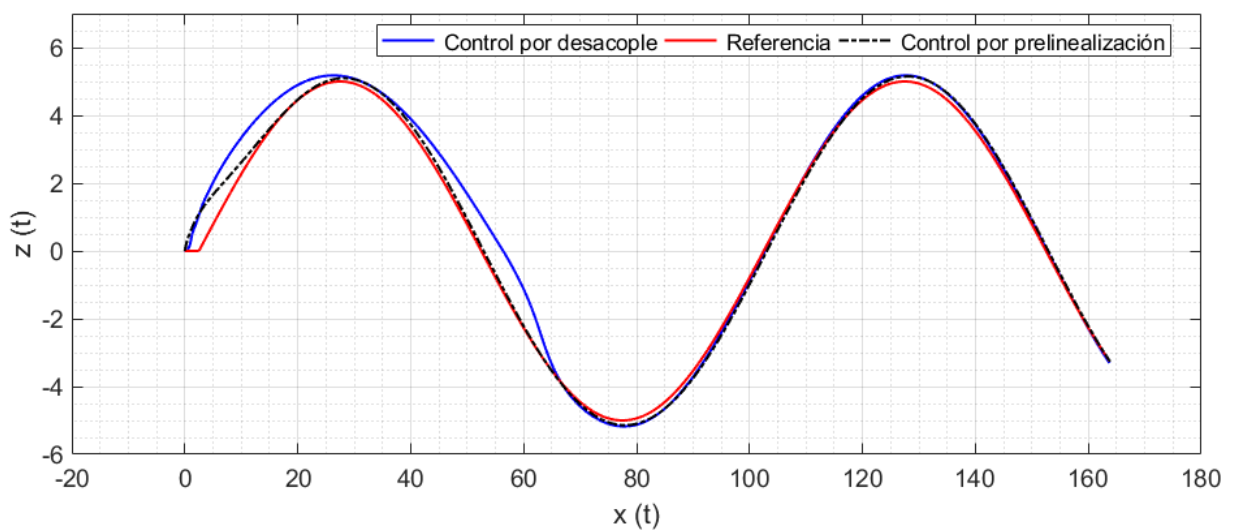


Figura 9.4: Comparación - Experimento con trayectoria genérica II

Aquí se observa nuevamente que la efectividad de la prelinealización es tanto mejor que el

algoritmo contrario cuanto más nos alejamos de la velocidad de hover. Esto será fundamental a la hora de comenzar a diseñar el prototipo físico, puesto que, previsiblemente, será el control en hover el punto inicial de implementación.

2.2. Comparación en modo vuelo horizontal

El comportamiento de ambas mecánicas de control se refleja en los siguientes experimentos:

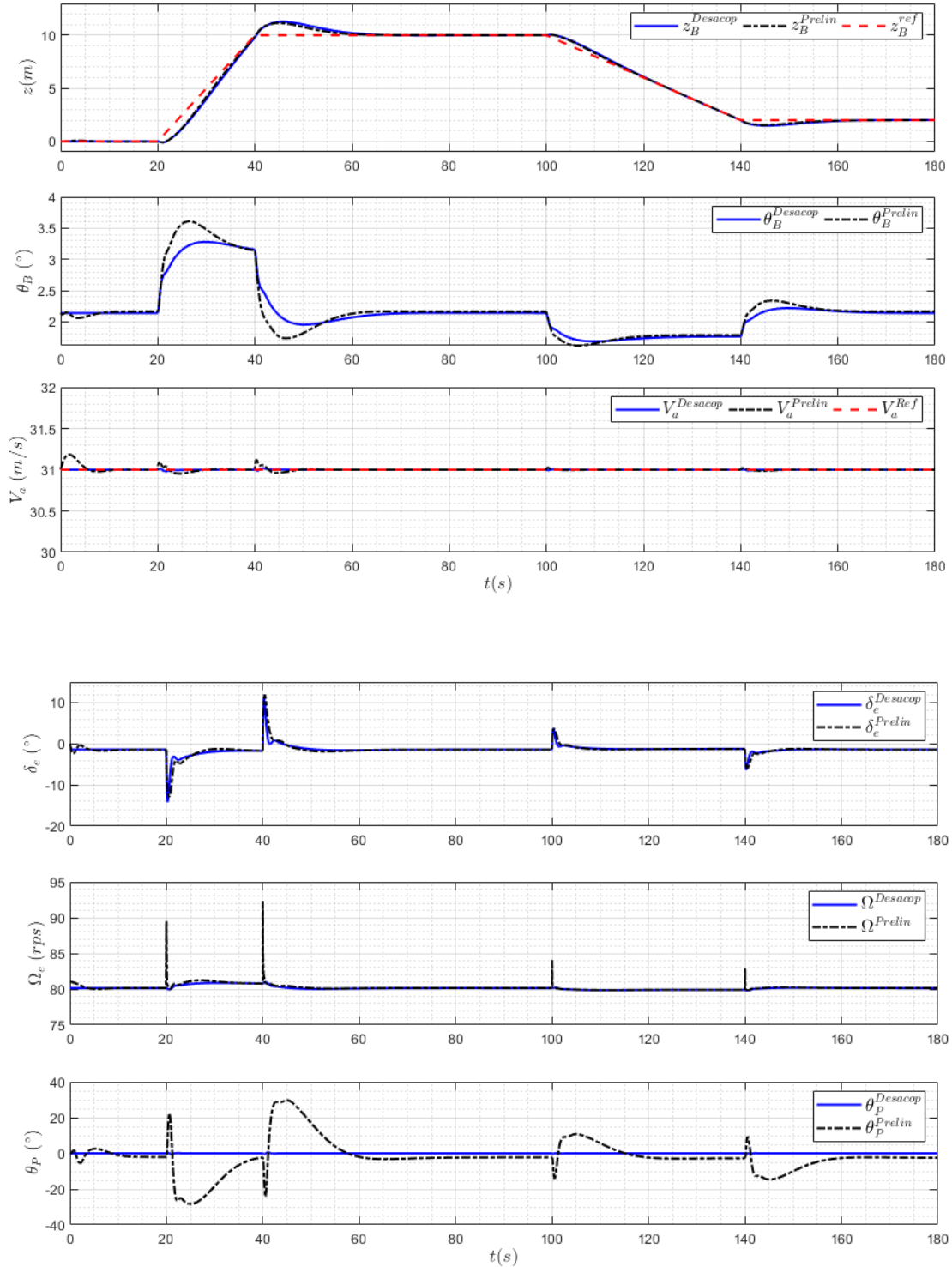


Figura 9.5: Comparación - Experimento de vuelo horizontal

Las trayectorias de vuelo son muy similares en ambos casos, no así la forma en que se consiguen. Si nos fijamos en las gráficas de los actuadores, el sistema prelinealizado hace uso del ángulo de los protores (θ_P) para estabilizar la velocidad aerodinámica junto con Ω . Este comportamiento permite trabajar de manera lineal con cierta independencia de la velocidad aerodinámica exigida.

Veamos el comportamiento con una referencia en escalón de 50m (referencia exigente):

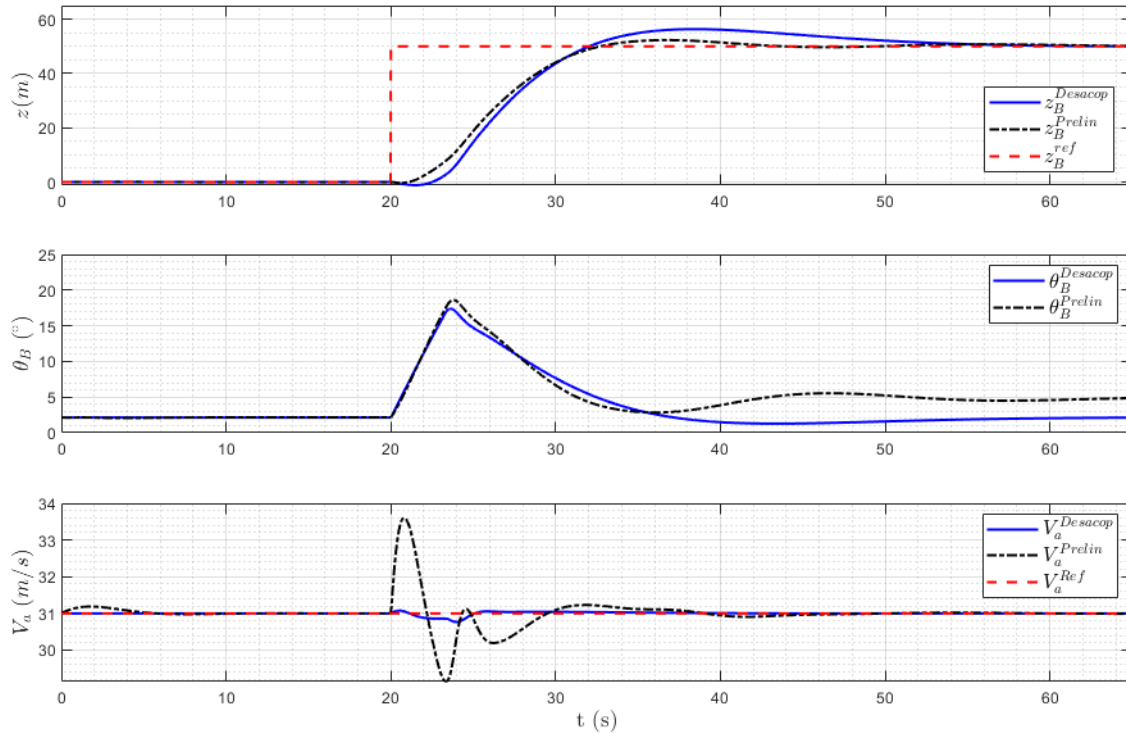


Figura 9.6: Comparación - Experimento de vuelo horizontal II

El comportamiento devuelve resultados interesantes en el sentido de que el mecanismo por desacople se comporta de manera muy adecuada. Si bien el transitorio del método de prelinealización tiene una sobreoscilación del 4.5% (2.3m) y con el mecanismo de PIDs desacoplados tenemos un 13% (6.5m), los tiempos de subida son muy parecidos (12 segundos). Además, es reseñable el hecho de que la regulación de la velocidad aerodinámica sea más rápida y robusta con el PID de desacople. Esto puede resultar ventajoso en el control de vuelo horizontal, donde es necesario una gran robustez sobretodo en la regulación de la velocidad aerodinámica, no solo para el ascenso o descenso en altura sino para mantener la estabilidad de vuelo ante perturbaciones externas debido a ráfagas de viento (significativas en vuelos con cierta altitud).

2.3. Comparación de la transición Hover - Vuelo Horizontal

Ejecutando los experimentos de transición, tendremos:

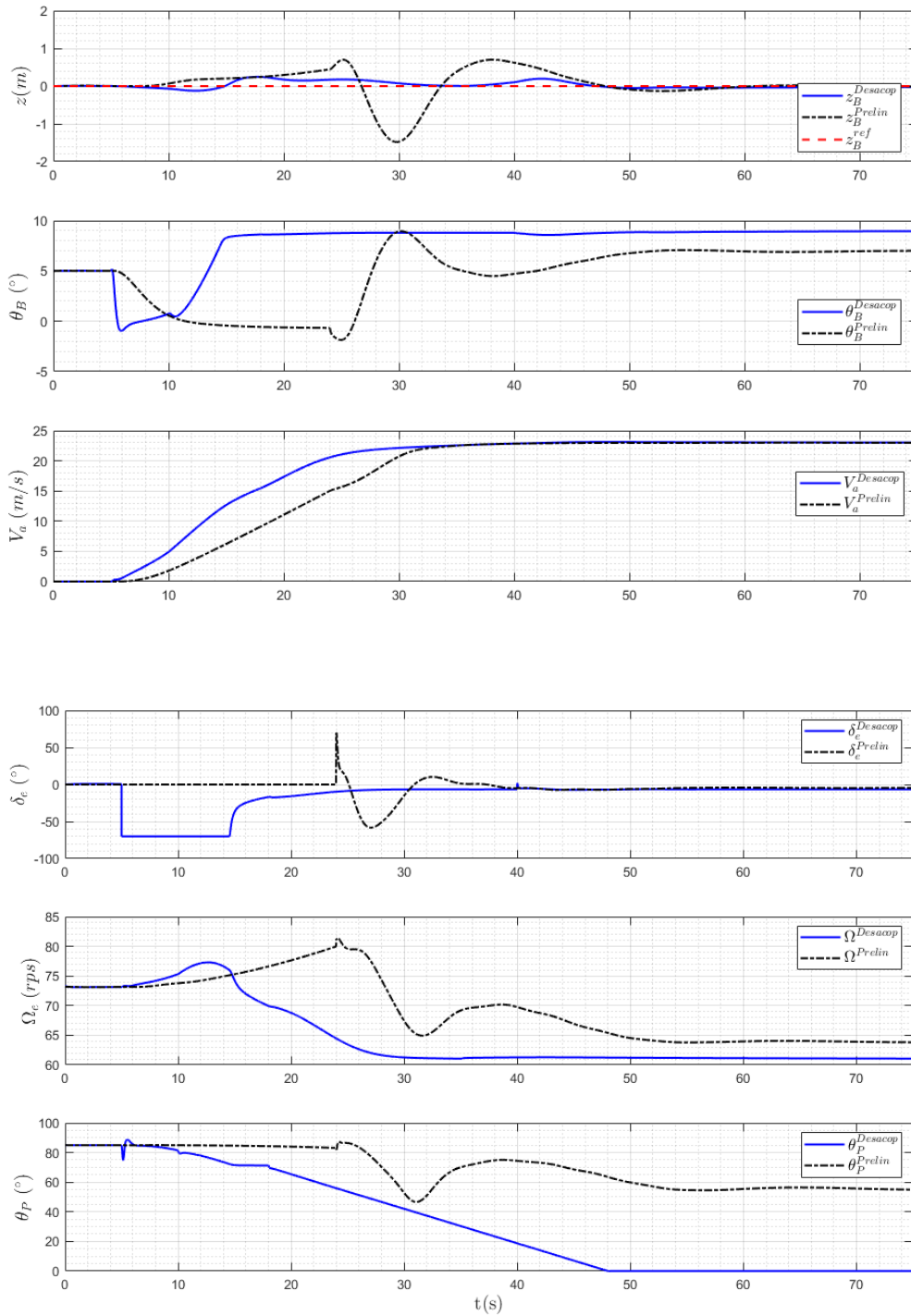


Figura 9.7: Comparación - Transición Hover \rightarrow Vuelo Horizontal

La transición directa (o transición Hover - Vuelo Horizontal) tiene marcadas diferencias de un método a otro. Con el método desacoplado obtenemos una transición bastante más rápida y con menor desviación vertical (e_{z_B}). No obstante, el perfil de velocidad aerodinámica no está predefinido (es una trayectoria resultante no comandada como referencia). Mientras en el método desacoplado especificamos θ_P , en el método por prelinealización escogeremos V_a

(garantizada por el controlador correspondiente). Esto resulta en que al final, el valor de equilibrio de θ_P no pueda escogerse. Esto tiene incidencia en la eficiencia de movimiento, puesto que con un valor de $\theta_P = 0$ tendríamos que aplicar un valor menor de Ω .

2.4. Comparación de la transición Vuelo Horizontal - Hover

Ejecutando los experimentos de transición, tendremos:

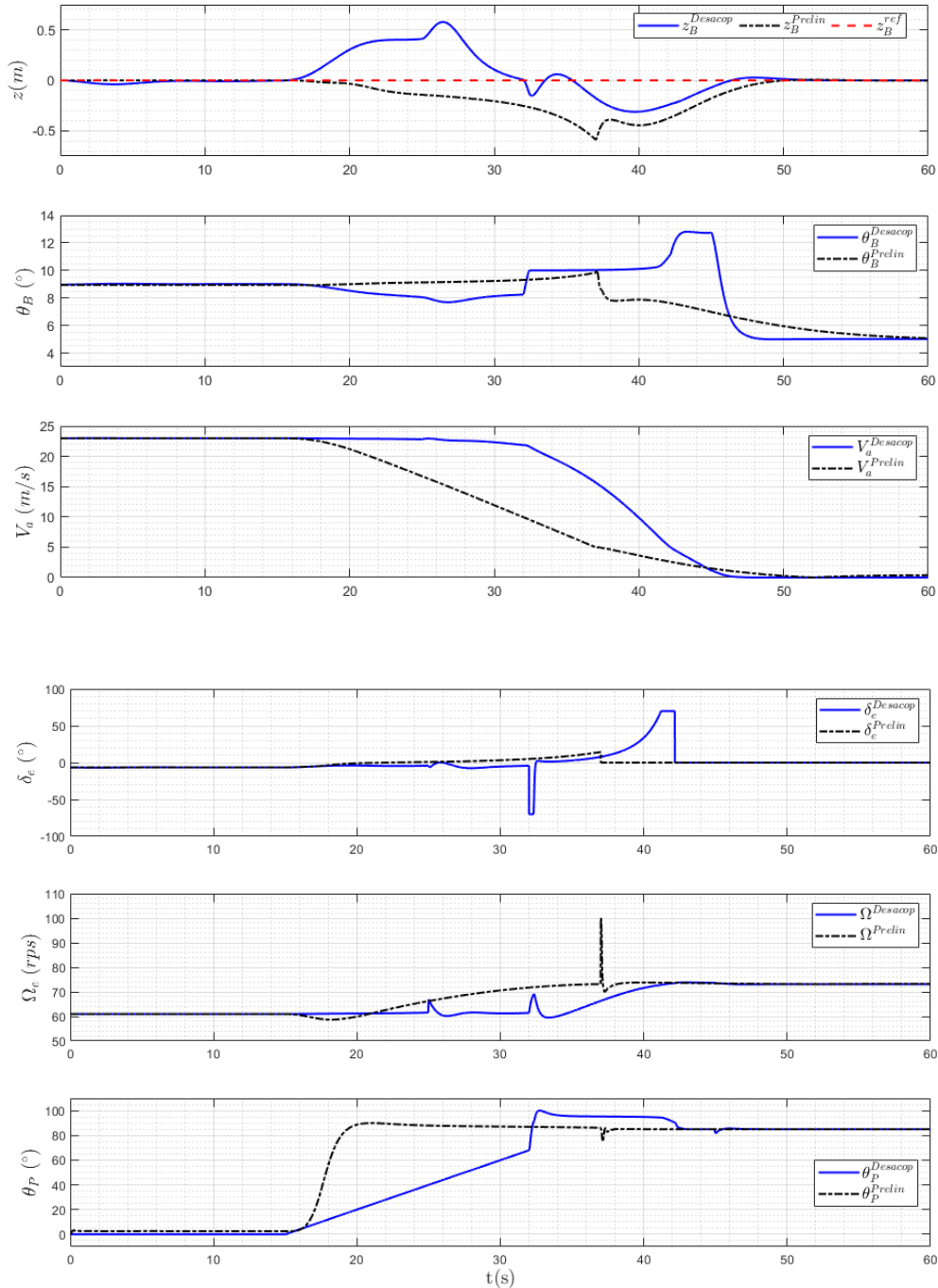


Figura 9.8: Comparación - Transición Vuelo Horizontal \rightarrow Hover

En la transición de Vuelo Horizontal a Hover tendremos que, como solo existe un único punto de equilibrio en hovering, sí se tiene una unicidad de la solución en ambos métodos. El método

desacoplado es más agresivo en el sentido de los cambios de ángulo de *pitch*. En este sentido, el ángulo escogido para realizar las transiciones (que aportan sustentación o aumentan la fuerza de *drag*) es fundamental en la transición desacoplada, mientras que para el control prelinealizado se escoge de forma proporcional al error en altura, por lo que el perfil de dicha variable es menos brusco.

En el caso del control prelinealizado se tiene que la transición es más rápida debido a la velocidad de cambio del ángulo de los protores. En este punto se plantea la posibilidad de estudiar dicha curva de transición y poder adaptarla a la transición secuencial a modo de *tilt-corridor* (trayectoria de transición de θ_P) y verificar si de esta forma se consigue una transición más rápida.

Capítulo X. Conclusiones y horizonte de la investigación

Este trabajo, enmarcado en la investigación en curso para el desarrollo de una aeronave convertible plantea un reto en el ámbito del control. Se ha visto que el modelo utilizado es harto preciso y muy amplio, lo que se traduce en simulaciones muy largas y pesadas. Además, al haber incluido la dinámica completa de los mecanismo de proprotos (con su geometría, modelo propulsivo, etc) se introducen características novedosas que no se suelen encontrar en los estudios relacionados con aeronaves *Tilt-Rotor* en particular ni UAVs en general. Así, en este trabajo se ha pretendido plantear las líneas básicas de la descripción de tan complejo sistema (aún cuando solo se trata de la dinámica lateral del mismo) y un precepto de control para el desarrollo final y completo de un autopiloto real volcado en un prototipo físico microcomputado.

En el apartado del modelo, simulador y trimado, podemos concluir con que se ha obtenido el modelo bidimensional del sistema, con todas las características obtenidas en ensayo en laboratorio, conformándose un simulador efectivo que representa fielmente la dinámica de la aeronave. Asimismo, se obtiene un método eficaz y sistemático para obtener los puntos de trimado de la aeronave, aspecto fundamental para la linealización del sistema y en un futuro, habiendo introducido parámetros actualizados (masas, inercias, etc) recalcular dichas superficies de operación con rapidez.

En el apartado del control, se han trazado las líneas básicas de dos algoritmos diferentes. Aún cuando los resultados son efectivos con ambas técnicas, se evidencia la robustez y sencillez del método de prelinealización, adaptable a un rango de operación mucho más amplio y con una perspectiva de investigación mayor. No obstante, el método de PIDs desacoplados, no es desdeñable y plantea cierta base fundamental para el conocimiento del comportamiento de la aeronave y ha servido para evidenciar la necesidad de cambios en la morfología de la aeronave: en un principio, la posición de anclaje de los proprotos estaba demasiado separada del centro de masas, por lo que se decidió disminuir dicha distancia en pos del control (conclusión que sirve como *feedback* para los diseñadores de la aeronave). Así, este cambio plantea la necesidad de generar una aeronave con la misma aerodinámica pero con las ala más atrasadas o colocar el centro de masas más adelantado de lo que en un inicio se previó (implicaciones en el modo de vuelo del avión - contribuye a una postura de vuelo picado).

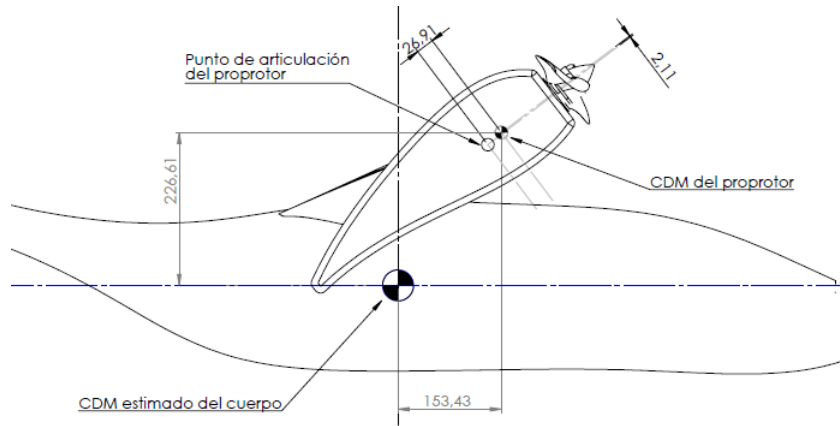


Figura 10.1: Perfil inicial del proprotor.

En este sentido, también se ha validado el algoritmo de prelinealización planteado, evidenciando que mediante una prelinealización se es capaz de controlar con efectividad el sistema. Aún cuando es necesario someter al simulador a más pruebas, queda claro que el problema de seguimiento queda solucionado con dicha mecánica de control.

Horizonte de investigación

Se plantean los siguientes retos y tareas en esta investigación:

- Someter a los dos algoritmos a un conjunto bien estudiado de pruebas de incertidumbre y perturbaciones: modelo de viento realista, ensayos con ruido de señales, posible introducción de no linealidades atmosféricas (densidad del aire no constante), etc.
- Desarrollar el modelo dinámico en el caso tridimensional y convertirlo debidamente en un simulador completo de la aeronave con el fin de obtener el caso completo.
- Desarrollar los controladores adecuados para el control en 3 dimensiones de la aeronave (control en *yaw* y *roll* y control en la dimensión y_B).
- Extrapolar el algoritmo de prelinealización al caso tridimensional y observar si se puede establecer una prelinealización para la dinámica lateral y otra para la dinámica en el plano xy de manera desacoplada.
- Concretar específicamente los parámetros finales de la aeronave a fin de aproximar los experimentos y el modelo a la realidad.
- Desarrollar alguna técnica en MatLab que permita realizar simulaciones más rápidas con el modelo descrito. Se plantea la posibilidad de describir la dinámica en lenguaje C (formato MEX-File) para mejorar la eficiencia de las simulaciones.
- Una vez controlada la dinámica completa del sistema, desarrollar las herramientas de planificación de trayectorias pertinentes, con un interpolador de trayectorias en 3D y los mecanismos adecuados para que la aeronave pueda llevar a cabo una misión.
- Validar los controladores desde el punto de vista de la discretización para su computación.
- Será necesario hacer una recopilación de los distintos sensores electrónicos de los que se dispondrá, su potencia de ruido y su caracterización y velocidad de medida con el objetivo de realizar una validación de los controladores y/o plantear la necesidad de introducir observadores ante imposibilidad de medir alguna variable.
- Se plantea, en este último caso, diseñar alguna técnica de estimación y filtrado para variables no observables y verificar si el algoritmo es lo suficientemente robusto como para cumplir con las especificaciones ante dichas características de no observabilidad. Se propone observar el comportamiento del control cuando las salidas son estimadas mediante un Filtro de Kalman con la caracterización de un sensor real (ruido + incertidumbre).
- Analizar el control y el sistema desde el punto de vista de la eficiencia energética. Habiéndose caracterizado la dinámica de bajo nivel, puede obtenerse el perfil de consumo energético de la aeronave con el objetivo de analizar su rendimiento y mejorar el control en el sentido de disminuir el consumo de batería (cuello de botella en el diseño de la mayoría de los UAVs).

ANEXOS

Anexo A: Caracterización de la dinámica de bajo nivel

A. Descripción de la dinámica de bajo nivel

Resulta interesante obtener un modelo realista que describa la dinámica de bajo nivel del sistema. Hasta ahora hemos supuesto que las señales de control de la aeronave son 3: τ_P, δ_e, Ω . No obstante, en un prototipo real, existe cierta dinámica de naturaleza eléctrica y mecánica que hay que considerar. Para los tres actuadores harán falta motores eléctricos que cumplan con las especificaciones del control, lo que añade una dinámica rápida pero no desdeñable que acota el ancho de banda aguas arriba del control.

A.1. Subsistema de accionamiento del ángulo de los proprotos

Para obtener un ángulo de los proprotos adecuado se acudió al diseño de un PID desacoplado que, dado un error de ángulo θ_P , actuara mediante un par τ_P . Esta forma de expresar la dinámica de los proprotos interesa porque se explicita el par ejercido directamente sobre el punto de enganche del motor para incluir dicho momento sobre la dinámica general del sistema. Esto, que tiene sentido a nivel del diseño del simulador, varía en el ámbito práctico puesto que los motores DC se controlan por lo general en tensión o en corriente. En este sentido, el par ejercido sobre el motor y la corriente por sus bobinas está relacionada proporcionalmente por un parámetro denominado *constante de par* (K_T). Dicho parámetro puede obtenerse mediante un ensayo en un laboratorio o acudiendo a la hoja del fabricante. Así, se puede hablar de un control en corriente cuando la ecuación que rige la dinámica del proprotor tiene la siguiente forma:

$$\tau_P = R_m \cdot K_t \cdot i_m \rightarrow R_m \cdot K_t \cdot i_m = (I_P + R_m^2 J_m) \ddot{\theta}_P + R_m^2 B_m \dot{\theta}_P + G(\theta_P) \quad (\text{A.1})$$

Donde :

$R_m \rightarrow$ Factor de la reductora acoplada al motor.

$K_T \rightarrow$ Constante de par del motor.

$J_m \rightarrow$ Inercia de giro del motor.

$B_m \rightarrow$ Viscosidad del motor.

El control en corriente requiere de una etapa electrónica previa que sirva como driver de corriente. El circuito simplificado de un motor de corriente continua es el siguiente:

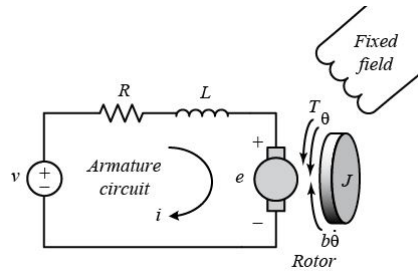


Figura 10.2: Modelo de un motor DC

Se observa que debido a la presencia de inductancias, la corriente que circula por el estátor no puede aplicarse de manera súbita (principio de continuidad de la corriente en las bobinas), sino que debe modularse a través de la tensión. Mediante la Ley de Kirchhoff podemos describir el comportamiento dinámico de dicha corriente en función de la tensión de armadura:

$$L \frac{di_m}{dt} + Ri_m = V - e \quad (\text{A.2})$$

Donde e se corresponde a la fuerza contra-electromotriz, que depende de la velocidad angular del rotor. Así, sea:

$$e = K_e \dot{\theta}_B \quad (\text{A.3})$$

Aplicando la transformada de Laplace a las ecuaciones (A.1) y (A.2), tendremos la función de transferencia que nos relaciona la tensión con el ángulo:

$$\frac{\theta_B(s)}{V(s)} = \frac{K_t R_m}{s[(Js + B_m)(Ls + R) + K_t K_e R_m]} \quad (\text{A.4})$$

La tensión (V), que ahora es la señal de control de este subsistema, suele obtenerse como el resultado de una modulación PWM y un posterior filtrado. Mediante dicha modulación, podemos tener una tensión de referencia comandada desde un microcontrolador a un driver PWM.

A.1.1. Dimensionado del motor de Tilt de los proprotiores

Para dimensionar un motor que tenga ese propósito debemos observar las características de comportamiento deseado especificadas por el control. Tendremos que el motor ha de tener un par máximo (par en movimiento) de $3 \text{ N} \cdot \text{m}$. Por otro lado, el bucle abierto se había diseñado con un ancho de banda de unos 30 rad/s (un tiempo de subida de 0.1 segundos). Generalmente, el fabricante proporciona ya el controlador integrado en el motor, simplificando la implementación, no obstante, aún cuando hemos diseñado el controlador con fines de simulación y verificación de la dinámica, se ha de buscar un dispositivo que cumpla, como mínimo, con las prestaciones obtenidas en los capítulos anteriores.

Se propone, tras una búsqueda, el siguiente servomotor:



Figura 10.3: Servomotor DX-117

Las especificaciones son las siguientes:

Tensión de operación	12 ~ 18.5V
Resolución	0.29°
Reductora (R_m)	192.6
Velocidad máxima sin carga	85 rpm
Par máximo (18.5V - 1.9A)	3.77 N · m
Secs/60°	0.129 s

Cuadro 8: Tabla de especificaciones del DX-117. Fuente: www.robotis.us

Se observa a simple vista que las prestaciones de este motor son buenas y supone un principio importante a la hora de dimensionar el coste y peso final de la aeronave.

Si bien no poseemos los parámetros eléctricos suficientes para hacer un modelo en tensión, sí podemos tomar las características del fabricante y suponer que el comportamiento dinámico del sistema $\theta_P^{Ref} \rightarrow \theta_P$ se comportará aproximadamente como un sistema de primer orden como:

$$\frac{\theta_P}{\theta_P^{Ref}}(s) = \frac{1}{0,041s + 1}$$

Esto casa con la dinámica simulada y permite determinar que, en el caso de que colocáramos este motor *no se diferenciaría demasiado del control en par que hemos realizado*.

A.2. Subsistema de accionamiento de la velocidad de las hélices

La velocidad angular de las hélices (Ω) se consigue gracias a un par de motores sin escobillas (*brushless*). Estos motores presentan varios pares de polos en forma de iman permanente en el rotor y un estátor con un bobinado para cada fase. El movimiento del rotor ocurre gracias al campo magnético variante que se genera cuando se energizan las bobinas del estátor, es decir, el entrehierro de cada bobinado estatórico genera un campo magnético fijo que causa un par de rotación en el imán del rotor cuando se conmuta sucesivamente la conexión de cada bobina. Asimismo, la velocidad de rotación y su dirección se consigue mediante la variación del sentido y magnitud de la corriente por las bobinas.

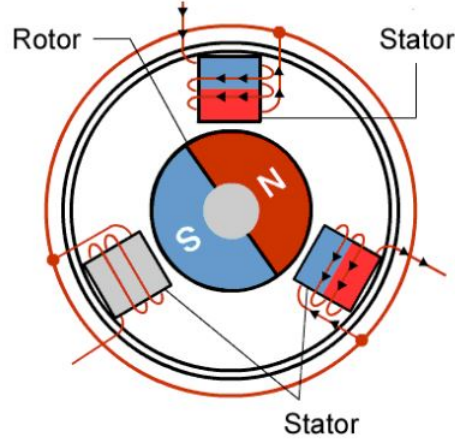


Figura 10.4: Esquema interno de funcionamiento de un BLDC en configuración estrella. Fuente: www.renesas.com

Tal y como ocurre en el motor de continua con escobillas, se genera por cada bobina una fuerza contra-electromotriz que se se opone a la corriente inducida por la tensión en la bobina. El esquema eléctrico del modelo es que el que sigue:

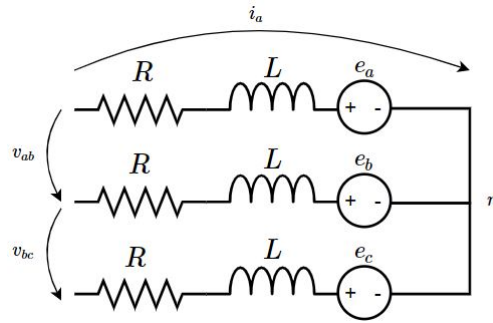


Figura 10.5: Circuito interno BLDC en estrella

Si aplicamos la ley de Kirchhoff a las mallas, tendremos las ecuaciones diferenciales de fase:

$$\begin{cases} v_{ab} = L \frac{d}{dt}(i_a - i_b) + R(i_a - i_b) + e_a - e_b \\ v_{bc} = L \frac{d}{dt}(i_b - i_c) + R(i_b - i_c) + e_b - e_c \\ v_{ca} = L \frac{d}{dt}(i_c - i_a) + R(i_c - i_a) + e_c - e_a \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Donde las expresiones de las fuerzas contra-electromotrices serán:

$$\begin{cases} e_a = \frac{k_e}{2} \Omega \cdot F(\theta_e) \\ e_b = \frac{k_e}{2} \Omega \cdot F(\theta_e - \frac{2\pi}{3}) \\ e_c = \frac{k_e}{2} \Omega \cdot F(\theta_e - \frac{4\pi}{3}) \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

y donde θ_e es el ángulo eléctrico del motor, es decir, el ángulo del motor tantas veces como pares de polos tenga el rotor:

$$\theta_e = p_p \cdot \theta_P \quad (\text{A.7})$$

La ecuación del par generado viene dada por:

$$T_m = \frac{k_t}{2} \left(F(\theta_e) i_a + F\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) i_b + F\left(\theta_e - \frac{4\pi}{3}\right) i_c \right) \quad (\text{A.8})$$

Donde F es la función de la onda de la fuerza contra-electromotriz que, en el caso de los motores BLDC tiene forma trapezoidal:

$$\begin{cases} 1, & 0 \leq \theta_e < \frac{2\pi}{3} \\ 1 - \frac{6}{\pi} (\theta_e - \frac{2\pi}{3}), & \frac{2\pi}{3} \leq \theta_e < \pi \\ -1, & \pi \leq \theta_e < \frac{5\pi}{3} \\ -1 + \frac{6}{\pi} (\theta_e - \frac{2\pi}{3}), & \frac{5\pi}{3} \leq \theta_e < 2\pi \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

A.2.1. Control de la velocidad de giro del motor Brushless

La estrategia de control de la velocidad de giro del motor consiste en la energización secuencial de las bobinas del motor dependiendo de la posición del actual del rotor. La posición del rotor puede medirse de dos formas:

- Mediante sensores de efecto Hall: Un sensor Hall discreto es capaz de detectar un campo magnético. Si acoplamos 3 de estos sensores en torno al rotor, obtendremos una terna de valores discretos que varía cada 60° eléctricos (o cada $60/p_p^\circ$ físicos). De este modo, conmutamos dos bobinas (una positivamente y la otra negativamente; la tercera queda desconectada) dependiendo del cuadrante (del fasor eléctrico) en el que se encuentre el rotor (Es el caso de la imagen 10.4).

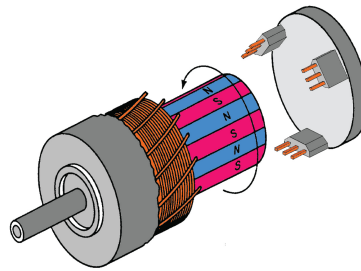


Figura 10.6: Sensores Hall en el interior de un BLDC

- Sin sensores (*sensorless*) mediante la medición de la fuerza contra-electromotriz: Como la fuerza contra-electromotriz se supone trapezoidal (simplificación), puede obtenerse la posición angular eléctrica mediante la observación de los niveles de dicha tensión en cada fase y aplicando la función inversa de F . Esta técnica es más difícil de implementar debido a que la EMF tiene una forma no ideal y que en el momento de la conmutación, existe una perturbación del par.

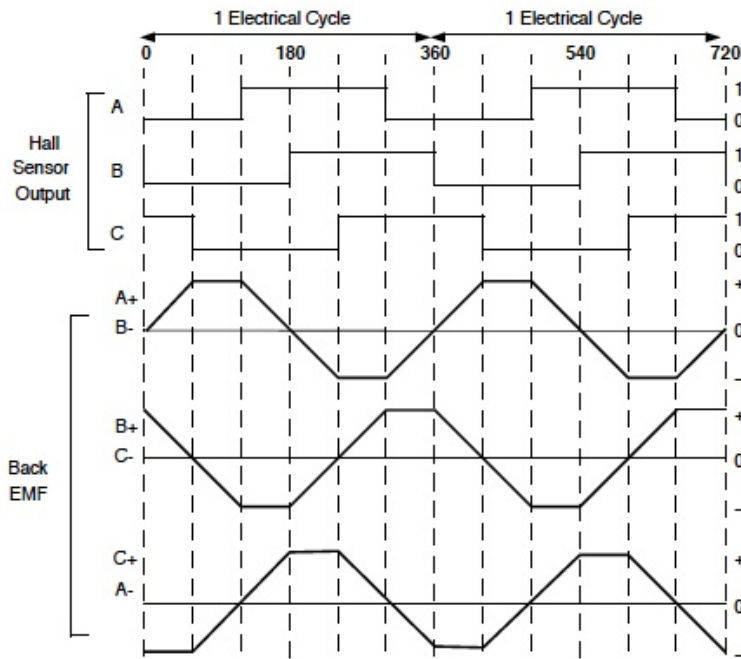


Figura 10.7: Perfil de la fuerza contra-electromotriz y la terna Hall.

A.2.2. Conmutación del bobinado del estátor

Una vez determinado el ángulo eléctrico (da igual el modo), podemos pasar a diseñar la secuencia de conmutación del BLDC. A nivel electrónico utilizaremos un inversor de puente completo y tres fases como el de la imagen (10.8). Con los IGBT (*Insulated Gate Bipolar Transistor*) del inversor, podremos conmutar el bobinado según la tabla (9)

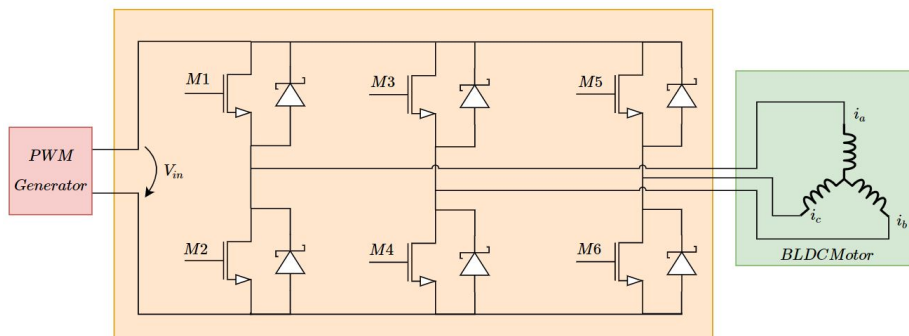


Figura 10.8: Esquema de un inversor trifásico

Ángulo eléctrico	Sensores Hall			IGBT activado	Polaridad de la fase		
	H1	H2	H3		A	B	C
[0°-60°)	1	0	0	(M1,M4)	+	-	Off
[60°-120°)	1	1	0	(M1,M6)	+	Off	-
[120°-180°)	0	1	0	(M3,M6)	Off	+	-
[180°-240°)	0	1	1	(M3,M2)	-	+	Off
[240°-300°)	0	0	1	(M5,M2)	-	Off	+
[300°-360°)	1	0	1	(M5,M4)	Off	-	+

Cuadro 9: Tabla de conmutación

A.2.3. Implementación y simulación del sistema

Para la implementación en Matlab, nos apoyaremos en la librería Simscape Power Systems, que provee de un modelo paramétrico de un motor BLDC y del entorno para simular los componentes eléctricos que hacen falta.

Diseñamos el modelo del motor usando las características comerciales del motor que usaremos en la práctica (un motor AXI 5345/16HD):



Figura 10.9: Motor utilizado

RPM/V	195
Máxima corriente	90 A
Corriente de cortocircuito	2.1 A
Resistencia interna	34mΩ
Par máximo (18.5V - 1.9A)	3.77 N · m
Número de polos	16
Inercia mecánica del eje ¹⁴	

Cuadro 10: Tabla de especificaciones del AXI-5345/16HD. Fuente: www.modelmotors.cz

El modelo en Matlab/Simulink será el siguiente:

¹⁴Incluyendo la inercia de la hélice.

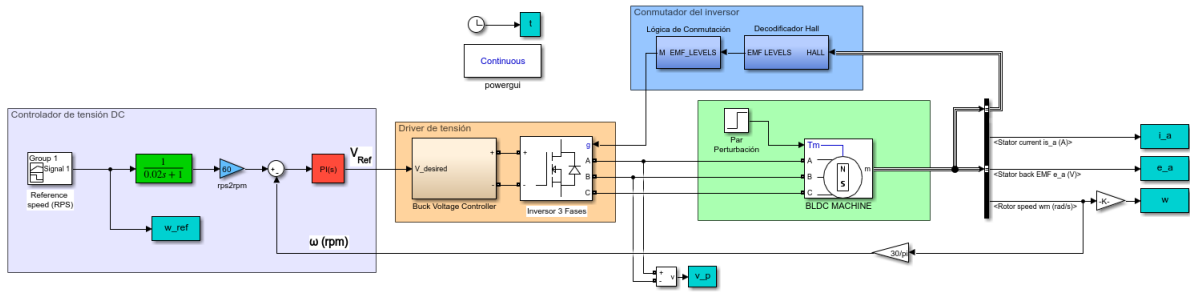


Figura 10.10: Modelo en Simulink

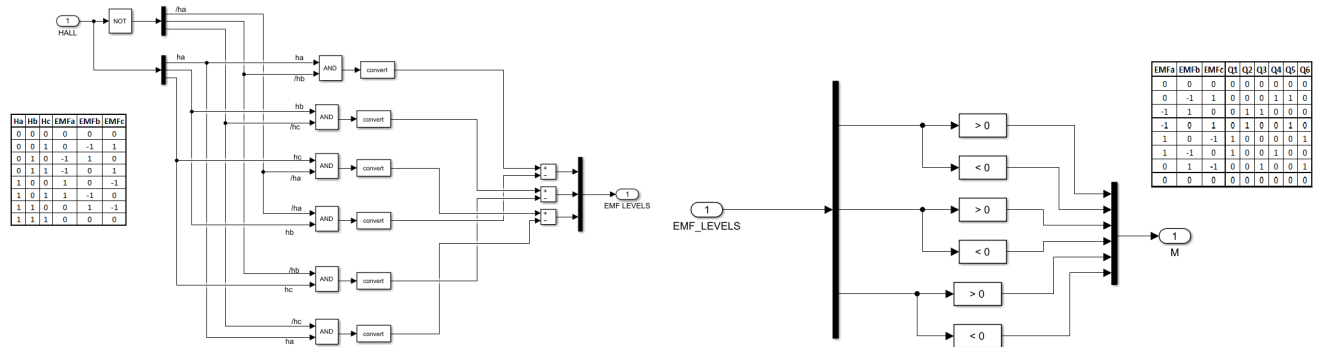


Figura 10.11: Decodificador de los sensores Hall (izq.) y Lógica de conmutación basada en el cuadrante EMF (der.)

Se ha implementado un controlador PI para cerrar el lazo y que la salida siga la referencia. Adicionalmente y atendiendo a la dinámica resultante, con un cero dominante en bucle cerrado (sobresoscilación amortiguada), se incorpora un prefiltro a la referencia (la dinámica más lenta de Ω_{Ref} en el control de la aeronave completa hará las veces de esta filtro). Realizando un experimento con distintos escalones de velocidad angular deseada, tendremos los siguientes resultados:

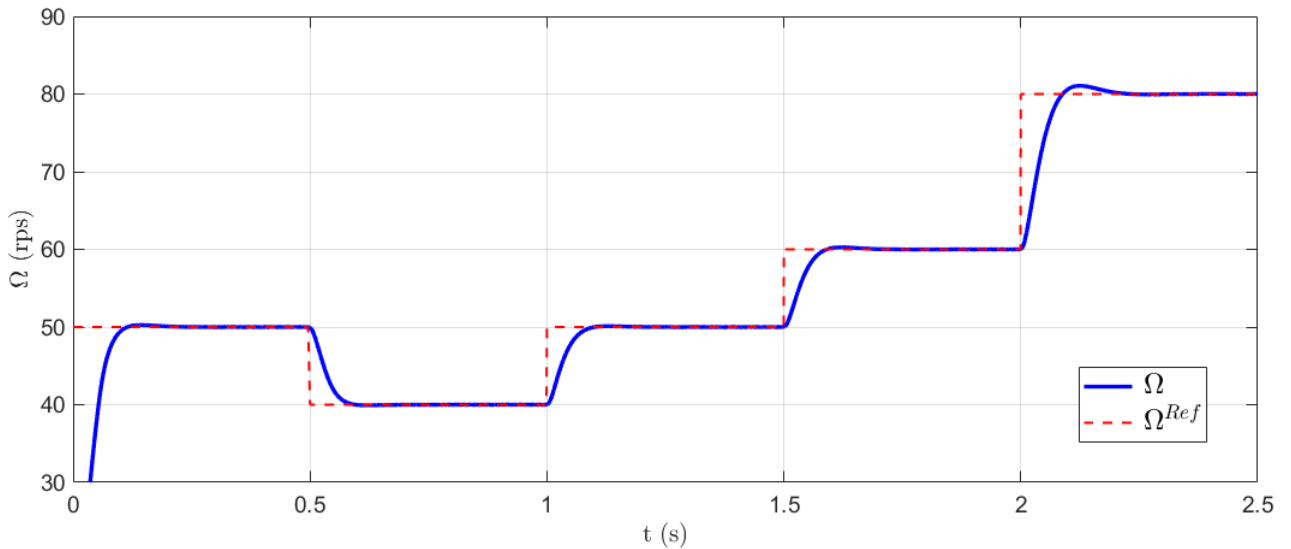


Figura 10.12: Resultado experimento

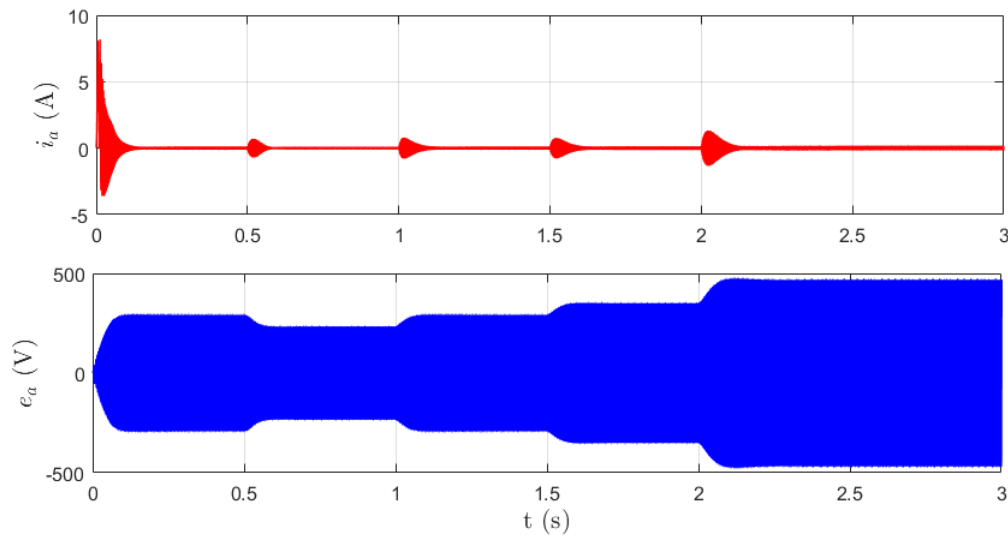


Figura 10.13: Tensiones y corrientes

Vemos que la dinámica resultante puede asemejarse a un sistema de primer orden. Con el objetivo de plantear simulaciones más rápidas en el proyecto de Simulink de la aeronave, no incluiremos el modelo completo del motor BLDC, sino una función de transferencia lineal que represente el bucle cerrado que aquí se ha obtenido en el entorno de operación de los 60 rps. Se modela el bucle cerrado como un sistema de segundo orden sobreamortiguado de ganancia unidad:

$$\frac{\Omega^{Ref}(s)}{\Omega(s)} = \frac{2500}{s^2 + 95,5s + 2500} \quad (\text{A.10})$$

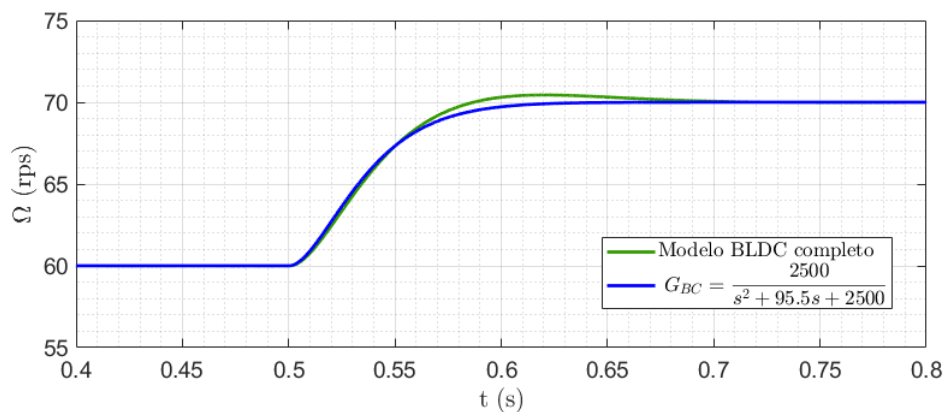


Figura 10.14: Comparativa con el modelo simplificado

A.3. Subsistema de accionamiento de los elevadores

Los elevadores forman parte del sistema de actuación aerodinámico de la nave y el mecanismo de movimiento no es más que un servomotor que dispone un ángulo a disposición del autopiloto. Este comportamiento es exactamente igual al especificado en el apartado primero de esta parte. Habiendo explicado el funcionamiento de un servomotor, escogeremos uno que cumpla con ciertos requisitos de velocidad y par.

En la dinámica de los elevadores es compleja. En términos de pares aerodinámicos se suele modelar mediante un desarrollo en serie de Taylor, donde el momento en el punto de enganche de los alerones dependerá del ángulo de ataque, del ángulo de deflexión del mismo, la forma del elevador, etc. Esta aerodinámica no está calculada en tunel de viento ni se ha proveído ninguna información respecto de la morfología del mismo actuador (en proceso de modelado y construcción en el momento de la redacción de este trabajo), por lo que renunciamos a indagar más allá de la información dinámica que nos provee un actuador comercial en términos de ancho de banda y par.

Suponemos por tanto que los actuadores tienen una dinámica igual que la del motor DX-17 más arriba descrito. De este modo, podemos modelar el bucle cerrado del subsistema de control del elevador como un sistema de primer orden, asumiendo que esto es una fuente de incertidumbre a la hora de la implementación en el modelo real:

$$\frac{\delta_e(s)}{\delta_e^{Ref}(s)} = \frac{1}{0,041s + 1} \quad (\text{A.11})$$

Observación. La expresión desarrollada en términos de Taylor de la dinámica del alerón queda modelada de la siguiente forma, expresada con el objetivo de servir para futuras investigaciones:

$$\tau_e = J_e \ddot{\delta}_e + h_e(V_a, \alpha, \delta_e) \quad (\text{A.12})$$

Donde

$$h_e = H_{e,eq} + \frac{1}{2} \rho V_a^2 S_e c_e \cdot (b_\alpha \Delta\alpha + b_{\delta_e} \Delta\delta_e) \quad (\text{A.13})$$

A saber:

- $H_{e,eq}$ Valor de equilibrio del par del alerón.
- $\Delta\alpha, \Delta\delta_e$ Incrementos respecto del valor de equilibrio del ángulo de ataque y del ángulo de deflexión de los elevadores.
- S_e, c_e Superficie efectiva y cuerda alar de los elevadores, respectivamente.

Anexo B: Programación de un simulador visual para la aeronave *Emergentia*

B. Simscape Multibody

Simscape™ es una librería de alto nivel desarrollada por MathWorks para el entorno Matlab-Simulink. Esta librería permite la creación rápida de modelos físicos basados en bloques (mismo paradigma que Simulink) pertenecientes a diversos dominios de trabajo. Cada dominio de trabajo queda asociado a sistemas de distinta naturaleza (mecánicos, electrónicos, hidrodinámicos, térmicos...) que pudieran o no interconectarse entre sí mediante alguna interfaz y que están representados por bloques parametrizables. De este modo, tendremos una serie de sublibrerías con un conjunto muy nutrido de sistemas típicos de la ingeniería. A saber:

- **Módulo Driveline:** conjunto de sistemas mecánicos clásicos tales como motores, engranajes, cajas de cambio y ruedas neumáticas.
- **Módulo Electronics:** conjunto de sistemas electrónicos, tanto actuadores como componentes discretos (transistores, elementos pasivos...).¹⁵
- **Módulo Multibody:** bloques típicos de descripción de sistemas físicos de varios eslabones. Encontraremos fuerzas, transformaciones de sistemas de referencias y articulaciones de varios tipos.
- **Módulo Foundation:** multitud de sistemas físicos de diversa índole. Actuadores hidráulicos, sistemas de transferencia de calor, etc.
- **Módulo Power Systems:** sistemas asociados al intercambio de potencia calorífica y eléctrica.

Este gran compendio de bloques puede ser asociado debidamente para formar sistemas multidominio, realistas desde el punto de vista de la simulación y transparentes desde la perspectiva de la programación.

B.1. Simulación de sistemas Multicuerpo - Emergentia

La utilidad del Simscape reside en la facilidad de crear sistemas complejos mediante un lenguaje gráfico y transparente como Simulink. En ocasiones, el nivel de esfuerzo dedicado al modelado de sistemas dinámicos de diversa naturaleza, con muchas conversiones y sistemas acoplados, hace que se pierda cierta abstracción del problema de control y que las simulaciones sean sumamente frágiles y difícilmente parametrizables o escalables. En los sistemas en los que intervienen fuerzas, pares, inercias, tensiones y corrientes en motores, señales de potencia moduladas e incluso la resistencia del viento, se hace vital poseer una herramienta de alto nivel que permita dos cosas: la primera, crear un entorno de alto nivel con abstracción

¹⁵Compatible íntegramente con la implementación y descripción mediante en el entorno SPICE.

suficiente como para no tener que trabajar a nivel de integración de ecuaciones diferenciales de modelos muy concurrentes y la segunda, proveer de herramientas realistas de personalización del entorno fáciles de implementar. En este último aspecto es donde focalizaremos la atención ya que, si bien Simscape Multibody sirve para la síntesis de la mecánica de cualquier sólido, nos valdremos de su conjunto de bloques gráficos para generar un visualizador de la física de la aeronave cuyo modelo hemos obtenido previamente. Simscape nos hará el papel de intérprete del estado del vehículo tras una simulación y nos aportará una perspectiva gráfica de conjunto.

El primer paso será el crear un sistema de referencia inercial absoluto¹⁶, como en todo sistema físico, sobre el cual obtendremos las magnitudes observables de nuestro objeto. Todo sistema de referencia global posee tres bloques de configuración:

- World Frame: Da acceso a un sistema de ejes fijos, ortogonal y dextrógiro con origen en (0,0,0). Cualquier sistema de referencia o cuerpo unido a este SR pertenecerá al mismo.
- Mechanism Configuration: Aplica ciertos parámetros mecánicos al sistema como la gravedad (introducida como un vector) y el paso de perturbación para la computación de las derivadas parciales.
- Solver: Provee de un método de integración, el dominio de la integración (temporal o temporal+frecuencial) y otros parámetros matemáticos.

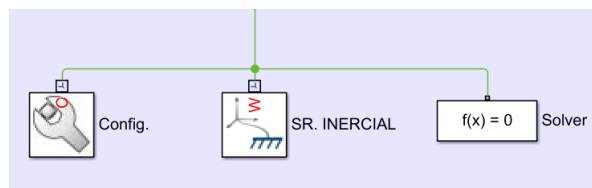


Figura 10.15: Creación del SR global

Una vez creado el sistema de referencia inercial, podremos ir añadiendo los distintos sistemas de referencia de cada sólido que se autodefine según unos ejes propios que habrá que colocar debidamente respecto al $SR_{INERCIAL}$ mediante transformaciones del sistema de referencia. Las transformaciones de ejes se pueden especificar en Simscape de muchas formas (giros mediante MTH¹⁷, secuencia de rotación, rotación en ejes alineados con la base y translaciones en cartesiano, cilíndricas...) pero siempre serán respecto de su Base (B) y proveerán un nuevo SR por el puerto Follower (F).

¹⁶Solo se admite un sistema global por cada entorno. Si queremos añadir un sistema asociado se usará un bloque Frame.

¹⁷Matrices de transformación homogénea

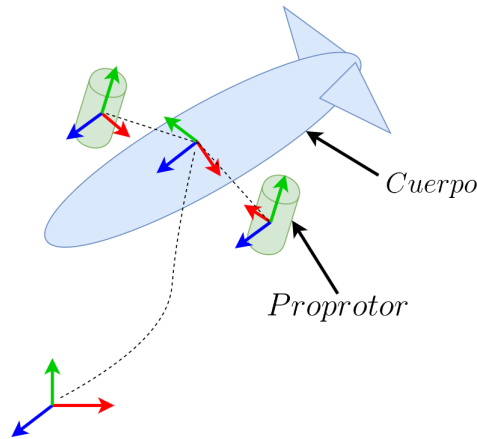


Figura 10.16: Creación del SR global

Colocaremos los bloques Solid (Simscape/Multibody/Body Elements/Solid) mediante un bloque de Rigid Transform (Simscape/Multibody/Frames and Transforms/Rigid Transform) de manera que, al asociar un cuerpo a cada nuevo sistema de referencia, queden alineados de manera correcta.

Entre transformación y transformación puede haber articulaciones que son capaces de transformar la traslación o rotación mediante uno o varios grados de libertad que pueden ser actuados desde fuera, con las señales de salida de la simulación de nuestra aeronave. Para el caso bidimensional, tendremos una articulación *planar* (dos coordenadas espaciales de movimiento más una de giro) y dos articulaciones *rotatorias* para los proprotos (aunque ambas tengan el mismo valor de ángulo asociado). Para simplificar y desacoplar la articulación planar en movimiento y giro lo convertiremos en dos articulaciones: prismática y rotativa. El resultado de situar las traslaciones y los giros adecuados vendrá a ser algo como esto:

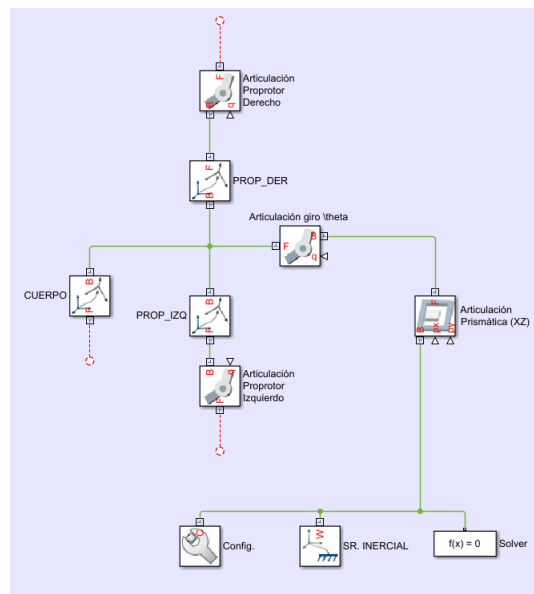


Figura 10.17: Colocación de los sistemas de referencia y articulaciones

Hay que tener en cuenta que las articulaciones mueven los sistemas de referencia que tengan conectados a su Base en los ejes que indican los puertos. Así, hemos de cambiar nuestros ejes para que el movimiento se adecúe a la realidad física del problema (nuestros ejes X-Z deberán ser X-Y en el simulador, por tanto). La articulación prismática mueve a lo largo de XY y la articulación rotatoria a lo largo de Z y así se ha tenido en cuenta. En todo caso, habremos de activar en dichos bloques la función de *Actuation/Force Automatically Computed* y *Actuation/Motion provided by input* para convertir la articulación en una simple representación de los datos de entrada (y no un sistema libre que realiza los cálculos físicos por sí mismo).

La geometría sólida que da alma al simulador, por su parte, puede venir definida por geometría simple (esferas, cilindros, prismas...) especificados dentro de la venta del bloque *Solid* o mediante una geometría importada. En ambos casos, si hiciera falta, el programa es capaz de calcular las inercias y el centro de masa de los eslabones. Colocaremos mediante el asistente los ejes en el lugar indicado (pensando en cómo encajarían con el sistema de referencia de origen) e importaremos la geometría en formato .STEP de la aeronave.

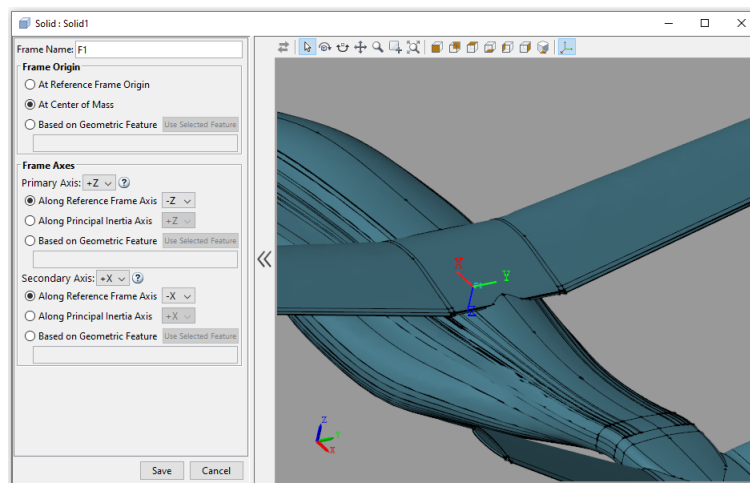
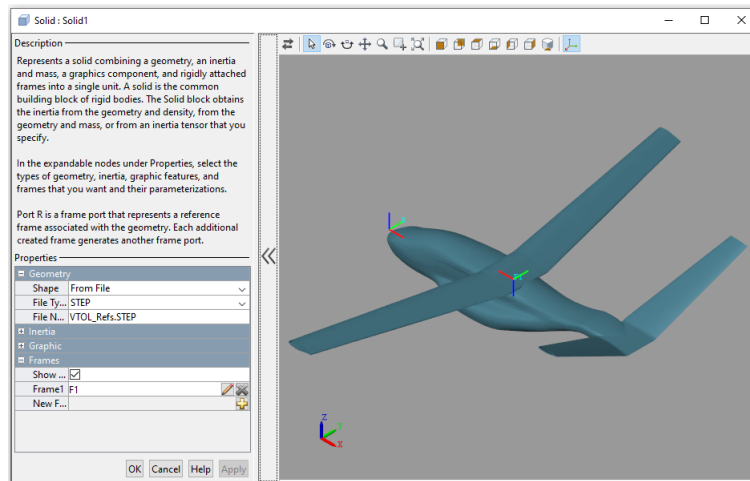


Figura 10.18: Geometría y colocación de los ejes.

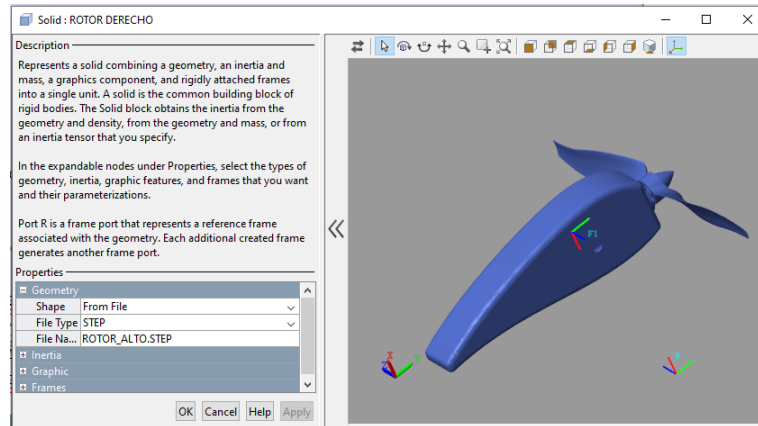


Figura 10.19: Geometría del proprotor.

El diagrama de bloques final del programa en Simulink será el que sigue:

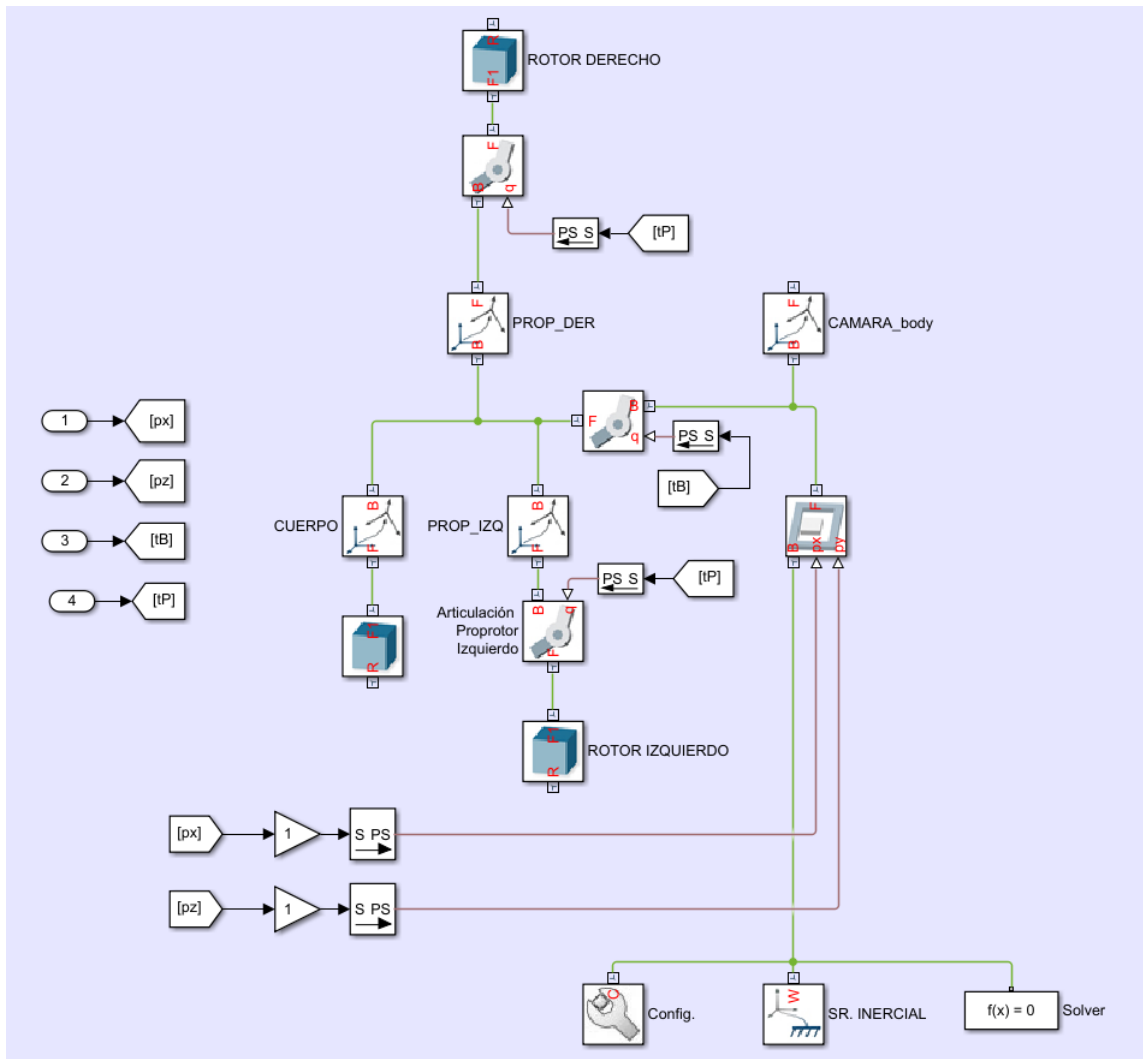


Figura 10.20: Diagrama completo del simulador gráfico.

B.2. Simulación gráfica - Mechanics Explorer

Las simulaciones con Simscape se comportan igual que otra simulación en Simulink, no obstante, cuando añadimos bloques de Multibody Parts, tendremos la posibilidad de observar su comportamiento en un visor 2D/3D llamado Mechanics Explorer (Figura 10.21).

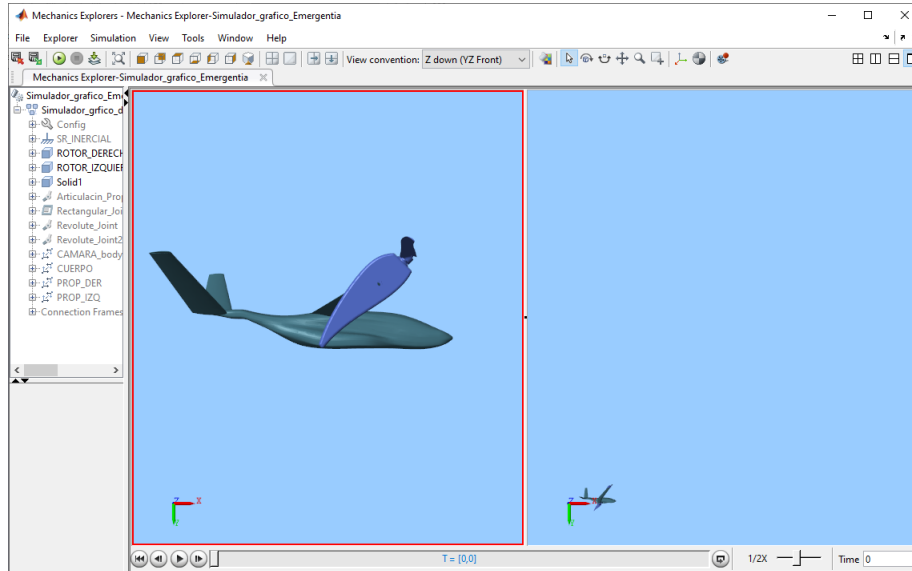


Figura 10.21: Resultado final del modelado gráfico

El visualizador se inicia de manera predeterminada en cuanto se inicie la simulación. La representación se visualizará mientras la simulación vaya más rápida que el ritmo de ejecución y si en última instancia, la simulación se para, la representación quedará en estado de buffering. A pesar de que esta herramienta tiene un fin meramente figurativo, cuando hablamos de multitud de grados de libertad y parámetros resulta muy útil observar la dinámica 3D del objeto a fin de evitar trabajo de interpretación de gran cantidad de gráficas. Hemos configurado adicionalmente el visor mediante las opciones de cámaras para aportar dos perspectivas útiles: una del perfil, que sigue a la aeronave y permite visualizar los giros de protores y cuerpo, y la otra fija respecto de $\{I\}$ para ver mejor la trayectoria final.

Anexo C: Linealización de las ecuaciones de la dinámica de vuelo

C. Linealización de las ecuaciones

Para componer un modelo lineal en espacio de estados es necesario el cálculo de las derivadas parciales de cada ecuación por cada variable de estado y cada entrada del sistema.

C.1. Expresiones dinámicas

Sean las siguientes expresiones de las fuerzas que intervienen en la mecánica de vuelo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{V}_a = \frac{1}{m}(-D + T \cos(\theta_P + \theta_B - \gamma) - g \cdot m \cdot \text{sen}(\gamma)) \\ \dot{\gamma} = \frac{1}{mV_a}(L + T \sin(\theta_P + \theta_B - \gamma) - g \cdot m \cdot \text{cos}(\gamma)) \\ \ddot{\theta}_B = \frac{1}{2} \frac{\rho V_a^2 S c}{I_y} (C_{m,0} + C_{m,\alpha} \cdot (\theta_B - \gamma) + C_{m,q} \cdot \dot{\theta}_B + C_{m,\delta_e} \cdot \delta_e) + \frac{T}{I_y} (x_{JB} \text{sen}(\theta_P) + z_{JB} \text{cos}(\theta_P)) \end{array} \right. \quad (\text{C.1})$$

Donde

$$L = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S \cdot \underbrace{(C_{L,\alpha}(\theta_B - \gamma) + C_{L,\delta} \cdot \delta_e)}_{C_l} \quad (\text{C.2})$$

$$D = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S \cdot \underbrace{(C_{D,0} + C_{D,1} \cdot C_l + C_{D,2} \cdot C_l^2)}_{C_d} \quad (\text{C.3})$$

$$T = n \rho D_r^2 \cdot (C_{T,0} D_r^2 \Omega^2 + C_{T,1} D_r \Omega V_a + C_{T,2} V_a^2) \quad (\text{C.4})$$

C.2. Linealización

A continuación se procede a resumir las expresiones de las derivadas parciales de cada ecuación, que evaluadas en el punto de equilibrio, forman los términos de la linealización del sistema en espacio de estados del **capítulo IV**.

C.2.1. Ecuación de V_a

$$\left. \frac{\partial \dot{V}_a}{\partial V_a} \right|_{eq} = \frac{1}{m} (-\rho V_a^{eq} S \cdot C_d^{eq} + n \rho D_r^2 (C_{T,1} D_r \Omega^{eq} + 2 C_{T,2} V_a^{eq}) \cdot \text{cos}(\theta_P^{eq} + \theta_B^{eq} - \gamma^{eq})) \quad (\text{C.5})$$

$$\left. \frac{\partial \dot{V}_a}{\partial \gamma} \right|_{eq} = \frac{1}{m} \left(-\frac{1}{2} \rho V_a^{2eq} S \cdot \left[-\left. \frac{dC_{L,\alpha}}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha^{eq}} \cdot C_{D,1} - 2C_l^{eq} \cdot \left. \frac{dC_{L,\alpha}}{d\alpha} \right| \cdot C_{D,2} \right] + \right. \quad (C.6)$$

$$\left. T^{eq} \text{sen}(\theta_P^{eq} + \theta_B^{eq} - \gamma^{eq}) - gm \cdot \cos(\gamma^{eq}) \right)$$

$$\left. \frac{\partial \dot{V}_a}{\partial \dot{\theta}_B} \right|_{eq} = 0 \quad (C.7)$$

$$\left. \frac{\partial \dot{V}_a}{\partial \theta_B} \right|_{eq} = \frac{1}{m} \left(-\frac{1}{2} \rho V_a^{2eq} S \cdot \left[\left. \frac{dC_{L,\alpha}}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha^{eq}} \cdot C_{D,1} + 2C_l^{eq} \cdot \left. \frac{dC_{L,\alpha}}{d\alpha} \right| \cdot C_{D,2} \right] + \right. \quad (C.8)$$

$$\left. -T^{eq} \text{sen}(\theta_P^{eq} + \theta_B^{eq} - \gamma^{eq}) \right)$$

$$\left. \frac{\partial \dot{V}_a}{\partial \Omega} \right|_{eq} = \frac{n\rho D_r}{m} (2C_{T,0} D_r^2 \Omega^{eq} + C_{T,1} D_r V_a^{eq}) \cdot \cos(\theta_P^{eq} + \theta_B^{eq} - \gamma^{eq}) \quad (C.9)$$

$$\left. \frac{\partial \dot{V}_a}{\partial \delta_e} \right|_{eq} = \frac{\rho V_a^{2eq} S}{2m} (-C_{D,1} C_{L,\delta} - 2C_{D,2} C_l^{eq} C_{L,\delta}) \quad (C.10)$$

$$\left. \frac{\partial \dot{V}_a}{\partial \theta_P} \right|_{eq} = -\frac{T^{eq}}{m} \text{sen}(\theta_P^{eq} + \theta_B^{eq} - \gamma^{eq}) \quad (C.11)$$

C.2.2. Ecuación de γ

$$\left. \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial V_a} \right|_{eq} = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{2} \rho S C_l^{eq} + n\rho D_r^2 \left(\frac{-C_{T,0} D_r^2 \Omega^{2eq}}{V_a^{2eq}} + C_{T,2} \right) \cdot \text{sen}(\theta_P^{eq} + \theta_B^{eq} - \gamma^{eq}) \right) \quad (C.12)$$

$$\left. \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \gamma} \right|_{eq} = \frac{1}{m V_a^{eq}} \left(-\frac{1}{2} \rho V_a^{2eq} S \cdot \left. \frac{dC_{L,\alpha}}{d\alpha} \right| + gm \cdot \text{sen}(\gamma^{eq}) - T^{eq} \cos(\theta_P^{eq} + \theta_B^{eq} - \gamma^{eq}) \right) \quad (C.13)$$

$$\left. \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \dot{\theta}_B} \right|_{eq} = 0 \quad (C.14)$$

$$\left. \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \theta_B} \right|_{eq} = \frac{1}{m V_a^{eq}} \left(\frac{1}{2} \rho V_a^{2eq} S \cdot \left. \frac{dC_{L,\alpha}}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha^{eq}} + T^{eq} \cos(\theta_P^{eq} + \theta_B^{eq} - \gamma^{eq}) \right) \quad (C.15)$$

$$\left. \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \Omega} \right|_{eq} = \frac{1}{m V_a^{eq}} (n\rho D_r^2 \cdot \text{sen}(\theta_P^{eq} + \theta_B^{eq} - \gamma^{eq}) \cdot [2C_{T,0} D_r^2 \Omega^{eq} + C_{T,1} D_r V_a^{eq}]) \quad (C.16)$$

$$\left. \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \delta_e} \right|_{eq} = \frac{1}{m V_a^{eq}} \left(\frac{1}{2} \rho V_a^{2eq} S \cdot C_{L,\delta} \right) \quad (C.17)$$

$$\left. \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \theta_P} \right|_{eq} = \frac{1}{m V_a^{eq}} \cdot (T^{eq} \cdot \cos(\theta_P^{eq} + \theta_B^{eq} - \gamma^{eq})) \quad (C.18)$$

C.2.3. Ecuación de $\dot{\theta}_B$

$$\left. \frac{\partial \ddot{\theta}_B}{\partial V_a} \right|_{eq} = \frac{\rho S c V_a^{eq}}{I_y} \left(C_{M,0} + C_{M,\alpha} \cdot (\theta_B^{eq} - \gamma^{eq}) + C_{M,q} \dot{\theta}_B^{eq} + C_{M,\delta} \delta_e^{eq} \right) + \quad (C.19)$$

$$+ \frac{n \rho D_r^2}{I_y} (x_{JB} \text{sen}(\theta_P) + z_{JB} \text{cos}(\theta_P)) \cdot (C_{T,1} D_r \Omega^{eq} + 2 C_{T,2} V_a^{eq})$$

$$\left. \frac{\partial \ddot{\theta}_B}{\partial \gamma} \right|_{eq} = \frac{\rho S c V_a^{2eq}}{2 I_y} \cdot (-C_{M,\alpha}) \quad (C.20)$$

$$\left. \frac{\partial \ddot{\theta}_B}{\partial \dot{\theta}_B} \right|_{eq} = \frac{\rho S c V_a^{2eq}}{2 I_y} \cdot (C_{M,q}) \quad (C.21)$$

$$\left. \frac{\partial \ddot{\theta}_B}{\partial \theta_B} \right|_{eq} = \frac{\rho S c V_a^{2eq}}{2 I_y} \cdot (C_{M,\alpha}) \quad (C.22)$$

$$\left. \frac{\partial \ddot{\theta}_B}{\partial \Omega} \right|_{eq} = \frac{n \rho D_r^2}{I_y} (x_{JB} \text{sen}(\theta_P) + z_{JB} \text{cos}(\theta_P)) \cdot (2 C_{T,0} D_r^2 \Omega^{eq} + C_{T,1} D_r V_a^{eq}) \quad (C.23)$$

$$\left. \frac{\partial \ddot{\theta}_B}{\partial \delta_e} \right|_{eq} = \frac{\rho S c V_a^{2eq}}{2 I_y} \cdot (C_{M,\delta}) \quad (C.24)$$

$$\left. \frac{\partial \ddot{\theta}_B}{\partial \theta_P} \right|_{eq} = \frac{T^{eq}}{I_y} (x_{JB} \text{sen}(\theta_P) + z_{JB} \text{cos}(\theta_P)) \quad (C.25)$$

C.2.4. Ecuación de θ_B

$$\left. \frac{\partial \dot{\theta}_B}{\partial V_a} \right|_{eq} = 0; \quad \left. \frac{\partial \dot{\theta}_B}{\partial \gamma} \right|_{eq} = 0 \quad \left. \frac{\partial \dot{\theta}_B}{\partial \dot{\theta}_B} \right|_{eq} = 1 \quad \left. \frac{\partial \dot{\theta}_B}{\partial \theta_B} \right|_{eq} = 0 \quad (C.26)$$

$$\left. \frac{\partial \dot{\theta}_B}{\partial \Omega} \right|_{eq} = 0; \quad \left. \frac{\partial \dot{\theta}_B}{\partial \delta_e} \right|_{eq} = 0 \quad \left. \frac{\partial \dot{\theta}_B}{\partial \theta_P} \right|_{eq} = 0 \quad (C.27)$$

D. Referencias

- [1] M. Nuñez, S. Esteban, and M. Vargas, “Estudio de sensibilidad de las condiciones de equilibrio de una aeronave convertible durante las fases de vuelo longitudinal: avance, axial y transición.” 17, 24, 35, 36, 37, 41, 42, 49, 75
- [2] R. W. Beard, *Small unmanned aircraft : theory and practice* /, T. W. McLain, Ed. Princeton: Princeton University Press,, 2012. 32, 34, 35, 69
- [3] NASA - Glenn Research Center, “Aerodynamic Forces,” 2015. [Online]. Available: <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/presar.html> 34, 35
- [4] Márquez, Sira-Ramírez, and Rivas-Echeverría., *Control de sistemas lineales y no lineales por Linealización*, 2015. 39
- [5] MathWorks, “Constrained Nonlinear Optimization Algorithms,” 2018. [Online]. Available: <https://es.mathworks.com/help/optim/ug/constrained-nonlinear-optimization-algorithms.html?lang=en> 40
- [6] R. Meyer, “Max-Min Problems,” *Essential Mathematics for Applied Fields*, pp. 1–8, 1979. [Online]. Available: http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4613-8072-6{__}1940
- [7] D. Mukherjee and D. Ghose, “Smith Predictor Based Control Strategies for Nonminimum Phase Plants,” *2013 IEEE International Conference on Control Applications (CCA)*, pp. 948–953, 2013. 74
- [8] A. S. Saeed, A. B. Younes, C. Cai, and G. Cai, “A survey of hybrid Unmanned Aerial Vehicles,” *Progress in Aerospace Sciences*, vol. 98, pp. 91–105, apr 2018. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0376042117302233?via=ihub> 86
- [9] R. Rose, N. Nicholas, and G. Vorley, “Flight Measurements of the Elevator and Aileron Hinge-Moment Derivatives of the Fairey Delta 2 Aircraft up to a Mach Number of 1 · 6 & Comparison With Wind Tunnel Results,” no. 3485, 1967.
- [10] S. Baldursson, “BLDC Motor Modelling and Control. A Matlab Simulink Implementation ,” Ph.D. dissertation, 2005. [Online]. Available: <http://webfiles.portal.chalmers.se/et/MSc/BaldurssonStefanMSc.pdf>
- [11] T. R. Kane and D. A. Levinson, “Dynamics Theory and Applications,” Tech. Rep., 1985. [Online]. Available: <http://dSPACE.library.cornell.edu/handle/1813/62>
- [12] A. Ollero and M. B. De La Rosa, “Modelo matemático y control de un ala volante con capacidad VTOL Intensificación en vehículos aeroespaciales,” Tech. Rep.
- [13] D. Neri, “Robust Control Strategies for Convertible Unmanned Aerial Vehicles,” Ph.D. dissertation, 2018.
- [14] M. Turner, “Nonlinear Control.”
- [15] A. Abdessameud and A. Tayebi, *Motion Coordination for VTOL Unmanned Aerial Vehicles*. [Online]. Available: www.springer.com/series/1412
- [16] B. Yuksek, A. Vuruskan, U. Ozdemir, M. A. Yukselen, and G. Inalhan, “Transition Flight Modeling of a Fixed-Wing VTOL UAV,” *Journal of Intelligent and Robotic Systems: Theory and Applications*, 2016.

-
- [17] F. Çakici and M. K. Leblebicioglu, “Control System Design of a Vertical Take-off and Landing Fixed-Wing UAV,” *IFAC-PapersOnLine*, 2016.
- [18] M. Sato and K. Muraoka, “Flight Controller Design and Demonstration of Quad-Tilt-Wing Unmanned Aerial Vehicle,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2014.
- [19] F. Gavilan and R. Vazquez, “Control of the longitudinal flight dynamics of an UAV using adaptive backstepping Control of the longitudinal flight dynamics of an UAV using adaptive backstepping,” no. February 2015, 2011.
- [20] M. Gomez-Redondo, J. Rodas, M. Llano, R. Gregor, J. Rodriguez-Pineiro, and E. Paiva, “Design and Implementation of a VTOL Flight Transition Mechanism and Development of a Mathematical Model for a Tilt Rotor UAV,” pp. 1–6, 2019.
- [21] D. V. Miranda, J. Rico-azagra, and C. E. Group, “Longitudinal Control Of A Fixed Wing UAV,” pp. 5–7, 2018.
- [22] M. S. Selig, “Modeling Propeller Aerodynamics and Slipstream Effects on Small UAVs in Realtime,” Tech. Rep., 2010. [Online]. Available: <http://www.ae.illinois.edu/m-selig>