UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Continuidade de atratores para problemas parabólicos semilineares sob perturbações do domínio

Rodrigo Antonio Samprogna

São Carlos - SP
Fevereiro de 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Continuidade de atratores para problemas parabólicos semilineares sob perturbações do domínio

Rodrigo Antonio Samprogna
Bolsista CAPES
Orientadora: Profa. Dra. Karina Schiabel Silva

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

São Carlos - SP
Fevereiro de 2013

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

S192ca

Samprogna, Rodrigo Antonio.
Continuidade de atratores para problemas parabólicos semilineares sob perturbações do domínio / Rodrigo Antonio Samprogna. -- São Carlos : UFSCar, 2013.
73 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2013.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Continuidade de atratores. 3. Operador laplaciano. 4. Pertubação (Matemática). I. Título.

CDD: 515.353 (20ª)

Banca Examinadora:

Karina Schiabel

Profa. Dra. Karina Schiabel-Silva
DM – UFSCar

Profa. Dra. Cláudia Butarello Gentile
DM – UFSCar

Prof. Dr. German Jesus Lozada-Cruz
IBILCE – UNESP

Agradecimentos

Agradeço a toda a minha família, em especial aos meus pais, Antonio e Terezinha, e minha irmã, Paula, pela apoio e compreensão durante meus estudos e em todos os aspectos da minha vida.

À minha companheira Betina e sua família, que sempre me apoiaram e me ajudaram com muito carinho e paciência.

Aos Professores do departamento de matemática da UFSCar, Ivo e Daniel, que me apresentaram a pesquisa matemática e sempre estiveram dispostos a me orientar em vários aspectos, com sinceridade e compreensão. E ainda aos colegas de curso, funcionários e docentes do DM-UFSCar.

Ao meu amigo Leonardo Pires, pelo companheirismo nos estudos durante a graduação e o mestrado. Aos meus amigos de São José dos Campos, que mantiveram contato comigo, me apoiando e sempre dispostos a me ajudar como puderam.

À Professora Karina Schiabel, pela dedicação, paciência, incentivo, sinceridade e disposição na orientação deste trabalho.

E, por fim, a Deus.

Resumo

Neste trabalho obteremos a continuidade dos atratores para problemas parabólicos semilineares com condição de fronteira de Neumann relativamente a perturbações do domínio. Mostraremos que, se as perturbações do domínio são tais que a convergência dos autovalores e autofunções do Laplaciano de Neumann estão garantidas, então vale a semicontinuidade superior dos atratores. Se, além disso, todo ponto de equilíbrio do problema não perturbado é hiperbólico, vale também a continuidade dos atratores.

Abstract

In this work we will obtain the continuity of attractors for semilinear parabolic problems with Neumann boundary conditions relatively to perturbations of the domain. We will show that, if the perturbations on the domain are such that the convergence of eingenvalues and eingenfunctions of the Neumann Laplacian is granted then we obtain the upper semicontinuity of the attractors. If, moreover, every equilibrium of the unperturbed problem is hyperbolic we also obtain the continuity of attractors.

Sumário

Introdução

Neste trabalho consideraremos uma família de equações de reação-difusão dependentes de um parâmetro $\varepsilon > 0$, dada por

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(x,u) & \text{em } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{em } \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases} \tag{1}$$

onde Ω_ε são domínios de Lipschitz limitados no $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, para $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

O objetivo é fazer um estudo detalhado de [2], em que os autores impõem condições sobre o comportamento dos domínios Ω_ε quando $\varepsilon \to 0$, a fim de garantir a continuidade da família de atratores $\{\mathcal{A}_\varepsilon : \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]\}$, quando $\varepsilon \to 0$, em um espaço funcional conveniente.

Assumimos que a não-linearidade $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em ambas as variáveis (x,u) e, para $x \in \mathbb{R}^N$ fixo, $f(x,\cdot) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Além disso, a função f satisfaz

$$\limsup_{|s|\to\infty} \frac{f(x,s)}{s} < 0, \text{ uniformemente para } x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Com essas condições, pode ser visto em [3] que o problema (1) tem uma única solução em $W^{1,q}(\Omega_\varepsilon)$, $q > N$, sem restrições sobre o crescimento de f. Além disso, assumindo a hipótese (2), o problema (1) possui um atrator global $\mathcal{A}_\varepsilon$, o qual não depende de q e os atratores $\mathcal{A}_\varepsilon$ são limitados em $L^\infty(\Omega_\varepsilon)$, uniformemente em ε.

Desta forma, podemos considerar, sem perda de generalidade, que $f(x,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ satisfazendo (2) e

$$\left|\frac{\partial f}{\partial u}(x,u)\right| \leq c_f, \ \left|\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x,u)\right| \leq \tilde{c}_f \quad \forall (x,u) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \tag{3}$$

com c_f e $\tilde{c}_f$ constantes positivas. Agora a não-linearidade é globalmente Lipschitz em u, o que nos permite estudar o problema em $H^1(\Omega_\varepsilon)$. Assim, os atratores estarão em espaços mais regulares, como $W^{1,q}(\Omega_\varepsilon)$ para $2 < q < \infty$, mas suas propriedades de continuidade serão analisadas na topologia de H^1.

Consideramos Ω_ε como uma perturbação do domínio Ω_0, com as seguintes condições

$$\begin{cases} \text{para cada } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0,\ \Omega_\varepsilon \text{ é limitado, Lipschitz e} \\ \text{para todo } \ K \subset\subset \Omega_0,\ \text{existe } \varepsilon(K) \text{ tal que } K \subset \Omega_\varepsilon,\ 0 < \varepsilon \leq \varepsilon(K). \end{cases} \tag{4}$$

Note que *a priori* não exigimos que

$$|\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0| \to 0 \text{ quando } \varepsilon \to 0.$$

A grande dificuldade que surge quando perturbamos o domínio do problema é que as soluções, para valores diferentes de ε, estão em espaços diferentes, e portanto expressões como $u_\varepsilon - u_0$ (onde $u_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ e $u_0 \in H^1(\Omega_0)$) não fazem sentido sem a devida adaptação. Com este intuito, trabalharemos com o espaço

$$H^1_\varepsilon = H^1(\Omega_\varepsilon \cap \Omega_0) \oplus H^1(\Omega_\varepsilon \setminus \overline{\Omega_0}) \oplus H^1(\Omega_0 \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}),$$

munido de uma norma apropriada.

Para obtermos a continuidade da família de atratores, estudaremos detalhadamente o comportamento da parte linear para, na sequência, utilizarmos o roteiro usual para obtenção das semicontinuidades superior e inferior dos atratores:

(i) Semicontinuidade superior dos atratores $\mathcal{A}_\varepsilon$ em H^1_ε, que é obtida por meio da convergência espectral em H^1_ε do Laplaciano de Neumann com $\varepsilon \to 0$, ou seja, do fato que os autovalores e autofunções do operador de Laplace com condições de Neumann homogêneas na fronteira comportam-se continuamente em H^1_ε quando $\varepsilon \to 0$.

(ii) Semicontinuidade inferior dos atratores $\mathcal{A}_\varepsilon$ em H^1_ε. Uma vez que temos a semicontinuidade superior, a semicontinuidade inferior em H^1_ε é obtida exigindo que toda solução de equilíbrio do problema não perturbado seja hiperbólica.

Para alcançarmos nosso objetivo, estruturamos esta dissertação da seguinte forma: no Capítulo 1 apresentamos resultados preliminares necessários ao desenvolvimento do trabalho, incluindo uma compilação das teorias de semigrupos e atratores. No Capítulo 2 apresentamos condições necessárias e suficientes que garantem que os autovalores e as autofunções comportam-se continuamente quando o domínio sofre perturbações satisfazendo (4). Em seguida, estudamos a convergência dos operadores resolventes e dos semigrupos lineares gerados pelo problema (1). A continuidade dos atratores é obtida no Capítulo 3. Usando a Fórmula da Variação das Constantes e a continuidade dos semigrupos lineares, concluímos que a família de semigrupos não lineares $\{T_\varepsilon(t) : t \geq 0\}$ comporta-se continuamente em $\varepsilon = 0$, uniformemente em compactos de $(0, \infty)$, o que já é suficiente para a semicontinuidade superior. Para mostrarmos a semicontinuidade inferior dos atratores, devemos ainda obter a continuidade dos conjuntos de equilíbrio e a continuidade das variedades instáveis locais, uma vez que os semigrupos associados têm estrutura gradiente. Finalizando, exibiremos um exemplo no qual tal teoria pode ser aplicada.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

1.1 Espaços de Sobolev

Esta seção faz parte de um ferramental necessário para o desenvolvimento do trabalho. Um estudo mais detalhado e as respectivas demonstrações podem ser encontradas, por exemplo, em [5].

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^N$. Suponha que $u \in C^1(\Omega)$ seja uma função real continuamente diferenciável. Se $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ é uma função suave com suporte compacto em Ω, segue da fórmula de integração por partes que

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi dx$$

para $i = 1, ..., n$.

Definição 1.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ para $1 \leq p \leq \infty$. Dizemos que uma função $v_i \in L^p_{loc}(\Omega)$ é uma **derivada fraca** de u se*

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega v_i \varphi dx,$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Se este for o caso, denotamos

$$v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

*Dizemos que u é **fracamente diferenciável** se todas as derivadas fracas de primeira ordem de u existem. O espaço vetorial das funções fracamente diferenciáveis é denotado por $W^{1,p}(\Omega)$.*

Quando existe, v_i é unicamente determinada a menos de conjuntos de medida nula. Observe que $C^1(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$, e o conceito de derivada fraca é uma extensão do conceito clássico de derivada, que mantém a validade da fórmula de integração por partes.

Definição 1.2. *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^N$. Definimos para $m \geq 2$*

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega) \text{ para todo } i = 1, ..., n \right\}.$$

$$= \left\{ u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{tal que } \forall \alpha \text{ com } |\alpha| \leq m, \; \exists g_\alpha \in L^p(\Omega) \text{ tal que} \\ \int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi \;\; \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \end{array} \right\},$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$ para $\alpha_i \geq 0$ um inteiro,

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \quad e \quad D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}.$$

*$W^{m,p}(\Omega)$ é claramente um espaço vetorial, tal espaço é denominado **espaço de Sobolev**.*

Denotamos, quando existem, $g_\alpha = D^\alpha u$.

Notação 1.3. *O espaço $W^{1,2}(\Omega)$ é usualmente denotado por $H^1(\Omega)$.*

Podemos definir uma norma em $W^{m,p}(\Omega)$ da seguinte maneira

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p$$

Observação 1.4. *Se Ω é suave e com fronteira limitada, então a norma de $W^{m,p}(\Omega)$ é equivalente à norma*

$$\|u\|_p + \sum_{|\alpha| = m} \|D^\alpha u\|_p.$$

Definimos também o conjunto $W_0^{1,p}$ como o fecho do conjunto $C_0^1(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$.

Por exemplo, para $H^1(\Omega)$ temos a seguinte norma

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^2 + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

O conjunto $W_0^{1,2}(\Omega)$ é o fecho de $C_0^1(\Omega)$ em $W^{1,2}(\Omega)$. Em ambos os espaços vetoriais normados $W^{1,2}(\Omega)$ e $W_0^{1,2}(\Omega)$ definimos o produto interno

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega uv + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Desta forma, a norma definida acima é derivada deste produto interno. Ela também é equivalente à norma

$$\begin{aligned}\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} &= \left(\int_\Omega |u|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{N}\left(\int_\Omega \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|u\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Teorema 1.5. *$W^{1,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert. Em particular, $W_0^{1,2}(\Omega)$ também é um espaço de Hilbert.*

Teorema 1.6. *$C^\infty(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$ é denso em $W^{1,2}(\Omega)$. Se Ω é um aberto com fronteira de classe C^1, então $C^\infty(\overline{\Omega}) \cap W^{1,2}(\Omega)$ é denso em $W^{1,2}(\Omega)$.*

Os seguintes resultados caracterizam o espaço $W_0^{1,2}(\Omega)$:

Teorema 1.7. *Se $u \in W^{1,2}(\Omega)$ e satisfaz supp$(u) \subset\subset \Omega$, então $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto com fronteira de classe C^1 e $u \in W^{1,2}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, então $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ se, e somente se, $u = 0$ em $\partial\Omega$.*

As propriedades de imersão compacta dos espaços de Sobolev são as que lhe conferem a sua grande utilidade. Recordemos os conceitos de *imersão contínua* e *imersão compacta*:

Definição 1.8. *Seja E um subespaço vetorial normado de um espaço normado F (ou seja, a norma de E não precisa necessariamente ser a norma induzida de F). Dizemos que a inclusão $E \subset F$ é uma **imersão** (contínua) se a aplicação inclusão $Id : E \to F$ definida por $Id(x) = x$ for contínua. Denotamos este fato por*

$$E \hookrightarrow F.$$

*Se, além disso, a aplicação inclusão for compacta, dizemos que a imersão $E \hookrightarrow F$ é **compacta**. Denotamos a imersão compacta de um espaço vetorial normado E em um espaço vetorial normado F por*

$$E \overset{c}{\hookrightarrow} F.$$

Como a aplicação inclusão é linear, o fato de existir uma imersão $E \hookrightarrow F$ é equivalente à existência de uma constante C tal que

$$\|x\|_F \leq C\|x\|_E \text{ para todo } x \in E.$$

Em particular, se (x_n) é uma sequência de Cauchy em E, então (x_n) também é uma sequência de Cauchy em F; logo, se $x_n \to x$ em E, então $x_n \to x$ em F também. É claro que se E tem a norma induzida de F, então a inclusão $E \subset F$ é uma imersão, com $C = 1$. Quando existe uma imersão $E \hookrightarrow F$, dizer que ela é compacta é equivalente a dizer que sequências limitadas de $(E, \|\cdot\|_E)$ possuem subsequências convergentes em $(F, \|\cdot\|_F)$.

Teorema 1.9 (Teorema da Imersão de Sobolev)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto. Então*

$$W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega),$$

$$W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega).$$

Observe que,

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{L^2(\Omega)} \geq \|u\|_{L^2(\Omega)},$$

e o mesmo vale para $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Teorema 1.10 (Teorema de Rellich-Kondrakhov)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado e com fronteira de classe C^1. Então temos as seguintes imersões compactas:*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)\ \forall q \in [1, p^*),\ \textit{onde}\ \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N},\ \textit{se}\ p < N$$
$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)\ \forall q \in [p, +\infty),$$
$$W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega}),$$

em particular, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ com imersão compacta para todo p (e todo N).

Teorema 1.11. *[Desigualdade de Poincaré] Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado e $1 \leq p \leq \infty$. Então existe uma constante C (dependente de Ω e p) tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Observe que o Teorema 1.11 não é válido se trocarmos $W_0^{1,2}$ por $W^{1,2}$, pois, as funções constantes pertencentes a $W^{1,2}$ não satisfazem a desigualdade de Poincaré (pois têm derivada nula).

1.2 Teoria de semigrupos

A teoria de semigrupos é fundamental para nosso objetivo, uma análise mais detalhada e as demonstrações dos resultados citados nesta seção podem ser encontradas em [7] e [13].

Seja X um espaço de Banach. Denotemos por $\mathcal{L}(X)$ o espaço dos operadores lineares contínuos de X em X com a norma usual, ou seja, para $T \in \mathcal{L}(X)$,

$$\| T \|_{\mathcal{L}(X)} = \sup_{\substack{x \in X, \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|_X}{\|x\|_X}$$

Definição 1.12. *Um* ***semigrupo de operadores lineares*** *é uma família* $\{T(t); t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ *de operadores a um parâmetro que tem as seguintes propriedades:*

(i). $T(0) = I$.

(ii). $T(t+s) = T(t)T(s), \quad \forall\ t, s \geq 0$.

(iii). $T : [0, \infty) \longrightarrow X$ *é contínua.*

(iii'). Se $\|T(t) - I\| \to 0$ *quando* $t \to 0^+$, *o semigrupo é uniformemente contínuo.*

(iii"). Se $\|T(t)x - x\| \to 0$ *quando* $t \to 0^+$, *o semigrupo é fortemente contínuo ou* $C_0 -$ *semigrupo.*

Observação 1.13. *Note que na definição anterior o item (iii') implica no item (iii").*

Teorema 1.14. *Seja* $\{T(t); t \geq 0\}$ *um* C_0-*semigrupo. Então existem constantes* $M \geq 1$ *e* $\omega \geq 0$ *tais que*

$$\|T(t)\| \leq M e^{\omega t},$$

para todo $t \geq 0$.

Definição 1.15. *Se* $\{T(t); t \geq 0\}$ *é um* $C_0 -$ *semigrupo, seu* ***gerador infinitesimal*** *é o operador* $A : D(A) \subset X \to X$ *dado por*

$$D(A) = \left\{ x \in X; \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \ \textit{existe} \right\}$$

$$Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}$$

O resultado seguinte caracteriza o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo.

Teorema 1.16. *Um operador linear $A : X \to X$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo se, e somente se, $A \in \mathcal{L}(X)$.*

No resultado seguinte, reunimos algumas notáveis propriedades a respeito dos C_0- *semigrupos.*

Teorema 1.17. *Seja $\{T(t); t \geq 0\}$ um $C_0 -$ semigrupo e A seu gerador infinitesimal. Então valem as seguintes propriedades:*

(i). Para todo $x \in X$, a função

$$t \longmapsto T(t)x$$

é contínua.

(ii). Para $x \in X$, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{h} \displaystyle\int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x$.

(iii). Para $x \in X$, temos $\displaystyle\int_0^t T(s)xds \in D(A)$ e

$$A\bigg(\int_0^t T(s)xds\bigg) = T(t)x - x.$$

(iv). Para $x \in D(A)$, temos $T(t)x \in D(A)$, a aplicação $t \mapsto T(t)x$ é continuamente diferenciável e

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

(v). Para $x \in D(A)$,

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(s)Axds = \int_s^t AT(s)xds.$$

Corolário 1.18. *Seja $\{T(t); t \geq 0\}$ um $C_0 -$ semigrupo e A seu gerador infinitesimal. Então $\overline{D(A)} = X$ e A é um operador linear fechado.*

O Teorema de Hille-Yosida caracteriza o gerador infinitesimal de um C_0-*semigrupo* de contrações. Sua demonstração pode ser encontrada em [7] e [13].

Definição 1.19. *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear fechado. Definimos o resolvente de A, denotado por $\rho(A)$, como*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ (\lambda - A) \text{ é bijetor}\}.$$

Definição 1.20. *O $C_0 -$ semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$ é um $C_0 -$ semigrupo de contrações quando $\| T(t) \| \leq 1$, para todo $t \geq 0$.*

Teorema 1.21 (Hille-Yosida)**.** *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i). A é o gerador infinitesimal de um $C_0 -$ semigrupo tal que

$$\|T(t)\| \leq e^{\omega t}, \forall t \geq 0 \ (\omega > 0).$$

(ii). A é fechado, densamente definido, $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$ e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda - \omega}, \ \forall \ \lambda > \omega.$$

O Teorema de Lumer-Phillips fornece outra caracterização dos geradores infinitesimais de $C_0 -$ *semigrupos* de contrações. Uma demonstração de tal resultado pode ser encontrada em [7] e [13].

Notação 1.22. *Para $x^* \in X^*$ (X^* representa o espaço dual de X) e $x \in X$, denotamos*

$$x^*(x) = \langle x^*, x \rangle .$$

Definição 1.23. *Para $x \in X$ defina a dualidade de x, denotada por $F(x) \subset X$, por*

$$F(x) = \{x^*; x^* \in X^* \text{ e } Re \langle x^*, x \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}.$$

Observação 1.24. *$F(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in X$, pelo Teorema de Hahn-Banach.*

Definição 1.25. *Um operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ é **dissipativo** se para cada $x \in D(A)$ existe $x^* \in F(x)$ tal que $Re \langle x^*, Ax \rangle \leq 0$.*

Teorema 1.26 (Lumer-Phillips)**.** *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear com $\overline{D(A)} = X$. Valem:*

(i) Se A é dissipativo e existe $\lambda_0 > 0$ tal que $Im(\lambda_0 I - A) = X$, então A é o gerador infinitesimal de um $C_0 -$ semigrupo de contrações em X.

(ii) Se A é o gerador infinitesimal de um $C_0 -$ semigrupo de contrações em X então $Im(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$ e A é dissipativo. Além disso, para todo $x \in D(A)$ e para todo $x^* \in F(x)$, temos que $Re \langle x^*, Ax \rangle \leq 0$.

Teorema 1.27. *Se A é um operador linear dissipativo em X com $Im(I - A) = X$ e X é reflexivo, então $\overline{D(A)} = X$.*

Definição 1.28. *Seja A um operador linear em X. A **imagem numérica** de A é o conjunto*

$$S(A) = \{\langle x^*, Ax\rangle\,; x \in D(A) \text{ com } \|x\| = 1, x^* \in X^* \text{ com } \|x^*\| = 1 \text{ e } \langle x^*, x\rangle = 1\}.$$

Se X é espaço de Hilbert, então $S(A) = \{\langle Ax, x\rangle\,; x \in D(A) \text{ e } \|x\| = 1\}$.

Teorema 1.29. *Sejam A um operador linear com $\overline{D(A)} = X$, fechado, e $S(A)$ a imagem numérica de A. Seja ainda Σ um subconjunto aberto e conexo de $\mathbb{C} \setminus \overline{S(A)}$. Se $\lambda \notin \overline{S(A)}$, então $(\lambda I - A)$ é injetora, tem imagem fechada e satisfaz*

$$\|(\lambda I - A)x\|_X \geq d(\lambda, S(A))\|x\|_X, \ \forall\, x \in D(A).$$

Além disso, se $\Sigma \cap \rho(A) \neq \emptyset$, então $\Sigma \subset \rho(A)$ e

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{d(\lambda, S(A))}, \ \forall\, \lambda \in \Sigma.$$

1.2.1 Operadores Setoriais e Potências Fracionárias

Definição 1.30. *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear. Dizemos que $-A$ é um operador setorial se A é fechado, densamente definido e*

$$\Sigma_{a,\varphi} = \{\lambda \in \mathbb{C}; |arg(\lambda - a)| < \varphi\} \subset \rho(A),$$

para algum $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda - a|}, \ \forall\, \lambda \in \Sigma_{a,\varphi}.$$

Teorema 1.31. *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear tal que $-A$ é setorial, isto é, existem constantes $a \in \mathbb{R}$, $M > 0$ e $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ tais que*

$$\Sigma_{a,\varphi} = \{\lambda \in \mathbb{C}; |arg(\lambda - a)| < \varphi\} \subset \rho(A)$$

e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda - a|}, \ \forall\, \lambda \in \Sigma_{a,\varphi}.$$

Então A gera um $C_0 -$ semigrupo $\{T(t); t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$,

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_a} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1} d\lambda,$$

onde Γ_a é a fronteira de $\Sigma_{a,\beta} \setminus \{\lambda \in \mathcal{C}; |\lambda - a| \leq r\}$ para algum r pequeno, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, orientada no sentido da parte imaginária crescente. Além disso,

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Ke^{at},\ t \geq 0 \text{ para algum } K > 0,$$

$$\|AT(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq K_1 t^{-1} e^{at},\ t > 0 \text{ para algum } K_1 > 0.$$

Temos ainda que

$$\frac{d}{dt}T(t) = AT(t) \text{ é limitado, para todo } t > 0.$$

Hipótese 1.32. *Seja A um operador fechado e densamente definido para o qual*

$$\Sigma_\omega^+ = \{\lambda : 0 < \omega < |arg\lambda| \leq \pi\} \cup V \subset \rho(A)$$

onde V é uma vizinhança do zero e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{1 - |\lambda|},\ \lambda \in \Sigma_\omega^+.$$

Definição 1.33. *Se A satisfaz a hipótese 1.32 e $\alpha > 0$, definimos*

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \lambda^{-\alpha}(-\lambda + A)^{-1} d\lambda, \tag{1.1}$$

onde C é o caminho que percorre o resolvente de A de $-\infty e^{i\nu}$ a $\infty e^{i\nu}$, $\omega < \nu < \pi$, evitando o eixo real negativo.

Observe que para $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$, a Definição 1.33 coincide com a definição usual de $A^{-n} = (A^{-1})^n$.

Definição 1.34. *Definimos o operador A^α, para $\alpha > 0$, como sendo a inversa de $A^{-\alpha}$, e $A^0 = I$, e o denominamos de* ***operador potência fracionária*** *associado a A.*

Teorema 1.35. *Seja A um operador que satisfaz a hipótese 1.32, com $\omega < \frac{\pi}{2}$. Então*

1. *A^α é operador fechado com domínio $D(A^\alpha) = Im(A^{-\alpha})$.*
2. *Se $\alpha \geq \beta > 0$ então $D(A^\alpha) \subset D(A^\beta)$.*
3. *$\overline{D(A^\alpha)} = X$ para todo $\alpha \geq 0$.*
4. *Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então $A^{\alpha+\beta}x = A^\alpha A^\beta x$, para todo $x \in D(A^\gamma)$, onde $\gamma = \max\{\alpha, \beta, \alpha + \beta\}$.*

Teorema 1.36. *Seja $-A$ o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $T(t)$. Se $0 \in \rho(A)$, então*

1. *$T(t) : X \to D(A^\alpha)$, para todo $\alpha \geq 0$.*

2. *Para cada $x \in D(A)$, temos $T(t)A^\alpha x = A^\alpha T(t)x$.*

3. *Para $Re(\sigma) > \delta > 0$ e cada $t > 0$, $A^\alpha T(t)$ é um operador limitado e*
$$\|A^\alpha T(t)\| \leq K_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t}.$$

4. *Se $0 < \alpha \leq 1$ e $x \in D(A^{-\alpha})$, então*
$$\|T(t)x - x\| \leq C_\alpha t^\alpha \|A^\alpha x\|.$$

1.2.2 Perturbação de operadores lineares limitados

O importante neste momento é determinar estimativas para operadores conhecidos que sofrem a ação de outros operadores particulares.

Notação 1.37. *Denotaremos, daqui em diante, por $\{e^{At}; t \geq 0\}$ o semigrupo gerado por um operador $A : D(A) \subset X \to X$.*

Teorema 1.38. *Seja $\{e^{At}; t \geq 0\}$ um $C_0 -$ semigrupo com gerador $A : D(A) \subset X \to X$. Se $B \in \mathcal{L}(X)$, então $A + B : D(A) \subset X \to X$ é o gerador de um $C_0 -$ semigrupo $\{e^{(A+B)t}; t \geq 0\}$. Se $\left\|e^{At}\right\| \leq Me^{\omega t}$, para todo $t \geq 0$, então $\left\|e^{(A+B)t}\right\| \leq Me^{(\omega + M\|B\|)t}$ para todo $t \geq 0$.*

Teorema 1.39. *Sejam $A : D(A) \subset X \to X$ tal que $-A$ é setorial e $B : D(B) \subset X \to X$, com $D(A) \subset D(B)$, um operador linear tal que*
$$\|Bx\| \leq \varepsilon\|Ax\| + k\|x\|, \quad \text{para todo} \quad x \in D(A),$$
para algum $\varepsilon > 0$ e alguma constante $k\|x\|$. Então, existe $\delta > 0$ tal que, se $0 \leq \varepsilon \leq \delta$, o operador $-(A + B)$ é setorial, $D(A + B) = D(A)$ e $\{e^{(A+B)t}; t \geq 0\}$ é um C_0-semigrupo.

Corolário 1.40. *Seja A um operador setorial e $B : D(B) \subset X \to X$ um operador fechado, $D(A^\alpha) \subset D(B)$, para alguma $0 < \alpha < 1$. Então $(A + B)$ é setorial.*

1.2.3 Problema de Cauchy abstrato

Consideramos nesta seção equações não-lineares da forma

$$\begin{cases} u_t + Au = f(t,u), t > t_0, \\ u(t_0) = u_0, \end{cases} \tag{1.2}$$

onde $A : D(A) \subset X \to X$ é um operador setorial e $Re\sigma(A) > 0$ (parte real do espectro positiva), tal que suas potências fracionárias A^α estão bem definidas, e os espaços $X^\alpha = D(A^\alpha)$ com a norma do gráfico $\|x\|_\alpha = \|A^\alpha x\|$ estão definidos para $\alpha \geq 0$. Assumimos ainda que $f : U \to X$, em que $U \subset \mathbb{R} \times X^\alpha$ é aberto.

Uma solução de (1.2) é uma função contínua $u : [t_0, t_1) \to X$, diferenciável em (t_0, t_1), com $u(t_0) = u_0$, $f(\cdot, u(\cdot)) : [t_0, t_1) \to X$ contínua, $u(t) \in D(A)$, para $t \in (t_0, t_1)$, e que satisfaz a equação (1.2).

O teorema seguinte garante a existência de soluções locais para a equação (1.2).

Teorema 1.41. *Sejam A um operador setorial, $0 \leq \alpha < 1$, $U \subset \mathbb{R} \times X^\alpha$, e $f : U \to X$. Suponhamos que f seja Holder contínua na variável t e localmente Lipschitz contínua na variável x em U, ou seja, suponhamos que para $(t_1, u_1) \in U$ exista uma vizinhança $V \subset U$ de (t_1, u_1) tal que, para $(t,u), (s,v) \in V$,*

$$\|f(t,u) - f(s,v)\|_X \leq L(|t-s|^\theta + \|u-v\|_\alpha), \tag{1.3}$$

sendo θ e L constantes positivas. Então, qualquer que seja $(t_0, t_1) \in U$, existe um instante $\tau = \tau(t_0, t_1) > 0$ de tal maneira que a equação (1.2) possui uma única solução u definida em $(t_0, t_0 + \tau)$.

Acerca de existência de soluções globais para a equação (1.2), temos o seguinte resultado:

Teorema 1.42. *Suponhamos que as hipóteses sobre A e f enunciadas no Teorema (1.41) estejam satisfeitas, e assumamos também que, para todo conjunto limitado $B \subset U$, a imagem $f(B)$ seja limitada em X. Se u é uma solução de (1.2) em (t_0, t_1) e t_1 é maximal então, ou $t_1 = \infty$ ou existe uma sequência $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} t_1^-$ de tal maneira que $(t_n, u(t_n)) \to \partial U$.*

1.3 Atratores para sistemas parabólicos com estrutura gradiente

Nesta seção definiremos e estudaremos propriedades de atratores.

Sejam X um espaço de Banach e $-A : D(A) \subset X \to X$ um operador setorial, tal que A^{-1} é compacto e $Re(\rho(A)) \subset (-\infty, -\delta]$, para algum $\delta > 0$. Então temos

$$\|e^{At}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{-\delta t},\ t > 0.$$

Denotemos $X^\alpha := D((-A)^\alpha)$ com a norma $\|x\|_\alpha := \|x\|_{X^\alpha} = \|(-A)^\alpha x\|_X$.

Observação 1.43. *Se A tem resolvente compacto então X^α pode ser imerso compactamente em X^β, com $\alpha > \beta \geq 0$.*

Neste caso, temos

$$\left\|e^{At}\right\|_{\mathcal{L}(X^\alpha,X^\beta)} \leq Mt^{\alpha-\beta}e^{-\delta t}, \quad \beta > \alpha \geq 0,\ t > 0.$$

Para $0 < \alpha < 1$ fixado, consideremos o problema parabólico

$$\begin{cases} u' = Au + f(u(t)) \\ u(0) = u_0 \in X^\alpha, \end{cases} \tag{1.4}$$

onde $f : X^\alpha \to X$ é globalmente Lipschitz, globalmente limitada e continuamente diferenciável.

Como vimos anteriormente, com essas hipóteses, o problema (1.4) possui uma solução, definida para todo $t \geq 0$, dada por

$$u(t) := u(t, 0, u_0) = e^{At}u_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}f(u(s))ds$$

Toda solução de (1.4) permanece limitado para $u_0 \in X^\alpha$. De fato,

$$\begin{aligned}
\|u(t,0,u_0)\|_{X^\alpha} &= \|e^{At}u_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}f(u(s))ds\|_{X^\alpha} \\
&\leq \|e^{At}u_0\|_{X^\alpha} + \int_0^t \|e^{A(t-s)}\|_{\mathcal{L}(X,X^\alpha)}\|f(u(s))\|_X ds \\
&\leq Me^{-\delta t}\|u_0\|_{X^\alpha} + \int_0^t M(t-s)^{-\alpha}e^{-\delta(t-s)}K ds \\
&\leq Me^{-\delta t}\|u_0\|_{X^\alpha} + MK\int_0^t (t-s)^{-\alpha}e^{-\delta(t-s)}ds \\
&\leq Me^{-\delta t}\|u_0\|_{X^\alpha} + \frac{MK}{\delta}\int_0^{\delta t}\left(\frac{z}{\delta}\right)^{-\alpha}e^{-z}dz \\
&\leq Me^{-\delta t}\|u_0\|_{X^\alpha} + MK\delta^{\alpha-1}\int_0^\infty z^{-\alpha}e^{-z}dz \\
&\leq Me^{-\delta t}\|u_0\|_{X^\alpha} + MK\delta^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha) \leq L,
\end{aligned}$$

onde $\|f(u(s))\|_X \leq K$.

Seja $T(\cdot)x : \mathbb{R} \to X^\alpha$ definido por

$$T(t)x = u(t,0,x) = e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-s)}f(T(s)x)ds,$$

para todo $x \in X^\alpha$. Definida desta forma, a família $\{T(t);\ t \geq 0\}$ satisfaz as seguintes propriedades:

- $T(0)x = x$, para todo $x \in X^\alpha$.
- $T(t+\varrho)x = T(t)T(\varrho)x$ para todo $t, \varrho \geq 0$.
- $\mathbb{R}^+ \times X^\alpha \ni (t,x) \longmapsto T(t)x$ é contínua.

Assim, dizemos que $\{T(t); t \geq 0\}$ é a família de **semigrupos não lineares** associados ao problema (1.4).

Definição 1.44. *Seja $x \in X^\alpha$. Definimos*

(a) $\gamma^+(x) = \{T(t)x; t \geq 0\}$ a ***órbita positiva*** *de x.*

(b) $H_x := \{\varphi : (-\infty, 0] \to X^\alpha,$ contínua ; $\varphi(0) = x,$ e $T(t)\varphi(s) = \varphi(t+s),\ -\infty \leq s \leq -t \leq 0\}$, para $\varphi \in H_x$, definimos $\gamma^-_\varphi(x) = \cup_{t\geq 0}\varphi(-t)$ como a ***órbita negativa*** *de x.*

(c) $\gamma(x) = \gamma^+(x) \cup \gamma^-_\varphi(x)$ *a* ***órbita completa*** *de* x.

Observação 1.45. *Como* $Im(T(t))$ *pode não ser todo o* X^α, *dizer que existe uma órbita negativa ou completa de* x *pode impor certas restrições a* x. *Adiante veremos uma condição necessária e suficiente para que exista uma órbita completa de* x.

Definição 1.46. *Dizemos que um subconjunto* $S \subset X^\alpha$ *é* ***invariante*** *sob* $\{T(t); t \geq 0\}$ *se* $T(t)S = S$, *para todo* $t \geq 0$. *Dizemos que* S *é positivamente invariante se* $T(t)S \subset S$.

Lema 1.47. $S \subset X^\alpha$ *é invariante se, e somente se, se para cada* $x \in S$, *existe uma órbita completa de* x, *que está inteiramente contida em* S.

Definição 1.48. *Seja* $B \subset X^\alpha$. *Definimos:*

(a) $\gamma^+(B) = \cup_{x\in B}\gamma^+(x)$ *a* ***órbita positiva*** *de* B.

(b) $\gamma^-(B) = \cup_{x\in B}(\cup_{\varphi\in H_x}\gamma^-_\varphi(x))$ *a* ***órbita negativa*** *de* B.

(c) $\gamma(B) = \cup_{x\in B}\gamma(x)$ *a* ***órbita completa*** *de* B.

(c) $\omega(B) = \cap_{s\geq 0}\overline{\cup_{t\geq s}T(t)B}$ *o conjunto* $\omega - limite$ *de* B.

(d) $\alpha(B) = \cap_{s\geq 0}\overline{\cup_{t\geq s}\gamma^-(B)}$ *o conjunto* $\alpha - limite$ *de* B.

Lema 1.49. *Sejam* $v \in X^\alpha$ *e* $B \subset X^\alpha$. *Então,* $v \in \omega(B)$ *se, e somente se, existem sequências* $t_n \to \infty$ *e* $(v_n) \subset B$ *tal que* $T(t_n)v_n \to v$.

Lema 1.50. *Sejam* $v \in X^\alpha$ *e* $B \subset X^\alpha$. *Então,* $v \in \alpha(B)$ *se, e somente se, existem sequências* $t_n \to \infty$ *e* $(v_n) \subset B$ *tais que, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *existe uma órbita negativa* $\phi_n : (-\infty, 0] \to X^\alpha$ *de* v_n *e* $\phi_n(-t_n) \to v$.

Lema 1.51. *Seja* $B \subset X^\alpha$ *um conjunto limitado. Então* $\gamma^+(B)$ *é limitado e* $\overline{T(t)\gamma^+(B)}$ *é compacto, para todo* $t > 0$.

Definição 1.52. *Um subconjunto* A ***atrai*** *um conjunto* C *sob* $\{T(t); t \geq 0\}$ *se* $dist(T(t)C, A) \to 0$ *quando* $t \to \infty$.

Lema 1.53. *Para todo* $x \in X^\alpha$, *o conjunto* $\omega(\{x\})$ *é não vazio, conexo, compacto, invariante e atrai* $\{x\}$.

Lema 1.54. *Suponha que $x \in X^\alpha$ é tal que existe uma órbita negativa $\phi : (-\infty, 0] \to X^\alpha$ tal que $\phi((-\infty, 0])$ é compacto. Definamos*

$$\alpha_\phi(x) = \{v \in X^\alpha;\ \textit{existem } t_n \to \infty \textit{ tal que } \phi(-t_n) \to v\}.$$

Então $\alpha_\phi(x) \neq \emptyset$, é convexo, compacto e invariante.

Lema 1.55. *Se $B \subset X^\alpha$ é limitado, então $\gamma(B)$ é limitado. Além disso, existem um instante ϱ_B e uma constante N (independente de B) tais que*

$$\sup_{t \geq \varrho_B} \sup_{z \in T(t)B} \|z\|_\alpha \leq N$$

e também

$$\sup_{B \subset X^\alpha} \sup_{z \in \omega(B)} \|z\|_\alpha \leq N.$$

Lema 1.56. *Se $B \subset X^\alpha$ é limitado, então $\omega(B)$ é não vazio, compacto, invariante, e atrai B sob $\{T(t); t \geq 0\}$. Além disso, se B é conexo, então $\omega(B)$ é conexo.*

Definição 1.57. *O conjunto não vazio $A \subset X^\alpha$ é um **atrator global** para $\{T(t); t \geq 0\}$ se A é compacto, invariante e atrai subconjuntos limitados de X^α sob $\{T(t); t \geq 0\}$.*

Teorema 1.58. *Se N é como no Lema 1.55, e*

$$B_N := \{u \in X^\alpha;\ \|u\|_\alpha \leq N\},$$

então $\omega(B_N)$ é um atrator global para $\{T(t); t \geq 0\}$.

1.3.1 Caracterização de atratores para sistemas gradientes

Nosso objetivo é entender a estrutura dos atratores do problema (1.4). Começaremos com os elementos dos atratores que são mais simples, conhecidos como soluções de equilíbrio.

Definição 1.59. *Uma **solução de equilíbrio** de (1.4) é uma solução que não depende do tempo, ou seja, é uma solução constante na variável t. Denotamos por $\mathcal{E}$ o conjunto dos pontos de equilíbrio.*

Note que, se $u(t, x)$ não depende do tempo então $\frac{du}{dt} = 0$, logo

$$Au + f(u) = 0. \tag{1.5}$$

Definição 1.60. *Uma solução u^* de (1.5) é **hiperbólica** se $\sigma(A+f'(u^*))$ (o espectro de $A+f'(u^*)$) não intercepta o eixo imaginário.*

Se $\tilde{A} := A+f'(u^*)$, então $-\tilde{A}$ está definido em $D(A)$, pois se $0<\alpha<1$ então $D(A) \subset D(A^\alpha) = X^\alpha$. Como $f'(u^*) \in \mathcal{L}(X^\alpha, X)$ segue do Corolário (1.40), que $-A-f'(u^*)$ é setorial. E ainda $-\tilde{A}$ tem resolvente compacto.

De fato, tome $B = f'(u^*)$, A é setorial com resolvente compacto e B é fechado.

$$\begin{aligned}&(A+B) = AA^{-1}(A+B) = A(I+A^{-1}B)\\ &\Rightarrow (A+B)^{-1} = (I+A^{-1}B)^{-1}A^{-1}\end{aligned}$$

Como A tem resolvente compacto e $0 \in \rho(A)$, segue que A^{-1} é compacto. Assim, basta mostrar que $(I+A^{-1}B)^{-1}$ é limitado, pois a composição de limitado com compacto é compacto.

Observemos que $I+A^{-1}B$ é invertível, já que $(A+B)$ é invertível, pois $0 \in \rho(A+B)$, lembrando que u^* é hiperbólico.

Portanto, $(I+A^{-1}B)^{-1}$ é linear, e invertível, logo limitado.

Assim, $(A+B)^{-1}$ é compacto.

O espectro de $\tilde{A}$ é composto por autovalores isolados com multiplicidade finita, ver [12]. Denotemos por $\sigma^+(\tilde{A})$ os elementos do espectro de A ($\sigma(\tilde{A})$) que tem a parte real positiva. Observe que o setor associado a $\tilde{A}$, dado por $\Sigma_{\tilde{a},\varphi} = \{\lambda \in \mathbb{C}; |arg(\lambda-\tilde{a})| < \varphi\}$ está contido em $\rho(\tilde{A})$, pois $\tilde{A}$ é setorial, e portanto os autovalores em $\sigma^+(\tilde{A})$ estão, de certa forma, limitados entre à parte a direita do eixo imaginário e $\Sigma_{\tilde{a},\varphi}$.

Em [8] pode ser visto que se $-\tilde{A}$ é setorial, então existe $\tau \in \mathbb{R}$ tal que $\sigma(\tilde{A})$ é disjunto da reta $\{\lambda \in \mathbb{C}; Re\lambda = \tau\}$ e o conjunto $\sigma(e^{\tilde{A}t})$ não intercepta o conjunto $\{u \in \mathbb{C};\ |u| = e^{\tau t}\}$, e além disso existem $M \geq 1$ e $\delta > 0$ tais que

$$\|e^{\tilde{A}t}(I-Q)x\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{(\tau-\delta)t}, \text{ para todo } t \geq 0,$$

e

$$\|e^{\tilde{A}t}Qx\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{(\tau+\delta)t}, \text{ para todo } t \leq 0,$$

onde Q é a projeção de X no espaço gerado pelas autofunções associadas aos autovalores positivos de $\tilde{A}$. Portanto

$\|-\tilde{A}^\phi e^{\tilde{A}t}(I-Q)x\|_{\mathcal{L}(X,X^\theta)} = \|(-\tilde{A})^{\phi-\theta}(-\tilde{A})^\theta e^{\tilde{A}t}(I-Q)x\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_{\phi-\theta}t^{\phi-\theta}Me^{(\tau-\theta)t}$,

para $\theta > \phi,\ t \geq 0$.

Proposição 1.61. *Suponha que todos os pontos de equilíbrio de (1.4) sejam hiperbólicos. Então existe somente um número finito deles.*

Nosso próximo passo é mostrar que existem muitas outras soluções que estão no atrator perto da solução de equilíbrio.

Se, para $u_0 \in X^\alpha$, mostrarmos que a solução $u(\cdot, u_0)$ está definida em $\mathbb{R}$ e é limitada, então $u(\cdot, u_0)$ deve estar no atrator $\mathcal{A}$. Para isso, basta mostrar que a solução $u(\cdot, u_0)$ está definida e é limitada em $\mathbb{R}^-$, pois já temos a solução definida e limitada em $\mathbb{R}^+$.

Definição 1.62. *A* ***variedade instável*** *de $u^* \in \mathcal{E}$ é dada por*

$$W^u(u^*) = \left\{ \begin{array}{l} \eta \in X^\alpha;\ u(t,\eta)\ está\ definida\ para\ todo\ t \leq 0 \\ e\ u(t,\eta) \to u^*\ quando\ t \to -\infty \end{array} \right\}.$$

Antes de apresentarmos mais detalhes sobre a construção de $W^u(u^*)$, ao menos em uma vizinhança de u^*, vamos observar por um momento um problema linear. No problema (1.4) tome $v = u - u^*$ e some e subtraia $f'(u^*)v$, obtendo

$$\left\{ \begin{array}{l} v' = Av + f(v+u^*) - f(u^*) - f'(u^*)v \\ v(0) = u_0 - u^* = v_0 \in X^\alpha. \end{array} \right. \tag{1.6}$$

Nesta equação, para v muito pequeno, a parte não linear é muito pequena. É natural então considerar o que acontece quando negligenciamos a parte não linear, ou seja, o caso em que

$$\left\{ \begin{array}{l} v' = \tilde{A}v \\ v(0) = v_0 \in X^\alpha. \end{array} \right. \tag{1.7}$$

Se Q é a projeção definida por σ^+, nós temos que, para $v_0 \in QX^\alpha$, a solução $v(t, v_0)$ de (1.7) existe para todo tempo negativo e $v(t, v_0) \to 0$ quando $t \to -\infty$ e $v + u^* \to u^*$ quando $t \to -\infty$, o que serve de inspiração para o que queremos fazer. Quando perturbamos o problema (1.7) com um termo não linear muito pequeno, nós devemos observar soluções do problema (1.6) para $t < 0$. Observemos que os dados iniciais para os quais a solução existe, não deverão estar em QX^α, mas em uma variedade perto desse espaço.

Proposição 1.63. *Assuma que u^* é um equilíbrio hiperbólico de (1.4). Pela Proposição 1.61, u^* é solução isolada de (1.5). Então existe uma vizinhança U de u^* em X^α e uma função $h : QU \to (I-Q)U$, tal que a variedade instável de $W^u(u^*)$ é dada por*

$$W^u_\delta(u^*) = \{\omega \in W^u(u^*),\ \|\omega - u^*\|_{X^\alpha} < \delta\} = \{(Qu, h(Q(u)));\ u \in U\}.$$

Definição 1.64. *Um semigrupo $\{T(t);\ t \geq 0\}$ não linear é* ***gradiente*** *ou possui* ***estrutura gradiente*** *quando existe uma aplicação (de Liapunov) $V : X^\alpha \to \mathbb{R}$ satisfazendo:*

(i) V é contínua;

(ii) Para todo $u_0 \in X^\alpha$, a aplicação $t \in [0, \infty) \longmapsto V(T(t)u_0) \in \mathbb{R}$ é não crescente;

(iii) Dado $u_0 \in X^\alpha$, então $u_0 \in \mathcal{E}$ se, e somente se, $V(T(t)u_0) = V(u_0)$, para todo $t \geq 0$.

Observação 1.65. *Para todo $u_0 \in X^\alpha$, a aplicação $t \longmapsto V(T(t)u_0)$ é limitada inferiormente.*

No que segue, assumimos que o semigrupo $\{T(t);\ t \geq 0\}$ possui estrutura gradiente e que $\mathcal{E}$ é constituído de soluções de equilíbrio hiperbólicas.

Lema 1.66. *Para todo $u_0 \in X^\alpha$, $\omega(u_0) = \{u_0^*\}$ para algum $u_0^* \in \mathcal{E}$. Consequentemente, $T(t)u_0 \to u_0^*$ quando $t \to \infty$.*

Lema 1.67. *Suponha que $u_0 \in X^\alpha$ é tal que existe uma órbita negativa ϕ de u_0 com $\overline{\phi((-\infty, 0])}$ é compacto. Então $\alpha_\phi(u_0) = \{u_0^*\}$, para algum $u_0^* \in \mathcal{E}$. Além disso, $\phi(t_0) \to u_0^*$ quando $t \to -\infty$.*

Teorema 1.68. *Seja $\mathcal{A}$ o atrator global de $\{T(t); t \geq 0\}$. Então*

$$\mathcal{A} = \cup_{u_0^* \in \mathcal{E}} W^u(u_0^*).$$

1.3.2 Continuidade de atratores

Definição 1.69. *Sejam Λ um espaço topológico e $\{J_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de subconjuntos de X^α. Dizemos que $\{J_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é*

(i) ***semicontínua superiormente*** *em $\lambda_0 \in \Lambda$ se*

$$\sup_{u_\lambda \in J_\lambda} d(u_\lambda, J_{\lambda_0}) \longrightarrow 0, \text{ quando } \lambda \to \lambda_0;$$

(ii) ***semicontínua inferiormente*** *em $\lambda_0 \in \Lambda$ se*

$$\sup_{u \in J_{\lambda_0}} d(u, J_\lambda) \longrightarrow 0, \text{ quando } \lambda \to \lambda_0;$$

(iii) ***contínua*** *em $\lambda_0 \in \Lambda$ se é semicontínua inferior e superiormente em $\lambda_0 \in \Lambda$.*

Lema 1.70. *Sejam $\{J_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de subconjuntos de X^α e $\lambda_0 \in \Lambda$.*

(i) Se toda sequência $(u_{\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$ com $u_{\lambda_n} \in J_{\lambda_n}$, $n \in \mathbb{N}$ e $\lambda_n \to \lambda_0$ quando $n \to \infty$, possui uma subsequência com limite pertencendo a J_{λ_0}, então $\{J_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é semicontínua superiormente em $\lambda_0 \in \Lambda$.

(ii) Se J_{λ_0} é compacto e para todo $u \in J_{\lambda_0}$, existe uma sequência $(u_{\lambda_n})_{n\in\Lambda}$ com $u_{\lambda_n} \in J_{\lambda_n}$, $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n \to \lambda_0$ quando $n \to \infty$ e $u_{\lambda_n} \to u$ quando $\lambda_n \to \lambda_0$, então $\{J_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é semicontínua inferiormente em $\lambda_0 \in \Lambda$.

Teorema 1.71. *Seja $\{T_\lambda(t); t \geq 0\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de semigrupos (não lineares) em X^α tais que, para cada $\lambda \in \Lambda$, o semigrupo $\{T_\lambda(t); t \geq 0\}$ possui um atrator global $\mathcal{A}_\lambda$. Assuma que o conjunto $\overline{\cup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda}$ seja compacto e que para $u_\lambda \to u_{\lambda_0}$, vale que $\|T_\lambda(t)u_\lambda - T_{\lambda_0}(t)u_{\lambda_0}\|_\alpha \to 0$ quando $\lambda \to \lambda_0$, para todo $t \geq 0$. Então a família de atratores $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é semicontínua superiormente em λ_0.*

Capítulo 2

Convergência espectral e dinâmica linear

Para obtermos resultados relativos à dinâmica não-linear do problema proposto, faz-se necessário um extenso e completo estudo do comportamento da parte linear. Neste capítulo apresentaremos condições necessárias e suficientes para obtermos a convergência espectral de operadores lineares sob a classe de domínios perturbados satisfazendo (4), bem como a convergência dos operadores resolventes e dos semigrupos lineares.

Como já mencionamos, para darmos sentido à convergência $u_\varepsilon \to u_0$ quando, por exemplo, $u_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ e $u_0 \in H^1(\Omega_0)$, será necessário introduzirmos o espaço seguinte.

Definição 2.1. *Para cada $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, definimos o espaço*

$$H^1_\varepsilon = H^1(\Omega_\varepsilon \cap \Omega_0) \oplus H^1(\Omega_\varepsilon \setminus \overline{\Omega_0}) \oplus H^1(\Omega_0 \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}),$$

ou seja,

$$H^1_\varepsilon = \left\{ \begin{array}{l} \phi \in L^2(\Omega_0 \cup \Omega_\varepsilon) \textit{ tal que} \\ \phi_{|\Omega_0 \cap \Omega_\varepsilon} \in H^1(\Omega_\varepsilon \cap \Omega_0), \\ \phi_{|\Omega_\varepsilon \setminus \overline{\Omega_0}} \in H^1(\Omega_\varepsilon \setminus \overline{\Omega_0}) \\ \textit{e } \phi_{|\Omega_0 \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}} \in H^1(\Omega_0 \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}) \end{array} \right\},$$

munido da seguinte norma

$$\|u\|^2_{H^1_\varepsilon} = \|u\|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon \cap \Omega_0)} + \|u\|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon \setminus \overline{\Omega_0})} + \|u\|^2_{H^1(\Omega_0 \setminus \overline{\Omega_\varepsilon})}.$$

Note que estendendo as funções em $H^1(\Omega_0)$ por 0 fora de Ω_0, temos $H^1(\Omega_0) \hookrightarrow H^1_\varepsilon$, com constante de imersão igual a 1, e estendendo as funções em $H^1(\Omega_\varepsilon)$ por 0 fora de

Ω_ε, temos $H^1(\Omega_\varepsilon) \hookrightarrow H^1_\varepsilon$, com constante de imersão igual a 1. Logo, se $u_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ e $u_0 \in H^1(\Omega_0)$, faz sentido escrever

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{H^1_\varepsilon}.$$

Após definir esse conjunto e sua norma, fica natural definirmos uma idéia de convergência em tal espaço.

Definição 2.2. *Dizemos que u_ε **converge** para u_0 em H^1_ε, e denotamos $u_\varepsilon \to u_0$, se $\|u_\varepsilon - u_0\|_{H^1_\varepsilon} \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$.*

Também com uma extensão das funções de $L^2(\Omega_0)$ ou $L^2(\Omega_\varepsilon)$ por 0 fora de Ω_0 ou Ω_ε respectivamente, temos $L^2(\Omega_\varepsilon) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ e $L^2(\Omega_0) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$. Então, para funções $V_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ e $V_0 \in L^2(\Omega_0)$, afirmações do tipo $V_\varepsilon \to V_0$ fazem sentido em $L^2(\mathbb{R}^N)$ ou $w - L^2(\mathbb{R}^N)$ ($L^2(\mathbb{R}^N)$ com a topologia fraca). Além disso, se temos um operador T agindo sobre $L^2(\Omega_\varepsilon)$, podemos olhar para esse operador agindo em $L^2(\Omega_0)$ olhando para um elemento $u_0 \in L^2(\Omega_0)$ como um elemento de $L^2(\Omega_\varepsilon)$ estendendo u_0 por 0 fora de Ω_0 e tomando a restrição em Ω_ε. E o mesmo pode ser feito para operadores agindo em $L^2(\Omega_0)$.

2.1 Caracterização da convergência espectral

É fundamental no estudo das propriedades de continuidade da dinâmica não linear a análise do comportamento espectral do operador linear. Nesta seção, apresentaremos alguns resultados sobre o comportamento espectral de operadores do tipo $-\Delta + V$, onde V é um potencial linear, com condições de Neumann na fronteira e perturbações do domínio. Estamos interessados em obter condições necessárias e suficientes que garantam que os autovalores e as autofunções comportem-se continuamente quando o domínio sofre perturbações satisfazendo (4).

Definição 2.3. *Uma família $\{V_\varepsilon : 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ de potenciais lineares é **admissível** se $V_\varepsilon \in L^\infty(\Omega_\varepsilon)$, $\sup\limits_{0\leq\varepsilon\leq\varepsilon_0} \|V_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \leq C < \infty$ e $V_\varepsilon \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} V_0$ fracamente em $L^2(\mathbb{R}^N)$.*

Para fixar a notação, consideremos o problema de autovalores

$$\begin{cases} -\Delta u + V_\varepsilon u = \lambda u, & \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \partial\Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

onde $\{V_\varepsilon :\ 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ é admissível.

Denotemos, para $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ os seguintes conjuntos:

- $\{\lambda_n^\varepsilon\}_{n=1}^\infty$ como o conjunto dos autovalores do operador $-\Delta + V_\varepsilon$, ordenados e contando suas multiplicidades.

- $\{\phi_n^\varepsilon\}_{n=1}^\infty$ a família completa e ortonormalizada de autofunções associadas a $\{\lambda_n^\varepsilon\}_{n=1}^\infty$.

Diremos que o espectro comporta-se continuamente em $\varepsilon = 0$ se, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que $\lambda_n^\varepsilon \to \lambda_n^0$ quando $\varepsilon \to 0$, e também a convergência espectral das projeções em H_ε^1, da seguinte forma: se $a \notin \{\lambda_n^\varepsilon\}_{n=1}^\infty$ e $\lambda_n^0 < a < \lambda_{n+1}^0$, e definimos as projeções $P_a^\varepsilon : L^2(\mathbb{R}^N) \to H^1(\Omega_\varepsilon)$, $P_a^\varepsilon(\psi) = \displaystyle\sum_{i=1}^n \langle \phi_i^\varepsilon, \psi \rangle_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \phi_i^\varepsilon$, então

$$\sup\{\|P_a^\varepsilon(\psi) - P_a^0(\psi)\|_{H_\varepsilon^1}, \psi \in L^2(\mathbb{R}^N) \text{ e } \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 1\} \to 0 \text{ quando } \varepsilon \to 0.$$

A convergência das projeções espectrais é equivalente a: para cada sequência $\varepsilon_k \to 0$, existem uma subsequência, que denotaremos também por ε_k, e um sistema completo de autofunções ortonormais tais que $\|\phi_n^{\varepsilon_k} - \phi_n^0\|_{H_{\varepsilon_k}^1} \to 0$ quando $k \to \infty$.

Note que a condição (4) implica que existe uma sequência não crescente ρ_ε com $\rho_\varepsilon \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$ tal que, se definirmos

$$K_\varepsilon = \{x \in \Omega_0 : d(x, \partial\Omega_0) > \rho_\varepsilon\}, \tag{2.1}$$

então $K_\varepsilon \subset \Omega_\varepsilon$ para todo $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. A família de conjuntos abertos $\{K_\varepsilon\}_{0<\varepsilon\leq\varepsilon_0}$ pode ser considerada, quando $\varepsilon \to 0$, como uma perturbação suave do interior do domínio Ω_0. Em particular, como o domínio Ω_0 é Lipschitz, a família K_ε é uniformemente Lipschitz em ε. Isto implica a existência de operadores de extensão $E_\varepsilon : H^1(K_\varepsilon) \to H^1(\mathbb{R}^N)$, os quais são também extensões de $L^2(K_\varepsilon)$ a $L^2(\mathbb{R}^N)$, e cujas normas $\|E_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(H^1(K_\varepsilon), H^1(\mathbb{R}^N))}$ e $\|E_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(L^2(K_\varepsilon), L^2(\mathbb{R}^N))}$ são uniformemente limitadas.

Observação 2.4. *Note que excluímos a possibilidade de $\rho_\varepsilon = 0$, e portanto $K_\varepsilon = \Omega_\varepsilon$. Isto ocorrerá no caso em que $\Omega_0 \subset \Omega_\varepsilon$.*

Para caracterizar a continuidade do espectro, definimos

$$\tau_\varepsilon = \inf_{\substack{\phi \in H^1(\Omega_\varepsilon) \\ \phi = 0 \text{ em } K_\varepsilon}} \frac{\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \phi|^2}{\int_{\Omega_\varepsilon} |\phi|^2}. \tag{2.2}$$

Observe que, no caso em que $\Omega_\varepsilon \setminus \overline{K_\varepsilon}$ é suave, τ_ε é o primeiro autovalor do seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = \tau u, & \Omega_\varepsilon \setminus \overline{K_\varepsilon}, \\ u = 0, & \partial K_\varepsilon, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \partial \Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

A seguir, temos uma caracterização do comportamento espectral do operador $-\Delta + V_\varepsilon$.

Proposição 2.5. *Assuma que a família de domínios $\{\Omega_\varepsilon\}$ satisfaça (4). Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) O espectro de $-\Delta + V_\varepsilon$ comporta-se continuamente quando $\varepsilon \to 0$ para toda família admissível de potenciais $\{V_\varepsilon, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$.

ii) $\tau_\varepsilon \to \infty$ quando $\varepsilon \to 0$.

iii) Para toda família de funções ψ_ε tal que $\|\psi_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C$, tem-se $\|\psi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon \setminus \overline{K_\varepsilon})} \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$.

iv) Para toda família de funções ψ_ε tal que $\|\psi_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C$, exitem uma sequência $\{\psi_{\varepsilon_k}\}$ e uma função $\psi_0 \in H^1(\Omega_0)$ tal que $\psi_{\varepsilon_k} \to \psi_0$, em $L^2(\mathbb{R}^N)$ e, para cada $\chi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \nabla \psi_{\varepsilon_k} \nabla \chi \to \int_{\Omega_0} \nabla \psi_0 \nabla \chi.$$

Além disso, se vale alguma das quatro afirmações acima, vale a afirmação

v) $|\Omega_\varepsilon \setminus K_\varepsilon| \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$.

Demonstração: $(iii) \Rightarrow (ii)$

Suponhamos por absurdo que $\{\tau_{\varepsilon_k}\}$ seja uma subsequência limitada de $\{\tau_\varepsilon\}$. Pela definição de τ_ε, obtemos uma família $\{\phi_{\varepsilon_k}\}$ de funções limitadas que, caso seja necessário, pode ser normalizada, com norma um em $L^2(\Omega_{\varepsilon_k} \setminus \overline{K_{\varepsilon_k}})$ e norma em $H^1(\Omega_{\varepsilon_k})$ também limitada, ou seja, obtemos uma família de funções limitadas cuja norma não converge para zero, contrariando a hipótese.

$(ii) \Rightarrow (v)$

Notemos que pela definição de K_{ε_k}, $|\Omega_0 \setminus K_{\varepsilon_k}| \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$ e portanto apenas precisamos mostrar que $|\Omega_{\varepsilon_k} \setminus \Omega_0| \to 0$ quando $\varepsilon_k \to 0$. Suponhamos que não seja verdade tal afirmação, então existem $\eta > 0$ e uma sequência $\varepsilon_k \to 0$ tais que $|\Omega_{\varepsilon_k} \setminus \Omega_0| \geq \eta$. Seja $\rho = \rho(\eta)$ um número pequeno o suficiente tal que

$$|A| = |\{x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega_0, d(x, \Omega_0) \leq \rho\}| \leq \frac{\eta}{2},$$

ou seja,

$$|B| = |\{x \in \Omega_{\varepsilon_k}, d(x, \Omega_0) \geq \rho\}| \geq \frac{\eta}{2},$$

já que o conjunto A foi retirado de Ω_{ε_k} junto com Ω_0 e $|A| \leq \frac{\eta}{2}$.

Seja $\gamma(x)$ uma função suave dada por

$$\gamma(x) = \begin{cases} 0, & se\ x \in \Omega_0 \\ 1, & se\ x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega_0\ e\ d(x, \Omega_0) \geq \rho. \end{cases}$$

Então $\gamma \in H^1(\Omega_{\varepsilon_k})$, com

$$\|\nabla \gamma\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_k})} \leq C \qquad \text{e}$$

$$\|\gamma\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_k})} = \left(\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} |\gamma|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_B |\gamma|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_B 1\right)^{\frac{1}{2}} \geq \left(\frac{\eta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Logo τ_{ε_k} é limitado, contrariando a hipótese.

$(ii) \Rightarrow (iii)$

Suponhamos por absurdo que exista uma sequência de funções $\{\phi_{\varepsilon_k}\}$ com $\|\phi_{\varepsilon_k}\|_{H^1(\Omega_{\varepsilon_k})} \leq C_1$ e $\|\phi_{\varepsilon_k}\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_k} \setminus \overline{K_{\varepsilon_k}})} \geq C_2 > 0$ para todo ε_k.

Seja $\psi_{\varepsilon_k} = E_{\varepsilon_k}(\phi_{\varepsilon_k}|_{\overline{K_{\varepsilon_k}}})$. Então $\psi_{\varepsilon_k} \in H^1(\mathbb{R}^N)$, com $\|\psi_{\varepsilon_k}\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq C$, para todo ε_k.

Além disso, usando a Desigualdade de Hölder, temos

$$\int_{\Omega_{\varepsilon_k} \setminus \overline{K_{\varepsilon_k}}} |\psi_{\varepsilon_k}|^2 .1 dx \leq \||\psi_{\varepsilon_k}|^2\|_{L^{\frac{N}{N-2}}(\Omega_{\varepsilon_k} \setminus \overline{K_{\varepsilon_k}})} \cdot \|1\|_{L^{\frac{N}{2}}(\Omega_{\varepsilon_k} \setminus \overline{K_{\varepsilon_k}})}$$

$$= \left(\int_{\Omega_{\varepsilon_k} \setminus \overline{K_{\varepsilon_k}}} (|\psi_{\varepsilon_k}|^2)^{\frac{N}{N-2}}\right)^{\frac{N-2}{N}} \cdot \left(\int_{\Omega_{\varepsilon_k} \setminus \overline{K_{\varepsilon_k}}} 1 dx\right)^{\frac{2}{N}}.$$

Elevando ambos os lados a $\frac{1}{2}$ e usando a imersão de Sobolev $H^1(\Omega_{\varepsilon_k} \setminus \overline{K_{\varepsilon_k}}) \hookrightarrow L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega_{\varepsilon_k} \setminus \overline{K_{\varepsilon_k}})$, temos

$$\|\psi_{\varepsilon_k}\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_k} \setminus \overline{K_{\varepsilon_k}})} \leq \|\psi_{\varepsilon_k}\|_{L^{\frac{2N}{(N-2)}}(\Omega_{\varepsilon_k} \setminus \overline{K_{\varepsilon_k}})} |\Omega_{\varepsilon_k} \setminus \overline{K_{\varepsilon_k}}|^{\frac{1}{N}} \leq C' \|\psi_{\varepsilon_k}\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} |\Omega_{\varepsilon_k} \setminus \overline{K_{\varepsilon_k}}|^{\frac{1}{N}},$$

para $(N \geq 3)$. Notemos ainda que

$$\int_{\Omega_{\varepsilon_k}\setminus\overline{K_{\varepsilon_k}}} |\psi_{\varepsilon_k}|^2.1dx \leq \||\psi_{\varepsilon_k}|^2\|_{L^{\frac{p}{2}}(\Omega_{\varepsilon_k}\setminus\overline{K_{\varepsilon_k}})} \cdot \|1\|_{L^{\frac{p}{p-2}}(\Omega_{\varepsilon_k}\setminus\overline{K_{\varepsilon_k}})}$$

$$= \left(\int_{\Omega_{\varepsilon_k}\setminus\overline{K_{\varepsilon_k}}} (|\psi_{\varepsilon_k}|^2)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{2}{p}} \cdot \left(\int_{\Omega_{\varepsilon_k}\setminus\overline{K_{\varepsilon_k}}} 1dx\right)^{2.\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}.$$

Elevando ambos os lados a $\frac{1}{2}$ e usando a imersão de Sobolev $H^1(\Omega_{\varepsilon_k}\setminus\overline{K_{\varepsilon_k}}) \hookrightarrow L^p(\Omega_{\varepsilon_k}\setminus\overline{K_{\varepsilon_k}})$, temos

$$\|\psi_{\varepsilon_k}\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_k}\setminus\overline{K_{\varepsilon_k}})} \leq \|\psi_{\varepsilon_k}\|_{L^p(\Omega_{\varepsilon_k}\setminus\overline{K_{\varepsilon_k}})} |\Omega_{\varepsilon_k}\setminus\overline{K_{\varepsilon_k}}|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \leq C''\|\psi_{\varepsilon_k}\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}|\Omega_{\varepsilon_k}\setminus\overline{K_{\varepsilon_k}}|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}},$$

para $(N=1,2)$, onde p pode ser escolhido arbitrariamente grande na desigualdade.

Com essas desigualdades, para algum $\theta>0$ e admitido (v) (pois já foi provado que $(ii)\Rightarrow(v)$), temos

$$\|\psi_{\varepsilon_k}\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_k}\setminus\overline{K_{\varepsilon_k}})} \leq \tilde{C}|\Omega_{\varepsilon_k}\setminus\overline{K_{\varepsilon_k}}|^{\theta} \to 0$$

quando $\varepsilon_k \to 0$.

Consideremos em Ω_{ε_k} a função $\chi_{\varepsilon_k} = \phi_{\varepsilon_k} - \psi_{\varepsilon_k}$. Logo, $\chi_{\varepsilon_k} = 0$ em K_{ε_k} e $\|\chi_{\varepsilon_k}\|_{H^1(\Omega_{\varepsilon_k})} \leq C_1$.

Além disso, para ε_k suficientemente pequeno, temos $\|\psi_{\varepsilon_k}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon\setminus\overline{K_{\varepsilon_k}})} \leq \frac{C_2}{2}$, logo

$$\|\chi_{\varepsilon_k}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon\setminus\overline{K_{\varepsilon_k}})} \geq \|\phi_{\varepsilon_k}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon\setminus\overline{K_{\varepsilon_k}})} - \|\psi_{\varepsilon_k}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon\setminus\overline{K_{\varepsilon_k}})} \geq \frac{C_2}{2},$$

para k suficientemente grande.

Portanto, tomando χ_{ε_k} na definição de τ_{ε_k}, contrariamos a hipótese (ii).

$(iii) \Rightarrow (iv)$

Se $\{\psi_{\varepsilon_k}\}$ é uma sequência com $\|\psi_{\varepsilon_k}\|_{H^1(\Omega_{\varepsilon_k})} \leq C$, então podemos extrair uma subsequência, que denotamos também por $\{\psi_{\varepsilon_k}\}$, e obter uma função $\psi_0 \in H^1(\Omega_0)$ tais que $\psi_{\varepsilon_k} \to \psi_0$, $w-H^1(K)$, $s-L^2(K)$, para $K \subset\subset \Omega_0$. Provaremos, na verdade, que $\psi_{\varepsilon_k} \to \psi_0$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Notemos que com um argumento similar ao usado na prova de $(ii) \Rightarrow (iii)$ temos que existe um $\rho>0$ tal que $\|\psi_{\varepsilon_k}\|_{L^2(K_{\varepsilon_k}\setminus K_\delta)} \leq C|K_{\varepsilon_k}\setminus K_\delta|^\rho$, para $0<\varepsilon_k<\delta$, com a constante C independente de k e δ. Dado $\eta>0$ um número pequeno, tome δ pequeno o suficiente para que $\|\psi_{\varepsilon_k}\|_{L^2(K_{\varepsilon_k}\setminus K_\delta)} \leq \frac{\eta}{4}$, para todo $\varepsilon_k<\delta$ e $\|\psi_0\|_{L^2(\Omega_0\setminus K_\delta)} \leq \frac{\eta}{4}$. Observe que, como $|\Omega_0\setminus K_{\varepsilon_k}| \to 0$, então podemos escolher δ pequeno o suficiente para que $|K_{\varepsilon_k}\setminus K_\delta|$ fique tão pequeno quanto se queira. Notemos que

$$\|\psi_{\varepsilon_k} - \psi_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|\psi_{\varepsilon_k} - \psi_0\|^2_{L^2(K_\delta)} + \|\psi_{\varepsilon_k} - \psi_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N \setminus K_\delta)}.$$

Estendendo ψ_{ε_k} por 0 fora de Ω_{ε_k} e fazendo o análogo para ψ_0, temos

$$\begin{aligned}\|\psi_{\varepsilon_k} - \psi_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N\setminus K_\delta)} &\leq \|\psi_{\varepsilon_k}\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_k}\setminus K_{\varepsilon_k})} + \|\psi_{\varepsilon_k}\|_{L^2(K_{\varepsilon_k}\setminus K_\delta)} + \|\psi_0\|_{L^2(\Omega_0\setminus K_{\varepsilon_k})} \\ &\leq \frac{\eta}{2} + \|\psi_{\varepsilon_k}\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_k}\setminus K_{\varepsilon_k})}.\end{aligned}$$

Escolhendo $\varepsilon_k > 0$ pequeno o suficiente e usando (v) para que $\|\psi_{\varepsilon_k}\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_k}\setminus K_{\varepsilon_k})} \leq \frac{\eta}{4}$ e $\|\psi_{\varepsilon_k} - \psi_0\|^2_{L^2(K_\delta)} \leq \frac{\eta}{4}$, segue que

$$\|\psi_{\varepsilon_k} - \psi_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \eta,$$

mostrando a convergência em $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Agora, se $\chi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $\eta > 0$ é um número pequeno, escolhemos $\delta > 0$ pequeno o suficiente para que $\|\chi\|_{H^1((\Omega_{\varepsilon_k}\cup\Omega_0)\setminus\overline{K_\delta})} \leq \eta$. Então, para $0 < \varepsilon_k < \delta$, temos

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \nabla\psi_{\varepsilon_k}\nabla\chi - \int_{\Omega_0} \nabla\psi_0\nabla\chi\right| \\ &= \left|\int_{\Omega_{\varepsilon_k}\setminus K_\delta} \nabla\psi_{\varepsilon_k}\nabla\chi - \int_{\Omega_0\setminus K_\delta} \nabla\psi_0\nabla\chi + \int_{K_\delta} \nabla\psi_{\varepsilon_k}\nabla\chi - \int_{K_\delta} \nabla\psi_0\nabla\chi\right| \\ &\leq \left|\int_{K_\delta} (\nabla\psi_{\varepsilon_k} - \nabla\psi_0)\nabla\chi\right| + \int_{\Omega_{\varepsilon_k}\setminus K_\delta} |\nabla\psi_{\varepsilon_k}||\nabla\chi| + \int_{\Omega_0\setminus K_\delta} |\nabla\psi_0||\nabla\chi| \\ &\leq \left|\int_{K_\delta} (\nabla\psi_{\varepsilon_k} - \nabla\psi_0)\nabla\chi\right| + 2C\eta \to 2C\eta,\end{aligned}$$

quando $\varepsilon_k \to 0$. Como $\eta > 0$ é arbitrário, (iv) está satisfeito.

$(iv) \Rightarrow (iii)$

Se $\{\psi_\varepsilon\}$ é uma família de funções tais que $\|\psi_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C$, então existem uma sequência $\{\psi_{\varepsilon_k}\}$ e uma função $\psi_0 \in H^1(\Omega_0)$ tais que $\|\psi_{\varepsilon_k} - \psi_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to 0$ quando $\varepsilon_k \to 0$. Portanto,

$$\|\psi_{\varepsilon_k}\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_k}\setminus\overline{K_{\varepsilon_k}})} \leq \|\psi_{\varepsilon_k} - \psi_0\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_k}\setminus\overline{K_{\varepsilon_k}})} + \|\psi_0\|_{L^2(\Omega_0\setminus\overline{K_{\varepsilon_k}})} \to 0 \text{ quando } \varepsilon_k \to 0.$$

$(i) \Rightarrow (ii)$

Suponhamos, por absurdo, que exista uma sequência $\{\varepsilon_k\}$ tal que $\tau_{\varepsilon_k} < a$, para todo k e um número fixo a. Pela definição de τ_{ε_k}, existe uma função ϕ_{ε_k} com $\phi_{\varepsilon_k} = 0$ em $\overline{K_{\varepsilon_k}}$,

$\|\phi_{\varepsilon_k}\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_k})} = 1$ e $\|\nabla\phi_{\varepsilon_k}\|^2_{L^2(\Omega_{\varepsilon_k})} \leq a$. Observe que

$$\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} |\nabla\phi_{\varepsilon_k}|^2 + \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} V_{\varepsilon_k}|\phi_{\varepsilon_k}|^2 \leq a + \|V_{\varepsilon_k}\|_{L^\infty(\Omega_{\varepsilon_k})} \leq \tilde{a},$$

para alguma constante $\tilde{a}$ independente de ε_k. Escolhamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\tilde{a} < \lambda_n^0 < \lambda_{n+1}^0$. Denotemos por $\phi_1^{\varepsilon_k}, ..., \phi_n^{\varepsilon_k}$ as n primeiras autofunções e consideremos o espaço linear $[\phi_1^{\varepsilon_k}, ..., \phi_n^{\varepsilon_k}, \phi_{\varepsilon_k}] \subset H^1(\Omega_{\varepsilon_k})$.

Pela convergência espectral, temos uma subsequência ε_k (que também denotamos por ε_k) e autofunções do problema limite $\phi_1^0, ..., \phi_n^0$ tais que $\|\phi_i^{\varepsilon_k} - \phi_i^0\|_{H^1_{\varepsilon_k}} \to 0$ quando $\varepsilon_k \to 0$. Isto implica que $\|\phi_i^{\varepsilon_k}\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_k}\setminus K_{\varepsilon_k})} \to 0$ quando $\varepsilon_k \to 0$.

De fato,

$$\begin{aligned}
&\|\phi_i^{\varepsilon_k}\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_k}\setminus K_{\varepsilon_k})} = \int_{\Omega_{\varepsilon_k}\setminus K_{\varepsilon_k}} |\phi_i^{\varepsilon_k}|^2 = \int_{\Omega_{\varepsilon_k}\setminus K_{\varepsilon_k}} |\phi_i^{\varepsilon_k} - \phi_i^0 + \phi_i^0|^2 \\
&\leq \int_{\Omega_{\varepsilon_k}\setminus K_{\varepsilon_k}} (|\phi_i^{\varepsilon_k} - \phi_i^0| + |\phi_i^0|)^2 \leq \int_{\Omega_{\varepsilon_k}\setminus K_{\varepsilon_k}} 2|\phi_i^{\varepsilon_k} - \phi_i^0|^2 + 2|\phi_i^0|^2 \\
&= 2.\int_{(\Omega_{\varepsilon_k}\cap\Omega_0)\setminus K_{\varepsilon_k}\cup(\Omega_{\varepsilon_k}\setminus\overline{\Omega_0})} |\phi_i^{\varepsilon_k} - \phi_i^0|^2 + 2.\int_{\Omega_{\varepsilon_k}\setminus K_{\varepsilon_k}} |\phi_i^0|^2 \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

pois $\|\phi_i^{\varepsilon_k} - \phi_i^0\|_{H^1_{\varepsilon_k}} \to 0$ e $|\Omega_0 \setminus K_{\varepsilon_k}| \to 0$ e ϕ_i^0 estendida é zero fora de Ω_0. Assim, temos

$$\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \phi_i^{\varepsilon_k}\phi_{\varepsilon_k} \to 0, \text{ quando } \varepsilon_k \to 0, \text{ para } i = 1, ..., n,$$

o que nos diz que $[\phi_1^{\varepsilon_k}, ..., \phi_n^{\varepsilon_k}, \phi_{\varepsilon_k}]$ é um sistema quase ortonormal em $L^2(\Omega_{e_k})$. Pela caracterização min-max de autovalores, temos

$$\lambda_{n+1}^{\varepsilon_k} \leq \max_{\phi\in[\phi_1^{\varepsilon_k},...,\phi_n^{\varepsilon_k},\phi_{\varepsilon_k}]} \frac{\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} |\nabla\phi|^2 + \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} V_{\varepsilon_k}|\phi|^2}{\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} |\phi|^2}.$$

Mas, se $\phi \in [\phi_1^{\varepsilon_k}, ..., \phi_n^{\varepsilon_k}, \phi_{\varepsilon_k}]$, podemos escrever $\phi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\phi_i^{\varepsilon_k} + \beta\phi_{\varepsilon_k}$. Usando que $\phi_i^{\varepsilon_k}$ são as autofunções correspodentes aos autovalores $\lambda_i^{\varepsilon_k}$ e que a família $\{\phi_1^{\varepsilon_k}, ..., \phi_n^{\varepsilon_k}, \phi_{\varepsilon_k}\}$ é quase ortonormal, temos

$$
\begin{aligned}
\lambda_{n+1}^{\varepsilon_k} &\leq \frac{\displaystyle\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} |\nabla\phi|^2 + \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} V_{\varepsilon_k}|\phi|^2}{\displaystyle\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} |\phi|^2} \\
&= \frac{\displaystyle\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \nabla\phi_i^{\varepsilon_k} + \beta\nabla\phi_{\varepsilon_k}, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \nabla\phi_i^{\varepsilon_k} + \beta\nabla\phi_{\varepsilon_k} \right\rangle}{\displaystyle\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i^{\varepsilon_k} + \beta\phi_{\varepsilon_k}, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i^{\varepsilon_k} + \beta\phi_{\varepsilon_k} \right\rangle} \\
&+ \frac{\displaystyle\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} V_{\varepsilon_k} \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i^{\varepsilon_k} + \beta\phi_{\varepsilon_k}, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i^{\varepsilon_k} + \beta\phi_{\varepsilon_k} \right\rangle}{\displaystyle\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i^{\varepsilon_k} + \beta\phi_{\varepsilon_k}, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i^{\varepsilon_k} + \beta\phi_{\varepsilon_k} \right\rangle} \\
&= \frac{\displaystyle\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 |\nabla\phi_i^{\varepsilon_k}|^2 + V_{\varepsilon_k}(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 |\phi_i^{\varepsilon_k}|^2) + \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \beta^2|\nabla\phi_{\varepsilon_k}|^2 + \beta^2|\phi_{\varepsilon_k}|^2 + o(1)}{\displaystyle\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 |\phi_i^{\varepsilon_k}|^2 + \beta^2|\phi_{\varepsilon_k}|^2 + o(1)} \\
&\leq \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \lambda_i^{\varepsilon_k} + \beta^2\tilde{a} + o(1)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 + \beta^2 + o(1)} \leq \frac{\displaystyle\lambda_n^{\varepsilon_k}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 + \beta^2\tilde{a} + o(1)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 + \beta^2 + o(1)}
\end{aligned}
$$

Como $\lambda_n^{\varepsilon_k} \leq \lambda_n^0 + o(1)$ e $\tilde{a} \leq \lambda_n^0$, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{\displaystyle\lambda_n^{\varepsilon_k}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 + \beta^2\tilde{a} + o(1)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 + \beta^2 + o(1)} &\leq \frac{\displaystyle(\lambda_n^0 + o(1))\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 + \lambda_n^0\beta^2 + o(1)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 + \beta^2 + o(1)} \\
&= \frac{\displaystyle\lambda_n^0(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 + \beta^2) + o(1)(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2) + o(1)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 + \beta^2 + o(1)} \\
&\leq \lambda_n^0 + \frac{o(1)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 + \beta^2 + o(1)} \\
&= \lambda_n^0 + o(1).
\end{aligned}
$$

Portanto, $\lambda_{n+1}^{\varepsilon_k} \leq \lambda_n^0 + o(1)$ e, quando $k \to \infty$, temos que $\lambda_{n+1}^0 \leq \lambda_n^0 + o(1)$, o que é uma contradição.

$(iv) \Rightarrow (i)$

Fixemos n com a propriedade de $\lambda_n^0 < \lambda_{n+1}^0$ e consideremos a família de autofunções $\{\phi_1^0, ..., \phi_n^0\}$. Se denotarmos por E o operador extensão de $H^1(\Omega_0)$ a $H^1(\mathbb{R}^N)$, e por $\mathcal{T}_\varepsilon$ a restrição do operador a Ω_ε, construímos a função $\xi_i^\varepsilon = \mathcal{T}_\varepsilon E \phi_i^0$, $i = 1, ..., n$. Como (iv) implica (v), podemos ver que $\|\xi_i^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0)} \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$ para $i = 1, ..., n$, pois a extensão é limitada e $|\Omega_\varepsilon \setminus K_\varepsilon| \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$, garantindo que $|\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0| \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$.

Pela caracterização min-max de autovalores, obtemos $\lambda_i^\varepsilon \leq \lambda_i^0 + o(1)$ quando $\varepsilon \to 0$.

Podemos escolher uma sequência $\varepsilon_k \to 0$ e números $\kappa_i \leq \lambda_i^0$, $i = 1, ..., n$, tais que $\lambda_i^{\varepsilon_k} \to \kappa_i$, para $i = 1, ..., n$. Como $\{\phi_i^{\varepsilon_k}\}$, é uma sequência limitada em $H^1(\Omega_{\varepsilon_k})$, para $i = 1, ..., n$, temos por (iv) que podemos extrair uma outra subsequência, que ainda denotaremos por $\{\phi_i^{\varepsilon_k}\}$, e tomar funções $\xi_i^0 \in H^1(\Omega_0)$, tais que $\phi_i^{\varepsilon_k} \to \xi_i^0$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$, para $i = 1, ..., n$, e

$$\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \nabla \phi_i^{\varepsilon_k} \nabla \chi \to \int_{\Omega_0} \nabla \xi_i^0 \nabla \chi, \quad i = 1, ..., n,$$

para todo $\chi \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Em particular, $\displaystyle\int_{\Omega_0} \xi_i^0 \xi_j^0 = \delta_{ij}$, pois são limites de autofunções ortonormais. Além disso, multiplicando a equação $(-\Delta + V_{\varepsilon_k})\phi_i^{\varepsilon_k} = \lambda_i^{\varepsilon_k} \phi_i^{\varepsilon_k}$ por $\chi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e integrando por partes, temos

$$\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \nabla \phi_i^{\varepsilon_k} \nabla \chi + \int_{\Omega_0} V_{\varepsilon_k} \phi_i^{\varepsilon_k} \chi = \lambda_i^{\varepsilon_k} \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \phi_i^{\varepsilon_k} \chi, \quad i = 1, ..., n.$$

E passando ao limite, obtemos

$$\int_{\Omega_0} \nabla \xi_i^0 \nabla \chi + \int_{\Omega_0} V_0 \xi_i^0 \chi = \kappa_i \int_{\Omega_0} \xi_i^0 \chi, \quad i = 1, ..., n.$$

Isto implica que κ_i e ξ_i^0 são respectivamente autovalores e autofunções do problema limite. Como já sabemos que $\kappa_i \leq \lambda_i^0$, então temos necessariamente que $\kappa_i = \lambda_i^0$ para $i = 1, ..., n$ e $\{\xi_1^0, ..., \xi_n^0\}$ é um sistema ortonormal de autofunções associadas a $\lambda_1^0, ..., \lambda_n^0$.

Para provar a convergência em $H_{\varepsilon_k}^1$, notemos primeiramente que, para ξ_i^0, temos

$$\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} |\nabla \phi_i^{\varepsilon_k}|^2 = \lambda_i^{\varepsilon_k} \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} |\phi_i^{\varepsilon_k}|^2 - \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} V_{\varepsilon_k} |\phi_i^{\varepsilon_k}|^2 \to \lambda_i^0 \int_{\Omega_0} |\xi_i^0|^2 - \int_{\Omega_0} V_0 |\xi_i^0|^2 = \int_{\Omega_0} |\nabla \xi_i^0|^2,$$

onde usamos apenas que $\phi_i^{\varepsilon_k} \to \xi_i^0$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$, a convergência fraca de V_{ε_k} para V_0 e a limitação uniforme de $\|V_{\varepsilon_k}\|_{L^\infty(\Omega_{\varepsilon_k})}$. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi_i^{\varepsilon_k} - \nabla \xi_i^0|^2 = \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} |\nabla \phi_i^{\varepsilon_k}|^2 + \int_{\Omega_0} |\nabla \xi_i^0|^2 - 2\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \nabla \phi_i^{\varepsilon_k} \nabla \xi_i^0.$$

Mas,

$$\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} |\nabla \phi_i^{\varepsilon_k}|^2 \to \int_{\Omega_0} |\nabla \xi_i^0|^2 \quad \text{quando} \quad \varepsilon_k \to 0$$

e, se definirmos $\tilde{\xi_i^0} \in H^1(\mathbb{R}^N)$ uma extensão de ξ_i^0, temos

$$\int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \nabla \phi_i^{\varepsilon_k} \nabla \xi_i^0 = \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \nabla \phi_i^{\varepsilon_k} \nabla \tilde{\xi_i^0} + \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \nabla \phi_i^{\varepsilon_k} (\nabla \xi_i^0 - \nabla \tilde{\xi_i^0}) \to \int_{\Omega_0} |\nabla \xi_i^0|^2,$$

quando $\varepsilon_k \to 0$, pois

$$\left| \int_{\Omega_{\varepsilon_k}} \nabla \phi_i^{\varepsilon_k} (\nabla \xi_i^0 - \nabla \tilde{\xi_i^0}) \right| \leq \|\nabla \phi_i^{\varepsilon_k}\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_k})} \|\nabla \xi_i^0 - \nabla \tilde{\xi_i^0}\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_k})} \to 0$$

quando $\varepsilon_k \to 0$. Isto implica que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi_i^{\varepsilon_k} - \nabla \xi_i^0|^2 \to 0 \quad \text{quando} \quad \varepsilon_k \to 0.$$

Logo, temos $\|\phi_i^{\varepsilon_k} - \xi_i^0\|_{H^1_{\varepsilon_k}} \to 0$ quando $\varepsilon_k \to 0$, mostrando a convergência em $H^1_{\varepsilon_k}$.

■

2.2 Convergência dos operadores resolventes

Analisaremos nesta seção o comportamento dos operadores resolventes.

Definição 2.6. *Dizemos que uma família $\{\Omega_\varepsilon : \ 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ é admissível se satisfaz (4) e uma das condições (i)-(iv) da Proposição (2.5).*

O próximo resultado mostra a continuidade do resolvente.

Proposição 2.7. *Assuma que a família de potenciais $\{V_\varepsilon, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ e a família de domínios $\{\Omega_\varepsilon : 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ sejam admissíveis. Assuma também que $0 \notin \sigma(-\Delta + V_0)$. Então, para ε suficientemente pequeno, $0 \notin \sigma(-\Delta + V_\varepsilon)$, e existe uma constante C, independente de ε, tal que*

$$\|(-\Delta + V_\varepsilon)^{-1} g_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C \|g_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, \quad g_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon). \tag{2.3}$$

Além disso, se $g_\varepsilon \to g_0$ fracamente em $L^2(\mathbb{R}^N)$, então

$$\|(-\Delta + V_\varepsilon)^{-1} g_\varepsilon - (-\Delta + V_0)^{-1} g_0\|_{H^1_\varepsilon} \to 0 \quad \textit{quando} \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.4}$$

Demonstração: Mostremos primeiro (2.3). Pela continuidade do espectro dada pela Proposição 2.5 temos que, para ε pequeno o suficiente, $0 \notin (-\Delta + V_\varepsilon)$. Em particular, para $g_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ dado, temos uma única solução $w_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ de

$$\begin{cases} -\Delta w_\varepsilon + V_\varepsilon w_\varepsilon = g_\varepsilon, & \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial n} = 0, & \partial\Omega_\varepsilon. \end{cases} \tag{2.5}$$

Mostraremos que se $\|g_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C$, com C independente de ε, então $\|w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$ é limitado. Suponhamos por absurdo que exista uma subsequência, que denotamos também por $\{w_\varepsilon\}$, tal que $\|w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \to \infty$. Considere $\tilde{w_\varepsilon} = \dfrac{w_\varepsilon}{\|w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}}$, de modo que $\|\tilde{w_\varepsilon}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = 1$.

Então

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{w_\varepsilon} + V_\varepsilon \tilde{w_\varepsilon} = \frac{g_\varepsilon}{\|w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}}, & \text{em } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial \tilde{w_\varepsilon}}{\partial n} = 0, & \text{em } \partial\Omega_\varepsilon. \end{cases} \tag{2.6}$$

Multiplicando esta equação por $\tilde{w_\varepsilon}$, e integrando por partes, obtemos

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \tilde{w_\varepsilon}|^2 + \int_{\Omega_\varepsilon} V_\varepsilon |\tilde{w_\varepsilon}|^2 = \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{g_\varepsilon}{\|w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}} \tilde{w_\varepsilon},$$

de onde segue que

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \tilde{w_\varepsilon}|^2 \leq C,$$

com C independente de ε. Aplicando a Proposição 2.5 (iv), podemos extrair uma sequência, que denotamos também por $\tilde{w_\varepsilon}$, tal que $\tilde{w_\varepsilon} \to \tilde{w_0}$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$ e, para todo $\chi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \tilde{w_\varepsilon} \nabla \chi \to \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \tilde{w_0} \nabla \chi.$$

Note, em particular, que $\|\tilde{w_\varepsilon}\|_{L^2(\Omega_0)} = 1$.

Seja $\xi \in H^1(\Omega_0)$ e considere $\tilde{\xi} \in H^1(\mathbb{R}^N)$ uma extensão de ξ a $\mathbb{R}^N$. Multiplicando a equação (2.6) por $\tilde{\xi} \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ e integrando por partes, temos

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \tilde{w_\varepsilon} \nabla \tilde{\xi} + \int_{\Omega_\varepsilon} V_\varepsilon \tilde{w_\varepsilon} \tilde{\xi} = \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{g_\varepsilon}{\|w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}} \tilde{\xi}.$$

Passando ao limite, obtemos

$$\int_{\Omega_0} \nabla \tilde{w}_0 \nabla \xi + \int_{\Omega_0} V_0 \tilde{w}_0 \xi = 0,$$

onde usamos que $\|V_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \leq C$, $V_\varepsilon \to V_0$ fracamente em $L^2(\mathbb{R}^N)$ e $\tilde{w}_\varepsilon \to \tilde{w}_0$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Então

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{w}_0 + V_0 \tilde{w}_0 = 0, & \text{em } \Omega_0, \\ \frac{\partial \tilde{w}_0}{\partial n} = 0, & \text{em } \partial\Omega_0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Como, por hipótese, $0 \notin \sigma(-\Delta + V_0)$, temos que $\tilde{w}_0 = 0$, o que contradiz a hipótese de $\|\tilde{w}_0\|_{L^2(\Omega_0)} = 1$. Assim, segue que $\|w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$ é uniformemente limitado em ε.

Vejamos agora que $\|\nabla w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$ é uniformemente limitado em ε. Da desigualdade de Holder segue que

$$\int_{\Omega_\varepsilon} g_\varepsilon w_\varepsilon \leq \|g_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \cdot \|w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} < \infty,$$

e, como os V_ε são uniformemente limitados em $L^\infty(\Omega_\varepsilon)$ e

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla w_\varepsilon|^2 = -\int_{\Omega_\varepsilon} V_\varepsilon |w_\varepsilon|^2 + \int_{\Omega_\varepsilon} g_\varepsilon w_\varepsilon$$

segue a limitação uniforme de $\|\nabla w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$.

Para mostrar (2.4) note que, pela convergência fraca de g_ε, temos que g_ε é uniformemente limitada em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Aplicando (2.3), obtemos que $\|(-\Delta + V_\varepsilon)^{-1} g_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$ é uniformemente limitado em ε. Usando (iv) da Proposição 2.5 e tomando o limite na equação, segue que se $u_\varepsilon = (-\Delta + V_\varepsilon)^{-1} g_\varepsilon$ e $u_0 = (-\Delta + V_0)^{-1} g_0$, então $u_\varepsilon \to u_0$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$ e $\nabla u_\varepsilon \to \nabla u_0$ fracamente em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Agora, com um argumento similar ao usado na prova que (iv) implica (i) na Proposição 2.5, obtemos que $u_\varepsilon \to u_0$ em H^1_ε. Isto conclui a prova.

■

2.3 Convergência dos semigrupos lineares

A partir da continuidade do espectro dos operadores $-\Delta + V_\varepsilon$, podemos obter estimativas sobre o comportamento dos semigrupos lineares, que serão fundamentais na análise da dinâmica não linear.

Teorema 2.8. *Para cada $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, consideramos o operador $-\Delta : D(\Delta) \subset L^2(\Omega_\varepsilon) \to L^2(\Omega_\varepsilon)$ com condição de Neumann. Este operador é setorial e*

$$\|(\mu+\Delta)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega_\varepsilon))} \leq \frac{M}{|\mu+\lambda|}, \quad \textit{para todo } \mu \in \Sigma_{-\lambda,\phi},$$

para alguma constante M independente de ε.

Demonstração: Notemos inicialmente que

$$\int_{\Omega_\varepsilon} -\Delta u \cdot u = \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \cdot \nabla u - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} u = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \geq \lambda \|u\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)},$$

onde usamos a Desigualdade de Poincaré.

Portanto, $-\Delta$ satisfaz $\langle -\Delta u, u\rangle_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq -\lambda \langle u, u\rangle_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$, para todo $u \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ e é dissipativo.

Temos $W(-\Delta) \subset (-\infty, -\lambda]$, sendo

$$W(-\Delta) = \Big\{\langle -\Delta u, u\rangle_{L^2(\Omega_\varepsilon)}\,;\; u \in D(\Delta), \|u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = 1\Big\}$$

a imagem numérica de $-\Delta$. Desta forma, $\mathcal{R} := \mathbb{C} \setminus (-\infty, -\lambda] \subset \mathbb{C} \setminus W(-\Delta)$ é aberto e conexo. Temos ainda que $0 \in \mathcal{R} \cap \rho(-\Delta)$. Do Teorema 1.29 resulta que, se $\mu \in \mathcal{R}$, então

$$\left\|(\mu+\Delta)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \frac{1}{dist(\mu, W(-\Delta))}.$$

Logo, se $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ e $\mu \in \Sigma_{-\lambda,\phi} := \{w \in \mathbb{C} : |\arg(w+\lambda)| < \pi - \phi\}$, temos

$$d(\mu, W(-\Delta)) \geq d(\mu, (-\infty, -\lambda]) = |\mu+\lambda| \sin(\pi - \arg(\mu+\lambda))$$

$$\geq |\mu+\lambda| \sin\phi,$$

obtendo assim

$$\|(\mu+\Delta)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \frac{M}{|\mu+\lambda|}, \text{ para todo } \mu \in \Sigma_{-\lambda,\phi},$$

em que $M = \frac{1}{\sin\phi}$ independente de ε. ■

Consideremos os operadores $A_\varepsilon = \Delta - V_\varepsilon$ como operadores ilimitados em $L^2(\Omega_\varepsilon)$, para $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$. O Corolário 1.40 garante que esses operadores geram semigrupos analíticos $e^{A_\varepsilon t}$ em $L^2(\Omega_\varepsilon)$, $H^1(\Omega_\varepsilon)$ e, em geral, na escala de potências fracionárias do operador.

Notemos que o semigrupo $e^{A_\varepsilon t}$ age sobre funções definidas em Ω_ε. Precisamos estimar expressões do tipo $e^{A_\varepsilon t}u_0$, onde $u_0 \in L^2(\Omega_0)$. Assim como anteriormente, estenderemos a função u_0 por 0 fora de Ω_0 e a restringiremos a Ω_ε. De maneira análoga, podemos dar sentido à expressão $e^{A_0 t}u_\varepsilon$.

Temos o seguinte resultado:

Proposição 2.9. *Assuma que a família de domínios* $\{\Omega_\varepsilon : 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ *e a família de potenciais* $\{V_\varepsilon : 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ *sejam admissíveis. Seja* $a > 0$ *tal que* $\lambda_n^0 < a < \lambda_{n+1}^0$ *e considere a projeção espectral sobre o espaço linear gerado pelas* n *autofunções* P_a^ε *como definida anteriormente. Denote por* b *um número tal que* $b < \lambda_1^0$. *Então existem um número* $\frac{1}{2} < \tilde{\gamma} < 1$ *e uma função* $\theta(\varepsilon)$ *com* $\theta(\varepsilon) \to 0$ *quando* $\varepsilon \to 0$ *tais que*

$$\|e^{A_\varepsilon t}u_\varepsilon - e^{A_0 t}u_\varepsilon\|_{H^1_\varepsilon} \leq M\theta(\varepsilon)t^{-\tilde{\gamma}}e^{-bt}\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, \quad u_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon), \quad t > 0, \tag{2.8}$$

$$\|e^{A_\varepsilon t}(I - P_a^\varepsilon)u_\varepsilon - e^{A_0 t}(I - P_a^0)u_\varepsilon\|_{H^1_\varepsilon} \leq M\theta(\varepsilon)t^{-\tilde{\gamma}}e^{-at}\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, \quad u_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon), \quad t > 0. \tag{2.9}$$

Demonstração: Provemos primeiro a desigualdade (2.9). Considere n e a dados, satisfazendo as hipóteses da proposição. Note que $(I - P_a^\varepsilon)$ é a projeção sobre o espaço linear gerado pela base de autofunções retirando-se as n primeiras autofunções da base, de modo que a é menor que os autovalores do operador nesse espaço. Portanto, existe uma constante M, independente de ε, tal que

$$\|e^{A_\varepsilon t}(I - P_a^\varepsilon)u_\varepsilon\|_{H^1_\varepsilon} \leq Mt^{-\frac{1}{2}}e^{-at}\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, \quad u_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon),\ t > 0,\ \varepsilon \in [0, \varepsilon_0).$$

Agora, separaremos as estimativas para t pequeno e t grande. Sejam $\gamma \in (\frac{1}{2}, 1)$ fixado e $\delta > 0$ um parâmetro pequeno e consideremos os casos $t \in (0, \delta]$ e $t > \delta$.

(i) Se $t \in (0, \delta]$, temos

$$\begin{aligned}
\|e^{A_\varepsilon t}(I - P_a^\varepsilon)u_\varepsilon - &e^{A_0 t}(I - P_a^0)u_\varepsilon\|_{H^1_\varepsilon} \\
&\leq \|e^{A_\varepsilon t}(I - P_a^\varepsilon)u_\varepsilon\|_{H^1_\varepsilon} + \|e^{A_0 t}(I - P_a^0)u_\varepsilon\|_{H^1_\varepsilon} \\
&\leq 2Mt^{-\frac{1}{2}}e^{-at}\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \\
&= 2Mt^{-\frac{1}{2}+\gamma-\gamma}e^{-at}\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \\
&\leq 2M\delta^{\gamma-\frac{1}{2}}t^{-\gamma}e^{-at}\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}.
\end{aligned}$$

(ii)

Se $t > \delta$, procedemos como segue. Notemos primeiramente que sempre podemos escolher um número positivo $l = l(\delta)$ tal que se $z \geq l$ então $z^{\frac{1}{2}}e^{-zt} \leq \delta t^{-\gamma}e^{-at}$, para todo $t \geq \delta$. Como $\lambda_k^\varepsilon \to \lambda_k^0$ quando $\varepsilon \to 0$, e $\lambda_k^0 \to +\infty$ quando $k \to \infty$, existe $N = N(\delta) > n$

tal que se $k \geq N$ então $\lambda_k^\varepsilon \geq l(\delta)$, para $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\lambda^0_{N(\delta)} < \lambda^0_{N(\delta)+1}$. Pela decomposição espectral de semigrupos lineares, temos

$$e^{A_\varepsilon t}(I - P^a_\varepsilon)u_\varepsilon = \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-\lambda_k^\varepsilon t}(u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon)\phi_k^\varepsilon,$$

como pode ser observado em [9]. Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
&\left\| e^{A_\varepsilon t}(I - P^a_\varepsilon)u_\varepsilon - e^{A_0 t}(I - P^a_0)u_\varepsilon \right\|_{H^1_\varepsilon} \\
&= \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-\lambda_k^\varepsilon t} \left\langle u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon \right\rangle \phi_k^\varepsilon - \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-\lambda_k^0 t} \left\langle u_\varepsilon, \phi_k^0 \right\rangle \phi_k^0 \right\|_{H^1_\varepsilon} \\
&= \left\| \sum_{k=n+1}^{N(\delta)} e^{-\lambda_k^\varepsilon t} \left\langle u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon \right\rangle \phi_k^\varepsilon + \sum_{k=N(\delta)+1}^{\infty} e^{-\lambda_k^\varepsilon t} \left\langle u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon \right\rangle \phi_k^\varepsilon \right. \\
&\left. - \left(\sum_{k=n+1}^{N(\delta)} e^{-\lambda_k^0 t} \left\langle u_\varepsilon, \phi_k^0 \right\rangle \phi_k^0 + \sum_{k=N(\delta)+1}^{\infty} e^{-\lambda_k^0 t} \left\langle u_\varepsilon, \phi_k^0 \right\rangle \phi_k^0 \right) \right\|_{H^1_\varepsilon} \\
&\leq \left\| \sum_{k=n+1}^{N(\delta)} e^{-\lambda_k^\varepsilon t} \left\langle u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon \right\rangle \phi_k^\varepsilon - \sum_{k=n+1}^{N(\delta)} e^{-\lambda_k^0 t} \left\langle u_\varepsilon, \phi_k^0 \right\rangle \phi_k^0 \right\|_{H^1_\varepsilon} \\
&+ \left\| \sum_{k=N(\delta)+1}^{\infty} e^{-\lambda_k^\varepsilon t} \left\langle u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon \right\rangle \phi_k^\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} + \left\| \sum_{k=N(\delta)+1}^{\infty} e^{-\lambda_k^0 t} \left\langle u_\varepsilon, \phi_k^0 \right\rangle \phi_k^0 \right\|_{H^1(\Omega_0)} \\
&= I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

Analisemos inicialmente I_2 e I_3,

$$\begin{aligned}
I_2^2 &= \left\| \sum_{k=N(\delta)+1}^{\infty} e^{-\lambda_k^\varepsilon t} \left\langle u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon \right\rangle \phi_k^\varepsilon \right\|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = \left\| A_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \sum_{k=N(\delta)+1}^{\infty} e^{-\lambda_k^\varepsilon t} \left\langle u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon \right\rangle \phi_k^\varepsilon \right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \\
&= \left\langle A_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \sum_{k=N(\delta)+1}^{\infty} e^{-\lambda_k^\varepsilon t} \left\langle u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon \right\rangle \phi_k^\varepsilon, A_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \sum_{k=N(\delta)+1}^{\infty} e^{-\lambda_k^\varepsilon t} \left\langle u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon \right\rangle \phi_k^\varepsilon \right\rangle.
\end{aligned}$$

Como $A_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ é autoadjunto, ver [1], temos

$$\begin{aligned}
&= \left\langle A_\varepsilon \sum_{k=N(\delta)+1}^{\infty} e^{-\lambda_k^\varepsilon t} \left\langle u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon \right\rangle \phi_k^\varepsilon, \sum_{k=N(\delta)+1}^{\infty} e^{-\lambda_k^\varepsilon t} \left\langle u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon \right\rangle \phi_k^\varepsilon \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{k=N(\delta)+1}^{\infty} e^{-\lambda_k^\varepsilon t} \left\langle u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon \right\rangle A_\varepsilon \phi_k^\varepsilon, \sum_{k=N(\delta)+1}^{\infty} e^{-\lambda_k^\varepsilon t} \left\langle u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon \right\rangle \phi_k^\varepsilon \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{k=N(\delta)+1}^{\infty} e^{-\lambda_k^\varepsilon t} \left\langle u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon \right\rangle \lambda_k^\varepsilon \phi_k^\varepsilon, \sum_{k=N(\delta)+1}^{\infty} e^{-\lambda_k^\varepsilon t} \left\langle u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon \right\rangle \phi_k^\varepsilon \right\rangle
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=N(\delta)+1}^{\infty} \lambda_k^\varepsilon e^{-2\lambda_k^\varepsilon t} | \langle u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon \rangle |^2$$
$$\leq \sum_{k=N(\delta)+1}^{\infty} \delta^2 t^{-2\gamma} e^{-2at} | \langle u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon \rangle |^2.$$

Logo, usando a Desigualdade de Bessel, segue que

$$I_2^2 \leq \delta^2 t^{-2\gamma} e^{-2at} \sum_{k=N(\delta)+1}^{\infty} | \langle u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon \rangle |^2 \leq \delta^2 t^{-2\gamma} e^{-2at} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2.$$

ou seja,

$$I_2 \leq \delta t^{-\gamma} e^{-at} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}.$$

Analogamente,

$$I_3 \leq \delta t^{-\gamma} e^{-at} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_0)}.$$

Para I_1, temos

$$I_1 = \left\| \sum_{k=n+1}^{N(\delta)} e^{-\lambda_k^\varepsilon t} \langle u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon \rangle \phi_k^\varepsilon - \sum_{k=n+1}^{N(\delta)} e^{-\lambda_k^0 t} \left\langle u_\varepsilon, \phi_k^0 \right\rangle \phi_k^0 \right\|_{H_\varepsilon^1}$$
$$\leq \left\| \sum_{k=n+1}^{N(\delta)} (e^{-\lambda_k^\varepsilon t} - e^{-\lambda_k^0 t}) \langle u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon \rangle \phi_k^\varepsilon \right\|_{H_\varepsilon^1} + \left\| \sum_{k=n+1}^{N(\delta)} e^{-\lambda_k^0 t} (\langle u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon \rangle \phi_k^\varepsilon - \left\langle u_\varepsilon, \phi_k^0 \right\rangle \phi_k^0) \right\|_{H_\varepsilon^1}$$

Para o primeiro termo, temos

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{N(\delta)} (e^{-\lambda_k^\varepsilon t} - e^{-\lambda_k^0 t}) \langle u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon \rangle \phi_k^\varepsilon \right\|_{H_\varepsilon^1}^2$$
$$= \left\| \sum_{k=n+1}^{N(\delta)} (e^{-\lambda_k^\varepsilon t} - e^{-\lambda_k^0 t}) \langle u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon \rangle \phi_k^\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon \cap \Omega_0)}^2$$
$$+ \left\| \sum_{k=n+1}^{N(\delta)} (e^{-\lambda_k^\varepsilon t} - e^{-\lambda_k^0 t}) \langle u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon \rangle \phi_k^\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon \setminus \overline{\Omega_0})}^2.$$

Procedendo como anteriormente, para $\varepsilon(\delta)$ pequeno o suficiente e usando a convergência dos autovalores, segue que

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{N(\delta)} (e^{-\lambda_k^\varepsilon t} - e^{-\lambda_k^0 t}) \langle u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon \rangle \phi_k^\varepsilon \right\|_{H_\varepsilon^1}^2$$
$$\leq \sum_{k=n+1}^{N(\delta)} t|\lambda_k^\varepsilon - \lambda_k^0| \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \|\phi_k^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \|\phi_k^\varepsilon\|_{H_\varepsilon^1}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=n+1}^{N(\delta)} 2t|\lambda_k^\varepsilon - \lambda_k^0| \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \|A_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \phi_k^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{N(\delta)} 2t|\lambda_k^\varepsilon - \lambda_k^0| \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} (\lambda_k^\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \|\phi_k^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{N(\delta)} 2(\lambda_k^\varepsilon)^{\frac{1}{2}} t|\lambda_k^\varepsilon - \lambda_k^0| \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{N(\delta)} 2(\lambda_{N(\delta)}^\varepsilon)^{\frac{1}{2}} t|\lambda_k^\varepsilon - \lambda_k^0| \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{N(\delta)} \delta^2 t^{-2\gamma} e^{-2at} \|u_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \delta^2 t^{-2\gamma} e^{-2at} \|u_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)}.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\left\| \sum_{k=n+1}^{N(\delta)} (e^{-\lambda_k^\varepsilon t} - e^{-\lambda_k^0 t}) \langle u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon \rangle \phi_k^\varepsilon \right\|_{H_\varepsilon^1} \leq \delta t^{-\gamma} e^{-at} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}.
$$

Resta-nos estimar o último termo:

$$
\begin{aligned}
&\left\| \sum_{k=n+1}^{N(\delta)} e^{-\lambda_k^0 t} (\langle u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon \rangle \phi_k^\varepsilon - \langle u_\varepsilon, \phi_k^0 \rangle \phi_k^0) \right\|_{H_\varepsilon^1} \\
&\quad = \left\| \sum_{k=n+1}^{N(\delta)} e^{-\lambda_k^0 t} (\langle u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon \rangle \phi_k^\varepsilon - \langle u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon \rangle \phi_k^0 + \langle u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon \rangle \phi_k^0 - \langle u_\varepsilon, \phi_k^0 \rangle \phi_k^0) \right\|_{H_\varepsilon^1} \\
&\quad \leq \left\| \sum_{k=n+1}^{N(\delta)} e^{-\lambda_k^0 t} (\langle u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon \rangle (\phi_k^\varepsilon - \phi_k^0)) \right\|_{H_\varepsilon^1} + \left\| \sum_{k=n+1}^{N(\delta)} e^{-\lambda_k^0 t} (\langle u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon - \phi_k^0 \rangle \phi_k^0) \right\|_{H_\varepsilon^1} \\
&\quad \leq e^{-\lambda_{n+1}^0 t} \left\| \sum_{k=n+1}^{N(\delta)} (\langle u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon \rangle (\phi_k^\varepsilon - \phi_k^0)) \right\|_{H_\varepsilon^1} + e^{-\lambda_{n+1}^0 t} \left\| \sum_{k=n+1}^{N(\delta)} (\langle u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon - \phi_k^0 \rangle \phi_k^0) \right\|_{H_\varepsilon^1} \\
&\quad \leq e^{-\lambda_{n+1}^0 t} \sum_{k=n+1}^{N(\delta)} | \langle u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon \rangle | \|\phi_k^\varepsilon - \phi_k^0\|_{H_\varepsilon^1} + e^{-\lambda_{n+1}^0 t} \sum_{k=n+1}^{N(\delta)} | \langle u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon - \phi_k^0 \rangle | \|\phi_k^0\|_{H_\varepsilon^1} \\
&\quad \leq e^{-\lambda_{n+1}^0 t} \left(\sum_{k=n+1}^{N(\delta)} | \langle u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon \rangle | \|\phi_k^\varepsilon - \phi_k^0\|_{H_\varepsilon^1} + | \langle u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon - \phi_k^0 \rangle | \|\phi_k^0\|_{H_\varepsilon^1} \right), \\
&\leq e^{-\lambda_{n+1}^0 t} \Bigg(\sum_{k=n+1}^{N(\delta)} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \|\phi_k^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \|\phi_k^\varepsilon - \phi_k^0\|_{H_\varepsilon^1} \\
&\qquad\qquad\qquad + \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \|\phi_k^\varepsilon - \phi_k^0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \|\phi_k^0\|_{H_\varepsilon^1} \Bigg) \\
&\quad \leq e^{-\lambda_{n+1}^0 t} 2 \|\phi_k^\varepsilon - \phi_k^0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \left(\sum_{k=n+1}^{N(\delta)} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \|\phi_k^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \|\phi_k^0\|_{H_\varepsilon^1} \right).
\end{aligned}
$$

Portanto, para $\varepsilon(\delta)$ pequeno o suficiente e pela convergência das autofunções, temos

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{N(\delta)} e^{-\lambda_k^0 t} \left\langle u_\varepsilon, \phi_k^\varepsilon \right\rangle \phi_k^\varepsilon - \left\langle u_\varepsilon, \phi_k^0 \right\rangle \phi_k^0 \right\|_{H_\varepsilon^1} \leq \delta t^{-\gamma} e^{-at} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}.$$

Das estimativas para I_1, I_2 e I_3 ,obtemos

$$\left\| e^{A_\varepsilon t}(I - P_a^\varepsilon)u_\varepsilon - e^{A_0 t}(I - P_a^0)u_\varepsilon \right\|_{H_\varepsilon^1} \leq C\delta t^{-\gamma} e^{-at} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, \tag{2.10}$$

para $t > \delta$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon(\delta))$.

Como δ é arbitrário, segue da parte (i) e da desigualdade (2.10) que o resultado está provado.

A prova de (2.8) da proposição é similar à prova de (2.9). Apenas trocamos a por b e $P_a^\varepsilon = 0$, $P_a^0 = 0$.

Isto conclui a demonstração.

∎

Capítulo 3

Continuidade dos atratores

Neste capítulo provaremos, usando a Fórmula da Variação das Constantes e os resultados do capítulo anterior, que a família de semigrupos não lineares associada ao problema (1) dependendo de ε é contínua em $\varepsilon = 0$, uniformemente em intervalos compactos de $(0, \infty)$. Com isso podemos provar que a família de atratores $\mathcal{A}_\varepsilon$ e os conjuntos de equilíbrio $\mathcal{E}_\varepsilon$ são semicontínuos superiormente em $\varepsilon = 0$.

Posteriormente, estudaremos a semicontinuidade inferior dos atratores. Tal resultado é obtido a partir da continuidade dos conjuntos de equilíbrio $\mathcal{E}_\varepsilon$, que mostraremos, e a caracterização dos atratores como união das variedades instáveis dos pontos de equilíbrio, como no Teorema 1.68, para semigrupos com estrutura gradiente.

Recordemos que a semicontinuidade superior dos atratores em H^1_ε significa que

$$\sup_{u_\varepsilon \in \mathcal{A}_\varepsilon} \inf_{u_0 \in \mathcal{A}_0} \|u_\varepsilon - u_0\|_{H^1_\varepsilon} \to 0 \text{ quando } \varepsilon \to 0,$$

enquanto a semicontinuidade inferior dos atratores em H^1_ε significa

$$\sup_{u_0 \in \mathcal{A}_0} \inf_{u_\varepsilon \in \mathcal{A}_\varepsilon} \|u_\varepsilon - u_0\|_{H^1_\varepsilon} \to 0 \text{ quando } \varepsilon \to 0.$$

3.1 Semicontinuidade superior dos atratores e dos conjuntos de pontos de equilíbrio

No capítulo anterior estudamos detalhadamente o comportamento da parte linear dos operadores sob perturbação e provamos o resultado que garante a continuidade dos semigrupos lineares. Veremos agora que os atratores e o conjunto de soluções de equilíbrio são semicontínuos superiormente sob a perturbação.

Para isto, usaremos a continuidade dos semigrupos lineares já obtida e a continuidade dos semigrupos não lineares, que mostraremos a seguir.

Observação 3.1. *Usaremos, a partir daqui, a seguinte notação para os operadores de Nemitsky associados a f e $\frac{\partial f}{\partial u}$, respectivamente:*

$$F(u)x = f(x, u(x)), \quad F'(u)x = \frac{\partial f}{\partial u}(x, u(x)).$$

Proposição 3.2. *Suponha que a família $\{\Omega_\varepsilon;\ 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0\}$ seja admissível. Então existem $0 \le \gamma < 1$, uma função $c(\varepsilon)$ tal que $c(\varepsilon) \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$, e uma constante M tais que*

$$\|T_\varepsilon(t, u_\varepsilon) - T_0(t, u_\varepsilon)\|_{H^1_\varepsilon} \le M c(\varepsilon) t^{-\gamma},\ t \in (0, \tau],\ \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \le R,\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \tag{3.1}$$

onde $M = M(\tau, R)$.

Demonstração: Pela Fórmula da Variação das Constantes, temos

$$T_\varepsilon(t, u_\varepsilon) = e^{A_\varepsilon t} u_\varepsilon + \int_0^t e^{A_\varepsilon (t-s)} F(T_\varepsilon(s, u_\varepsilon)) ds,\ \varepsilon \in [0, \varepsilon_0).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\|T_\varepsilon(t, u_\varepsilon) - T_0(t, u_\varepsilon)\|_{H^1_\varepsilon} \\
&= \Big\| e^{A_\varepsilon t} u_\varepsilon - e^{A_0 t} u_\varepsilon + \int_0^t e^{A_\varepsilon (t-s)} F(T_\varepsilon(s, u_\varepsilon)) - e^{A_0 (t-s)} F(T_\varepsilon(s, u_\varepsilon)) \\
&\qquad + e^{A_0 (t-s)} F(T_\varepsilon(s, u_\varepsilon)) - e^{A_0 (t-s)} F(T_0(s, u_\varepsilon)) ds \Big\|_{H^1_\varepsilon} \\
&\le \Big(\left\| e^{A_\varepsilon t} u_\varepsilon - e^{A_0 t} u_\varepsilon \right\|_{H^1_\varepsilon} \\
&\quad + \int_0^t \left\| e^{A_\varepsilon (t-s)} F(T_\varepsilon(s, u_\varepsilon)) - e^{A_0 (t-s)} F(T_\varepsilon(s, u_\varepsilon)) \right\|_{H^1_\varepsilon} ds \\
&\qquad + \int_0^t \left\| e^{A_0 (t-s)} F(T_\varepsilon(s, u_\varepsilon)) - e^{A_0 (t-s)} F(T_0(s, u_\varepsilon)) \right\|_{H^1_\varepsilon} ds \Big), \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0).
\end{aligned}$$

Usando a Proposição 2.9, temos

$$\begin{aligned}
e^{bt} \|T_\varepsilon(t, u_\varepsilon) - T_0(t, u_\varepsilon)\|_{H^1_\varepsilon} &\le e^{bt} (M \theta(\varepsilon) t^{-\gamma} e^{-bt} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}) \\
&\quad + e^{bt} M \theta(\varepsilon) \int_0^t (t-s)^{-\gamma} e^{-b(t-s)} \|F(T_\varepsilon(s, u_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} ds \\
&\quad + e^{bt} M \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} e^{-b(t-s)} C \|T_\varepsilon(s, u_\varepsilon) - T_0(s, u_\varepsilon)\|_{H^1_\varepsilon} ds.
\end{aligned}$$

Como $\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq R$ e f é limitada, podemos majorar os dois primeiros termos do lado direito da desigualdade acima por $\overline{M}\theta(\varepsilon)t^{-\gamma}$.

Tomando a função $e^{bt}\|T_\varepsilon(t,u_\varepsilon) - T_0(t,u_\varepsilon)\|$ e usando a Desigualdade de Gronwall, obtemos $\tau > 0$ e $\tilde{M} = \tilde{M}(\tau, R)$ tais que

$$e^{bt}\|T_\varepsilon(t,u_\varepsilon) - T_0(t,u_\varepsilon)\|_{H^1_\varepsilon} \leq \tilde{M}\theta(\varepsilon)t^{-\gamma}, \quad t \in (0,\tau].$$

Como e^{bt} é limitado para $t \in (0,\tau]$, temos

$$\|T_\varepsilon(t,u_\varepsilon) - T_0(t,u_\varepsilon)\|_{H^1_\varepsilon} \leq \tilde{\tilde{M}}\theta(\varepsilon)t^{-\gamma}, \quad t \in (0,\tau].$$

■

Proposição 3.3. *Suponha que a família $\{\Omega_\varepsilon;\ 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ seja admissível. Então temos a semicontinuidade superior dos atratores em $\varepsilon = 0$ em H^1_ε, no sentido que*

$$\sup_{u_\varepsilon \in \mathcal{A}_\varepsilon}\left[\inf_{u_0 \in \mathcal{A}_0}\{\|u_\varepsilon - u_0\|_{H^1_\varepsilon}\}\right] \longrightarrow 0 \text{ quando } \varepsilon \to 0. \tag{3.2}$$

Demonstração:

Devemos mostrar que

$$\sup_{u_\varepsilon \in \mathcal{A}_\varepsilon}\inf_{v \in \mathcal{A}_0}\|u_\varepsilon - v\|_{H^1_\varepsilon} \overset{\varepsilon \to 0}{\to} 0.$$

Para tanto, é suficiente mostrarmos que, dado $\delta > 0$, existe $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(\delta)$ tal que

$$\inf_{v \in \mathcal{A}_0}\|u_\varepsilon - v\|_{H^1_\varepsilon} < \delta,$$

qualquer que seja $u_\varepsilon \in \mathcal{A}_\varepsilon$, com $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$. Agora, pela definição de ínfimo, basta garantirmos que, dado $\bar{\delta} > 0$, existe $u_0 \in \mathcal{A}_0$ satisfazendo

$$\|u_\varepsilon - v_0\|_{H^1_\varepsilon} < \delta + \bar{\delta}, \quad \forall u^\varepsilon \in \mathcal{A}_\varepsilon.$$

De fato, o atrator limite $\mathcal{A}_0$ atrai o conjunto $B = \displaystyle\bigcup_{\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]} \mathcal{A}_\varepsilon$ sob $T_0(t)$, na topologia de $H^1(\Omega_0)$, já que B é limitado em $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Deste modo, qualquer que seja $\eta > 0$ dado, existe $\tau > 0$ tal que

$$d(T_0(t,u_\varepsilon), \mathcal{A}_0) < \eta, \quad \forall u_\varepsilon \in B, \text{ sempre que } t \geq \tau,$$

ou seja, dado $\bar{\eta} > 0$, existe $u_0 \in \mathcal{A}_0$ tal que

$$\|T_0(\tau, u_\varepsilon) - u_0\|_{H^1_\varepsilon} < \eta + \bar{\eta}, \quad \forall u_\varepsilon \in B.$$

Seja

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon : \mathbb{R} &\to H^1(\Omega_\varepsilon) \\ t &\mapsto \varphi_\varepsilon(t, u_\varepsilon) \end{aligned}$$

uma órbita completa limitada por u_ε e definamos $v_\varepsilon = \varphi_\varepsilon(-\tau, u_\varepsilon) \in \mathcal{A}_\varepsilon$.

Assim, temos $u_\varepsilon = T_\varepsilon(\tau, v_\varepsilon)$ e, da Proposição (3.2), segue que

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - u_0\|_{H^1_\varepsilon} &= \|T_\varepsilon(\tau, v_\varepsilon) - u_0\|_{H^1_\varepsilon} \\ &\leq \|T_\varepsilon(\tau, v_\varepsilon) - T_0(\tau, v_\varepsilon)\|_{H^1_\varepsilon} + \|T_0(\tau, v_\varepsilon) - u_0\|_{H^1_\varepsilon} \\ &\leq Mc(\varepsilon)\tau^{-\gamma} + \eta + \bar{\eta} \leq \delta + \bar{\delta}, \end{aligned}$$

para $\varepsilon, \eta, \bar{\eta}$ suficientemente pequenos.

■

Proposição 3.4. *Se a família $\{\Omega_\varepsilon : 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ é admissível e $\mathcal{E}_\varepsilon$ denota o conjunto das soluções de equilíbrio do problema (1) para $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, então*

$$\sup_{u_\varepsilon \in \mathcal{E}_\varepsilon} \left[\inf_{u_0 \in \mathcal{E}_0} \{\|u_\varepsilon - u_0\|_{H^1_\varepsilon}\} \right] \longrightarrow 0 \text{ quando } \varepsilon \to 0. \tag{3.3}$$

Demonstração:

Para mostrar a semicontinuidade superior das soluções de equilíbrio, provaremos que, para uma sequência $\varepsilon_k \to 0$ e para $u_{\varepsilon_k} \in \mathcal{E}_{\varepsilon_k}$, podemos extrair uma subsequência, que denotamos também por u_{ε_k}, e obtermos $u_0 \in \mathcal{E}_0$ tais que $\|u_{\varepsilon_k} - u_0\|_{H^1_{\varepsilon_k}} \to 0$ quando $k \to \infty$. Pela semicontinuidade superior dos atratores dada por (3.2), obtemos a existência de $u_0 \in \mathcal{A}_0$ tal que $\|u_{\varepsilon_k} - u_0\|_{H^1_{\varepsilon_k}} \to 0$ quando $\varepsilon_k \to 0$. Para mostrar que $u_0 \in \mathcal{E}_0$, observe primeiro que, pela unicidade do limite para todo $t > 0$, temos

$$\|u_{\varepsilon_k} - T_0(t, u_0)\|_{H^1_{\varepsilon_k}} \to \|u_0 - T_0(t, u_0)\|_{H^1(\Omega_0)}.$$

Além disso, para $\tau > 0$ fixo e $t \in (0, \tau)$, temos

$$\|u_{\varepsilon_k} - T_0(t, u_0)\|_{H^1_{\varepsilon_k}} = \|T_{\varepsilon_k}(t, u_{\varepsilon_k}) - T_0(t, u_0)\|_{H^1_{\varepsilon_k}} \longrightarrow 0, \quad \text{quando } \varepsilon_k \to 0,$$

onde estamos usando que u_{ε_k} é equilíbrio e (3.1). Em particular, temos que, para $t > 0$, $u_0 = T_0(t, u_0)$, o que implica que u_0 é um equilíbrio, concluindo a prova da proposição.

■

3.2 Continuidade dos conjuntos de equilíbrio, variedades instáveis e atratores

Para obtermos a semicontinuidade inferior dos atratores em H^1_ε, devemos verificar a semicontinuidade inferior dos conjuntos de equilíbrio $\mathcal{E}_\varepsilon$. Nesta seção provaremos, para a classe de domínios perturbados considerados e assumindo que os equilíbrios do problema limite são todos hiperbólicos, que $\mathcal{E}_\varepsilon$ são conjuntos finitos com cardinalidade constante; isto é, $\mathcal{E}_\varepsilon = \{u_1^\varepsilon, ..., u_m^\varepsilon\}$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Provaremos também que este conjunto comporta-se continuamente com respeito a ε em H^1_ε, ou seja,

$$\max_{1\leq k\leq m} \{\|u_k^\varepsilon - u_k^0\|_{H^1_\varepsilon}\} \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Provaremos posteriormente, nesta seção, que as variedades locais das soluções de equilíbrio são contínuas quando $\varepsilon \to 0$. Para isto, usaremos a convergência dos equilíbrios para obter a continuidade do espectro da linearização em uma vizinhança do equilíbrio e consequentemente a continuidade das variedades instáveis.

3.2.1 Continuidade dos conjuntos de equilíbrio

Considere a família de problemas elípticos:

$$(P)_\varepsilon \begin{cases} \Delta u + f(x,u) = 0, & \text{em } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \text{em } \partial\Omega_\varepsilon \end{cases}$$

para cada $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ $(\varepsilon_0 > 0)$.

Observemos por um instante um lema técnico, antes do nosso resultado principal.

Lema 3.5. *Existe uma constante C tal que para todo $z_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$, e todo $\delta > 0$ e v_ε, w_ε tais que, para $\|v_\varepsilon - z_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} < \delta$ e $\|w_\varepsilon - z_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} < \delta$, temos*

$$\|F(v_\varepsilon) - F(w_\varepsilon) - F'(z_\varepsilon)(v_\varepsilon - w_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C\left(\frac{1}{\sqrt{\tau_\varepsilon}} + \delta^{\frac{2}{N}}\right)\|v_\varepsilon - w_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)},$$

onde τ_ε é dado por (2.2).

Demonstração: Observe que, para $x \in \mathbb{R}^N$ fixo, temos, pelo Teorema do Valor Médio, que existe $c_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ tal que

$$F(v_\varepsilon(x)) - F(w_\varepsilon(x)) = F'(c_\varepsilon(x))(v_\varepsilon(x) - w_\varepsilon(x))$$

onde $c_\varepsilon(x) = \theta v_\varepsilon(x) + (1-\theta)w_\varepsilon(x)$ para algum $\theta \in [0,1]$ e, ainda mais, note que existe $\tilde{c}_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ tal que

$$F'(c_\varepsilon(x))(v_\varepsilon(x)-w_\varepsilon(x)) - F'(z_\varepsilon)(v_\varepsilon(x)-w_\varepsilon(x)) = F''(\tilde{c}_\varepsilon(x))(c_\varepsilon(x)-z_\varepsilon(x))(v_\varepsilon(x)-w_\varepsilon(x))$$

e $F''(\tilde{c}_\varepsilon(x))$ é limitado, portanto

$$|F'(c_\varepsilon(x))(v_\varepsilon(x)-w_\varepsilon(x))-F'(z_\varepsilon)(v_\varepsilon(x)-w_\varepsilon(x))| \leq K|(c_\varepsilon(x)-z_\varepsilon(x))||(v_\varepsilon(x)-w_\varepsilon(x))|$$

$$= K|\theta v_\varepsilon(x) + (1-\theta)w_\varepsilon(x) + \theta z_\varepsilon(x) - \theta z_\varepsilon(x) - z_\varepsilon(x)||v_\varepsilon(x) - w_\varepsilon(x)|$$

$$= K|\theta(v_\varepsilon(x) - z_\varepsilon(x)) + (1-\theta)(w_\varepsilon(x) - z_\varepsilon(x))||v_\varepsilon(x) - w_\varepsilon(x)|$$

$$\leq K\left[|\theta||(v_\varepsilon(x) - z_\varepsilon(x))| + |(1-\theta)||(w_\varepsilon(x) - z_\varepsilon(x))|\right]|v_\varepsilon(x) - w_\varepsilon(x)|$$

$$\leq K\gamma_{\varepsilon,\delta}(x)|v_\varepsilon(x) - w_\varepsilon(x)|,$$

onde $\gamma_{\varepsilon,\delta}(x) = \min\{1, |(v_\varepsilon(x) - z_\varepsilon(x))| + |(w_\varepsilon(x) - z_\varepsilon(x))|\}$.

Pela definição de $\gamma_{\varepsilon,\delta}(x)$, temos que $\|\gamma_{\varepsilon,\delta}\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \leq 1$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Além disso,

$$\|\gamma_{\varepsilon,\delta}\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \left(\|(v_\varepsilon - z_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|(w_\varepsilon - z_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}\right)^2 \leq (2\delta)^2$$

portanto $\|\gamma_{\varepsilon,\delta}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq 2\delta$, para todo $v_\varepsilon, w_\varepsilon \in B_\delta(z_\varepsilon)$. Usando a Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\|\gamma_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^p(\Omega_\varepsilon)} = \int_{\Omega_\varepsilon} |\gamma_{\varepsilon,\delta}|^p = \int_{\Omega_\varepsilon} |\gamma_{\varepsilon,\delta}|^2 |\gamma_{\varepsilon,\delta}|^{p-2} \leq \|\gamma^2_{\varepsilon,\delta}\|_{L^1(\Omega_\varepsilon)} \cdot \|\gamma^{p-2}_{\varepsilon,\delta}\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)}$$

$$\leq \|\gamma_{\varepsilon,\delta}\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \cdot \|\gamma_{\varepsilon,\delta}\|^{p-2}_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \leq (2\delta)^2 \cdot 1^{p-2} = (2\delta)^2$$

logo $\|\gamma_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} \leq (2\delta)^{\frac{2}{p}} \leq 2(\delta)^{\frac{2}{p}}$, $2 \leq p < \infty$, para todo $v_\varepsilon, w_\varepsilon \in B_\delta(z_\varepsilon)$.

Agora, se $\varphi_\varepsilon = v_\varepsilon - w_\varepsilon$ denotemos $\tilde{\varphi}_\varepsilon = E_\varepsilon({\varphi_\varepsilon}_{|_{K_\varepsilon}})_{|\Omega_\varepsilon}$. Então

$$\|\tilde{\varphi}_\varepsilon - \varphi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = \|\tilde{\varphi}_\varepsilon - \varphi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon\backslash K_\varepsilon)} \leq \frac{1}{\sqrt{\tau_\varepsilon}}\|\nabla\tilde{\varphi}_\varepsilon - \nabla\varphi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon\backslash K_\varepsilon)}$$

$$\leq C\frac{1}{\sqrt{\tau_\varepsilon}}(\|\varphi_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} + \|\tilde{\varphi}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}) \leq C\frac{1}{\sqrt{\tau_\varepsilon}}(\|\varphi_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} + \|\varphi_\varepsilon\|_{H^1(K_\varepsilon)})$$

$$\leq C\tfrac{2}{\sqrt{\tau_\varepsilon}}\|\varphi_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)},$$

onde estamos usando que $E_\varepsilon : H^1(K_\varepsilon) \to H^1(\mathbb{R}^N)$ é limitado e τ_ε é o primeiro autovalor de $-\Delta$ em $\Omega_\varepsilon \setminus K_\varepsilon$ com condição de Dirichlet em ∂K_ε e Neumann em $\partial\Omega_\varepsilon$. Observemos que

$$\|\gamma_{\varepsilon,\delta}(\varphi_\varepsilon - \tilde{\varphi}_\varepsilon)\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = \int_{L^2(\Omega_\varepsilon)} |\gamma_{\varepsilon,\delta}|^2 |\varphi_\varepsilon - \tilde{\varphi}_\varepsilon|^2 \leq \|\gamma^2_{\varepsilon,\delta}\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \cdot \|(\varphi_\varepsilon - \tilde{\varphi}_\varepsilon)^2\|_{L^1(\Omega_\varepsilon)}$$

$$\leq \|\gamma_{\varepsilon,\delta}\|^2_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \int_{\Omega_\varepsilon} |\varphi_\varepsilon - \tilde{\varphi}_\varepsilon|^2.$$

Agora, usando a observação acima, temos que

$$\|\gamma_{\varepsilon,\delta}\varphi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \|\gamma_{\varepsilon,\delta}(\varphi_\varepsilon - \tilde{\varphi}_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|\gamma_{\varepsilon,\delta}\tilde{\varphi}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$$

$$\leq \|\gamma_{\varepsilon,\delta}\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \|(\varphi_\varepsilon - \tilde{\varphi}_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|\gamma_{\varepsilon,\delta}\|_{L^N(\Omega_\varepsilon)} \|\tilde{\varphi}_\varepsilon\|_{L^{\frac{2N}{(N-2)}}(\mathbb{R}^N)}$$

$$\leq \left(C\frac{2}{\sqrt{\tau_\varepsilon}} + C\delta^{\frac{2}{N}} \right) \|\varphi_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}.$$

Isto prova o lema. ■

Proposição 3.6. *Assuma que a família de domínios* $\{\Omega_\varepsilon : \ 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ *seja admissível. Assuma também que o problema* $(P)_0$ *tenha uma solução* u^0 *e que o zero não esteja no espectro do operador* $\Delta + \frac{\partial f}{\partial u}(\cdot, u^0(\cdot))I : H^2_{\mathcal{N}}(\Omega_0) \subset L^2(\Omega_0) \to L^2(\Omega_0)$. *Considere o operador extensão* $E : H^1(\Omega_0) \to H^1(\mathbb{R}^N)$ *e seja* $u^{0,\varepsilon} = E(u^0)_{|\Omega_\varepsilon} \in H^1(\Omega_\varepsilon)$. *Então, existe* $\varepsilon_0 > 0$ *e* $\delta > 0$ *tal que o problema* $(P)_\varepsilon$ *tem exatamente uma solução,* u^ε, *em* $\{w_\varepsilon, \ \|w_\varepsilon - u^{0,\varepsilon}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \delta\}$ *para* $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$. *Além disso,*

$$\|u^\varepsilon - u^0\|_{H^1_\varepsilon} \to 0 \ \textit{quando} \ \varepsilon \to 0.$$

Demonstração: Defina os operadores

$$\Theta_\varepsilon : H^1(\Omega_\varepsilon) \to H^1(\Omega_\varepsilon),$$

$$\Theta_\varepsilon(z_\varepsilon) = (-\Delta + F'(u^{0,\varepsilon})I)^{-1}(F(z_\varepsilon) + F'(u^{0,\varepsilon})z_\varepsilon)$$

(F e F' como na Observação 3.1). Os operadores Θ_ε estão bem definidos, pela Proposição 2.7 e $\varepsilon_0 > 0$ pequeno, desde que $F'(u^{0,\varepsilon}) \to F'(u^0)$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$ e $0 \notin \sigma(\Delta + F'(u^0)I)$. Note também que v_ε é um ponto fixo de Θ_ε se, e somente se, v_ε é uma solução de $(P)_\varepsilon$.

De fato, se v_ε é ponto fixo, observe que temos

$$v_\varepsilon = \Theta_\varepsilon(v_\varepsilon) = (-\Delta + F'(u^{0,\varepsilon})I)^{-1}(F(v_\varepsilon) + F'(u^{0,\varepsilon})v_\varepsilon),$$

logo $F(v_\varepsilon) = -\Delta v_\varepsilon$. A recíproca é óbvia.

Mostraremos que existem $\delta > 0$ e $\varepsilon_0 > 0$ tais que o operador Θ_ε, para $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, é uma contração do conjunto $B_\delta(u^{0,\varepsilon}) = \{v_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon) : \|v_\varepsilon - u^{0,\varepsilon}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \delta\}$ nele mesmo, e usaremos o Teorema do Ponto Fixo de Banach para mostrar que Θ_ε tem um único ponto fixo em $B_\delta(u^{0,\varepsilon})$.

Começaremos mostrando que $\Theta_\varepsilon : B_\delta(u^{0,\varepsilon}) \to H^1(\Omega_\varepsilon)$ é uma contração, ou seja, que existe $\rho < 1$ tal que $\|\Theta_\varepsilon v_\varepsilon - \Theta_\varepsilon w_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \rho \|v_\varepsilon - w_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$ para $v_\varepsilon, w_\varepsilon \in B_\delta(u^{0,\varepsilon})$. Temos,

$$\|\Theta_\varepsilon v_\varepsilon - \Theta_\varepsilon w_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = \|(-\Delta + F'(u^{0,\varepsilon})I)^{-1}(F(v_\varepsilon) - F(w_\varepsilon) + F'(u^{0,\varepsilon})(v_\varepsilon - w_\varepsilon))\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$$

$$\leq \|(-\Delta + F'(u^{0,\varepsilon})I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega_\varepsilon), H^1(\Omega_\varepsilon))} \|F(v_\varepsilon) - F(w_\varepsilon) + F'(u^{0,\varepsilon})(v_\varepsilon - w_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$$

$$\leq C\|F(v_\varepsilon) - F(w_\varepsilon) + F'(u^{0,\varepsilon})(v_\varepsilon - w_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)},$$

onde usamos o Lema 2.6 para obter que $\|(-\Delta + F'(u^{0,\varepsilon})I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega_\varepsilon), H^1(\Omega_\varepsilon))} \leq C$, para alguma constante C independente de ε.

Portanto, usando o Lema 3.5, temos

$$\|\Theta_\varepsilon v_\varepsilon - \Theta_\varepsilon w_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C\left(\frac{1}{\sqrt{\tau_\varepsilon}} + \delta^{\frac{2}{N}}\right)\|v_\varepsilon - w_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}.$$

E para $\rho < 1$ dado, escolha ε pequeno o suficiente tal que $C\frac{1}{\sqrt{\tau_\varepsilon}} \leq \frac{\rho}{2}$ e δ pequeno o suficiente tal que $C\delta^{\frac{2}{N}} < \frac{\rho}{2}$. Isto mostra que Θ_ε é uma contração de $B_\delta(u^{0,\varepsilon})$ em $H^1(\Omega_\varepsilon)$.

Agora para provarmos que Θ_ε leva o conjunto $B_\delta(u^{0,\varepsilon})$ nele mesmo, provaremos primeiro que $\|\Theta_\varepsilon u^{0,\varepsilon} - u^{0,\varepsilon}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \to 0$. Note que

$$\|\Theta_\varepsilon u^{0,\varepsilon} - u^{0,\varepsilon}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \|\Theta_\varepsilon u^{0,\varepsilon} - u^0\|_{H^1_\varepsilon} + \|u^{0,\varepsilon} - u^0\|_{H^1_\varepsilon} = \|\Theta_\varepsilon u^{0,\varepsilon} - u^0\|_{H^1_\varepsilon} + \|u^{0,\varepsilon}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0)}$$

Mas $\|u^{0,\varepsilon}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_0)} \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$. Portanto, resta mostrar que $\|\Theta_\varepsilon u^{0,\varepsilon} - u^0\|_{H^1_\varepsilon} \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$. Para tanto, denotemos $v_\varepsilon = \Theta_\varepsilon u^{0,\varepsilon}$, então $v_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ é solução de

$$\begin{cases} -\Delta v_\varepsilon + F'(u^{0,\varepsilon})v_\varepsilon = F(u^{0,\varepsilon}) + F'(u^{0,\varepsilon})u^{0,\varepsilon}, & \text{em } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial n} = 0, & \text{em } \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases}$$

pelo fato de $(-\Delta + F'(u^{0,\varepsilon}))\Theta_\varepsilon u^{0,\varepsilon} = F(u^{0,\varepsilon}) + F'(u^{0,\varepsilon})u^{0,\varepsilon}$, e u^0 é solução de

$$\begin{cases} -\Delta u^0 + F'(u^0)u^0 = F(u^0) + F'(u^0)u^0, & \text{em } \Omega_0, \\ \frac{\partial u^0}{\partial n} = 0, & \text{em } \partial\Omega_0. \end{cases}$$

Como F é continuamente diferenciável, temos que $F(u^{0,\varepsilon}) + F'(u^{0,\varepsilon})u^{0,\varepsilon} \to F(u^0) + F'(u^0)u^0$ quando $\varepsilon \to 0$, pois $u^{0,\varepsilon} \to u^0$ na mesma condição. Logo,

$$\begin{aligned} &\|v_\varepsilon - u^0\|_{H^1_\varepsilon} \\ &= \|(-\Delta + F'(u^{0,\varepsilon}))^{-1}(-\Delta + F'(u^{0,\varepsilon}))v_\varepsilon - (-\Delta + F'(u^0))^{-1}(-\Delta + F'(u^0))u^0\| \\ &= \|(-\Delta + F'(u^{0,\varepsilon}))^{-1}(F(u^{0,\varepsilon}) + F'(u^{0,\varepsilon})u^{0,\varepsilon}) - (-\Delta + F'(u^0))^{-1}(F(u^0) + F'(u^0)u^0)\| \to 0 \end{aligned}$$

quando $\varepsilon \to 0$, onde usamos a convergência do resolvente estimada na Proposição 2.6.

Portanto, $\|\Theta_\varepsilon u^{0,\varepsilon} - u^{0,\varepsilon}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$.

Para mostrar que Θ_ε leva o conjunto $B_\delta(u^{0,\varepsilon})$ nele mesmo observemos que se $v_\varepsilon \in B_\delta(u^{0,\varepsilon})$, então

$$\|\Theta_\varepsilon v_\varepsilon - u^{0,\varepsilon}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \|\Theta_\varepsilon v_\varepsilon - \Theta_\varepsilon u^{0,\varepsilon}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} + \|\Theta_\varepsilon u^{0,\varepsilon} - u^{0,\varepsilon}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$$

$$\leq \rho\delta + \|\Theta_\varepsilon u^{0,\varepsilon} - u^{0,\varepsilon}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}.$$

Escolhendo novamente ε pequeno o suficiente, podemos garantir que $\|\Theta_\varepsilon u^{0,\varepsilon} - u^{0,\varepsilon}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} < (1-\rho)\delta$ e portanto $\|\Theta_\varepsilon v_\varepsilon - u^{0,\varepsilon}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} < \delta$, assim como desejávamos mostrar.

Portanto, de acordo com o Teorema do Ponto Fixo de Banach, Θ_ε tem um único ponto fixo em $B_\delta(u^{0,\varepsilon})$ e tal ponto é solução de $(P)_\varepsilon$.

Tome ε_0 pequeno o suficiente para que valha as afirmações provadas, e assim valem para todo $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Seja $\mu > 0$, tome ρ e depois δ pequenos o suficiente tais que $\rho\delta < \frac{\mu}{2}$, e lembre-se que $\|\Theta_\varepsilon u^{0,\varepsilon} - u^0\| \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$. Assim,

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon - u^0\|_{H^1_\varepsilon} &\leq \|u_\varepsilon - \Theta_\varepsilon u^{0,\varepsilon}\|_{H^1_\varepsilon} + \|\Theta_\varepsilon u^{0.\varepsilon} - u^0\|_{H^1_\varepsilon} \\ &\leq \|\Theta_\varepsilon u_\varepsilon - \Theta_\varepsilon u^{0,\varepsilon}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} - \|\Theta_\varepsilon u^{0,\varepsilon} + u^0\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \\ &\leq \rho\|u_\varepsilon - u^{0,\varepsilon}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} - \frac{\mu}{2} < \rho\delta + \frac{\mu}{2} < \mu. \end{aligned}$$

Portanto, $\|u^\varepsilon - u^0\|_{H^1_\varepsilon} \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$, finalizando a prova do resultado.

■

Corolário 3.7. *Assuma que as condições da Proposição 3.6 estejam satisfeitas. Assuma também que o problema $(P)_0$ tenha exatamente m soluções $u_1^0, ..., u_m^0$ e que todas sejam* *hiperbólicas no sentido de que o zero não está no espectro de* $\Delta + F'(u_k^0)I : H_n^2(\Omega_0) \subset L^2(\Omega_0) \to L^2(\Omega_0)$ *para* $k = 1, ..., m$. *Então existe um* $\varepsilon_0 > 0$ *pequeno tal que, para todo* $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$, *o problema* $(P)_\varepsilon$ *tem exatamente* m *soluções* $u_1^\varepsilon, ..., u_m^\varepsilon$. *Além disso,*

$$\|u_k^\varepsilon - u_k^0\|_{H_\varepsilon^1} \to 0 \quad \textit{quando} \quad \varepsilon \to 0.$$

Demonstração: Pela Proposição 3.2 temos que uma solução u^ε de $(P)_\varepsilon$ está em uma vizinhança de conjunto de equilíbrio de $(P)_0$ para ε pequeno suficiente. Mas pela Proposição 3.6, em uma vizinhança de u_k^0 há somente uma solução de $(P)_{\varepsilon_k}$ que converge para u_k^0 em $H_{\varepsilon_k}^1$ para $k = 1, ..., m$. Isto conclui o resultado. ■

3.2.2 Continuidade das variedades instáveis

Nesta seção mostraremos que as variedades instáveis de u_k^ε, para $k = 1, ..., m$ fixo, são contínuas em $H_{\varepsilon_k}^1$ quando $\varepsilon \to 0$. A existência de tais variedade segue de [11].

Proposição 3.8. *Assuma que a família de domínios* $\{\Omega_\varepsilon : \ 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0\}$ *seja admissível. Assuma também que* u^0 *seja uma solução de* $(P)_0$ *e que o zero não esteja no espectro do operador* $\Delta + \frac{\partial f}{\partial u}(\cdot, u^0(\cdot))I : H_{\mathcal{N}}^2(\Omega_0) \subset L^2(\Omega_0) \to L^2(\Omega_0)$. *Pela Proposição 2.5,* $(P)_\varepsilon$ *tem uma única solução,* u^ε, *próxima a* u^0. *Então existem* δ, $\varepsilon_0 > 0$ *tais que* u^ε *tem uma variedade instável local* $W_{loc}^u(u^\varepsilon) \subset H^1(\Omega_\varepsilon)$ *para* $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$, *e se denotarmos*

$$W_\delta^u(u^\varepsilon) = \{w \in W_{loc}^u(u^\varepsilon), \ \|w - u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} < \delta\}, \quad 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0,$$

então $W_\delta^u(u^\varepsilon)$ *converge em* H_ε^1 *para* $W_\delta^u(u^0)$ *quando* $\varepsilon \to 0$, *no sentido que*

$$\sup_{w_\varepsilon \in W_\delta^u(u^\varepsilon)} \inf_{w_0 \in W_\delta^u(u^0)} \|w_\varepsilon - w_0\|_{H_\varepsilon^1} + \sup_{w_0 \in W_\delta^u(u^0)} \inf_{w_\varepsilon \in W_\delta^u(u^\varepsilon)} \|w_\varepsilon - w_0\|_{H_\varepsilon^1} \to 0$$

quando $\varepsilon \to 0$.

Demonstração: Note que pela Proposição 3.6, temos $\|u^\varepsilon - u^0\|_{H_\varepsilon^1} \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$. Portanto, $F'(u^\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} F'(u^0)$, e segue da Proposição 2.3, que o espectro de $-\Delta + F'(u_\varepsilon)$ comporta-se continuamente quando $\varepsilon \to 0$.

Para $w = u - u^\varepsilon$, temos

$w_t = u_t = \Delta u + F(u) - (\Delta u^\varepsilon + F(u^\varepsilon)) + F'(u^\varepsilon)w - F'(u^\varepsilon)w,$

de modo que podemos reescrever a equação (1) da seguinte forma:

$$\begin{cases} w_t = \Delta w + F'(u^\varepsilon)w + F(w+u^\varepsilon) - F(u^\varepsilon) - F'(u^\varepsilon)w, & \text{em } \Omega_\varepsilon \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0 & \text{em } \partial\Omega_\varepsilon. \end{cases} \tag{3.4}$$

Denotemos por $\{\lambda_i^\varepsilon\}_{i=1}^\infty$ os autovalores de $(\Delta + F'(u^\varepsilon)I)$ e por $\{\phi_i^\varepsilon\}_{i=1}^\infty$ o sistema ortonormal de autofunções correspondente. Se $\lambda_1^0, ..., \lambda_n^0$ são positivos e $\lambda_{n+1}^0, \lambda_{n+2}^0, ...$ os autovalores negativos, sejam $\beta > 0$ e $\varepsilon_0 > 0$ tais que $\lambda_1^\varepsilon \geq \cdots \geq \lambda_n^\varepsilon \geq \beta > 0 > -\beta \geq \lambda_{n+1}^\varepsilon \geq \lambda_{n+2}^\varepsilon ...$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Denote $W_\varepsilon = [\phi_1^\varepsilon, ..., \phi_n^\varepsilon]$ e $W_\varepsilon^\perp = \{\psi \in H^1(\Omega_\varepsilon) : \int_{\Omega_\varepsilon} \psi\phi = 0,\ \forall \phi \in W_\varepsilon\}$. Seja $P^\varepsilon : H^1(\Omega_\varepsilon) \to H^1(\Omega_\varepsilon)$ a projeção ortonormal em W_ε

$$P^\varepsilon \psi = \sum_{i=1}^n \left(\int_{\Omega_\varepsilon} \psi \phi_i^\varepsilon \right) \phi_i^\varepsilon.$$

Portanto

$$\|\psi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = \left(\sum_{i=1}^n (\lambda_i^\varepsilon + 1) \left(\int_{\Omega_\varepsilon} \psi\phi_i^\varepsilon \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Como $\lambda_i^\varepsilon \to \lambda_i^0$, $1 \leq i < \infty$, temos que W_ε é isomorfo ao $\mathbb{R}^n$, pela aplicação

$$W_\varepsilon \ni \psi \stackrel{T_\varepsilon}{\longmapsto} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} \psi\phi_1^\varepsilon, ..., \int_{\Omega_\varepsilon} \psi\phi_n^\varepsilon \right) \in \mathbb{R}^n.$$

T_ε é limitado com inversa limitada T_ε^{-1} e as normas de T_ε e T_ε^{-1} são uniformemente limitadas, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, pois $\|T_\varepsilon \psi\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|\psi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$.

Agora vamos decompor a equação em (3.4) da seguinte maneira. Se w é solução de (3.4) escrevemos

$$w = \sum_{i=1}^n v_i \phi_i^\varepsilon + z,$$

onde $v_i = \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} w\phi_i^\varepsilon$.

$$\begin{aligned}
v_i' &= \frac{d}{dt}\int_{\Omega_\varepsilon} w\phi_i^\varepsilon = \int_{\Omega_\varepsilon} w_t\phi_i^\varepsilon + \int_{\Omega_\varepsilon} w\frac{d}{dt}\phi_i^\varepsilon \\
&= \int_{\Omega_\varepsilon} (\Delta w + F'(u^\varepsilon)w + F(w+u^\varepsilon) - F(u^\varepsilon) - F'(u^\varepsilon)w)\phi_i^\varepsilon \\
&= \langle (\Delta + F'(u^\varepsilon))w, \phi_i^\varepsilon \rangle + \int_{\Omega_\varepsilon} (F(w+u^\varepsilon) - F(u^\varepsilon) - F'(u^\varepsilon)w)\phi_i^\varepsilon \\
&= \lambda_i^\varepsilon v_i + \int_{\Omega_\varepsilon} (F(w+u^\varepsilon) - F(u^\varepsilon) - F'(u^\varepsilon)w)\phi_i^\varepsilon.
\end{aligned}$$

Observe que

$$
\begin{aligned}
z_t &= w_t - \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \phi_i^\varepsilon\right) \\
&= \Delta w + F'(u^\varepsilon)w + F(w+u^\varepsilon) - F(u^\varepsilon) - F'(u^\varepsilon)w \\
&\quad - \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i^\varepsilon v_i + \int_{\Omega_\varepsilon}(F(w+u^\varepsilon) - F(u^\varepsilon) - F'(u^\varepsilon)w)\right)\phi_i^\varepsilon\right] \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^\varepsilon vi\right)\phi_i^\varepsilon + \Delta z + F'(u^\varepsilon)z + F(w+u^\varepsilon) - F(u^\varepsilon) - F'(u^\varepsilon)w \\
&\quad - \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i^\varepsilon v_i + \int_{\Omega_\varepsilon}(F(w+u^\varepsilon) - F(u^\varepsilon) - F'(u^\varepsilon)w)\right)\phi_i^\varepsilon\right].
\end{aligned}
$$

Logo, temos

$$
\begin{cases}
z_t = \Delta z + F'(u^\varepsilon)z + F(w+u^\varepsilon) - F(u^\varepsilon) - F'(u^\varepsilon)w \\
\qquad - \sum_{i=1}^{n}(\int_{\Omega_\varepsilon}(F(w+u^\varepsilon) - F(u^\varepsilon) - F'(u^\varepsilon)w)\phi_i^\varepsilon)\phi_i^\varepsilon, \\
\frac{\partial z}{\partial n} = 0.
\end{cases}
$$

Escrevemos $v = (v_1, ..., v_n)^T$ e $H_\varepsilon(v,z) = (H_1^\varepsilon(v,z), ..., H_n^\varepsilon(v,z))$ onde

$$
H_j^\varepsilon(v,z) = \int_{\Omega_\varepsilon}\left[F\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\phi_i^\varepsilon + z + u^\varepsilon\right) - F(u^\varepsilon) - F'(u^\varepsilon)\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\phi_i^\varepsilon + z\right)\right]\phi_j^\varepsilon,
$$

e

$$
G_\varepsilon(v,z) = F\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\phi_i^\varepsilon + z + u^\varepsilon\right) - F(u^\varepsilon) - F'(u^\varepsilon)\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\phi_i^\varepsilon + z\right) - \sum_{i=1}^{n} H_i^\varepsilon(v,z)\phi_i^\varepsilon.
$$

Assim, temos $H_\varepsilon(0,0) = 0$ e $G_\varepsilon(0,0) = 0$. Dado $\rho > 0$, usando o Lema 3.5, segue que existem $\varepsilon_0 > 0$ e $\delta > 0$ tais que se $\|v\|_{\mathbb{R}^n} + \|z\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} < \delta$ e $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, então

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_\varepsilon}\left[F\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\phi_i^\varepsilon + z + u^\varepsilon\right) - F(u^\varepsilon) - F'(u^\varepsilon)\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\phi_i^\varepsilon + z\right)\right]\phi_j^\varepsilon \\
&= \left\langle F\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\phi_i^\varepsilon + z + u^\varepsilon\right) - F(u^\varepsilon) - F'(u^\varepsilon)\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\phi_i^\varepsilon + z\right), \phi_j^\varepsilon\right\rangle_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \\
&\leq \left\|F\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\phi_i^\varepsilon + z + u^\varepsilon\right) - F(u^\varepsilon) - F'(u^\varepsilon)\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\phi_i^\varepsilon + z\right)\right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \|\phi_j^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}.
\end{aligned}
$$

Portanto, como $\|\phi_j^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = 1$, temos

$\|H_\varepsilon(v,z)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \rho.$

Com o mesmo argumento podemos mostrar que

$$\begin{aligned} &\|G_\varepsilon(v,z)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} < \rho, \\ &\|H_\varepsilon(v,z) - H_\varepsilon(\tilde{v},\tilde{z})\|_{\mathbb{R}^n} < \rho(\|v-\tilde{v}\|_{\mathbb{R}^n} + \|z-\tilde{z}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}), \\ &\|G_\varepsilon(v,z) - G_\varepsilon(\tilde{v},\tilde{z})\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} < \rho(\|v-\tilde{v}\|_{\mathbb{R}^n} + \|z-\tilde{z}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}). \end{aligned} \tag{3.5}$$

O fato de podermos escolher ρ e δ uniformemente para $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ satisfazendo as desigualdades acima é a chave para obtermos que as variedades locais instáveis estão definidas em uma pequena vizinhança do ponto de equilíbrio u^ε uniformemente para $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Podemos estender H_ε, G_ε para além da $B_\delta(u^\varepsilon)$ de tal forma que as desigualdades acima ainda sejam satisfeitas para todo $v \in \mathbb{R}^n$, $z \in H^1(\Omega_\varepsilon)$.

Observação 3.9. *O procedimento para se estender uma função g definida em uma bola de raio $\dfrac{1}{n}$ de tal maneira que ela se torne globalmente Lipschitz contínua, sem alterar sua constante de Lipschitz, é o seguinte: dada uma função $g : V \times Z \to Y$, V, Z e Y espaços de Banach, definimos*

$$g_n(v,z) = \begin{cases} g(v,z), & \|v+z\| \leq \frac{1}{n} \\ g\left(\frac{v}{n\|v+z\|}, \frac{z}{n\|v+z\|}\right), & \|v+z\| > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

As constantes de Lipschitz para g_n são justamente as constantes de Lipshitz para g quando restrita a $B_{\frac{1}{n}}$, ou seja, $\|g_n(v_1,z_1) - g_n(v_2,z_2)\| \leq L_{g_n}(\|v_1 - v_2\| + \|z_1 - z_2\|)$ e L_{g_n} é a constante de Lipschitz de g na bola.

Denote $A_\varepsilon = (\Delta + F'(u^\varepsilon)I)_{|_{W_\varepsilon^\perp}}$, $B_\varepsilon = diag(\lambda_1^\varepsilon, ..., \lambda_n^\varepsilon)$. Então a equação em (3.4) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= B_\varepsilon v + H_\varepsilon(v,z), \\ \dot{z} &= A_\varepsilon z + G_\varepsilon(v,z). \end{aligned} \tag{3.6}$$

$v \in \mathbb{R}^n$, $z \in W_\varepsilon^\perp$, onde H_ε, G_ε satisfazem as desigualdades em (3.5) para todo $v \in \mathbb{R}^n$, $z \in W_\varepsilon^\perp$.

Observemos também que, para algum M positivo e para algum $\beta > 0$, independentes de ε, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, valem

$$\begin{aligned}
&\|e^{A_\varepsilon t}z\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq Me^{-\beta t}\|z\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}, \quad t \geq 0,\\
&\|e^{A_\varepsilon t}z\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq Mt^{-\frac{1}{2}}e^{-\beta t}\|z\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, \quad t > 0,\\
&\|e^{B_\varepsilon t}v\|_{\mathbb{R}^n} \leq Me^{\beta t}\|v\|_{\mathbb{R}^n}, \quad t \leq 0.
\end{aligned}$$

Agora mostraremos que para $\rho > 0$ adequado, existe uma variedade instável para u^ε

$$W_\varepsilon^u = \{(v,z) : \ z = \sigma_\varepsilon^*(v), \ v \in \mathbb{R}^n\},$$

onde $\sigma_\varepsilon^* : \mathbb{R}^n \to W_\varepsilon^\perp$ é limitada e Lipschitz contínua. Além disso,

$$\sup_{v\in\mathbb{R}^n} \|\sigma_\varepsilon^*(v) - \sigma_0^*(v)\|_{H_\varepsilon^1} \to^{\varepsilon\to 0} 0.$$

Para mostrar tal resultado, primeiro mostraremos a existência da variedade invariante. Para $D > 0$, $J > 0$, $0 < \theta < 1$, dados, seja $\rho > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
&\rho M\beta^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) \leq D,\\
&\rho M^2(1+J)\left(\tfrac{\beta}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) \leq J,\\
&\beta - \rho M(1+J) \geq \tfrac{\beta}{2},\\
&\rho M\beta^{-1} \leq 1,\\
&\rho M\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{\beta^{\frac{1}{2}}} + \frac{(1+J)}{(\beta-\rho M(1+J))^{-\frac{1}{2}}}\right] \leq \theta < 1.
\end{aligned}$$

O conjunto

$$\mathcal{X} = \{\sigma_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to W_\varepsilon^\perp; \|\sigma_\varepsilon(v) - \sigma_\varepsilon(\tilde{v})\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq J\|v-\tilde{v}\|_{\mathbb{R}^n} \text{ e } \sup_{v\in\mathbb{R}^n}\|\sigma_\varepsilon(v)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq D\} \tag{3.7}$$

é um espaço métrico completo quando munido da norma $|||\sigma_\varepsilon||| := \sup_{v\in\mathbb{R}^n}\|\sigma_\varepsilon(v)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$.

Seja $v_\varepsilon(t) = \psi(t,\tau,\eta,\sigma_\varepsilon)$ a solução de

$$\begin{aligned}
&\tfrac{dv_\varepsilon}{dt} = B_\varepsilon v_\varepsilon + H_\varepsilon(v_\varepsilon, \sigma_\varepsilon(v_\varepsilon)), \ t < \tau,\\
&v_\varepsilon(\tau) = \eta,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

e defina $\Phi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, dada por

$$\Phi(\sigma_\varepsilon)(\eta) = \int_{-\infty}^{\tau} e^{A_\varepsilon(\tau-s)}G_\varepsilon(v_\varepsilon(s), \sigma_\varepsilon(v_\varepsilon(s)))ds. \tag{3.9}$$

Queremos mostrar que Φ é uma contração em $\mathcal{X}$ e usar o Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Note que

$$\|\Phi(\sigma_\varepsilon)(\cdot)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \int_{-\infty}^{\tau} \|e^{A_\varepsilon(\tau-s)}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega_\varepsilon),H^1(\Omega_\varepsilon))}\|G_\varepsilon(v_\varepsilon(s),\sigma_\varepsilon(v_\varepsilon(s)))\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}ds,$$

portanto,

$$\|\Phi(\sigma_\varepsilon)(\cdot)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \int_{-\infty}^{\tau} \rho M(\tau-s)^{-\frac{1}{2}}e^{-\beta(\tau-s)}ds = \rho M\beta^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \leq D. \tag{3.10}$$

Agora suponha que σ_ε e $\tilde{\sigma}_\varepsilon$ sejam funções satisfazendo (3.7) para $\eta, \tilde{\eta} \in \mathbb{R}^n$, e denote $v_\varepsilon(t) = \psi(t,\tau,\eta,\sigma_\varepsilon)$, $\tilde{v}_\varepsilon(t) = \psi(t,\tau,\tilde{\eta},\tilde{\sigma}_\varepsilon)$. Então

$$v_\varepsilon(t) - \tilde{v}_\varepsilon(t) = e^{B_\varepsilon(t-\tau)}(\eta-\tilde{\eta}) + \int_\tau^t e^{B_\varepsilon(t-\tau)}[H_\varepsilon(v_\varepsilon,\sigma_\varepsilon(v_\varepsilon)) - H_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon,\tilde{\sigma}_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon))]ds.$$

Assim, usando as desigualdades (3.5) e as estimativas para $e^{B_\varepsilon t}$, temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}\|v_\varepsilon(t) - \tilde{v}_\varepsilon(t)\|_{\mathbb{R}^n} &\leq Me^{\beta(t-\tau)}\|\eta-\tilde{\eta}\|_{\mathbb{R}^n} \\ &\quad +\rho M\int_t^\tau e^{\beta(t-s)}\left(\|v_\varepsilon-\tilde{v}_\varepsilon\|_{\mathbb{R}^n} + \|\sigma_\varepsilon(v_\varepsilon)-\sigma_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon)+\sigma_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon)-\tilde{\sigma}_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}\right)ds\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\leq Me^{\beta(t-\tau)}\|\eta-\tilde{\eta}\|_{\mathbb{R}^n} \\ &\qquad +\rho M\int_t^\tau e^{\beta(t-s)}\left(\|v_\varepsilon-\tilde{v}_\varepsilon\|_{\mathbb{R}^n} + J\|v_\varepsilon-\tilde{v}_\varepsilon\|_{\mathbb{R}^n} + |||\sigma_\varepsilon-\tilde{\sigma}_\varepsilon|||\right)ds\end{aligned}$$

$$\leq Me^{\beta(t-\tau)}\|\eta-\tilde{\eta}\|_{\mathbb{R}^n}+\rho M(1+J)\int_t^\tau e^{\beta(t-s)}\|v_\varepsilon-\tilde{v}_\varepsilon\|_{\mathbb{R}^n}ds+\rho M|||\sigma_\varepsilon-\tilde{\sigma}_\varepsilon|||\int_t^\tau e^{\beta(t-s)}ds.$$

Seja $\phi(t) = e^{-\beta(t-\tau)}\|v_\varepsilon(t)-\tilde{v}_\varepsilon(t)\|_{\mathbb{R}^n}$. Então

$$\phi(t) \leq M\|\eta-\tilde{\eta}\|_{\mathbb{R}^n} + \rho M\int_t^\tau e^{\beta(\tau-s)}ds|||\sigma_\varepsilon-\tilde{\sigma}_\varepsilon||| + \rho M(1+J)\int_t^\tau \phi(s)ds.$$

Logo, pela Desigualdade de Gronwall, temos

$$\|v_\varepsilon(t)-\tilde{v}_\varepsilon(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \left[M\|\eta-\tilde{\eta}\|_{\mathbb{R}^n}e^{\beta(t-\tau)} + \rho M\int_t^\tau e^{\beta(t-s)}ds|||\sigma_\varepsilon-\tilde{\sigma}_\varepsilon|||\right]e^{-\rho M(1+J)(t-\tau)}.$$

Observe que $\tau > t$, logo $e^{\beta(t-\tau)} < 1$ e $\displaystyle\int_t^\tau e^{\beta(t-s)} = \frac{1}{\beta}(1-e^{\beta(t-\tau)})$ e ainda $(1-e^{\beta(t-\tau)}) < 1$, portanto

$$\|v_\varepsilon(t)-\tilde{v}_\varepsilon(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \left[M\|\eta-\tilde{\eta}\|_{\mathbb{R}^n} + \rho M\beta^{-1}|||\sigma_\varepsilon-\tilde{\sigma}_\varepsilon|||\right]e^{-\rho M(1+J)(t-\tau)}.$$

Deste modo,

$\|\Phi(\sigma_\varepsilon)(\eta) - \Phi(\tilde{\sigma}_\varepsilon)(\tilde{\eta})\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$

$$\leq M\int_{-\infty}^{\tau}(\tau-s)^{-\frac{1}{2}}e^{-\beta(\tau-s)}\|G_\varepsilon(v_\varepsilon,\sigma_\varepsilon(v_\varepsilon))-G_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon,\tilde{\sigma}_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon))\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}ds$$

$$\leq \rho M\int_{-\infty}^{\tau}(\tau-s)^{-\frac{1}{2}}e^{-\beta(\tau-s)}\left(\|\sigma_\varepsilon(v_\varepsilon))-\tilde{\sigma}_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon))\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}+\|v_\varepsilon-\tilde{v}_\varepsilon\|_{\mathbb{R}^n}\right)ds$$

$$\leq \rho M\int_{-\infty}^{\tau}(\tau-s)^{-\frac{1}{2}}e^{-\beta(\tau-s)}\big[(1+J)\|v_\varepsilon-\tilde{v}_\varepsilon\|_{\mathbb{R}^n}+|||\sigma_\varepsilon-\tilde{\sigma}_\varepsilon|||\big]ds.$$

Usando a estimativa para $\|v_\varepsilon-\tilde{v}_\varepsilon\|_{\mathbb{R}^n}$, obtemos

$\|\Phi(\sigma_\varepsilon)(\eta)-\Phi(\tilde{\sigma}_\varepsilon)(\tilde{\eta})\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$

$$\leq \rho M\int_{-\infty}^{\tau}(\tau-s)^{-\frac{1}{2}}e^{-\beta(\tau-s)}(1+J)\|v_e-\tilde{v}_e\|_{\mathbb{R}^n}ds$$
$$+\rho M\int_{-\infty}^{\tau}(\tau-s)^{-\frac{1}{2}}e^{-\beta(\tau-s)}|||\sigma_\varepsilon-\tilde{\sigma}_\varepsilon|||ds$$

$$\leq \rho M\int_{-\infty}^{\tau}(\tau-s)^{-\frac{1}{2}}e^{-\beta(\tau-s)}(1+J)\left(\left[M\|\eta-\tilde{\eta}\|_{\mathbb{R}^n}+\rho M\beta^{-1}|||\sigma_\varepsilon-\tilde{\sigma}_\varepsilon|||\right]e^{-\rho M(1+J)(s-\tau)}\right)$$
$$+\rho M\int_{-\infty}^{\tau}(\tau-s)^{-\frac{1}{2}}e^{-\beta(\tau-s)}ds|||\sigma_\varepsilon-\tilde{\sigma}_\varepsilon|||$$

$$\leq \rho M(1+J)\left(M\|\eta-\tilde{\eta}\|_{\mathbb{R}^n}+\rho M\beta^{-1}|||\sigma_\varepsilon-\tilde{\sigma}_\varepsilon|||\right)\int_{-\infty}^{\tau}(\tau-s)^{-\frac{1}{2}}e^{(\beta-\rho M(1+J))(s-\tau)}ds$$
$$+\rho M\int_{-\infty}^{\tau}(\tau-s)^{-\frac{1}{2}}e^{-\beta(\tau-s)}ds|||\sigma_\varepsilon-\tilde{\sigma}_\varepsilon|||$$

$$\leq \rho M(1+J)\left(M\|\eta-\tilde{\eta}\|_{\mathbb{R}^n}+\rho M\beta^{-1}|||\sigma_\varepsilon-\tilde{\sigma}_\varepsilon|||\right)(\beta-\rho M(1+J))^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$+\rho M\beta^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)|||\sigma_\varepsilon-\tilde{\sigma}_\varepsilon|||$$

$$=\rho M\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left[(1+J)(\rho M\beta^{-1})(\beta-\rho M(1+J))^{-\frac{1}{2}}+\beta^{-\frac{1}{2}}\right]|||\sigma_\varepsilon-\tilde{\sigma}_\varepsilon|||$$
$$+\rho M^2(1+J)\|\eta-\tilde{\eta}\|_{\mathbb{R}^n}(\beta-\rho M(1+J))^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right).$$

Seja

$$I_\sigma(\varepsilon)=\rho M\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{(1+J)}{(\beta-\rho M(1+J))^{\frac{1}{2}}}+\beta^{-\frac{1}{2}}\right]$$

e

$$I_\eta(\varepsilon)=\rho M^2(1+J)\left(\frac{\beta}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

Para $\theta<1$ dado, existe ρ_0 tal que se $\rho\leq\rho_0$, temos $I_\sigma(\varepsilon)\leq\theta$, $I_\sigma(\varepsilon)\leq J$ e

$$\|\Phi(\sigma_\varepsilon)(\eta) - \Phi(\tilde{\sigma_\varepsilon})(\tilde{\eta})\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq J\|\eta - \tilde{\eta}\|_{\mathbb{R}^n} + \theta|||\sigma_\varepsilon - \tilde{\sigma_\varepsilon}|||. \tag{3.11}$$

As desigualdades (3.10) e (3.11) nos garantem que Φ é uma contração de $\mathcal{X}$ em $\mathcal{X}$. Portanto, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, existe um único ponto $\sigma_\varepsilon^* = \Phi(\sigma_\varepsilon^*)$ em $\mathcal{X}$.

Resta mostrar que $W_\varepsilon^u = \{(v, \sigma_\varepsilon^*(v)) : v \in \mathbb{R}^n\}$ é uma variedade invariante de (3.6). Seja $(v_0, z_0) \in S$, ou seja $z_0 = \sigma_\varepsilon^*(v_0)$. Denote por $v_\varepsilon^*(t)$ a solução do seguinte problema de valor inicial

$$\frac{dv}{dt} = B_\varepsilon v + H_\varepsilon(v, \sigma_\varepsilon^*(v)), \quad v(0) = v_0.$$

Isto define uma curva $(v_\varepsilon^*(t), \sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon^*(t))) \in S$, $t \in \mathbb{R}$. Mas a única solução de

$$\dot{z} = A_\varepsilon z + G_\varepsilon(v_\varepsilon^*(t), \sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon^*(t))),$$

a qual permanece limitada para $t \to -\infty$ é

$$z^*(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{A_\varepsilon(t-s)} G_\varepsilon(v_\varepsilon^*(s), \sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon^*(s)))ds = \sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon^*(t)).$$

Portanto, $(v_\varepsilon^*(t), \sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon^*(s)))$ é uma solução de (3.6) passando (v_0, z_0) e a invariância está provada.

Observe que, o ponto de equilíbrio de (3.4) é 0 e a solução $(v_\varepsilon^*(t), \sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon^*(t))) \overset{t \to -\infty}{\longrightarrow} (0,0)$, como $w = u - u^\varepsilon$ a solução está no conjunto $W_\delta^u(u^\varepsilon)$.

Mostremos agora que se $(v_\varepsilon(t), z_\varepsilon(t))$, $t \in \mathbb{R}$, é uma solução global do problema (3.4) que está em $W_{loc}^u(u^\varepsilon)$, então $z_\varepsilon(t) = \sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon(t))$, para todo $t \in \mathbb{R}$, mostraremos que existem constantes $M \geq 1$ e $\zeta > 0$ tais que

$$\|z_\varepsilon(t) - \sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon(t))\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq Me^{-\zeta(t-t_0)}\|z_\varepsilon(t_0) - \sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon(t_0))\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}, \quad t_0 \leq t.$$

Quando $t_0 \to -\infty$, obtemos que $z_\varepsilon(t) = \sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon(t))$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Sejam $\xi_\varepsilon(t) = z_\varepsilon(t) - \sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon(t))$, queremos estimar $\|\xi_\varepsilon(t)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$, para isto, seja e $y_{\varepsilon,t}(r)$, $r \leq t$ a solução de

$$\begin{cases} \dot{y}_{\varepsilon,t} + B_\varepsilon y_\varepsilon = H_\varepsilon(y_{\varepsilon,t}, \sigma_\varepsilon^*(y_{\varepsilon,t})), & r \leq t \\ y_{\varepsilon,t}(t) = v_\varepsilon(t). \end{cases} \tag{3.12}$$

e veja $v_\varepsilon(t)$ como solução da equação

$$\begin{cases} \dot{v}_\varepsilon + B_\varepsilon v_\varepsilon = H_\varepsilon(v_\varepsilon, z_\varepsilon), \quad r \leq t \\ y_\varepsilon(t) = v_\varepsilon(t). \end{cases} \tag{3.13}$$

Assim,

$$\|y_{\varepsilon,t}(r) - v_\varepsilon(r)\|_{\mathbb{R}^n} = \left\| \int_t^r e^{B_\varepsilon(r-s)} \left[H_\varepsilon(y_{\varepsilon,t}(s), \sigma_\varepsilon^*(y_{\varepsilon,t}(s))) - H_\varepsilon(v_\varepsilon(s), z_\varepsilon(s)) \right] ds \right\|_{\mathbb{R}^n}$$

$$\leq \rho M \int_r^t e^{\beta(r-s)} \left[(1+J) \|y_{\varepsilon,t}(s) - v_\varepsilon(s)\|_{\mathbb{R}^n} + \|\sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon(s)) - z_\varepsilon(s)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \right] ds$$

$$\leq \rho M \int_r^t e^{\beta(r-s)} \left[(1+J) \|y_{\varepsilon,t}(s) - v_\varepsilon(s)\|_{\mathbb{R}^n} + \|\xi_\varepsilon(s)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \right] ds.$$

Se $\phi^\varepsilon(r) = e^{-\beta r} \|y_{\varepsilon,t}(r) - v_\varepsilon(r)\|_{\mathbb{R}^n}$, então

$$\phi^\varepsilon(r) \leq \rho M (1+J) \int_r^t \phi^\varepsilon(s) ds + \rho M \int_r^t e^{-\beta s} \|\xi_\varepsilon(s)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} ds, \quad r \leq t.$$

Da Desigualdade de Gronwall segue que

$$\|y_{\varepsilon,t}(r) - v_\varepsilon(r)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \rho M \int_r^t e^{-(\beta - \rho M(1+J))(s-r)} \|\xi_\varepsilon(s)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} ds, \quad r \leq t. \tag{3.14}$$

Seja agora $r \leq t_0 \leq t$. Então,

$\|y_{\varepsilon,t}(r) - y_{\varepsilon,t_0}(r)\|_{\mathbb{R}^n}$

$$= \Bigg\| e^{B_\varepsilon(r-t)} y_{\varepsilon,t}(t) + \int_t^r e^{B_\varepsilon(r-s)} H_\varepsilon(y_{\varepsilon,t}(s), \sigma_\varepsilon^*(y_{\varepsilon,t}(s))) ds$$
$$- \left(e^{B_\varepsilon(r-t_0)} y_{\varepsilon,t_0}(t_0) + \int_{t_0}^r e^{B_\varepsilon(r-s)} H_\varepsilon(y_{\varepsilon,t_0}(s), \sigma_\varepsilon^*(y_{\varepsilon,t_0}(s))) ds \right) \Bigg\|_{\mathbb{R}^n}$$

$$= \Bigg\| e^{B_\varepsilon(r-t)} y_{\varepsilon,t}(t) + \int_t^{t_0} e^{B_\varepsilon(r-s)} H_\varepsilon(y_{\varepsilon,t}(s), \sigma_\varepsilon^*(y_{\varepsilon,t}(s))) ds$$

$$+ \int_{t_0}^r e^{B_\varepsilon(r-s)} H_\varepsilon(y_{\varepsilon,t}(s), \sigma_\varepsilon^*(y_{\varepsilon,t}(s))) ds$$

$$- \left(e^{B_\varepsilon(r-t_0)} y_{\varepsilon,t_0}(t_0) + \int_{t_0}^r e^{B_\varepsilon(r-s)} H_\varepsilon(y_{\varepsilon,t_0}(s), \sigma_\varepsilon^*(y_{\varepsilon,t_0}(s))) ds \right) \Bigg\|_{\mathbb{R}^n}$$

$$= \| e^{B_\varepsilon(r-t_0)} e^{B_\varepsilon(t_0-t)} y_{\varepsilon,t}(t)$$

$$+ e^{B_\varepsilon(r-t_0)} \int_t^{t_0} e^{B_\varepsilon(t_0-s)} H_\varepsilon(y_{\varepsilon,t}(s), \sigma_\varepsilon^*(y_{\varepsilon,t}(s))) ds - e^{B_\varepsilon(r-t_0)} y_{\varepsilon,t_0}(t_0)$$

$$+\int_{t_0}^{r} e^{B_\varepsilon(r-s)}\left[H_\varepsilon(y_{\varepsilon,t}(s),\sigma_\varepsilon^*(y_{\varepsilon,t}))-H_\varepsilon(y_{\varepsilon,t_0}(s),\sigma_\varepsilon^*(y_{\varepsilon,t_0}(s)))\right]ds\Bigg\|_{\mathbb{R}^n}$$

$$\leq \left\|e^{B_\varepsilon(r-t_0)}\left[y_{\varepsilon,t}(t_0)-v(t_0)\right]\right\|_{\mathbb{R}^n}$$
$$+\left\|\int_{t_0}^{r} e^{B_\varepsilon(r-s)}\left[H_\varepsilon(y_{\varepsilon,t}(s),\sigma_\varepsilon^*(y_{\varepsilon,t}))-H_\varepsilon(y_{\varepsilon,t_0}(s),\sigma_\varepsilon^*(y_{\varepsilon,t_0}(s)))\right]ds\right\|_{\mathbb{R}^n}$$

$$\leq \rho M^2 e^{\beta(r-t_0)}\int_{t_0}^{t} e^{-(\beta-\rho M(1+J))(s-t_0)}\|\xi_\varepsilon(s)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}ds$$
$$+\rho M\int_{r}^{t_0} e^{\beta(r-s)}(1+J)\|y_{\varepsilon,t}(s)-y_{\varepsilon,t_0}(s)\|_{\mathbb{R}^n}ds.$$

Usando novamente a Desigualdade de Gronwall, obtemos

$$\|y_{\varepsilon,t}(r)-y_{\varepsilon,t_0}(r)\|_{\mathbb{R}^n}\leq \rho M^2\int_{t_0}^{t} e^{-(\beta-\rho M(1+J))(s-r)}\|\xi_\varepsilon(s)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}. \tag{3.15}$$

Para estimar $\xi_\varepsilon(t)$, notemos que

$$\xi_\varepsilon(t)-e^{A_\varepsilon(t-t_0)}\xi_\varepsilon(t_0)=z_\varepsilon(t)-\sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon(t))-e^{A_\varepsilon(t-t_0)}[z_\varepsilon(t_0)-\sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon(t_0))]$$

$$=\int_{t_0}^{t} e^{A_\varepsilon(t-s)}G_\varepsilon(v_\varepsilon(s),z_\varepsilon(s))ds-\sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon(t))+e^{A_\varepsilon(t-t_0)}\sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon(t_0))$$

$$=\int_{t_0}^{t} e^{A_\varepsilon(t-s)}G_\varepsilon(v_\varepsilon(s),z_\varepsilon(s))ds-\int_{-\infty}^{t} e^{A_\varepsilon(t-s)}G_\varepsilon(y_{\varepsilon,t}(s),\sigma_\varepsilon^*(y_{\varepsilon,t}(s)))ds$$
$$+e^{A_\varepsilon(t-t_0)}\int_{-\infty}^{t_0} e^{A_\varepsilon(t_0-s)}G_\varepsilon(y_{\varepsilon,t_0}(s),\sigma_\varepsilon^*(y_{\varepsilon,t_0}(s)))ds$$

$$=\int_{t_0}^{t} e^{A_\varepsilon(t-r)}\left[G_\varepsilon(v_\varepsilon(s),z_\varepsilon(s))-G_\varepsilon(y_{\varepsilon,t}(s),\sigma_\varepsilon^*(y_{\varepsilon,t}(s)))\right]ds$$
$$-\int_{-\infty}^{t_0} e^{A_\varepsilon(t-r)}[G_\varepsilon(y_{\varepsilon,t}(s),\sigma(y_{\varepsilon,t}(s)))-G_\varepsilon(y_{\varepsilon,t_0}(s),\sigma_\varepsilon^*(y_{\varepsilon,t_0}(s)))]ds.$$

Assim, usando (3.14) e (3.15),

$$\|\xi_\varepsilon(t)-e^{A_\varepsilon(t-t_0)}\xi_\varepsilon(t_0)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$$

$$\leq \rho M\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}\left[\|v_\varepsilon(s)-y_{\varepsilon,t}(s)\|_{\mathbb{R}^n}+\|z_\varepsilon(s)-\sigma_\varepsilon^*(y_{\varepsilon,t}(s))\|_{\mathbb{R}^n}\right]ds$$
$$+\rho M(1+J)\int_{-\infty}^{t_0} e^{-\beta(t-s)}\|y_{\varepsilon,t}(s)-y_{\varepsilon,t_0}\|_{\mathbb{R}^n}ds$$

$$\leq \rho M\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}\|\xi_\varepsilon(s)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}ds+\rho M(1+J)\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}\|v_\varepsilon(s)-y_{\varepsilon,t}(s)\|_{\mathbb{R}^n}ds$$

$$+\rho M(1+J)\int_{-\infty}^{t_0} e^{-\beta(t-s)}\|y_{\varepsilon,t}(s)-y_{\varepsilon,t_0}(s)\|_{\mathbb{R}^n}ds$$

$$\begin{aligned}
&\leq \rho M\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}\|\xi_\varepsilon(s)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}ds\\
&\qquad +\rho^2M^2(1+J)\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}\int_{s}^{t} e^{-(\beta-\rho M(1+J))(\tilde{s}-s)}\|\xi_\varepsilon(\tilde{s})\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}d\tilde{s}ds\\
&\qquad +\rho^2M^3(1+J)\int_{-\infty}^{t_0} e^{-\beta(t-s)}\int_{t_0}^{t} e^{-(\beta-\rho M(1+J))(\tilde{s}-s)}\|\xi_\varepsilon(\tilde{s})\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}d\tilde{s}ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \rho M\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}\|\xi_\varepsilon(s)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}ds\\
&\qquad +\rho^2M^2(1+J)e^{-\beta t}\int_{t_0}^{t} e^{-(\beta-\rho M(1+J))\tilde{s}}\|\xi_\varepsilon(\tilde{s})\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}\int_{t_0}^{\tilde{s}} e^{(2\beta-\rho M(1+J))s}dsd\tilde{s}\\
&\qquad +\rho^2M^3(1+J)e^{-\beta t}\int_{t_0}^{t} e^{-(\beta-\rho M(1+J))\tilde{s}}\|\xi_\varepsilon(\tilde{s})\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}\int_{-\infty}^{t_0} e^{(2\beta-\rho M(1+J))s}dsd\tilde{s},
\end{aligned}$$

de maneira que

$$\begin{aligned}
\|\xi_\varepsilon(t)-e^{A_\varepsilon(t-t_0)}\xi_\varepsilon(t_0)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} &\leq \left[\rho M+\frac{\rho^2M^2(1+J)}{2\beta-\rho M(1+J)}\right]\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}\|\xi_\varepsilon(s)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}ds\\
&\quad +\frac{\rho^2M^3(1+J)}{2\beta-\rho M(1+J)}e^{-\beta(t-t_0)}\int_{t_0}^{t} e^{-(\beta-\rho M(1+J))(\tilde{s}-t_0)}\|\xi_\varepsilon(\tilde{s})\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}d\tilde{s},
\end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
&e^{\beta(t-t_0)}\|\xi_\varepsilon(t)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq M\|\xi_\varepsilon(t_0)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}\\
&\quad +\left[\rho M+\frac{\rho^2M^2(1+J)}{2\beta-\rho M(1+J)}\right]\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(s-t_0)}\|\xi_\varepsilon(s)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}ds\\
&\quad +\frac{\rho^2M^3(1+J)}{2\beta-\rho M(1+J)}\int_{t_0}^{t} e^{-(2\beta-\rho M(1+J))(s-t_0)}e^{\beta(s-t_0)}\|\xi_\varepsilon(s)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}ds\\
&\quad \leq M\|\xi_\varepsilon(t_0)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}+\left[\rho M+\frac{\rho^2M^2(1+J)(1+M)}{2\beta-\rho M(1+J)}\right]\int_{t_0}^{t} e^{\beta(s-t_0)}\|\xi_\varepsilon(s)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}ds.
\end{aligned}$$

Da Desigualdade de Gronwall segue ainda que

$$\|\xi_\varepsilon(t)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq M\|\xi_\varepsilon(t_0)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}e^{-\zeta(t-t_0)},$$

onde

$$\zeta=\beta-\left[\rho M+\frac{\rho^2M^2(1+J)(1+M)}{2\beta-\rho M(1+J)}\right].$$

Logo, $z_\varepsilon(t) = \sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon(t))$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Nosso próximo passo é mostrar que o ponto fixo σ_ε^* depende continuamente de ε para $\varepsilon = 0$. Isto pode ser desenvolvido da seguinte maneira. Se $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ é tal que a variedade instável é dada pelo gráfico de σ_ε^*, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ queremos mostrar que

$$\sup_{\eta \in \mathbb{R}^n} \|\sigma_\varepsilon^*(\eta) - \sigma_0^*(\eta)\|_{H_\varepsilon^1} = |||\sigma_\varepsilon^* - \sigma_0^*||| \to 0 \text{ quando } \varepsilon \to 0.$$

Para mostrar tal fato, observemos primeiro que

$\|G_\varepsilon(v_0, \sigma_\varepsilon^*(v_0)) - G_0(v_0, \sigma_0^*(v_0))\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq o(1) + |||\sigma_\varepsilon^* - \sigma_0^*|||$.

De fato, usando a estimativa (3.5), temos

$$\begin{aligned}
&\|G_\varepsilon(v_0, \sigma_\varepsilon^*(v_0)) - G_0(v_0, \sigma_0^*(v_0))\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&\quad \leq \|G_\varepsilon(v_0, \sigma_\varepsilon^*(v_0)) - G_\varepsilon(v_0, \sigma_0^*(v_0))\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|G_\varepsilon(v_0, \sigma_0^*(v_0)) - G_0(v_0, \sigma_0^*(v_0))\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&\quad \leq \rho\|\sigma_\varepsilon^*(v_0) - \sigma_0^*(v_0)\| + 2\rho.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|G_\varepsilon(v_0, \sigma_\varepsilon^*(v_0)) - G_0(v_0, \sigma_0^*(v_0))\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq o(1) + \|\sigma_\varepsilon^*(v_0) - \sigma_\varepsilon^*(v_0))\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}.$$

Retomando, queremos mostrar que $|||\sigma_\varepsilon^* - \sigma_0^*||| \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$. Segue da observação feita acima e da Proposição 2.9 que

$$\begin{aligned}
\|\sigma_\varepsilon^*(\eta) - \sigma_0^*(\eta)\|_{H_\varepsilon^1} &\leq \int_{-\infty}^{\tau} \|e^{A_\varepsilon(\tau-s)} G_\varepsilon(v_\varepsilon, \sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon)) - e^{A_0(\tau-s)} G_0(v_0, \sigma_0^*(v_0))\|_{H_\varepsilon^1} ds \\
&\leq \int_{-\infty}^{\tau} \left(\|e^{A_\varepsilon(\tau-s)} G_\varepsilon(v_\varepsilon, \sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon)) - e^{A_0(\tau-s)} G_\varepsilon(v_\varepsilon, \sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon))\|_{H_\varepsilon^1}\right) ds \\
&\qquad + \int_{-\infty}^{\tau} \left(\|e^{A_0(\tau-s)} G_\varepsilon(v_\varepsilon, \sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon)) - e^{A_0(\tau-s)} G_0(v_0, \sigma_0^*(v_0))\|_{H_\varepsilon^1}\right) ds \\
&\leq M\theta(\varepsilon) \int_{-\infty}^{\tau} e^{\beta(\tau-s)}(\tau-s)^{-\gamma} \|G_\varepsilon(v_\varepsilon, \sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon))\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} ds \\
&\qquad + M \int_{-\infty}^{\tau} e^{\beta(\tau-s)}(\tau-s)^{-\frac{1}{2}} \|G_\varepsilon(v_\varepsilon, \sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon)) - G_0(v_0, \sigma_0^*(v_0))\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} ds \\
&\leq o(1) + M \int_{-\infty}^{\tau} e^{\beta(\tau-s)}(\tau-s)^{-\frac{1}{2}} \|G_\varepsilon(v_\varepsilon, \sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon)) - G_\varepsilon(v_0, \sigma_\varepsilon^*(v_0))\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} ds \\
&\qquad + M \int_{-\infty}^{\tau} e^{\beta(\tau-s)}(\tau-s)^{-\frac{1}{2}} \|G_\varepsilon(v_0, \sigma_\varepsilon^*(v_0)) - G_0(v_0, \sigma_0^*(v_0))\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} ds \\
&\leq o(1) + \rho M \int_{-\infty}^{\tau} e^{\beta(\tau-s)}(\tau-s)^{-\frac{1}{2}} (\|(v_\varepsilon - v_0\|_{\mathbb{R}^n} + \Delta\|v_\varepsilon - v_0\|_{\mathbb{R}^n}) ds \\
&\qquad + M \int_{-\infty}^{\tau} e^{\beta(\tau-s)}(\tau-s)^{-\frac{1}{2}} \|G_\varepsilon(v_0, \sigma_\varepsilon^*(v_0)) - G_0(v_0, \sigma_0^*(v_0))\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} ds
\end{aligned}$$

$$\leq o(1) + \rho M \beta^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) |||\sigma_\varepsilon^* - \sigma_0^*|||$$
$$+\rho M(1+J)\int_{-\infty}^{\tau} e^{\beta(\tau-s)} \|(v_\varepsilon - v_0\|_{\mathbb{R}^n} ds.$$

Então, basta estimar $\|v_\varepsilon - v_0\|_{\mathbb{R}^n}$. Note que

$$\|v_\varepsilon - v_0\|_{\mathbb{R}^n} \leq \int_t^\tau \|e^{B_\varepsilon(t-s)} - e^{B_0(t-s)}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} \|H_\varepsilon(v_\varepsilon, \sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon))\|_{\mathbb{R}^n} ds$$

$$+ \int_t^\tau \|e^{B_0(t-s)}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} \|H_\varepsilon(v_\varepsilon, \sigma_\varepsilon^*(v_\varepsilon)) - H_0(v_0, \sigma_0^*(v_0))\|_{\mathbb{R}^n} ds$$

$$\leq o(1) + \rho M \beta^{-1} |||\sigma_\varepsilon^* - \sigma_0^*||| + \rho M(1+J)\int_t^\tau e^{\beta(t-s)} \|v_\varepsilon - v_0\|_{\mathbb{R}^n} ds.$$

Tomando $\phi(t) = e^{-\beta(t-\tau)} \|v_\varepsilon - v_0\|_{\mathbb{R}^n}$, temos

$$\phi(t) \leq o(1) + e^{-\beta(t-\tau)} \rho M \beta^{-1} |||\sigma_\varepsilon^* - \sigma_0^*||| + \rho M(1+J)\int_t^\tau \phi(s) ds,$$

e usando a Desigualdade de Gronwall, obtemos

$$\|v_\varepsilon - v_0\|_{\mathbb{R}^n} \leq (o(1) + \rho M \beta^{-1} |||\sigma_\varepsilon^* - \sigma_0^*|||) e^{-\rho M(1+J)(\tau-t)}$$

e como $\rho > 0$ é arbitrário, temos que

$$\sup_{\eta \in \mathbb{R}^n} \|\sigma_\varepsilon^*(\eta) - \sigma_0^*(\eta)\|_{H_\varepsilon^1} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0.$$

Isto conclui a demonstração do resultado.

■

Corolário 3.10. *Assuma que as condições da Proposição 3.8 estejam satisfeitas, que o problema $(P)_0$ tenha exatamente m soluções $u_1^0, ..., u_n^0$ e que todas elas sejam hiperbólicas. Então existem $\varepsilon_0 > 0$ e $\delta > 0$ pequenos o suficiente tais que o problema $(P)_\varepsilon$ tem exatamente m soluções, para $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, e suas variedades instáveis locais $W_\delta^u(u_k^\varepsilon)$, $k = 1, ..., m$ comportam-se continuamente em H_ε^1 quando $\varepsilon \to 0$.*

3.2.3 Continuidade dos atratores

Na Seção 1.3.1, vimos que se o semigrupo tem estrutura gradiente, então o atrator de tal semigrupo é a união das variedades instáveis, e no teorema anterior vimos que as variedades instáveis se comportam continuamente, de modo que esses resultados nos permitirão mostrar a continuidade dos atratores.

Mas antes mostremos que o semigrupo gerado pelo problema (1) tem estrutura gradiente. Consideremos, para cada $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, o funcional $\mathcal{W}_\varepsilon : H^1(\Omega_\varepsilon) \to \mathbb{R}$, dado por

$$\mathcal{W}_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega_\varepsilon} F(u) dx$$

onde F é uma primitiva de f. Este funcional é não crescente com relação à variável t ao longo das soluções do problema (1). De fato, denotemos a solução de (1) por $u(t, x)$. Então

$$\frac{d}{dt}\mathcal{W}_\varepsilon(u) = \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \nabla u_t dx - \int_{\Omega\varepsilon} f(u) u_t dx.$$

Logo, do teorema de Green, segue que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{W}_\varepsilon(u) = \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} u_t dx - \int_{\Omega_\varepsilon} (\Delta u) u_t dx - \int_{\Omega\varepsilon} f(u) u_t dx$$

$$= -\int_{\Omega_\varepsilon} (\Delta u + f(u)) u_t = \int_{\Omega_\varepsilon} -u_t^2 \leq 0.$$

Portanto os semigrupos gerados pelo problema (1) têm estrutura gradiente. Assim, para $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, podemos escrever $\mathcal{A}_\varepsilon = \cup_{u^\varepsilon \in \mathcal{E}} W^u_{loc}(u^\varepsilon)$.

Com este fato, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.11. *Assuma que a família de domínios $\{\Omega_\varepsilon, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ seja admissível e que todo equilíbrio do problema não perturbado $(P)_0$ seja hiperbólico. Então, os atratores $\mathcal{A}_\varepsilon$ comportam-se continuamente em H^1_ε quando $\varepsilon \to 0$, ou seja,*

$$\sup_{u_\varepsilon \in \mathcal{A}_\varepsilon} \inf_{u_0 \in \mathcal{A}_0} \|u_\varepsilon - u_0\|_{H^1_\varepsilon} + \sup_{u_0 \in \mathcal{A}_0} \inf_{u_\varepsilon \in \mathcal{A}_\varepsilon} \|u_\varepsilon - u_0\|_{H^1_\varepsilon} \to 0$$

quando $\varepsilon \to 0$.

Demonstração: Desde que já mostramos na Proposição 3.2 a semicontinuidade superior dos atratores, resta-nos mostrar a semicontinuidade inferior. E isto segue da continuidade das variedades instáveis locais. Ou seja, se $u_0 \in \mathcal{A}_0$, então u_0 pertence à variedade instável de u_k^0 para algum $1 \leq k \leq m$. Seja $\delta > 0$ obtido na Proposição 3.8. Se τ é tal que $w_0 = T_0(-\tau, u_0) \in W^u_\delta(u_k^0)$, pela continuidade das variedades instáveis existe uma sequência $w_\varepsilon \in W^u_\delta(u_k^\varepsilon)$, a qual converge para w_0 em H^1_ε quando $\varepsilon \to 0$. Agora, desde que a família dos semigrupos é contínua em H^1_ε, temos que $\mathcal{A}_\varepsilon \ni T_\varepsilon(\tau, w_\varepsilon) \to T_0(\tau, w_0) = u_0$ em H^1_ε quando $\varepsilon \to 0$. Mostrando a semicontinuidade inferior dos atratores. Isto prova o teorema. ∎

3.3 Exemplo

Nesta seção consideraremos um exemplo onde a Proposição 2.5 se aplica e, portanto, todos os resultados que a seguem são validos.

3.3.1 Uma C^0 perturbação de domínios

Seja $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^N$ um domínio Lipschitz limitado e assuma que para todo ponto $\xi \in \partial\Omega_0$, tenhamos

$$\Omega_0 \cap \{x \in \mathbb{R}^N : |x_i - \xi_i| < \delta\} = \{x = (x', x_N) : x_N = \xi_N + f_0(x'), |x_i - \xi_i| < \delta\},$$

onde $i = \{1, ..., N-1\}$, f_0 é uma função Lipschitz, e denotamos $x' = (x_1, ..., x_{N-1})$.

Para simplificar a notação, assuma que $\xi = 0$. Consequentemente,

$\Omega_0 \cap \{x \in \mathbb{R}^N : |x_i| < \delta\} = \{x = (x', x_N) : x_N < f_0(x'), |x_i| < \delta, i = 1, ..., N-1\}$.

Assuma que

$\Omega_\varepsilon \cap \{x \in \mathbb{R}^N : |x_i| < \delta\} = \{x = (x', x_N) : x_N < f_\varepsilon(x'), |x_i| < \delta, i = 1, ..., N-1\}$,
onde $f_\varepsilon \to f_0$ uniformemente em $\{x' : |x_i| < \delta\}$.

Note que, pela definição de K_ε,

$\partial K_\varepsilon \cap \{x \in \mathbb{R}^N : |x_i| < \delta\} = \{x = (x', x_N) : x_N = g_\varepsilon(x'), |x_i| < \delta, i = 1, ..., N-1\}$,
para uma certa função g_ε com $g_\varepsilon < f_0$, $g_\varepsilon < f_\varepsilon$ e $g_\varepsilon \to f_0$ uniformemente em $\{x' : |x_i'| < \delta\}$.

Se denotarmos

$R_{\varepsilon,\delta} = (\Omega_\varepsilon \setminus K_\varepsilon) \cap \{x; |x_i| < \delta\} = \{x = (x', x_N) : |x_i| < \delta, g_\varepsilon(x') < x_N < f_\varepsilon(x')\}$,
nós temos

$$\|\nabla u_\varepsilon\|^2_{L^2(R_{\varepsilon,\delta})} \geq \int_{-\delta}^{\delta} \cdots \int_{-\delta}^{\delta} \int_{g_\varepsilon(x')}^{f_\varepsilon(x')} \left| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_N} \right|^2 dx_N dx'.$$

Mas para x' fixo, pela Desigualdade de Poincaré em dimensão um, temos

$$\int_{g_\varepsilon(x')}^{f_\varepsilon(x')} \left| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_N} \right|^2 dx_N \geq \frac{\pi^2}{|f_\varepsilon(x') - g_\varepsilon(x')|^2} \int_{g_\varepsilon(x')}^{f_\varepsilon(x')} |u_\varepsilon|^2 dx_N$$

o que garante que

$$\|\nabla u_\varepsilon\|^2_{L^2(R_{\varepsilon,\delta})} \geq \frac{\pi^2}{\|f_\varepsilon) - g_\varepsilon\|^2_{L^\infty}} \|u_\varepsilon\|^2_{L^2(R_{\varepsilon,\delta})}$$

e, desde que $f_\varepsilon \to f_0$ e $g_\varepsilon \to f_0$ uniformemente em $\{x' : |x_i'| < \delta\}$, então existe $\kappa_\varepsilon \to \infty$ quando $\varepsilon \to 0$, tal que

$$\|\nabla u_\varepsilon\|^2_{L^2(R_{\varepsilon,\delta})} \geq \kappa_\varepsilon \|u_\varepsilon\|^2_{L^2(R_{\varepsilon,\delta})}.$$

Como esse argumento pode ser feito para uma cobertura finita de $\partial\Omega_0$, obtemos

$$\|\nabla u_\varepsilon\|^2_{L^2(R_{\varepsilon,\delta})} \geq C\kappa_\varepsilon \|u_\varepsilon\|^2_{L^2(R_{\varepsilon,\delta})},$$

para um certo C independente de ε. Isto mostra que a afirmação (ii) da Proposição 2.5 está satisfeita.

Note que apenas exigimos que f_ε convirja uniformemente para f_0. Em particular, podemos considerar perturbações com um comportamento oscilatório alto.

Por exemplo,

$$f_\varepsilon(x') = f_0(x') + \varepsilon F\left(\frac{x_1}{\varepsilon^{\alpha_1}}, ..., \frac{x_{N-1}}{\varepsilon^{\alpha_{N-1}}}\right),$$

onde $F : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$ é uma função limitada suave.

Referências Bibliográficas

[1] AMANN, H.; *Linear and quasilinear parabolic problems.* Springer, (1995).

[2] ARRIETA, J. M.; CARVALHO, A.N.; *Spectral convergence and nonlinear dynamics of reaction-diffusion equations under perturbations of the domain*, J. Differential Equations 199(2004) 143-178.

[3] ARRIETA, J. M.; CARVALHO, A.N.; RODRÍGUEZ-BERNAL, A.; *Attractors of Parabolic Problems with Nonlinear Boudary Conditions Uniform Bounds*, Comm. Partial Differential Equations 25 (1&2)(2000) 1-37.

[4] BIEZUNER, R. J.; *Autovalores do Laplaciano.* Notas de Aula de Tópicos em Análise, ICEx-UFMG, (2006), site: http://www.mat.ufmg.br/ rodney

[5] BREZIS, H.; *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer, (2010).

[6] BURENKOV, V. I.; *Extension Theory for Sobolev spaces on open sets with Lipschitz boudaries.* Nonlinear Analysis, Function Spaces and Applications, Proceedings of the Spring School held in Prague, May 31-June 6, 1998, Vol. 6. Czech Academy of Sciences, Mathematical Institute, Praha, 1999. pp. 1–49.

[7] CARVALHO, A. N.; *Equações parabólicas semilineares.* Notas de Aula, ICMC-USP, (2002), site:http://www2.icmc.usp.br/ andcarva/sg.pdf.

[8] CARVALHO, A. N.; *Análise Funcional II.* Notas de Aula, ICMC-USP, (2011), site:http://www2.icmc.usp.br/ andcarva/AnaliseFuncional-II.pdf

[9] FUJITA, H.; SAITO, N.; SUZUKI, T.; *Operator theory and numerical methods.* Studies in Mathematics and its Applications, Volume 30, ELSEVIER (2001).

[10] HALE, J. K.; *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems, Mathematics Surveys and Monographs 25.* American Mathematical Society (1989).

[11] HENRY, D. B.; *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Lecture Notes in Mathematics 840.* Springer-Verlag (1980).

[12] KATO, T.; *Perturbation Theory, Classics in Mathematics,* Springer-Verlag (1995).

[13] PAZY, A.; *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Applied Mathematical Sciences, 44, Springer-Verlag, (1983).

[14] SCHIABEL-SILVA, K.; *Continuidade de atratores para problemas parabólicos semi-lineares com difusibilidade grande localizada.* Tese de Doutorado, ICMC-USP (2006).

Índice Remissivo