UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Resolubilidade Global para uma Classe de Campos Vetoriais no Toro

Paulo Leandro Dattori da Silva

Orientador: Prof. Dr. Adalberto Panobianco Bergamasco

Tese apresentada ao PPG-M da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

São Carlos - SP

Dezembro - 2004

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária/UFSCar

S586rg

Silva, Paulo Leandro Dattori da.
Resolubilidade global para uma classe de campos vetoriais no Toro / Paulo Leandro Dattori da Silva. -- São Carlos : UFSCar, 2004.
54 p.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2004.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Integral primeira. 3. Condição (P). 4. Resolubilidade semi-global. I. Título.

CDD: 515.353 (20ª)

Prof. Dr. Adalberto Panobianco Bergamasco

Agradecimentos

À Deus por tudo o que Ele tem feito na minha vida. Em particular, por ter me ajudado a concluir o doutorado. Obrigado Senhor por ouvir minhas preces.

Aos meus pais e irmãos pelo amor, carinho, união, compreensão e por serem o alicerce de tudo o que eu tenho feito na vida.

À minha avó Lúcia por todas as orações e pelo amor e carinho que dedica a todos os seus netos.

À minha noiva Michela por todo amor e compreensão que tem me dedicado.

A todos os meus familiares pelo carinho, respeito e por me ensinarem o verdadeiro significado da palavra família.

Ao Adalberto pela orientação, amizade, confiança e respeito.

Aos amigos do DM pela amizade e incentivo.

À minha ”pseudo-família”de Piracicaba pela acolhida, carinho, incentivo e por fazerem minha a família deles. Em especial, a Marica, Carlão, Rosa, Felipe, Alessandra e Michela.

Aos amigos que sempre acreditaram que eu poderia obter o título de doutor.

Ao amigo e ex-orientador Luiz Roberto de Almeida Gabriel pelo apoio, incentivo e amizade desde os tempos da graduação.

À Célia pela amizade e profissionalismo.

Ao apoio financeiro da CAPES.

A minha avó Lúcia, aos meus irmãos Júnior e Paty e a minha noiva Michela pelo amor, carinho e compreensão.

Aos meus pais Adriano e Cida pelo amor, carinho, compreensão, e, principalmente, pela luta diária na educação, formação e bem estar dos filhos.

"Na verdade, na verdade vos digo: quem crê em mim fará as obras que faço e fará até maiores do que elas, porque eu vou para o Pai. E o que pedirdes em meu nome, eu o farei a fim de que o Pai seja glorificado no Filho". João 14;12,13.

Resumo

Seja

$$L = \partial_t + (a(x,t) + ib(x,t))\partial_x, \quad a, b \in C^\infty(\mathbb{T}^2; \mathbb{R}),$$

campo vetorial sobre o toro $\mathbb{T}^2_{(x,t)} \simeq \mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z}^2$, satisfazendo a condição (P) de *Nirenberg-Treves*, tal que a estrutura definida por L possua ao menos uma órbita de Sussmann homotópica a $\{0\} \times S^1$. Considere $\mathcal{K}$ a união das órbitas de Sussmann unidimensionais periódicas e suponhamos que exista uma tal órbita γ contida em $\partial\mathcal{K}$. Existe um difeomorfismo de $\mathbb{T}^2$ em $\mathbb{T}^2$ tal que nas novas coordenadas γ se escreve como $\gamma(s) = (x_0, s)$, $0 \leq s \leq 2\pi$, para algum $x_0 \in S^1$, e se $\mathcal{K}$ é finito podemos escrever $\mathcal{K} = \displaystyle\bigcup_{j=0}^{q} \{x_j\} \times S^1$, para algum $q \in \mathbb{Z}_+$; além disso, nas novas coordenadas temos

$$L = \partial_t + (\widetilde{a}_j(x,t) + i\widetilde{b}_j(x,t))\partial_x, \quad \widetilde{a}_j, \widetilde{b}_j \in C^\infty(V_j; \mathbb{R}),$$

numa vizinhança V_j de cada $\{x_j\} \times S^1$.

Este trabalho analisa a influência da ordem de anulamento das funções $\widetilde{a}_j$ e $\widetilde{b}_j$, para cada j, na resolubilidade global e/ou forte de L.

Abstract

Let

$$L = \ _t + (a(x,t) + ib(x,t)) \ _x, \quad a,b \in C^\infty(\mathbb{T}^2; \mathbb{R}),$$

be a vector field on the torus $\mathbb{T}^2_{(x,t)} \simeq \mathbb{R}^2/2\ \mathbb{Z}^2$, satisfying the *Nirenberg-Treves* condition (P), and such that the structure defined by L has at least one Sussmann orbit homotopic to $\{0\} \times S^1$. Let $\mathcal{K}$ be the union of all one-dimensional, periodic, Sussmann orbits and assume that there exists one such orbit contained in $\mathcal{K}$. There exists a diffeomorphism of $\mathbb{T}^2$ onto $\mathbb{T}^2$ such that, in the new coordinates, is written as $(s) = (x_0, s)$, $0 \leq s \leq 2$, for some $x_0 \in S^1$, and if $\mathcal{K}$ is finite, we may write $\mathcal{K} = \bigcup_{j=0}^{q} \{x_j\} \times S^1$, for some $q \in \mathbb{Z}_+$; furthermore, in the new coordinates, we have

$$L = \ _t + (\widetilde{a}_j(x,t) + i\widetilde{b}_j(x,t)) \ _x, \quad \widetilde{a}_j, \widetilde{b}_j \in C^\infty(V_j; \mathbb{R}),$$

in a neighborhood V_j of each $\{x_j\} \times S^1$.

The present work analyzes the influence of the order of vanishing of $\widetilde{a}_j$ and of $\widetilde{b}_j$, for each j, in the global and/or strong solvability of L.

Sumário

Introdução

Este trabalho dirige-se ao estudo da resolubilidade global de campos vetoriais da forma

$$(1) \qquad L = \partial_t + (a(x,t) + ib(x,t))\partial_x, \quad a, b \in C^\infty(\mathbb{T}^2; \mathbb{R}),$$

sobre o toro $\mathbb{T}^2_{(x,t)}$, que satisfazem a condição (P) de *Nirenberg-Treves*, para os quais a estrutura definida por L possui pelo menos uma órbita de Sussmann homotópica a $\{0\} \times S^1$.

Um campo L da forma (1) satisfaz a condição (P) se, e somente se, a função b não muda de sinal ao longo das curvas características de $\partial_t + a(x,t)\partial_x$ (ver definição 1.0.2 e teorema 1.0.1). A condição (P) caracteriza a resolubilidade local de L e também comparece de maneira fundamental na caracterização da resolubilidade semi-global, ou seja, a resolubilidade sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{T}^2$. Seja K um subconjunto compacto de $\mathbb{T}^2$. Se L é resolúvel em K (no sentido de [H2, definição 26.4.1]) então necessariamente a condição (P) deve ser satisfeita numa vizinhança aberta de K ([H2, corolário 26.4.8]). Além disso, se

($\sharp$) Qualquer ponto característico de L sobre K está sobre um intervalo compacto de uma curva bi-característica de $\Re(qp)$, sobre a qual $q \neq 0$, sem extremos característicos sobre K

então a condição (P) implica resolubilidade de L em K num sentido mais forte, isto é, soluções podem ser obtidas em $C^\infty(\mathbb{T}^2)$ ([H2, teorema 26.11.3]).

Para o estudo de existência de soluções globais existem duas noções. Dizemos que L é globalmente resolúvel se $LC^\infty(\mathbb{T}^2) = (ker^t L)^\circ$; se, além disso, $\dim ker^t L < \infty$ dizemos que L é fortemente resolúvel.

A condição ($\sharp$) não é satisfeita para os campos vetoriais que nos propomos estudar. Para a elaboração e conclusão deste trabalho foi necessário o estudo, dentre outros, dos trabalhos [BCP], [BM] e [BP].

O trabalho [BM] exibe uma função f de classe C^∞, flat em $x = 0$ (e, portanto, satisfazendo a condição de compatibilidade $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(0,t)dt = 0$), tal que a equação $L_\lambda u = f$ não possui solução de classe C^∞, em nenhuma vizinhança aberta do conjunto característico $\{0\} \times S^1$, sendo $L_\lambda = \lambda\partial_t - ix\partial_x$, $\lambda \in \mathbb{R}_+ + i\mathbb{R}$. Os trabalhos [BCP] e [BP] referem-se a resolubilidade global e/ou forte de campos vetoriais no toro $\mathbb{T}^2$. O trabalho [BCP] trata de campos da forma $\partial_t + ib(x,t)\partial_x$, que satisfazem a condição (P). Se, para cada x em que $t \mapsto b(x,t)$ é identicamente nula, b se anula de ordem finita $m = m(x) \geq 2$ então L é fortemente resolúvel; se permitíssemos $m = 1$ então seria possível obter algum L que não é fortemente resolúvel. Além disso, [BCP] demonstra que b anular-se de ordem finita sobre $\{x\} \times S^1$ é uma condição necessária para a resolubilidade global. Vale lembrar que a condição (P) para o trabalho [BCP] é equivalente ao fato de $t \mapsto b(x,t)$ não mudar de sinal, para cada $x \in S^1$. Conforme mencionado em [BCP], a condição (P) não é uma condição necessária para a resolubilidade global. De fato, [Ho1, teorema 3.2] verifica que se $b(x,t) = b(t)$, $b \not\equiv 0$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} b(t)dt = 0$ e $\Omega_r = \{t \in S^1; \displaystyle\int_0^t b(s)ds < r\}$ é conexo em S^1, para cada $r \in \mathbb{R}$, então $L = \partial_t + ib(t)\partial_x$ é globalmente resolúvel embora, evidentemente, não satisfaça a condição (P). O trabalho [BP], trata dos campos da forma $\partial_t + a(x)\partial_x$, $a \in C^\infty(\mathbb{T}^2; \mathbb{R})$, sendo que $\emptyset \neq a^{-1}(0) \neq \mathbb{T}^2$

e demonstra que L é globalmente resolúvel se, e somente se, a possui apenas zeros de ordem finita.

Trabalhamos com o objetivo de obter resultados sobre resolubilidade global e/ou forte para campos do tipo (1).

Seja $\mathcal{K}$ a união das órbitas de Sussmann unidimensionais periódicas da estrutura definida por L. No capítulo 2 supomos que existe γ, curva integral de $\Re(L)$, contida em $\partial\mathcal{K}$. Então, existe um difeomorfismo (ver [E], [Hi] e também [BNZ]) tal que, nas novas coordenadas, γ se escreve como $\gamma(s) = (x_0, s)$, $0 \leq s \leq 2\pi$, e tal que numa vizinhança V de $\{x_0\} \times S^1$, nas novas coordenadas, L se escreve como $L = \partial_t + (\widetilde{a}(x,t) + i\widetilde{b}(x,t))\partial_x$, sendo $\widetilde{a}, \widetilde{b} \in C^\infty(V; \mathbb{R})$. Provamos que se L satisfaz a condição (P) e é globalmente resolúvel então $\widetilde{a} + i\widetilde{b}$ não é flat sobre $\{x_0\} \times S^1$ (teorema 2.0.8).

Nos capítulos 3 e 4, supomos que existe no máximo um número finito de órbitas de Sussmann unidimensionais, da estrutura gerada por L, sendo cada uma delas periódica. Então, existe um difeomorfismo (ver [E], [Hi] e também [BNZ]) tal que, nas novas coordenadas, $\mathcal{K}$ se escreve como $\mathcal{K} = \bigcup_{j=1}^{q} \{x_j\} \times S^1$, para algum $q \in \mathbb{Z}_+$, e tal que numa vizinhança V_j de cada $\{x_j\} \times S^1$, nas novas coordenadas, L se escreve como $L = \partial_t + (\widetilde{a}_j(x,t) + i\widetilde{b}_j(x,t))\partial_x$, sendo $\widetilde{a}_j, \widetilde{b}_j \in C^\infty(V_j; \mathbb{R})$. Suponhamos que L satisfaça a condição (P). Provamos que se em cada j temos $(\widetilde{a}_j + i\widetilde{b}_j)(x,t) = (x - x_j)^{n_j}\widetilde{a}_{0j}(x,t) + i(x - x_j)^{m_j}\widetilde{b}_{0j}(x,t)$, com $\widetilde{b}_{0j} \not\equiv 0$ em $\{x_j\} \times S^1$, e $2 \leq m_j \leq n_j$ então L é fortemente resolúvel (teorema 4.0.2). Se, além disso, $L = \partial_t + (a(x) + ib(x))\partial_x$ provamos que: se em cada x_j temos $a_{0j}(x_j) \neq 0 \neq b_{0j}(x_j)$ e $2 \leq m_j < 2n_j - 1$, ou $a_{0j}(x_j) \neq 0$ e $b_{0j} \equiv 0$, então L é fortemente resolúvel; se $a_{0j}(x_j) \neq 0$ e $m_j \geq 2n_j$, com $b_{0j} \not\equiv 0$ em qualquer vizinhança de $\{x_j\} \times S^1$, para algum x_j, então L não é fortemente resolúvel (teorema 3.2.1).

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo contém resultados que auxiliam na compreensão do trabalho.

Seja L um campo vetorial sobre uma variedade suave Ω, de dimensão m. Denote por $p(x, \xi)$ o símbolo principal de L; localmente podemos escrever $p(x, \xi) = \sum_{j=1}^{m} a_j(x)\xi_j$.

Definição 1.0.1 *Seja ℓ uma função suave a valores complexos sobre $T^*\Omega \setminus 0$. Uma curva bi-característica de $\Re(\ell)$ é uma curva integral do campo Hamiltoniano de $\Re(\ell)$, sobre a qual $\Re(\ell)$ se anula.*

Definição 1.0.2 *Diz-se que L satisfaz a condição (P), num aberto $V \subset \Omega$, se não existe função suave a valores complexos, positivamente homogênea, $q(x, \xi)$, sobre $T^*V \setminus 0$, tal que $\Im(qp)$ assume tanto valores positivos quanto negativos sobre uma curva bi-característica de $\Re(qp)$, em V, sobre a qual $q \neq 0$.*

Ver [H3, definição 3.1].

Definição 1.0.3 *Diz-se que uma curva γ é semi-bi-característica de $p(x, \xi)$ se γ é uma curva bi-característica de $\Re(pq)$, com $q \neq 0$.*

Teorema 1.0.1 *Cada uma das seguintes condições é necessaria e suficiente para que L satisfaça a condição (P) em V:*

(a) Não existe função C^∞ a valores complexos q em $T^*V \setminus 0$, tal que $\Im(qp)$ assume tanto valores positivos quanto negativos sobre uma curva bi-característica de $\Re(qp)$, em Y, sobre o qual $q \neq 0$.

(b) Se Γ é um ponto característico ou uma curva bi-característica com projeção regular injetiva em $S^*(V)$, então existe uma função q de classe C^∞, numa vizinhança W de Γ, tal que $\Re(H_{qp}) \neq 0$ em W e $\Im(qp)$ não muda de sinal sobre qualquer bi-característica de $\Re(qp)$ em W.

Ver [H3, teorema 3.7].

Pelo teorema acima, se $L = \partial_t + (a(x,t) + ib(x,t))\partial_x,\ a, b \in C^\infty(\mathbb{T}^2, \mathbb{R})$ então a condição (P) é satisfeita se, e somente se, $b(\gamma(s))$ não muda de sinal, para qualquer γ curva integral de $\Re(L)$; a curva integral de $\Re(L)$, passando por (x,t), tem a forma $\gamma_{(x,t)}(s) = (\phi(x,s), s+t)$, sendo $\partial_s\phi(x,s) = a(\phi(x,s), s+t)$.

Definição 1.0.4 *Diz-se que L é globalmente resolúvel se o endomorfismo $L : C^\infty(\mathbb{T}^2) \to C^\infty(\mathbb{T}^2)$ tem imagem fechada.*

O operador transposto de L é dado por ${}^tL = -L - (a_x + ib_x)(x,t)$. Por argumentos padrão de análise funcional mostra-se que L é globalmente resolúvel se, e somente se, $LC^\infty(\mathbb{T}^2) = (\ker {}^tL)^\circ$.

Definição 1.0.5 *Diz-se que L é fortemente resolúvel se a imagem do endomorfismo $L : C^\infty(\mathbb{T}^2) \to C^\infty(\mathbb{T}^2)$ tem codimensão finita.*

Usando o teorema da aplicação aberta mostra-se que L é fortemente resolúvel se, e somente se, L é globalmente resolúvel e $\ker {}^tL$ tem dimensão finita.

Definição 1.0.6 *Seja L=X+iY, sendo X e Y campos vetoriais reais. Diz-se que p e q pertencentes a* Ω *são equivalentes se existe um número finito de curvas integrais dos campos* $\pm X$ *e* $\pm Y$ *que justapostas os unem. As classes de equivalência são chamadas órbitas de Sussmann do campo L. Se* $\mathcal{B}$ *é uma tal classe e existe p representante de* $\mathcal{B}$*, com X(p) e Y(p) linearmente independentes, então dizemos que* $\mathcal{B}$ *é bidimensional; caso contrário,* $\mathcal{B}$ *é unidimensional.*

Ver [S, pág. 175].

Teorema 1.0.2 *Seja* $L = X + iY$ *campo vetorial complexo não singular sobre uma variedade paracompacta M. As seguintes condições são equivalentes:*
i) L satisfaz a condição (P) em M;
ii) As órbitas de Sussmann da estrutura definida por L são orientáveis, de dimensão menor ou igual que 2 e $X \wedge Y$ *não muda de sinal sobre as órbitas de Sussmann bidimensionais.*

Ver [Ho3, teorema 3.1]

Teorema 1.0.3 *Suponha que L satisfaz a condição (P) em* Ω *e seja K um subconjunto compacto de* Ω*. Então são equivalentes:*
(i) qualquer ponto característico de L sobre K está sobre um intervalo compacto de uma curva bi-característica de $\Re(qp)$*, sobre a qual* $q \neq 0$*, sem extremos característicos sobre K;*
(ii) nenhuma bi-característica bidimensional e nenhuma bi-característica unidimensional completamente contida em $\mathcal{C} \setminus (\mathcal{C}_{11} \cup \mathcal{C}_2^e)$ *(ver página 36) está inteiramente contida acima de K.*

Ver [H1, teorema 7.1].

Teorema 1.0.4 *Suponha que L satisfaz a condição (P) e seja K um subconjunto compacto de Ω tal que as condições equivalentes do teorema 1.0.3 sejam satisfeitas. Então,*

$$N = \{u \in \mathcal{E}'(K); {}^tLu = 0\}$$

é um subespaço de dimensão finita de $C_0^\infty(K)$ ortogonal a $L(\mathcal{D}'(\Omega))$. Além disso, para qualquer $f \in H_{(s)}^{loc}(\Omega)$, com $< f, N >= 0$, e qualquer $t < s + m - 1$ podemos encontrar $u \in H_{(t)}^{loc}(\Omega)$ tal que Lu=f numa vizinhança de K (se $s = \infty$ podemos tomar $t = \infty$).

Ver [H2, teorema 26.11.3].

Proposição 1.0.1 *Seja Ω variedade suave não compacta, paracompacta. Se L satisfaz a condição (P) e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ satisfaz $(L+a)u = 0$, sendo $a \in C^\infty(\Omega)$, então o suporte de u é uma união de órbitas de Sussmann da estrutura definida por L.*

Ver [Ho2, proposição 2.3].

Seja μ uma medida de Baire com suporte compacto em $\mathbb{C}$. Definimos a transformada de Cauchy $\hat{\mu}$ de μ por

$$\hat{\mu}(z) = \int \frac{1}{\zeta - z} \mathrm{d}\mu(\zeta), \quad z \in s(\mu)^c.$$

Lema 1.0.1 *Se μ é uma medida de Baire com suporte compacto em $\mathbb{C}$ e $\hat{\mu}(z) = 0$ q.t.p.-$dx\,dy$ então $\mu = 0$.*

Ver [W, lema 2.7]

Lema 1.0.2 *Seja γ uma curva retificável e suponha que φ seja uma função definida e continua sobre $\{\gamma\}$. Para cada $m \geq 1$ seja*

$$F_m(z) = \int_\gamma \varphi(w)(w - z)^{-m} dw \quad para \quad z \notin \{\gamma\}.$$

Então cada F_m é analítica sobre $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$ e $F_m'(z) = mF_{m+1}(z)$.

Ver [C, lema 6.3]

Teorema 1.0.5 *Se f_0 e f_1 são mergulhos (lineares por partes) homotópicos de S^1 em $\mathbb{T}^2$, de tal modo que $f_0(S^1)$ não é fronteira de um disco, então existe uma isotopia ambiente (linear por partes) de f_0 em f_1, a qual é a identidade fora de um subconjunto compacto de $\mathbb{T}^2$.*

Ver [E, teorema 2.1]

Teorema 1.0.6 *Seja $V \subset \Omega$ subvariedade compacta e $F : V \times I \to \Omega$ uma isotopia de V. Se ou $F(V \times I) \subset \partial\Omega$ ou $F(V \times I) \subset \Omega \setminus \partial\Omega$ então F estende-se a uma difeotopia de Ω tendo suporte compacto.*

Ver [Hi, teorema 1.3, capítulo 8]

Teorema 1.0.7 *Seja $U \subset \Omega$ subconjunto aberto e $A \subset U$ subconjunto compacto. Seja $F : U \times I \to \Omega$ uma isotopia de U tal que $\hat{F}(U \times I) \subset \Omega \times I$ é aberto. Então existe uma difeotopia de Ω tendo suporte compacto a qual é igual a F numa vizinhança de $A \times I$.*

Ver [Hi, teorema 1.4, capítulo 8]

Capítulo 2

Condição Necessária

Neste capítulo daremos uma condição necessária para que um campo da forma

$$L = \partial_t + (a(x,t) + ib(x,t))\partial_x, \quad a, b \in C^\infty(\mathbb{T}^2; \mathbb{R}),$$

sobre o toro $\mathbb{T}^2_{(x,t)} \simeq \mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z}^2$, satisfazendo a condição (P), que possui pelo menos uma órbita de Sussmann homotópica a $\{0\} \times S^1$, seja globalmente resolúvel. Para isso vamos explorar uma variante da técnica de violação de desigualdades desenvolvida em [BCP, lema 2.1], a qual é baseada na seguinte caracterização de operadores com imagem fechada devida a [Kö]:

- Sejam E, F espaços de Fréchet, com F separável. Então uma aplicação linear contínua $A : E \to F$ tem imagem fechada se, e somente se, a seguinte propriedade é satisfeita: dada $z_n \in {}^tA(F')$, com $z_n \to 0$ fracamente, existe $y_n \in F'$, $y_n \to 0$ fracamente, tal que ${}^tA(y_n) = z_n$.

Embora nosso objetivo neste trabalho seja estudar campos genuinamente complexos, isto é, campos que não são múltiplos de campos reais, o teorema 2.0.8 aplica-se também a campos reais.

Se $\varphi \in C^\infty(S^1)$ defina $\tilde{\varphi} \doteq \varphi \otimes 1_t \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$.

Lema 2.0.3 *Se L é globalmente resolúvel então dada qualquer seqüência* $\{\mu_n\}$ *em* $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$, *tal que* ${}^tL\mu_n \to 0$ *fracamente, existem* $C > 0$ *e* $N \in \mathbb{Z}_+$ *tais que*

$$|\mu_n\left[(a+ib)\tilde{\varphi}\right]| \leq C\|(a+ib)\tilde{\varphi}\|_{(N)},\ \forall\varphi \in \mathcal{C}^\infty(S^1),\ \int \varphi = 0,\ \forall n \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.0.1)$$

A demonstração deste lema será omitida, pois é uma simples adaptação da demonstração do [BCP, lema 2.1].

Seja $\mathcal{K}$ a união das órbitas de Sussmann unidimensionais periódicas da estrutura definida por L.

Teorema 2.0.8 *Suponhamos que exista* $x_0 \in S^1$ *tal que* $\{x_0\} \times S^1 \subset \partial\mathcal{K}$. *Se L é globalmente resolúvel e satisfaz a condição (P) então a+ib não é flat em* $\{x_0\} \times S^1$.

Demonstração:

É fácil ver que uma das seguintes situações ocorre:

$(\star.1)$ para qualquer aberto $V \supset \{x_0\} \times S^1$ existe γ, curva integral periódica de $\Re(L)$, contida em V tal que $b \circ \gamma \not\equiv 0$;

$(\star.2)$ para qualquer aberto $V \supset \{x_0\} \times S^1$, o conjunto $V \setminus (\{x_0\} \times S^1)$ contém alguma γ, curva integral periódica de $\Re(L)$, a qual é ω-limite (ou α-limite) de alguma curva integral não periódica de $\Re(L)$;

$(\star.3)$ existe γ, curva integral não periódica de $\Re(L)$, cujo conjunto ω-limite é $\omega(\gamma(s)) = \{x_0\} \times S^1$ (ou α-limite é $\alpha(\gamma(s)) = \{x_0\} \times S^1$).

Suponhamos que L seja globalmente resolúvel e que $a+ib$ seja flat em $\{x_0\}\times S^1$. Nossa demonstração seguirá analisando separadamente cada um dos três casos citados acima. Porém, antes disso, faremos algumas considerações gerais.

Consideremos (x_n) uma seqüência estritamente decrescente convergindo para x_0, com $x_n - x_0 < \dfrac{2}{3}$. Seja $\varphi \in C_0^\infty((-1,1))$, $\varphi \equiv 1$ sobre $\left[0, \dfrac{3}{4}\right]$, $\varphi \geq 0$

sobre $\left[-\frac{1}{2},1\right]$ e $\varphi \leq 0$ sobre $\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$, tal que $\int \varphi = 0$. Definamos a seguinte seqüência de funções:

$$\varphi_n(x) = \varphi\left(\frac{2}{3}\frac{x-x_0}{x_n-x_0}\right),\ n \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.0.2}$$

Notemos que

$$\frac{2}{3}\frac{x-x_0}{x_n-x_0} < 1 \Leftrightarrow x - x_0 < \frac{3}{2}(x_n - x_0) \Leftrightarrow x < \frac{3x_n - x_0}{2}$$

e

$$\frac{2}{3}\frac{x-x_0}{x_n-x_0} > -1 \Leftrightarrow x - x_0 > \frac{3}{2}(-x_n + x_0) \Leftrightarrow x > \frac{5x_0 - 3x_n}{2}.$$

Logo, $s(\varphi_n) \subset \left(\frac{5x_0-3x_n}{2}, \frac{3x_n-x_0}{2}\right)$. Além disso, $\frac{5x_0-3x_n}{2} < x_0 < x_n < \frac{3x_n-x_0}{2}$ e $\varphi_n \equiv 1$ sobre $\left[x_0, \frac{9x_n - x_0}{8}\right]$. Como $a = O(|x-x_0|^2)$, podemos encontrar uma vizinhança $\mathcal{U} \times S^1$ de $\{x_0\} \times S^1$ tal que, para qualquer $(x,t) \in \mathcal{U} \times S^1$ temos, $|a(x,t)| < \frac{1}{16\pi C'}|x-x_0|$; aqui C' é a constante de Lipschitz da função ϕ sobre $S^1 \times [0,2\pi]$, sendo ϕ tal que $\gamma_{(x,0)}(s) = (\phi(x,s),s)$ é a curva integral de $\Re(L)$ com ponto incial $(x,0)$. É fácil ver que existe um aberto $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ tal que para qualquer $(x,0) \in \mathcal{U}' \times S^1$ tem-se $(\phi(x,s),s) \in \mathcal{U} \times S^1$ se $0 \leq s \leq 2\pi$. Assim, para qualquer $(x,0) \in \mathcal{U}' \times S^1$ e $0 \leq s \leq 2\pi$, temos

$$|\phi(x,s) - x| \leq \frac{1}{8}|x - x_0|. \tag{2.0.3}$$

De fato, $|\phi(x,s) - x| = |\phi(x,s) - \phi(x,0)| \leq |a(\phi(x,s'),s')|2\pi \leq 2\pi\frac{1}{16\pi C'}|\phi(x,s') - x_0| = \frac{1}{8C'}|\phi(x,s') - \phi(x_0,s')| \leq \frac{1}{8C'}C'|x-x_0| = \frac{1}{8}|x-x_0|$. Logo, se $x \in \mathcal{U}'$, $x > x_0$ e $0 \leq s \leq 2\pi$, então

$$\phi(x,s) = \phi(x,s) - x + x \leq \frac{x - x_0}{8} + x = \frac{9x - x_0}{8}$$

e, conseqüentemente,

$$x_0 < \phi(x,s) \leq \frac{9x - x_0}{8}. \tag{2.0.4}$$

Passando a uma subseqüência, se necessário, podemos assumir que a seqüência $\{(x_n,0)\}\in\mathcal{U}'\times S^1$.

Definamos $\tilde{\varphi}_n(x,t)=\varphi_n(x)\otimes 1_t$. Dado $N\in\mathbb{N}$, por um simples cálculo, é possível obtermos constantes positivas C_1 e C_2, dependendo de N, tais que as seguintes desigualdades sejam satisfeitas:

$$|\varphi_n^{(j)}(x)|\leq C_1|x_n-x_0|^{-j},\ \text{para qualquer } j\leq N; \tag{2.0.5}$$

$$|\partial^\alpha(a+ib)(x,t)|\leq C_2|x-x_0|^{N+3},\ \text{para qualquer } |\alpha|\leq N\ \forall\ t\in S^1. \tag{2.0.6}$$

Em particular, das desigualdades (2.0.5) e (2.0.6) obtemos, para cada $N\in\mathbb{N}$ dado, a seguinte estimativa:

$$\|(a+ib)\tilde{\varphi}_n\|_{(N)}\leq C'|x_n-x_0|^3,\ n\in\mathbb{Z}_+. \tag{2.0.7}$$

Um fato importante que será usado com freqüência no decorrer desta demonstração é que graças a condição (P) temos

$$\left|\int_{r_1}^{r_2} b\circ\gamma_{(x,0)}(s)ds\right|=\int_{r_1}^{r_2}|b\circ\gamma_{(x,0)}(s)|ds, \tag{2.0.8}$$

sendo $r_1,r_2<\infty$ quaisquer, para qualquer curva integral $\gamma_{(x,0)}$ de $\Re(L)$.

No decorrer desta demonstração vamos supor que as curvas dadas nas respectivas hipóteses estão à direita de $\{x_0\}\times S^1$ (caso contrário a demonstração segue de modo análogo).

Suponhamos que ocorra $(\star.1)$. Então, podemos encontrar uma seqüência $((x_n,0))$, sendo (x_n) estritamente decrescente convergindo para x_0, tal que em cada $(x_n,0)$ passe uma curva integral periódica de $\Re(L)$, $\gamma_n(s)=\gamma_{(x_n,0)}(s)$, $s\in[0,2\pi]$, com $b\circ\gamma_n\not\equiv 0$. Consideremos a seqüência de funções $(\tilde{\varphi}_n)$, dada por (2.0.2), definida para esta seqüência (x_n).

Definamos

$$\mu_n(\varphi)\doteq\alpha_n\int_0^{2\pi}\varphi\circ\gamma_n(s)ds,\quad\forall\ \varphi\in C^\infty(\mathbb{T}^2),$$

sendo $\alpha_n = \dfrac{1-\cos(x_n - x_0)}{\int_0^{2\pi} |b\circ\gamma_n|(s)ds}$. Evidentemente $\mu_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$. Além disso, se $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$, temos:

$$ {}^tL\mu_n(\varphi) = \alpha_n\left(\int_0^{2\pi}(\partial_t\varphi + a\partial_x\varphi)\circ\gamma_n(s)ds + i\int_0^{2\pi}(b\partial_x\varphi)\circ\gamma_n(s)ds\right) = $$

$$ = \alpha_n\left(\int_0^{2\pi}(\varphi\circ\gamma_n)'(s)ds + i\int_0^{2\pi}(b\partial_x\varphi)\circ\gamma_n(s)ds\right). $$

Porém, $\displaystyle\int_0^{2\pi}(\varphi\circ\gamma_n)'(s)ds = \varphi\circ\gamma_n(2\pi) - \varphi\circ\gamma_n(0) = 0$. Assim, temos

$$ |{}^tL\mu_n(\varphi)| \leq \alpha_n \sup_{\mathbb{T}^2}|\partial_x\varphi|\int_0^{2\pi}|b\circ\gamma_n(s)|ds = (1-\cos(x_n - x_0))\sup_{\mathbb{T}^2}|\partial_x\varphi|. $$

Portanto, ${}^tL\mu_n \to 0$ fracamente. Como, por (2.0.4), temos $\tilde{\varphi}_n\circ\gamma_n \equiv 1$, fazendo uso de (2.0.8) e das desigualdades (2.0.1) e (2.0.7) obtemos

$$ 1-\cos(x_n - x_0) = \frac{1-\cos(x_n - x_0)}{\int_0^{2\pi}|b\circ\gamma_n(s)|ds}\left|\int_0^{2\pi}(b\tilde{\varphi}_n)\circ\gamma_n(s)ds\right| = $$

$$ = \alpha_n\left|\int_0^{2\pi}(b.\tilde{\varphi}_n)\circ\gamma_n(s)ds\right| \leq |\mu_n[(a+ib)\tilde{\varphi}_n]| \leq CC'|x_n - x_0|^3, $$

a qual é uma contradição. □

Suponhamos, agora, que ocorra $(\star.2)$. Então, podemos assumir que existem seqüências (x_n), (x'_n) e (x''_n) estritamente decrescentes convergindo para x_0, tal que em cada $(x_n, 0)$ passa uma curva integral não periódica de $\Re(L)$, $\gamma_n = \gamma_{(x_n,0)}$, satisfazendo: $x_n \in (x''_n, x'_n)$, $\omega((x_n,0)) = \gamma_{(x''_n,0)}([0,2\pi])$ e $\alpha((x_n,0)) = \gamma_{(x'_n,0)}([0,2\pi])$ (ou $\omega((x_n,0)) = \gamma_{(x'_n,0)}([0,2\pi])$ e $\alpha((x_n,0)) = \gamma_{(x''_n,0)}([0,2\pi])$), sendo que $\gamma_{(x'_n,0)}$ e $\gamma_{(x''_n,0)}$ são curvas integrais periódicas de $\Re(L)$. Logo, podemos escolher $s_n < s'_n \in \mathbb{R}$ tais que $\gamma_n(s_n)$ e $\gamma_n(s'_n)$ pertençam a $S^1\times\{0\}$ e, além disso,

$$ \frac{n}{n+1} \leq \frac{|\phi(x_n, s'_n) - \phi(x_n, s_n)|}{x'_n - x''_n} < 1. $$

Consideremos a seqüência de funções (φ_n), dada por (2.0.2), definida para a seqüência (x'_n). Passando a uma subseqüência, se necessário, podemos supor que ocorre uma das duas situações seguintes:

i) $\displaystyle\int_{s_n}^{s_n'} |b\circ\gamma_n|(s)ds \leq x_n' - x_n''$, $\forall n$;

ii) $\displaystyle\int_{s_n}^{s_n'} |b\circ\gamma_n|(s)ds > x_n' - x_n''$, $\forall n$.

Suponhamos que o ítem *i)* seja satisfeito. Definamos

$$\mu_n(\varphi) \doteq \frac{1-\cos(x_n'-x_0)}{x_n'-x_n''}\int_{s_n}^{s_n'} \varphi\circ\gamma_n(s)ds, \quad \forall\ \varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^2).$$

Evidentemente $\mu_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$. Além disso, se $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$, temos:

$${}^tL\mu_n(\varphi) = \frac{1-\cos(x_n'-x_0)}{x_n'-x_n''}\left(\int_{s_n}^{s_n'} (\varphi\circ\gamma_n)'(s)ds + i\int_{s_n}^{s_n'} (b\partial_x\varphi)\circ\gamma_n(s)ds\right).$$

Como $|\varphi(x,t)-\varphi(y,t)| \leq K|x-y|$, temos

$$\begin{aligned}|{}^tL\mu_n(\varphi)| \leq{}& \frac{1-\cos(x_n'-x_0)}{x_n'-x_n''}\ |\varphi(\gamma_n(s_n')) - \varphi(\gamma_n(s_n))| + \\ &+\frac{1-\cos(x_n'-x_0)}{x_n'-x_n''}\ \sup_{\mathbb{T}^2}|\partial_x\varphi|\int_{s_n}^{s_n'} |b\circ\gamma_n(s)|ds \leq \\ &\leq \frac{1-\cos(x_n'-x_0)}{x_n'-x_n''}\ K|\phi(x_n,s_n') - \phi(x_n,s_n)| + \\ &+\frac{1-\cos(x_n'-x_0)}{x_n'-x_n''}\ \sup_{\mathbb{T}^2}|\partial_x\varphi|\int_{s_n}^{s_n'} |b\circ\gamma_n(s)|ds.\end{aligned}$$

e, portanto, ${}^tL\mu_n \to 0$ fracamente. Como, por (2.0.4), temos $\tilde{\varphi}_n\circ\gamma_n \equiv 1$, usando as desigualdades (2.0.1) e (2.0.7), obtemos

$$\frac{n}{n+1}(1-\cos(x_n'-x_0)) \leq (1-\cos(x_n'-x_0))\frac{|\phi(x_n,s_n')-\phi(x_n,s_n)|}{x_n'-x_n''} =$$

$$= \frac{1-\cos(x_n'-x_0)}{x_n'-x_n''}\left|\int_{s_n}^{s_n'} (a\tilde{\varphi}_n)\circ\gamma_n(s)\right| ds \leq |\mu_n[(a+ib)\tilde{\varphi}_n]| \leq CC'|x_n'-x_0|^3.$$

Logo,

$$1-\cos(x_n'-x_0) \leq \frac{n+1}{n}\ CC'|x_n'-x_0|^3 \leq 2C'|x_n'-x_0|^3,$$

a qual é uma contradição.

Suponhamos, agora, que *ii)* seja satisfeito. Então,

$$\int_{s_n}^{s_n'} |b\circ\gamma_n|(s)ds > x_n'-x_n'' > |\phi(x_n,s_n')-\phi(x_n,s_n)|.$$

Definamos

$$\mu_n(\varphi) \doteq \frac{1-\cos(x_n'-x_0)}{\int_{s_n}^{s_n'}|b\circ\gamma_n|(s)ds}\int_{s_n}^{s_n'}\varphi\circ\gamma_n(s)ds, \quad \forall\,\varphi\in C^\infty(\mathbb{T}^2).$$

Evidentemente $\mu_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$. Além disso, se $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$, temos:

$${}^tL\mu_n(\varphi) = \frac{1-\cos(x_n'-x_0)}{\int_{s_n}^{s_n'}|b\circ\gamma_n|(s)ds}\left(\int_{s_n}^{s_n'}(\varphi\circ\gamma_n)'(s)ds + i\int_{s_n}^{s_n'}(b\partial_x\varphi)\circ\gamma_n(s)ds\right).$$

Como $|\varphi(x,t)-\varphi(y,t)| \le K|x-y|$, temos

$$|{}^tL\mu_n(\varphi)| \le \frac{1-\cos(x_n'-x_0)}{\int_{s_n}^{s_n'}|b\circ\gamma_n|(s)ds}\,|\varphi(\gamma_n(s_n'))-\varphi(\gamma_n(s_n))| +$$

$$+\frac{1-\cos(x_n'-x_0)}{\int_{s_n}^{s_n'}|b\circ\gamma_n|(s)ds}\,\sup_{\mathbb{T}^2}|\partial_x\varphi|\int_{s_n}^{s_n'}|b\circ\gamma_n|(s)ds \le$$

$$\le \frac{1-\cos(x_n'-x_0)}{\int_{s_n}^{s_n'}|b\circ\gamma_n|(s)ds}\,K|\phi(x_n,s_n')-\phi(x_n,s_n)| +$$

$$+(1-\cos(x_n'-x_0))\,\sup_{\mathbb{T}^2}|\partial_x\varphi|$$

e, portanto, ${}^tL\mu_n \to 0$ fracamente. Como, por (2.0.4), temos $\tilde{\varphi}_n\circ\gamma_n \equiv 1$, usando (2.0.8) e as desigualdades (2.0.1) e (2.0.7), obtemos

$$1-\cos(x_n'-x_0) = \frac{1-\cos(x_n'-x_0)}{\int_{s_n}^{s_n'}|b\circ\gamma_n(s)|ds}\int_{s_n}^{s_n'}|(b\tilde{\varphi}_n)\circ\gamma_n(s)|ds \le$$

$$\le |\mu_n[(a+ib)\tilde{\varphi}_n]| \le CC'|x_n-x_0|^3,$$

a qual é uma contradição. □

Finalmente, suponhamos que ocorra ($\star$.3). Podemos assumir que existe uma seqüência (x_n), estritamente decrescente convergindo para x_0, tal que em cada $(x_n, 0)$ passa uma curva integral de $\Re(L)$, $\gamma_n(s) = \gamma_{(x_n,0)}(s) = (\phi(x_n,s),s)$, sendo $\omega((x_n,0)) = \{x_0\}\times S^1$ (caso contrário existe uma seqüência de tais curvas com $\alpha((x_n,0)) = \{x_0\}\times S^1$ e a demonstração segue de modo análogo). Consideremos a seqüência de funções, dada por (2.0.2), definida para esta seqüência (x_n). Para cada n escolhamos $s_n \in \mathbb{R}_+$ tal que

$(x_n', 0) = \gamma_{(x_n,0)}(s_n)$ satisfaça $|x_n' - x_0| < |x_n - x_0|^3$. Passando a uma subseqüência, se necessário, podemos assumir que ocorre uma das duas situações a seguintes:

i) $\int_0^{s_n} |b \circ \gamma_n|(s)ds \to 0$;

ii) $\int_0^{s_n} |b \circ \gamma_n|(s)ds \neq 0$, $\forall n$, e $\int_0^{s_n} |b \circ \gamma_n|(s)ds \to C > 0$, sendo que C pode ser igual a ∞.

Suponhamos que o ítem *i)* seja satisfeito. Definamos

$$\mu_n(\varphi) \doteq \int_0^{s_n} \varphi \circ \gamma_n(s)ds, \quad \forall\ \varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^2).$$

Evidentemente $\mu_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$. Além disso, se $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$, temos:

$${}^tL\mu_n(\varphi) = \int_0^{s_n} (\varphi \circ \gamma_n)'(s)ds + i \int_0^{s_n} (b\partial_x\varphi) \circ \gamma_n(s)ds,$$

e, assim,

$$|{}^tL\mu_n(\varphi)| \leq |\varphi(\gamma_n(s_n)) - \varphi(\gamma_n(0))| + \sup_{\mathbb{T}^2} |\partial_x\varphi| \int_0^{s_n} |b \circ \gamma_n(s)|ds.$$

Portanto, ${}^tL\mu_n \to 0$ fracamente. Logo, pelas desigualdades (2.0.1) e (2.0.7), obtemos

$$|\mu_n[(a + ib)\tilde{\varphi}_n]| \leq C||(a + ib)\tilde{\varphi}_n||_{(N)} \leq CC'|x_n - x_0|^3.$$

Além disso, como (2.0.4) implica $\tilde{\varphi}_n \circ \gamma_n|_{[0,\infty)} \equiv 1$, temos

$$|\mu_n[(a + ib)\tilde{\varphi}_n]| \geq \left|\int_0^{s_n} (a\tilde{\varphi}_n) \circ \gamma_n(s)ds\right| = \left|\int_0^{s_n} a \circ \gamma_n(s)ds\right| =$$

$$= \left|\int_0^{s_n} \partial_s\phi(x_n, s)ds\right| = |x_n' - x_n| = x_n - x_n' = x_n - x_0 - (x_n' - x_0).$$

Logo,

$$|x_n - x_0| \leq (CC' + 1)|x_n - x_0|^3,$$

a qual é uma contradição.

Suponhamos, agora, que $ii)$ seja satisfeito. Definamos,

$$\mu_n(\varphi) \doteq \frac{1-\cos(x_n - x_0)}{\int_0^{s_n} |b \circ \gamma_n|(s)ds} \int_0^{s_n} \varphi \circ \gamma_n(s)ds, \quad \forall\, \varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^2).$$

Evidentemente $\mu_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$. Além disso, se $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$, temos:

$${}^tL\mu_n(\varphi) = \frac{1-\cos(x_n - x_0)}{\int_0^{s_n} |b \circ \gamma_n|(s)ds} \left(\varphi(\gamma_n(s_n)) - \varphi(\gamma_n(0)) + i \int_0^{s_n} (b\partial_x\varphi) \circ \gamma_n(s)ds \right).$$

Assim,

$$|{}^tL\mu_n(\varphi)| \leq (1-\cos(x_n - x_0)) \left(\frac{|\varphi(\gamma_n(s_n)) - \varphi(\gamma_n(0))|}{\int_0^{s_n} |b \circ \gamma_n|(s)ds} + \sup_{\mathbb{T}^2} |\partial_x\varphi| \right)$$

e, portanto, ${}^tL\mu_n \to 0$ fracamente. Como, por (2.0.4), temos $\tilde{\varphi}_n \circ \gamma_{n|_{[0,\infty)}} \equiv 1$, usando (2.0.8) e as desigualdades (2.0.1) e (2.0.7), obtemos

$$1-\cos(x_n - x_0) = \frac{1-\cos(x_n - x_0)}{\int_0^{s_n} |b \circ \gamma_n(s)|ds} \left| \int_0^{s_n} (b\tilde{\varphi}_n) \circ \gamma_n(s)ds \right| \leq$$

$$\leq |\mu_n[(a+ib)\tilde{\varphi}_n]| \leq C||(a+ib)\tilde{\varphi}_n||_{(N)} \leq CC'|x_n - x_0|^3,$$

a qual é uma contradição. □

Assim a demonstração está completa. ■

O fato de existir $\{x_0\} \times S^1 \subset \partial\mathcal{K}$, para algum $x_0 \in S^1$, é um caso particular do problema proposto no começo deste capítulo. Em geral, quando $\partial\mathcal{K} \neq \emptyset$, temos $\gamma \subset \mathcal{K}$, para alguma γ curva integral periódica de $\Re(L)$. Porém, pelos teoremas 1.0.5 e 1.0.6 obtemos um difeomorfismo de $\mathbb{T}^2$ em $\mathbb{T}^2$ tal que γ, nas novas coordenadas, pode ser escrita como $\gamma(s) = (x_0, s),\ s \in [0, 2\pi]$, para algum $x_0 \in S^1$ e tal que L, nas novas coordenadas, pode ser escrito da forma

$$L = \partial_t + (\widetilde{a}(x,t) + i\widetilde{b}(x,t))\partial_x, \quad \widetilde{a}, \widetilde{b} \in C^\infty(V; \mathbb{R}),$$

numa vizinhança V de $\{x_0\} \times S^1$.

Como os argumentos dados no teorema 2.0.8 são restritos a uma vizinhança de $\{x_0\} \times S^1$ é fácil ver que a respectiva demonstração se aplica a todos os campos referidos neste capítulo, para os quais $\partial\mathcal{K} \neq \emptyset$, utilizando sua forma no aberto V. Com nossa hipótese de $\mathcal{K} \neq \emptyset$, se $\partial\mathcal{K} = \emptyset$ então L é real e possui apenas curvas integrais periódicas. Neste caso, usamos o fluxo para obter um difeomorfismo que transforma o campo L no campo ∂_t, o qual é globalmente resolúvel (ver [GW], [He], [Ho1]).

Corolário 2.0.1 *Se $L = \partial_t + (a(x) + ib(x))\partial_x$, com $a + ib \not\equiv 0$, é globalmente resolúvel e satisfaz a condição (P) então $a + ib$ possui apenas zeros de ordem finita.*

Existe uma outra demonstração deste corolário, a qual é válida mesmo que L não satisfaça a condição (P); tal demonstração é uma simples adaptação da prova do teorema de necessidade de [BP, pág.137], bastando trocar a por $a+ib$.

Nota:

Se a estrutura definida por L possui apenas um número finito de órbitas unidimensionais periódicas homotópicas a $\{0\} \times S^1$, então não existe perda de generalidade em assumir que todas são da forma $\{x\} \times S^1$ (ver 1.0.5 e 1.0.7). Será que podemos assumir o mesmo quando o número de órbitas unidimensionais periódicas homotópicas a $\{0\} \times S^1$ não é finito? Se a resposta for afirmativa, então seguirá que: se L é globalmente resolúvel então L possui apenas um número finito de órbitas unidimensionais periódicas homotópicas a $\{0\} \times S^1$ (ver teorema 2.0.8).

Capítulo 3

Condições Suficientes: 1ª parte

Este e o próximo capítulo têm como objetivo obter condições suficientes para que um campo da forma

$$L = \partial_t + (a(x,t) + ib(x,t))\partial_x, \quad a, b \in C^\infty(\mathbb{T}^2; \mathbb{R}), \quad b \not\equiv 0,$$

sobre o toro $\mathbb{T}^2_{(x,t)} \simeq \mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z}^2$, satisfazendo a condição (P), que possui pelo menos uma órbita de Sussmann homotópica a $\{0\} \times S^1$, seja fortemente resolúvel. Em particular, teremos obtido condições suficientes para que L seja globalmente resolúvel. Vamos nos restringir ao caso em que $\Re(L)$ possui alguma curva integral não periódica; caso contrário o fluxo reduz nosso estudo ao estudo feito em [BCP]. Na primeira seção deste capítulo (seção 3.1) enunciaremos um teorema devido a [BCP, teorema 3.1], o qual nos permite substituir o problema de resolubilidade forte por um problema de resolubilidade perto do conjunto característico. Na seção 3.2 estudaremos o caso especial, $L = \partial_t + (a(x) + ib(x))\partial_x$, o qual nos permitirá entender o caso geral, isto é, quando a e b dependem de (x,t) (conteúdo do capítulo 4). Desde já, assumiremos que a palavra órbita significa órbita de Sussmann. Como conseqüência imediata do trabalho [Sc] (ver também [Ho4]) temos o seguinte teorema:

Teorema 3.0.9 *Se γ é uma curva integral do campo vetorial $\partial_t + a(x,t)\partial_x$, sobre $\mathbb{T}^2$, com a real, então temos apenas duas possibilidades para seu conjunto α-limite ou ω-limite:*

i) é uma curva integral periódica;

ii) é igual a $\mathbb{T}^2$.

De posse desse teorema, é fácil ver que se a estrutura definida por $L = \partial_t + (a(x,t) + ib(x,t))\partial_x$, $a, b \in C^\infty(\mathbb{T}^2; \mathbb{R})$, com $b \not\equiv 0$, satisfazendo a condição (P), não possui órbitas de Sussmann unidimensionais periódicas então $\mathbb{T}^2$ é a única órbita e, portanto, L é fortemente resolúvel (teorema 1.0.4). Por isso este trabalho se dirige aos campos para os quais existe órbita unidimensional periódica. Nosso estudo será feito no caso particular em que essa órbita (e, portanto, qualquer uma delas) é homotópica a $\{0\} \times S^1$.

3.1 Resolubilidade forte versus semi-global

Seja $\mathcal{K}$ o conjunto formado pela união das curvas integrais periódicas de $\Re(L)$, para as quais b se anula identicamente, ou seja, $b \circ \gamma \equiv 0$, para qualquer $\gamma \subset \mathcal{K}$. Suponhamos que $\mathcal{K} = \bigcup_{i=1}^{q} \gamma_i$, para algum q, e definamos $\mathcal{U} = \mathbb{T}^2 \setminus \mathcal{K}$.

Observação 3.1.1 *Essa enumeração das curvas em $\mathcal{K}$ é dada de forma que não exista γ_k entre γ_i e γ_{i+1}. Assim, o aberto limitado por γ_i e γ_{i+1} é uma componente conexa de $\mathcal{U}$.*

Seja V uma componente conexa de $\mathcal{U}$. Então, V é uma órbita bidimensional se, e somente se, para cada γ, curva integral de $\Re(L)$ contida em V, existe $s_0 = s_0(\gamma) \in \mathbb{R}$ tal que $b \circ \gamma(s_0) \neq 0$. De fato. A necessidade é óbvia. A suficiência vem do fato de que qualquer ponto de V está sobre uma órbita bidimensional, a qual é aberta e conexa. Conseqüentemente, V é tal órbita. Para ilustrar esse fato daremos os seguintes exemplos:

Exemplo 3.1.1 *Se existe curva integral periódica de* $\Re(L)$ *contida em* V *então* V *é a única órbita da estrutura definida por* $L_{|_V}$*.*

De fato, se $p \in V$ então pelo menos uma das curvas integrais periódicas $\omega(p)$ e $\alpha(p)$ de $\Re(L)$ é tal que, sobre ela, $b \not\equiv 0$. ∎

Exemplo 3.1.2 *Suponhamos que em* V *não exista curva integral periódica de* $\Re(L)$*. Tomemos* $\gamma_i \subset V$*. Definamos* Γ *a translação de* γ_i *tal que* $\Gamma \subset V$*. Se* $b(x,t) \neq 0$*,* $\forall (x,t) \in \Gamma$*, então* V *é a única órbita da estrutura definida por* $L_{|_V}$*. (Evidentemente que no caso em que* $\mathcal{U}$ *é conexo, isto é,* $q = 1$*, temos* $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$*, sendo* $\Gamma^+ \cap \Gamma^- = \emptyset$*. Assim, para que* $\mathcal{U}$ *seja órbita bidimensional basta que* $b(x,t) \neq 0$*, para qualquer* $(x,t) \in \Gamma^+$ *ou para qualquer* $(x,t) \in \Gamma^-$*).*

De fato, pois qualquer curva integral de $\Re(L)$, em V, intercepta Γ (resp. Γ^+ ou Γ^-) em pelo menos um ponto. ∎

Com a hipótese de que cada componente conexa de $\mathcal{U}$ é uma órbita bidimensional podemos demonstrar os seguintes lemas:

Lema 3.1.1 *Suponha que* L *satisfaça a condição (P). Seja* $s \in \mathbb{R}$*. Se* $\mu \in \mathcal{D}'(\mathcal{U})$ *e* ${}^tL\mu \in H^s$ *então* $\mu \in H^s$*.*

Demonstração:

A demonstração é uma conseqüência imediata de [H1, teorema 3.1]. Seja $(x_0, t_0) \in \mathcal{U}$. Então (x_0, t_0) pertence a alguma componente conexa V. Logo, existe s_0 tal que $b(\gamma(s_0)) \neq 0$, sendo γ curva integral de $\Re(L)$, passando por (x_0, t_0). Em particular, L é elíptico em $\gamma(s_0)$, e, portanto, $\mu \in H^{s+1} \subset H^s$, em $\gamma(s_0)$. Como b tem sinal constante numa vizinhança de $\gamma([0, s_0])$, obtemos que $\mu \in H^s$ em (x_0, t_0). ∎

Lema 3.1.2 *Seja $\mu \in \mathcal{D}'(V)$ (V componente conexa de $\mathcal{U}$) tal que ${}^tL\mu = 0$. Se $\mu = 0$ em algum subconjunto aberto de V então $\mu \equiv 0$.*

Demonstração:

O suporte de μ é uma união de órbitas (ver proposição 1.0.1). Logo, $\mu \equiv 0$. ■

Como $\mathcal{K}$ é finito, com o auxilio dos teoremas 1.0.5 e 1.0.7, obtemos um difeomorfismo de $\mathbb{T}^2$ em $\mathbb{T}^2$ tal que nas novas coordenadas $\mathcal{K}$ se escreve como $\mathcal{K} = \mathcal{N} \times S^1$, sendo

$$\mathcal{N} = \{x \in S^1; a(x,t) + ib(x,t) = 0, \forall\ t \in S^1\} = \{x_1, ..., x_q\},$$

e tal que numa vizinhança V_i de cada $\{x_i\} \times S^1$, nas novas coordenadas, L se escreve como

$$L = \partial_t + (\widetilde{a}_i(x,t) + i\widetilde{b}_i(x,t))\partial_x, \quad \text{sendo} \quad \widetilde{a}_i, \widetilde{b}_i \in C^\infty(V_i; \mathbb{R}).$$

Assim, $\mathcal{U} = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{q} J_i \times S^1$, sendo $J_i = (x_i, x_{i+1})$. Para cada $x_i \in \mathcal{N}$ definamos

$$\mathcal{F}(x_i) = \ker({}^tL) \cap \mathcal{E}'(\{x_i\} \times S^1).$$

Se $J_{i-1} \times S^1$ e $J_i \times S^1$ são órbitas bidimensionais e $U = (x_i - \delta, x_i + \delta) \times S^1$, com $\delta > 0$ pequeno, então, pelo lema 3.1.2, obtemos $\ker({}^tL) \cap \mathcal{E}'(\overline{U}) = \mathcal{F}(x_i)$.

Com auxílio dos lemas 3.1.1 e 3.1.2, é possível demonstrarmos o seguinte teorema (devido a [BCP, teorema 3.1]):

Teorema 3.1.1 *Suponha que L satisfaça a condição (P), que $\mathcal{K}$ seja finito e que cada componente conexa de $\mathcal{U}$ seja uma órbita bidimensional. Então L é fortemente resolúvel se, e somente se, ambas as propriedades a seguir são satisfeitas, para cada $x_i \in \mathcal{N}$:*

($\star$) $dim\mathcal{F}(x_i) < \infty$;

($\star\star$) para qualquer $f \in C^\infty(\{x_i\} \times S^1), f \in \mathcal{F}(x_i)^\circ$, existe $u \in C^\infty(\{x_i\} \times S^1)$ resolvendo a equação $Lu = f$ numa vizinhança de $\{x_i\} \times S^1$.

Observação 3.1.2 *A hipótese de que cada componente conexa de $\mathcal{U}$ é uma órbita bidimensional, no teorema 3.1.1, é essencial para que L seja fortemente resolúvel. De fato, se $L = \partial_t+(a(x)+ib(x))\partial_x$, negar tal hipótese significa dizer que $b_{|_{J_i \times S^1}} \equiv 0$, para algum i. Assim, é possível construir uma distribuição h "bem especial", como em [BP], para mostrar que $dim(\ker\ {}^tL) = \infty$.*

3.2 Caso Especial

Para que $L = \partial_t + (a(x) + ib(x))\partial_x$ seja globalmente resolúvel é necessário que o número de órbitas unidimensionais periódicas, da estrutura definida por L, seja finito e que, além disso, sobre cada uma $a + ib$ não seja flat (corolário 2.0.1). Sendo assim, não é difícil imaginarmos que as condições para que valha a recíproca do corolário 2.0.1 estejam relacionadas com a ordem dos zeros da função $a + ib$. Definamos $\mathcal{K}$, $\mathcal{N}$ e $\mathcal{U}$ como na seção anterior. Nossa técnica de resolução baseia-se em utilizar o teorema 3.1.1; para isso vamos assumir que cada componente conexa de $\mathcal{U}$ é uma órbita bidimensional e que L satisfaz a condição (P). Dessa forma, dizer que V, componente conexa de $\mathcal{U}$, é uma órbita bidimensional, significa dizer que $b_{|_V} \not\equiv 0$.

Pelo teorema 3.1.1, mostrar que L é fortemente resolúvel é equivalente a verificar a validade de $(\star)$ e $(\star\star)$.

Lema 3.2.1 *Se numa vizinhança V_i de x_i temos $(a+ib)(x) = (x-x_i)^{n_i}a_0(x)+ i(x - x_i)^{m_i}b_0(x)$ com $a_0(x_i) \neq 0$ e $m_i \geq n_i \geq 1$, ou ainda, com $b_0(x_i) \neq 0$ e $n_i > m_i \geq 2$, então, para $m = \min\{m_i, n_i\}$, temos que as seguintes afirmações são verdadeiras:*

i) a equação Lu=f pode ser resolvida módulo funções flat em $\{x_i\} \times S^1$, desde que $(\delta_{x_i}^{(j)}(x) \otimes 1_t)(f) = 0$ para todo $0 \leq j \leq m - 1$;

ii) $\mathcal{F}(x_i)$ *é gerado pelas distribuições* $\delta^{(j)}_{x_i}(x) \otimes 1_t$, $0 \leq j \leq m-1$.

A demonstração do ítem $i)$ é análoga a do lema 2.1 de [BP] e a do ítem $ii)$ está feita no lema 4.1 de [BCP].

Estamos, finalmente, prontos para demonstrar o principal resultado desta seção.

Teorema 3.2.1 *Sob as hipóteses do lema 3.2.1 suponha que* $b \not\equiv 0$ *em cada* $J_i \times S^1$ *e que* L *satisfaça a condição (P). Segue que:*

i) se em cada x_i *temos* $a_0(x_i) \neq 0 \neq b_0(x_i)$ *e* $2 \leq m_i < 2n_i - 1$, *ou* $a_0(x_i) \neq 0$ *e* $b_0 \equiv 0$, *então* L *é fortemente resolúvel;*

ii) se $a_0(x_i) \neq 0$ *e* $m_i \geq 2n_i$, *com* $b_0 \not\equiv 0$ *em qualquer vizinhança de* $\{x_i\} \times S^1$, *para algum* x_i, *então* L *não é fortemente resolúvel.*

Demonstração:

O lema 3.2.1 prova que L satisfaz $(\star)$ e, além disso, que satisfaz $(\star\star)$ módulo funções flat em $\{x_i\}\times S^1$. Seja, então, f uma função flat em $\{x_i\}\times S^1$. Podemos assumir, sem perda de generalidade, $x_i = 0$. Note que $Lu(x,t) = f(x,t)$ numa vizinhança de $\{0\} \times S^1$ em $\mathbb{T}^2$ se, e somente se, a seqüência $(\hat{u}_k)$ (transformada parcial de Fourier com relação a variável t) é tal que $L_k\hat{u}_k(x) = \hat{f}_k(x)$, numa vizinhança de $x = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, sendo $L_k\hat{u}_k(x) = ik\hat{u}_k(x) + (a+ib)(x)(\hat{u}_k)'(x)$, e tal que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{u}_k e^{ikt}$ define uma função C^∞ numa vizinhança de $\{0\} \times S^1$. Usaremos esta última condição da afirmação acima para provar os ítens $i)$ e $ii)$ do teorema.

Demonstração do ítem i). Suponha que $b_0(0) \neq 0$. Para $k = 0$ temos que resolver $(a+ib)\dfrac{d}{dx}\hat{u}_0(x) = \hat{f}_0(x)$, isto é, $\dfrac{d}{dx}\hat{u}_0 = \dfrac{\hat{f}_0}{a+ib} \in C^\infty$, pois $\hat{f}_0$ é flat em $x = 0$. Portanto,

$$\hat{u}_0(x) = \int_0^x \frac{\hat{f}_0}{a+ib}(x)\mathrm{d}x$$

é solução numa vizinhança de $x = 0$.

Para $k \neq 0$ resolveremos, em primeiro lugar, $L_k \hat{u}_k(x) = \hat{f}_k(x)$ para $x \in (0, \delta)$, para algum $\delta > 0$ pequeno. Podemos assumir que $b \geq 0$ para tais valores de x. Usando fator integrante encontramos, para $x > 0$ e para cada $k > 0$,

$$\hat{u}_k(x) = \int_0^x e^{-ik(C(x)-C(y))} \frac{\hat{f}_k}{a+ib}(y)\mathrm{d}y$$

sendo

$$C(x) = -\int_x^\eta \frac{1}{a+ib}(y)\mathrm{d}y = -\int_x^\eta \frac{a}{a^2+b^2}(y)\mathrm{d}y + i\int_x^\eta \frac{b}{a^2+b^2}(y)\mathrm{d}y.$$

Logo,

$$|\hat{u}_k(x)| \leq \int_0^x e^{-k\int_y^x \frac{b}{a^2+b^2}(s)\mathrm{d}s} \left|\frac{\hat{f}_k}{a+ib}\right|(y)\mathrm{d}y$$

e, como $\dfrac{b}{a^2+b^2}(x) \geq 0$, temos

$$|\hat{u}_k(x)| \leq \int_0^x \left|\frac{\hat{f}_k}{a+ib}\right|(y)\mathrm{d}y = O(|x|^j), \forall j.$$

Usando novamente fator integrante, mudamos o ponto inicial e encontramos, para cada $x > 0$ e para cada $k < 0$,

$$\hat{u}_k(x) = -\int_x^\eta e^{-ik(C(x)-C(y))} \frac{\hat{f}_k}{a+ib}(y)\mathrm{d}y, \text{ sendo } C(x) \text{ como antes.}$$

Assim, para $0 < x < \dfrac{\eta}{2}$, temos

$$|\hat{u}_k(x)| \leq \int_x^\eta e^{k\int_x^y \frac{b}{a^2+b^2}(s)ds} \left|\frac{\hat{f}_k}{a+ib}\right|(y)\mathrm{d}y =$$

$$= \int_x^{2x} e^{k\int_x^y \frac{b}{a^2+b^2}(s)ds} \left|\frac{\hat{f}_k}{a+ib}\right|(y)\mathrm{d}y +$$

$$\int_{2x}^\eta e^{k\int_x^y \frac{b}{a^2+b^2}(s)ds} \left|\frac{\hat{f}_k}{a+ib}\right|(y)\mathrm{d}y.$$

Notemos que $\dfrac{b}{a^2+b^2}(x) = \dfrac{x^m b_0}{x^{2n}a_0^2 + x^{2m}b_0^2}(x)$. Portanto, podemos fazer as seguintes simplificações: se $2 \leq m \leq n$ então $\dfrac{b}{a^2+b^2}(x) = \dfrac{1}{x^m} \cdot \dfrac{b_0}{x^{2(n-m)}a_0^2 + b_0^2}(x)$;

se $n < m < 2n-1$ então $\dfrac{b}{a^2+b^2}(x) = \dfrac{x^m}{x^{2n}} \cdot \dfrac{b_0}{a_0^2 + x^{2(m-n)}b_0^2}(x) = \dfrac{1}{x^l} \cdot \dfrac{b_0}{a_0^2 + x^{2(m-n)}b_0^2}(x)$, para algum $l \geq 2$. Logo, podemos encontrar α, β reais positivos tais que

$$\alpha \leq \frac{b_0}{x^{2(n-m)}a_0^2 + b_0^2}(x) \left(\text{resp. } \frac{b_0}{a_0^2 + x^{2(m-n)}b_0^2}(x) \right) \leq \beta,$$

e, assim, para algum $l \geq 2$ e para $y \geq 2x$, temos

$$\int_x^y \frac{b}{a^2+b^2}(s)\mathrm{d}s \geq \alpha \int_x^y \frac{1}{s^l}\mathrm{d}s = -\frac{\alpha}{(l-1)s^{l-1}}|_x^y \geq -\frac{\alpha}{(l-1)s^{l-1}}|_x^{2x} =$$

$$= -\frac{\alpha}{(l-1)} \left(\frac{1}{(2x)^{l-1}} - \frac{1}{x^{l-1}} \right) = -\frac{\alpha}{(l-1)} \left(\frac{1-2^{l-1}}{(2x)^{l-1}} \right) = \frac{\alpha(2^{l-1}-1)}{2^{l-1}(l-1)} \cdot \frac{1}{x^{l-1}}.$$

Portanto,

$$|\hat{u}_k(x)| \leq \int_x^{2x} \left| \frac{\hat{f}_k}{a+ib} \right| (y)\mathrm{d}y + Me^{\frac{k\alpha(2^{l-1}-1)}{2^{l-1}(l-1)} \cdot \frac{1}{x^{l-1}}} = O(|x|^j), \forall j.$$

O processo para obter as soluções e estimativas, utilizado para $x > 0$, procede de modo análogo para $x < 0$.

Notemos que, se $b_0 \equiv 0$, numa vizinhança de $x = 0$, então encontramos, para cada $k \in \mathbb{Z}$, $\hat{u}_k(x) = \int_0^x e^{-ik\int_y^x \frac{1}{a}(s)ds} \dfrac{\hat{f}_k}{a}(y)\mathrm{d}y$ e, portanto, $|\hat{u}_k(x)| \leq \int_0^x \left| \dfrac{\hat{f}_k}{a} \right| (y)\mathrm{d}y$.

Pelas soluções e majorações encontradas, bem como majorações análogas para as derivadas de $\hat{u}_k$, fica evidente que, para cada $k \in \mathbb{Z}$, a função $\hat{u}_k$ é de classe C^∞ e é flat em $x = 0$; além disso, $(\hat{u}_k)$ é rapidamente decrescente quando $|k| \to \infty$. Portanto, tal seqüência define uma função $u \in C^\infty$, a qual é solução para $Lu = f$, numa vizinhança de $\{0\} \times S^1$.

Demonstração do ítem ii). Podemos assumir, fazendo uso da hipótese, $b_{|_{(-\delta,0)}} \not\equiv 0$, para qualquer $\delta > 0$, e $b(x) \geq 0$, se $x < 0$ é suficientemente próximo de 0. Caso contrário teremos $b_{|_{(0,\delta)}} \not\equiv 0$, para qualquer $\delta > 0$, e o resultado segue analogamente. Suponhamos que L seja resolúvel numa vizinhança $\mathcal{V} =$

$(-\delta,\delta)\times S^1$ de $\{0\}\times S^1$. Consideremos a seguinte seqüência de funções $(\hat{f}_k)$, $k\in\mathbb{Z}$:

$$\hat{f}_k(x)=g(x)\cdot(a+ib)(x)\cdot c_k\cdot\ e^{-ik\int_{x_0}^{x}\frac{a}{a^2+b^2}(y)dy},$$

sendo $x_0\in(0,\delta)$ tal que $b(x_0)>0$, (c_k) uma seqüência de números positivos rapidamente decrescente e

$$g(x)=\begin{cases}-e^{\frac{1}{x}}, & x<0\\ 0, & x\geq 0\end{cases}.$$

Tal seqüência $(\hat{f}_k)$ é rapidamente decrescente e, para cada k, $\hat{f}_k\in C^\infty(\{0\})$ e é flat em $x=0$. De fato. Evidentemente $\hat{f}_k$ é de classe C^∞, para cada $x\neq 0$. Considere $h_1(x)=g(x)\cdot(a+ib)(x)$ e $h_2(x)=e^{-ik\int_{x_0}^{x}\frac{a}{a^2+b^2}(y)dy}$. Como $h_1(x)$ é flat em $x=0$, temos $\dfrac{h_1^{(j)}}{p}(0)=0$, para qualquer j; aqui $p(x)$ é qualquer função em que $x=0$ é zero de ordem finita. Assim, $(h_1^{(j)}h_2^{(r)})(0^{\pm})=0$, pois $h_2\in C^\infty(x_0,0)\cap L^\infty[x_0,0]$. Logo,

$$\hat{f}_k^{(j)}(0^{\pm})=c_k\sum_{r\leq j}\binom{j}{r}(h_1^{(r)}h_2^{(j-r)})(0^{\pm})=0,\ \text{para cada } j,$$

e, portanto, $\hat{f}_k$ é de classe C^∞ e flat em $x=0$. Além disso, para cada j fixado,

$$|\hat{f}_k^{(j)}(x)|\leq\sum_{r\leq j}\binom{j}{r}|h_1^{(r)}h_2^{(j-r)}(x)c_k|\leq\sum_{r\leq j}C_{jr}||h_1^{(r)}q_{j-r}||_\infty.|k|^{j-r}.c_k\leq C_j|k|^jc_k,$$

sendo q_{j-r} somatório de derivadas de potências da função $\dfrac{a}{a^2+b^2}(x)$ e $C_j=\max\limits_{r\leq j}\{C_{jr}||h_1^{(r)}q_{j-r}||_\infty\}$. Porém, de (c_k) rapidamente decrescente, temos que dados $N,j\in\mathbb{N}$, existe $C'>0$ tal que $|c_k|\leq\dfrac{C'}{(1+|k|)^{N+j}}$, $\forall k$, e, portanto,

$$|\hat{f}_k^{(j)}(x)|\leq\frac{C_j''}{(1+|k|)^N},\forall k.$$

Desse modo, a seqüência $(\hat{f}_k)$ define uma função $f(x,t)$ de classe C^∞ em $\mathcal{V}$, flat em $\{0\}\times S^1$, a qual, evidentemente, pertence a $\mathcal{F}(0)^\circ$.

Mostraremos, a seguir, que não existe $u \in C^\infty$ tal que $Lu(x,t) = f(x,t)$, em $\mathcal{V}$. Resolvendo $L_k\hat{v}_k(x) = \hat{f}_k(x)$, para cada $k \neq 0$, obtemos $\hat{v}_k(x) \equiv 0$ se $x > 0$ e

$$\hat{v}_k(x) = -\int_x^0 e^{-ik(C(x)-C(y))}\frac{\hat{f}_k}{a+ib}(y)\mathrm{d}y,$$

sendo

$$C(x) = \int_\eta^x \frac{1}{a+ib}(y)\mathrm{d}y, \text{ se } x < 0,$$

pois $\dfrac{b}{a^2+b^2} \in L^1[\eta, 0]$. Assim,

$$\hat{v}_k(x_0) = -\int_{x_0}^0 g(y)c_k e^{k\int_{x_0}^y \frac{b}{a^2+b^2}(s)ds}\mathrm{d}y.$$

Como, por hipótese,

$$0 \leq \int_{x_0}^y \frac{b}{a^2+b^2}(s)\mathrm{d}s < \infty, \quad \forall y \in (x_0, 0),$$

temos que $y_1 \geq y_2$ implica

$$\int_{x_0}^{y_1} \frac{b}{a^2+b^2}(s)\mathrm{d}s \geq \int_{x_0}^{y_2} \frac{b}{a^2+b^2}(s)\mathrm{d}s.$$

Logo, se $k > 0$,

$$\hat{v}_k(x_0) \geq -\int_{\frac{x_0}{2}}^0 g(y)c_k e^{k\int_{x_0}^y \frac{b}{a^2+b^2}(s)ds}(y)\mathrm{d}y \geq$$

$$\geq -\int_{\frac{x_0}{2}}^0 g(y)c_k e^{k\int_{x_0}^{\frac{x_0}{2}} \frac{b}{a^2+b^2}(s)ds}\mathrm{d}y = -\int_{\frac{x_0}{2}}^0 e^{kM}g(y)c_k\mathrm{d}y = e^{kM}M'c_k.$$

Tome, na definição de $\hat{f}_k$, $c_k = e^{-Mk}$, para cada $k > 0$. Sendo assim, $(\hat{v}_k)$ não define uma função C^∞.

Um simples cálculo mostra que a solução geral da equação homogênea $L_kh_k(x) = 0$, para $x < 0$ e cada $k \neq 0$, é dada por:

$$h_k(x) = h_k(\eta)\cdot e^{-ik\int_\eta^x \frac{1}{a+ib}(y)dy} = h_k(\eta)\cdot e^{-ik\int_\eta^x \frac{a}{a^2+b^2}(y)dy}\cdot e^{-k\int_\eta^x \frac{b}{a^2+b^2}(y)dy}.$$

Se existe $u(x,t)$ tal que $Lu(x,t) = f(x,t)$ em $x < 0$ então $L_k\hat{u}_k(x) = \hat{f}_k(x)$ e $\hat{u}_k(x) = \hat{v}_k(x) + h_k(x)$, para cada $k \neq 0$. Assim, para $k > 0$, temos $|\hat{u}_k(x_0)| \geq$

$|\hat{v}_k(x_0)| - |h_k(x_0)| \geq M' - |h_k(\eta)| \cdot e^{-k\int_\eta^{x_0} \frac{b}{a^2+b^2}(y)dy}$. Como $\dfrac{b}{a^2+b^2} \in L^1[\eta, 0]$ temos $0 \leq \displaystyle\int_\eta^{x_0} \frac{b}{a^2+b^2}(y)\mathrm{d}y = \alpha' < \infty$. Logo, $|\hat{u}_k(x_0)| \geq M' - |h_k(\eta)| \cdot e^{-k\cdot\alpha'} > \dfrac{M'}{2}$, para qualquer $k > 0$ suficientemente grande, o qual é uma contradição. Portanto, não existe tal $u(x,t)$ e o item $ii)$ fica demonstrado. ■

Nota:

Observe que o teorema 3.2.1 não se aplica aos campos que satisfazem $m_i = 2n_i - 1$, *para algum* i. *Porém, neste caso, se* $m_i = n_i = 1$, *o trabalho [BM] exibe uma função* f *de classe* C^∞ *e flat em* $x = x_i$, *a qual não possui solução* $u \in C^\infty(\{x_i\} \times S^1)$. *Assim, o ítem* $(\star\star)$ *do teorema 3.1.1 não é satisfeito e, portanto,* L *não é fortemente resolúvel. Existe uma particular semelhança entre os campos em que* $m_i = 2n_i - 1$, *sendo* $n_i \geq 2$, *e os campos que satisfazem* $m_i = n_i = 1$, *para algum* i, *a saber:* $\dfrac{b}{a^2+b^2}(x) = \dfrac{1}{x - x_i} \cdot g(x)$, *sendo* $g \in C^\infty \cap L^\infty$, *em alguma vizinhança de* x_i. *Isto dificulta o uso da série de Fourier (como usada no teorema 3.2.1) para verificar a resolubilidade forte de* L *e, além disso, nos leva a acreditar na possibilidade de existir exemplos de campos com esta ordem de anulamento que não sejam fortemente resolúveis.*

Capítulo 4

Condições Suficientes: 2ª parte

No capítulo anterior foram dadas condições que determinam se o campo $L = \partial_t + (a(x) + ib(x))\partial_x$ é, ou não, fortemente resolúvel, a menos do caso em que $m_i = 2n_i - 1$, para algum i. Sendo assim, nosso objetivo, neste momento, é obter condições suficientes para que um campo da forma

$$L = \partial_t + (a(x,t) + ib(x,t))\partial_x, \quad a, b \in C^\infty(\mathbb{T}^2; \mathbb{R}), \quad b \not\equiv 0,$$

sobre o toro $\mathbb{T}^2_{(x,t)} \simeq \mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z}^2$, satisfazendo a condição (P), que possui um número finito de órbitas de Sussmann unidimensionais, sendo cada uma homotópica a $\{0\} \times S^1$, seja fortemente resolúvel.

Assumiremos, neste capítulo, a exemplo do capítulo anterior, que a palavra órbita significa órbita de Sussmann. Como mencionado no capítulo anterior, no caso em que $\Re(L)$ possui apenas curvas integrais periódicas o fluxo reduz nosso estudo ao estudo feito em [BCP]. Sendo assim, vamos nos restringir ao caso em que $\Re(L)$ possui alguma curva integral não periódica. A seção 3.1 nos diz que, nas novas coordenadas, as órbitas unidimensionais de tais campos são da forma $\{x_i\} \times S^1$. Além disso, nas novas coordenadas, L se escreve como

$$L = \partial_t + (\widetilde{a}_i(x,t) + i\widetilde{b}_i(x,t))\partial_x, \quad \widetilde{a}_i, \widetilde{b}_i \in C^\infty(V_i; \mathbb{R}),$$

numa vizinhança V_i de $\{x_i\} \times S^1$. Logo, podemos definir os conjuntos

$$\mathcal{N} = \{x \in S^1; (a+ib)(x,t) = 0, \ \forall\, t \in S^1\} = \{x_1, ..., x_q\} \quad \text{e}$$

$$\mathcal{U} = \mathbb{T}^2 \setminus (\mathcal{N} \times S^1) = \bigcup_{i=1}^{q} J_i \times S^1,$$

para algum $q \in Z_+$ (ver seção 3.1). Dentre os campos em que $(\widetilde{a}_i + i\widetilde{b}_i)(x,t) = (x-x_i)^{n_i}\widetilde{a}_{0i}(x,t) + i(x-x_i)^{m_i}\widetilde{b}_{0i}(x,t)$, com $t \mapsto \widetilde{a}_{0i}(x_i,t) \not\equiv 0$ e $m_i \geq 2n_i$, para algum i, é possível encontrar algum que não seja fortemente resolúvel (ver seção 3.2). Logo, para alcançarmos nosso objetivo, nos resta apenas estudar os campos em que $m_i \leq 2n_i - 1$. Porém, este capítulo trata apenas daqueles em que $2 \leq m_i \leq n_i$. Isso se deve as dificuldades encontradas ao longo deste trabalho. Algumas já foram mencionadas no final do capítulo 2, outra é a demonstração da existência de uma função suave H sobre $[-\sigma_0, \sigma_0]$ a valores no espaço da funções holomorfas sobre $\mathcal{A}(\epsilon)$ tal que $u(x,y,t) = H(x, Z(x,y,t))$, se $(x,y,t) \in K_{\sigma_0}$, para qualquer u solução de $\mathcal{L}u = 0$ ($\mathcal{L}$, Z, $\mathcal{A}(\epsilon)$ e K_{σ_0} serão definidos no decorrer do capítulo).

Teorema 4.0.2 *Se L satisfaz a condição (P) e para cada $x_i \in \mathcal{N}$, $\{x_i\} \times S^1$ possui uma vizinhança em que $\widetilde{a}_i(x,t) + i\widetilde{b}_i(x,t) = (x-x_i)^{m_i}(\widetilde{a}_{0i}(x,t) + i\widetilde{b}_{0i}(x,t))$, com $m_i \geq 2$, e tal que a função $t \mapsto \widetilde{b}_{0i}(x_i,t) \not\equiv 0$ então L é fortemente resolúvel.*

Para demonstrarmos este teorema basta provarmos que, sob tais hipóteses, as propriedades ($\star$) e ($\star\star$) do teorema 3.1.1 são satisfeitas. Isso é o que faremos nas seções a seguir.

4.1 Resolvendo módulo funções flat

Fixemos $x_i \in \mathcal{N}$. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $x_i = 0$. Para facilitar a notação vamos considerar $\widetilde{a}_i + i\widetilde{b}_i = a + ib$.

Lema 4.1.1 *Assuma que a condição (P) é verificada. Considere* $c(x,t) \sim c_m(t)x^m + c_{m+1}(t)x^{m+1} + \cdots$ *a expansão de Taylor de* $c = a+ib$ *numa vizinhança de* $\{0\} \times S^1$*, sendo* $m \geq 1$ *e* $b_m(t) \not\equiv 0$*. Então:*

i) b_m *não muda de sinal;*

ii)$\Im\left(\int_0^{2\pi} c_m(t)dt\right) = \int_0^{2\pi} b_m(t)dt \neq 0.$

Usando a demonstração de [BCP, lema 4.1] e o fato de que b não muda de sinal sobre as órbitas bidimensionais (teorema 1.0.2) temos a demonstração deste lema.

O resultado acima é usado para provarmos a seguinte proposição:

Proposição 4.1.1 *Sob as hipóteses do lema acima, suponha que* $m \geq 2$*. Então,*

i) A equação $Lu = f$ *pode ser resolvida modulo funções flat em* $\{0\} \times S^1$*, desde que* $\left(\delta^{(j)}(x) \otimes 1_t\right)(f) = 0$ *para todo* $0 \leq j \leq m-1$*;*

ii) $\mathcal{F}(0)$ *é gerado pelas distribuições* $\delta^{(j)}(x) \otimes 1_t$*,* $0 \leq j \leq m-1$*.*

Se na demonstração de [BCP, proposição 4.1] substituirmos $b_m(t)$ por $c_m(t)$ e usarmos o lema 4.1.1, teremos a demonstração desta proposição.

Segue, da proposição acima, que para provarmos o teorema 4.0.2 é suficiente resolvermos a seguinte equação:

$$\begin{cases} Lu = f \\ f \text{ flat em } \{0\} \times S^1. \end{cases}$$

4.2 Method of descent

Nesta seção utilizaremos o *method of descent* (ver [Hel], [Go]) como em [BCP], o qual recordaremos.

Estamos interessados em resolver

$$Lu = f \tag{4.2.1}$$

em $\Omega \doteq (-\delta, \delta) \times S^1$, sendo que $f \in C^\infty(\Omega)$ se anula de ordem infinita sobre $\{0\} \times S^1$. Pela hipótese do teorema 4.0.2, contraindo δ se necessário, podemos supor que $c(x,t) = x^m(a_0(x,t) + ib_0(x,t))$ em Ω, sendo que $m \geq 2$, e que a função $x \mapsto b_0(x, t_0) \neq 0$, $\forall\ x \in (-\delta, \delta)$, para algum t_0, o qual sem perda de generalidade podemos assumir igual a 0. Como, por hipótese, L satisfaz a condição (P), podemos assumir, também sem perda de generalidade, $b_0 \geq 0$. Assim, podemos escrever L, em Ω, como

$$L = \partial_t + x^m c_0(x,t)\partial_x, \tag{4.2.2}$$

sendo $c_0(x,t) = a_0(x,t) + ib_0(x,t)$, com $b_0(x,t) \geq 0$, para qualquer (x,t) e $b_0(x,0) > 0$, para qualquer x. Podemos, então, aplicar o method of descent (cf. [Hel], [Go]). Consideremos o seguinte operador em $(-\delta,\delta) \times \mathbb{R} \times S^1$:

$$\mathcal{L} = \partial_t + c_0(x,t)(x^m\partial_x + \partial_y). \tag{4.2.3}$$

A resolubilidade de (4.2.1) é equivalente a resolubilidade do sistema sobredeterminado

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f \\ \partial_y u = 0 \end{cases}. \tag{4.2.4}$$

Façamos a seguinte mudança de coordenadas: $\bar{t} = t$, $\overline{y} = y$ e

$$\overline{x} = x\left(1 + (m-1)yx^{m-1}\right)^{-1/(m-1)}.$$

Um cálculo direto mostra que

$$(x^m\partial_x + \partial_y)\overline{x} = 0, \qquad \partial_y\overline{x} = -\overline{x}^m,$$

e, assim, obtemos as relações:

$$\partial_{\overline{y}} = x^m\partial_x + \partial_y, \qquad \partial_y = \partial_{\overline{y}} - \overline{x}^m\partial_{\overline{x}}. \tag{4.2.5}$$

Logo, nas novas variáveis $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{t})$, o operador $\mathcal{L}$ torna-se

$$\mathcal{L}^\sharp = \partial_{\overline{t}} + C(\overline{x}, \overline{y}, \overline{t})\partial_{\overline{y}}, \tag{4.2.6}$$

sendo $C(\overline{x}, \overline{y}, \overline{t}) = c_0(x(\overline{x}, \overline{y}), \overline{t})$, e, portanto, o sistema (4.2.4) torna-se

$$\begin{cases} \mathcal{L}^\sharp u^\sharp = f^\sharp \\ \mathcal{X}^\sharp u^\sharp = 0 \end{cases}. \tag{4.2.7}$$

Aqui escrevemos

$$\mathcal{X}^\sharp = \partial_{\overline{y}} - \overline{x}^m\partial_{\overline{x}}. \tag{4.2.8}$$

Notemos, além disso, que $x = \overline{x}\mu(\overline{x}, \overline{y})$, sendo que μ não se anula. Conseqüentemente, $f^\sharp(\overline{x}, \overline{y}, \overline{t}) = f(\overline{x}\mu(\overline{x}, \overline{y}), \overline{t})$ é uma função flat em $\overline{x} = 0$, a qual satisfaz a condição de compatibilidade

$$\mathcal{X}^\sharp f^\sharp = 0. \tag{4.2.9}$$

Notemos também que $[\mathcal{L}^\sharp, \mathcal{X}^\sharp] = 0$.

4.3 O sistema a ser estudado

Nesta seção passaremos do sistema (4.2.7) para um sistema equivalente, o qual facilitará nossa resolução. Lembremo-nos que nas novas variáveis, (x, y, t), estamos considerando o operador

$$\mathcal{L} = \partial_t + c(x, y, t)\partial_y, \quad \text{sendo} \quad c = a + ib, \tag{4.3.10}$$

definido num aberto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times S^1$ que contém $\{0\} \times \mathbb{R} \times S^1$, assumindo $b \geq 0$ e $b(0, y, 0) \neq 0,\ \forall y \in \mathbb{R}$. Estamos considerando, também, o operador

$$\mathsf{X} \doteq \partial_y - x^m \partial_x, \tag{4.3.11}$$

sendo $m \geq 2$, e assumindo que

$$[\mathcal{L}, \mathsf{X}] = 0.$$

Esta propriedade é equivalente ao fato de $\mathsf{X}c = 0$, pois $[\mathcal{L}, \mathsf{X}] = \mathsf{X}c$. Em particular, segue que $c(0, y, t)$ deve ser independente de y. Podemos, então, escrever

$$c(0, y, t) = a(0, y, t) + ib(0, y, t) = a_\bullet(t) + ib_\bullet(t) = c_\bullet(t). \tag{4.3.12}$$

Depois de uma mudança $y \mapsto \tau y$, não existe perda de generalidade em assumirmos que

$$\int_0^{2\pi} b_\bullet(t)\mathrm{d}t = 2\pi. \tag{4.3.13}$$

Sejam $M, \lambda \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lambda = \int_0^{2\pi} a_\bullet(t)\mathrm{d}t \tag{4.3.14}$$

e

$$M = \sup_{0 \leq t \leq 2\pi} \left| \int_0^t a_\bullet(t')\mathrm{d}t' \right|. \tag{4.3.15}$$

É fácil ver que $\gamma_{(0,y,0)}(s) = (0, y + \int_0^s a_\bullet(t)\mathrm{d}t, s)$ é uma curva integral de $\Re(\mathcal{L})$ passando por $(0, y, 0)$. Notemos que, $\gamma_{(0,y,0)}(s) = T_y \circ \gamma_{(0,0,0)}(s)$, sendo $T_y : \{0\} \times \mathbb{R} \times S^1 \to \{0\} \times \mathbb{R} \times S^1$ tal que $T_y(0, y', t) = (0, y + y', t)$. Logo, para que $\{0\} \times \{0\} \times S^1 \subset \bigcup_{y \in [-\beta, \beta]} \gamma_{(0,y,0)}[0, 2\pi]$, $\beta > 0$, é necessário que $\beta \geq M$.

Tomemos δ e ϵ reais positivos tais que $\mathcal{L}$ e X estejam definidos em $(-\delta, \delta) \times (-3M - 1, 3M + 1) \times S^1$ e $b(x, y, t) \neq 0$ se $(x, y, t) \in (-\delta, \delta) \times (-3M - 1, 3M + 1) \times (-\epsilon, \epsilon)$.

Seja $f \in C^\infty((-\delta,\delta)\times(-3M-1,3M+1)\times S^1)$ uma função flat em $x=0$ e satisfazendo $\mathsf{X}f=0$. Nosso objetivo é resolver o sistema sobre-determinado

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f \\ \mathsf{X}u = 0 \end{cases}, \tag{4.3.16}$$

em alguma vizinhança de $\{0\}\times\{0\}\times S^1$.

No que segue, para esta seção, K denotará um subconjunto compacto de $(-\delta,\delta)\times(-3M-1,3M+1)\times S^1$, contendo $\{0\}\times\{0\}\times S^1$.

Lema 4.3.1 *O operador*

$$\mathcal{L}: C^\infty(K) \longrightarrow C^\infty(K)$$

é sobrejetor.

Demonstração:

Para demonstrarmos este lema utilizaremos o teorema 1.0.4. Antes faremos uma discussão sobre os conceitos envolvidos para a utilização do referido teorema. Seja $\mathcal{C}$ o conjunto característico de $\mathcal{L}$, isto é, o conjunto dos zeros de

$$\ell(x,y,t,\xi,\eta,\tau) = \tau + (a(x,y,t)+ib(x,y,t))\eta$$

com $(\xi,\eta,\tau)\neq 0$. De acordo com [H1] o conjunto $\mathcal{C}_2$ é o subconjunto de $\mathcal{C}$ em que $\mathrm{d}\tau + a\mathrm{d}\eta$ e $b\mathrm{d}\eta$ são linearmente independentes e o conjunto $\mathcal{C}_2^e$ é a união de todas as curvas semi-bi-características que interceptam $\mathcal{C}_2$. Finalmente, consideramos $\mathcal{C}_{11}$ o conjunto de todos os pontos característicos que estão no complemento de $\mathcal{C}_2^e$ e podem ser unidos a algum ponto não-característico por uma curva semi-bi-característica. Por [H1, prop. 2.1] segue que $\mathcal{C}_2^e \cup \mathcal{C}_{11} \subset \mathcal{C}$. Como

$$H_{\Re(\ell)} = \partial_t + a(x,y,t)\partial_y - \eta[a_x(x,y,t)\partial_\xi + a_y(x,y,t)\partial_\eta + a_t(x,y,t)\partial_\tau],$$

dado $p_0 = (x_0, y_0, t_0, \xi_0, \eta_0, \tau_0) \in \mathcal{C}$ é fácil ver que uma curva bi-característica de $\Re(\ell)$, passando por p_0, tem a forma $\gamma_{p_0}(s) = (x_0, y(s), t_0+s, \xi(s), \eta(s), \tau(s))$. Se $p_1 = (x_0, y(s_0), t_0+s_0, \xi(s_0), \eta(s_0), \tau(s_0))$, com $b(x_0, y(s_0), t_0+s_0) \neq 0$, segue que:

1º) Se $\eta(s_0) = 0$ então $\tau(s_0) = 0$, pois $\tau(s) = -a(x_0, y(s), t_0 + s) \cdot \eta(s)$. Assim $\xi(s_0) \neq 0$ e, então, $p_0 \in \mathcal{C}_2^e$, pois $p_1 \in \mathcal{C}_2$.

2º) Se $\eta(s_0) \neq 0$ então $p_0 \in \mathcal{C}_{11}$, pois $p_1 \notin \mathcal{C}$.

Portanto, o conjunto $\{p \in \mathcal{C};\ \exists\ s_0 \in I_{\gamma_p}$ com $b(x, y(s_0), t + s_0) \neq 0\}$ é um subconjunto de $\mathcal{C}_2^e \cup \mathcal{C}_{11}$.

Lembremo-nos que as órbitas de Sussmann unidimensionais, da estrutura definida por $\mathcal{L}$, são as curvas $(x, y(s), t + s)$ (curva integral de $\Re(\mathcal{L})$ passando por (x, y, t)) tais que $b(x, y(s), t+s) = 0$, para qualquer s. Assim, se $p_0 \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_2^e \cup \mathcal{C}_{11}$ temos $b(x_0, y(s), t_0+s) = 0, \forall s$, e, portanto, a projeção de γ_{p_0}, sobre $\{x_0\} \times (-3M-1, 3M+1) \times S^1$, é uma órbita unidimensional. Como existe $\epsilon > 0$ tal que $b(x, y, t) \neq 0$ se $(x, y, t) \in V = (-\delta, \delta) \times (-3M - 1, 3M + 1) \times (-\epsilon, \epsilon)$, temos que qualquer órbita unidimensional sobre $\{x_0\} \times (-3M-1, 3M+1) \times S^1$ tende à fronteira de tal conjunto, quando $s \to \omega_+(p_0)$ ou $s \to \omega_-(p_0)$, pois a curva $(x_0, y(s), t+s)$ é transversal à direção y e não intercepta V (aqui, como na teoria de equações diferencias ordinárias, $\omega_-(p_0)$ e $\omega_+(p_0)$ são os extremos inferior e superior, respectivamente, de $I_{p_0} = (\omega_-(p_0), \omega_+(p_0))$, o intervalo máximo de definição da curva γ_{p_0}). Portanto, não existe órbita unidimensional contida em K e, dessa forma, se $p_0 \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_2^e \cup \mathcal{C}_{11}$ a curva γ_{p_0} não está contida acima de K. Sendo assim, para verificarmos que $\mathcal{L}$ satisfaz as hipóteses do teorema 1.0.4 basta verificarmos que nenhuma bi-característica bidimensional está inteiramente contida acima de K. Seja $\mathcal{B}$ uma bi-característica bidimensional. Se $p_0 \in \mathcal{B}$ então $\mathcal{B}$ contém a órbita de Sussmann através de p_0 do conjunto de

Hamiltonianos $\{H_{\Re\ell}, H_{\Im\ell}\}$, pois eles são tangentes a $\mathcal{B}$. Como, além disso, as curvas integrais de $H_{\Re\ell}$ e $H_{\Im\ell}$ projetam-se de modo sobrejetor sobre as curvas de $\Re\mathcal{L}$ e $\Im\mathcal{L}$, respectivamente, vemos que a projeção de $\mathcal{B}$ é de fato igual a uma órbita de Sussmann bidimensional do campo $\mathcal{L}$. Conseqüentemente, a projeção de $\mathcal{B}$ não pode estar contida em K, pois caso contrário ela contém V, o que é uma contradição.

Consideremos, agora, o conjunto

$$\{v \in \mathcal{C}_c^\infty(K) : {}^t\mathcal{L}v = 0\}.$$

Como o suporte de v (v pertencente ao conjunto acima) é uma união de órbitas de Sussmann (proposição 1.0.1) e cada tal órbita não está contida em K, temos

$$\{v \in \mathcal{C}_c^\infty(K) : {}^t\mathcal{L}v = 0\} = \{0\}.$$

Portanto, a conclusão final segue do teorema 1.0.4. ■

Lema 4.3.2 *Seja*

$$\mathcal{L}_0 = \partial_t + c(0,y,t)\partial_y$$

e seja $v_0 \in C^\infty(\{(y,t) : (0,y,t) \in K\})$ *tal que* $\mathcal{L}_0 v_0 = 0$. *Então, existe* $v \in C^\infty(K)$ *satisfazendo* $\mathcal{L}v = 0$ *e* $v(0,y,t) = v_0(y,t)$.

Demonstração:

O argumento que recordaremos a seguir é o mesmo usado em [H1, corolário 4.4] e também é usado em [BCP]. Como $\mathcal{L}v_0(y,t) = 0$, temos $\dfrac{\mathcal{L}v_0}{x} \in C^\infty(K)$. Assim, pelo lema 4.3.1, temos que existe $\tilde{v} \in \mathcal{C}^\infty(K)$ tal que $\mathcal{L}\tilde{v} = \dfrac{\mathcal{L}v_0}{x}$. Defina $v \doteq v_0 - x\tilde{v}$. Então, $\mathcal{L}v = \mathcal{L}v_0 - x\mathcal{L}\tilde{v} = 0$ e $v(0,y,t) = v_0(y,t) - 0.\tilde{v}(0,y,t) = v_0(y,t)$. ■

Proposição 4.3.1 *Seja* $f \in C^\infty(K)$ *uma função flat em* $x = 0$. *Então, existe uma solução* $v \in C^\infty(K)$ *para a equação* $\mathcal{L}v = f$, *a qual é também flat em* $x = 0$.

Demonstração:

O argumento é o mesmo usado em [BCP, proposição 5.1.1], o qual recordaremos. Pelo lema 4.3.1, existe $w \in C^{\infty}(K)$ solução para a equação $\mathcal{L}w = f$. Podemos encontrar uma seqüência de soluções $\{h_j\}$ da equação homogênea $\mathcal{L}h_j = 0$ com $h_j \in C^{\infty}(K)$, tal que

$$w_k(x,y,t) \doteq w(x,y,t) - \sum_{j=0}^{k} h_j(x,y,t)\frac{x^j}{j!} = \mathrm{O}(|x|^{k+1}), \tag{4.3.17}$$

para cada k. Começamos por h_0. Temos que $\mathcal{L}_0\{w(0,y,t)\} = 0$ e, assim, pelo lema 4.3.2, existe $h_0 \in \mathcal{C}^{\infty}(K)$ tal que $\mathcal{L}h_0 = 0$ e $h_0(0,y,t) = w(0,y,t)$. Assim (4.3.17) é verificada para $k = 0$. Suponhamos, agora, que já tenhamos obtido $h_1, \dots, h_k$ de tal modo que (4.3.17) valha. Então, se aplicarmos o operador ∂_x^{k+1} em $\mathcal{L}w_k = f$ e restringirmos a igualdade obtida a $x = 0$ obtemos, de (4.3.17), que $\mathcal{L}_0\left\{(\partial_x^{k+1}w_k)(0,y,t)\right\} = 0$, pois $\partial_y w_k(0,y,t) = 0$. Novamente, pelo lema 4.3.2, existe $h_{k+1} \in \mathcal{C}^{\infty}(K)$ tal que $\mathcal{L}h_{k+1} = 0$ e $h_{k+1}(0,y,t) = (\partial_x^{k+1}w_k)(0,y,t)$. Logo,

$$w_{k+1}(x,y,t) \doteq w_k(x,y,t) - h_{k+1}(x,y,t)\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \mathrm{O}(|x|^{k+2}),$$

pois $(\partial_x^j w_{k+1})(0,y,t) = 0$, se $j = 0,...,k+1$. Isso completa a construção da seqüência $\{h_j\}$. Finalmente, tomemos uma seqüência $\sigma_j \in C_c^{\infty}$ na variável x, sendo $\sigma_j \equiv 1$ numa vizinhança da origem, de modo que

$$R(x,y,t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j(x)h_j(x,y,t)\frac{x^j}{j!}$$

defina uma função suave, numa vizinhança de K. Portanto, como $\mathcal{L}R = 0$, temos que $v \doteq w - R$ satisfaz $\mathcal{L}v = f$ e, por (4.3.17), obtemos que v é flat em $x = 0$. ■

Seja f como no sistema 4.3.16 e defina $g \doteq \mathsf{X}v$, sendo que v é dada pela proposição 4.3.1. Como

$$\mathcal{L}g = \mathcal{L}\mathsf{X}v = \mathsf{X}\mathcal{L}v = \mathsf{X}f = 0,$$

nosso problema passa a ser a resolução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} \mathcal{L}w = 0 \\ \mathsf{X}w = g \end{cases}, \tag{4.3.18}$$

sendo g flat em $x = 0$, com $\mathcal{L}g = 0$, numa vizinhança de K (de fato a solução final para o sistema (4.3.16) será $u = v - w$).

4.4 Final da prova do teorema 4.0.2: a principal redução

Recordemos que em $(-\delta, \delta) \times (-3M - 1, 3M + 1) \times S^1$ estamos considerando o operador

$$\mathcal{L} = \partial_t + c(x, y, t)\partial_y, \quad c = a + ib, \tag{4.4.19}$$

sendo $b \geq 0$ para qualquer (x, y, t) e $b(x, y, t) > 0$ se $(x, y, t) \in (-\delta, \delta) \times (-3M - 1, 3M + 1) \times (-\epsilon, \epsilon)$, para algum $\epsilon > 0$. Além disso, temos $\mathsf{X}c = 0$, sendo

$$\mathsf{X} = \partial_y - x^m \partial_x. \tag{4.4.20}$$

Em particular,

$$c(0, y, t) = a(0, y, t) + ib(0, y, t) = a_\bullet(t) + ib_\bullet(t) = c_\bullet(t), \tag{4.4.21}$$

sendo que estamos assumindo

$$\int_0^{2\pi} b_\bullet(t)\mathrm{d}t = 2\pi, \tag{4.4.22}$$

e considerando

$$\sup_{0 \leq t \leq 2\pi} \left| \int_0^t a_\bullet(t')\mathrm{d}t' \right| = M, \qquad \int_0^{2\pi} a_\bullet(t)\mathrm{d}t = \lambda. \tag{4.4.23}$$

Seja $K = \left[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right] \times \left[-3M - \frac{\delta}{2}, 3M + \frac{\delta}{2}\right] \times S^1$. O lema 4.3.1 implica que existe $U \in C^\infty(K)$ tal que

$$\mathcal{L}U = -c_y. \tag{4.4.24}$$

Como $c_y = x^m c_x$, pelo mesmo argumento usado na prova da proposição 4.3.1, é possível construir tal solução U satisfazendo

$$U(x, y, t) = \mathrm{O}(|x|^m). \tag{4.4.25}$$

Definamos

$$V(x, y, t) = \int_0^y e^{U(x,y',t)} dy' - \int_0^t c(x, 0, t') e^{U(x,0,t')} dt'. \tag{4.4.26}$$

Notemos que

$$\mathcal{L}V = \partial_t V + c\partial_y V = \int_0^y \partial_t e^{U(x,y',t)} dy' - c(x, 0, t)e^{U(x,0,t)} + c(x, y, t)e^{U(x,y,t)}$$

e, como (fazendo uso de (4.4.24))

$$\partial_t e^{U(x,y,t)} = \partial_t U(x, y, t).e^{U(x,y,t)} = (-c_y - c\partial_y U)e^{U(x,y,t)} = -\partial_y (c(x, y, t)e^{U(x,y,t)}),$$

obtemos

$$\mathcal{L}V = 0. \tag{4.4.27}$$

Definamos, agora,

$$\theta(x) = 2\pi \left(\int_0^{2\pi} -ic(x, 0, t)e^{U(x,0,t)} dt \right)^{-1} \tag{4.4.28}$$

Diminuindo δ, se necessário, obtemos $\theta \in C^\infty(-\delta, \delta)$. De fato. Como $\int_0^{2\pi} c_\bullet(t)dt \neq 0$ temos $\int_0^{2\pi} c(x, 0, t)e^{U(x,0,t)} dt \neq 0$, para $\delta > 0$ pequeno. Portanto, $\theta \in C^\infty(-\delta, \delta)$ com $\theta(0) = \frac{2\pi}{2\pi - i\lambda}$ (graças a (4.4.21), (4.4.22), (4.4.23) e (4.4.25)). Agora, pela periodicidade da U em t, temos:

$$\theta(x)V(x, y, 2\pi) - \theta(x)V(x, y, 0) =$$

$$= \theta(x)\left(\int_0^y e^{U(x,y',2\pi)}dy' - \int_0^{2\pi} c(x,0,t')e^{U(x,0,t')}dt' - \int_0^y e^{U(x,y',0)}dy'\right) =$$

$$= -\theta(x)\left(\int_0^{2\pi} c(x,0,t')e^{U(x,0,t')}dt'\right) = -2\pi i.$$

Conseqüentemente, a expressão

$$Z(x,y,t) = e^{\theta(x)V(x,y,t)} \tag{4.4.29}$$

define uma função $Z \in C^\infty(K)$, a qual satisfaz

$$\mathcal{L}Z = 0, \quad Z_y \neq 0. \tag{4.4.30}$$

Notemos que

$$Z(0,y,t) = e^{\frac{2\pi}{2\pi - i\lambda}\left(y - \int_0^t c_\bullet(t')dt'\right)} = e^{\frac{2\pi}{4\pi^2+\lambda^2}(2\pi+i\lambda)\left(y-\int_0^t c_\bullet(t')dt'\right)} = \tag{4.4.31}$$

$$= e^{\frac{2\pi}{4\pi^2+\lambda^2}\left\{\left[2\pi\left(y-\int_0^t a_\bullet(t')dt'\right)+\lambda\int_0^t b_\bullet(t')dt'\right]+i\left[\lambda\left(y-\int_0^t a_\bullet(t')dt'\right)-2\pi\int_0^t b_\bullet(t')dt'\right]\right\}}$$

Seja $\gamma_{(x,y,t)}(s) = (x, \phi(s,y), s+t)$ curva integral de $\Re(\mathcal{L})$ passando pelo ponto (x,y,t). Como $\gamma_{(0,y,0)}(s) = (0, y + \int_0^s a_\bullet(t)\mathrm{d}t, s)$ temos

$$Z(\gamma_{(0,y,0)}(s)) = e^{\frac{2\pi}{2\pi-i\lambda}\left(y - i\int_0^s b_\bullet(t)dt\right)} \tag{4.4.32}$$

De (4.4.31) obtemos $|Z|_y(0,y,t) > 0$ e $(\arg Z)_y(0,y,t) = \dfrac{2\pi}{4\pi^2+\lambda^2}\cdot\lambda \neq 0$ se $\lambda \neq 0$. Assim, diminuindo $\delta > 0$, se necessário, podemos assumir

$$|Z|_y > 0 \quad \text{e} \quad (\arg Z)_y \neq 0, \ \text{se } \lambda \neq 0, \tag{4.4.33}$$

(em particular, $sgn[(\arg Z)_y] = sgn(\lambda)$, se $\lambda \neq 0$) em $(-\delta,\delta)\times(-3M-1, 3M+1)\times S^1$.

Para o que segue, consideremos, para cada $\epsilon' \in (0,1)$,

$$\mathcal{A}(\epsilon') \doteq \{\zeta : e^{-\frac{4\pi^2(2M-\lambda)}{4\pi^2+\lambda^2}} - \epsilon' < |\zeta| < e^{\frac{8\pi^2 M}{4\pi^2+\lambda^2}} + \epsilon'\}, \ \text{se } \lambda \geq 0,$$

$$\mathcal{A}(\epsilon') \doteq \{\zeta : e^{-\frac{8\pi^2 M}{4\pi^2+\lambda^2}} - \epsilon' < |\zeta| < e^{\frac{4\pi^2(2M+\lambda)}{4\pi^2+\lambda^2}} + \epsilon'\}, \ \text{se } \lambda < 0,$$

e, além disso, para cada $(x,y,t) \in (-\delta,\delta)\times(-2M-1,2M+1)\times(-\epsilon,\epsilon)$, consideremos $\beta_{(x,\phi(2\pi,y),t)}(s) = (x,\psi(s,\phi(2\pi,y)),t)$ a curva integral de $-sgn(\lambda)\Im(\mathcal{L})$ passando por $(x,\phi(2\pi,y),t)$ e $\alpha_{(x,y,t)}(s) = \tilde{\beta}_{(x,\phi(2\pi,y),t)} * \widetilde{\gamma}_{(x,y,t)}(s)$, $\widetilde{\gamma}_{(x,y,t)}(s) = \gamma_{(x,y,t)|_{[0,2\pi]}}(s)$, $\tilde{\beta}_{(x,\phi(2\pi,y),t)} = \beta_{(x,\phi(2\pi,y),t)|_{[0,s_0]}}$, sendo s_0 tal que $\beta_{(x,\phi(2\pi,y),t)}(s_0) = (x,y,t)$. Denotaremos $D_{\alpha_{(x,y,t)}}$ o domínio da curva $\alpha_{(x,y,t)}$

Lema 4.4.1 *$Z(\alpha_{(x,y,t)}(s_1)) = Z(\alpha_{(x,y,t)}(s_2))$ se, e somente se, $\alpha_{(x,y,t)}(s_j) = \gamma_{(x,y,t)}(s_j)$, $j=1,2$, e uma das seguintes afirmações é válida:*

i) $s_1 = 0,\ s_2 = 2\pi$ e $\gamma_{(x,y,t)}$ é periódica (observe que neste caso $\widetilde{\beta}_{(x,\phi(2\pi,y),t)}(s) \equiv (x,y,t)$);

ii) $0 < s_1 < s_2 < 2\pi$ e $b\circ\gamma_{(x,y,t)|_{[s_1,s_2]}}(s) \equiv 0$.

Demonstração:

Podemos escrever $Z(x,y,t) = |Z(x,y,t)|e^{i\arg Z(x,y,t)}$. Como $\mathcal{L}Z = 0$ temos:

$$0 = |Z|_t e^{i\arg Z} + |Z|i(\arg Z)_t e^{i\arg Z} + a|Z|_y e^{i\arg Z} + a|Z|i(\arg Z)_y e^{i\arg Z} +$$

$$+ib|Z|_y e^{i\arg Z} + ib|Z|i(\arg Z)_y e^{i\arg Z} =$$

$$= e^{i\arg Z}[(|Z|_t + a|Z|_y - b|Z|(\arg Z)_y) + i(|Z|(\arg Z)_t + a|Z|(\arg Z)_y + b|Z|_y)].$$

Daí,

$$\begin{cases} |Z|_t + a|Z|_y - b|Z|(\arg Z)_y = 0 \\ |Z|(\arg Z)_t + a|Z|(\arg Z)_y + b|Z|_y = 0 \end{cases}$$

e, assim, $(\arg Z)_t + a(\arg Z)_y = -b\dfrac{|Z|_y}{|Z|} \leq 0$ e $|Z|_t + a|Z|_y = b|Z|(\arg Z)_y$. Em particular,

$$(\arg Z\circ\gamma_{(x,y,t)})'(s) = -b(\gamma_{(x,y,t)}(s))\frac{|Z|_y(\gamma_{(x,y,t)}(s))}{|Z|(\gamma_{(x,y,t)}(s))} \leq 0. \tag{4.4.34}$$

e

$$(|Z|\circ\gamma_{(x,y,t)})'(s) = (b|Z|(\arg Z)_y)\circ\gamma_{(x,y,t)} \tag{4.4.35}$$

Por outro lado, $\arg Z$ sobre $\beta_{(x,\phi(2\pi,y),t)}$ satisfaz (por (4.4.33))

$$(\arg Z \circ \beta_{(x,\phi(2\pi,y),t)})'(s) = -sgn(\lambda) \cdot [b \cdot (\arg Z)_y] \circ \beta_{(x,\phi(2\pi,y),t)} < 0. \quad (4.4.36)$$

Logo, de (4.4.34) e (4.4.36) temos que $Z \circ \alpha_{(x,y,t)}(D_{\alpha_{(x,y,t)}})$ é uma curva fechada ao redor da origem que caminha no sentido horário; além disso, $Z \circ \tilde{\gamma}_{(x,y,t)}((0,2\pi)) \cap Z \circ \tilde{\beta}_{(x,\phi(2\pi,y),t)}((0,s_0)) = \emptyset$. Por (4.4.36), $Z \circ \tilde{\beta}_{(x,\phi(2\pi,y),t)}$ é injetor e, por (4.4.34) e (4.4.35), $Z(\tilde{\gamma}_{(x,y,t)}(s_1)) = Z(\tilde{\gamma}_{(x,y,t)}(s_2))$, com $s_1 < s_2$, se, e somente se, $b \circ \gamma_{(x,y,0)|_{[s_1,s_2]}}(s) \equiv 0$. ■

Pela dependência contínua, de $\gamma_{(x,y,0)}$, com relação aos dados iniciais, existe $0 < \sigma < \dfrac{\delta}{2}$ tal que $K_\sigma = \bigcup_{\substack{x\in[-\sigma,\sigma] \\ y\in[-2M-\sigma,2M+\sigma]}} \alpha_{(x,y,0)}(D_{\alpha_{(x,y,0)}})$ é um compacto contido em $(-\delta,\delta) \times (-3M-1, 3M+1) \times S^1$, o qual contém $\{0\} \times \{0\} \times S^1$ (como discutido após (4.3.15)).

Lema 4.4.2 *Seja $u \in C^\infty(K_\sigma)$ tal que $\mathcal{L}u = 0$. Se $(x,y,0) \in K_\sigma$ então*

$$\partial_y \left\{ \int_0^{2\pi} [u.(Z_t + aZ_y)](\gamma_{(x,y,0)}(s))ds + \right.$$

$$\left. + \int_0^{s_0} (u. - sgn(\lambda)\ bZ_y)(\beta_{(x,\phi(2\pi,y),0)}(s))ds \right\} = 0.$$

Demonstração:

Na demonstração deste lema, no intuito de facilitar a compreensão, denotaremos $\mathcal{L} = D_3 + cD_2$. Como

$$\mathcal{L}(D_2Z) = D_3D_2Z + cD_2D_2Z = D_2D_3Z + D_2(cD_2Z) - D_2cD_2Z =$$

$$= D_2(\mathcal{L}Z) - D_2cD_2Z = -D_2cD_2Z$$

temos

$$\partial_y\{[u.(D_3Z + aD_2Z)] \circ \gamma_{(x,y,0)}(s)\} = \partial_y\{[u.(-ibD_2Z)] \circ \gamma_{(x,y,0)}(s)\} =$$

$$= D_2(-ib.uD_2Z)(\gamma_{(x,y,0)}(s)).\partial_y\phi(s,y) =$$

$$= [-iD_2b.uD_2Z - ib.D_2(uD_2Z)](\gamma_{(x,y,0)}(s)).\partial_y\phi(s,y) =$$

$$= [-iD_2b.uD_2Z + (D_3 + aD_2)(uD_2Z) - \mathcal{L}(uD_2Z)](\gamma_{(x,y,0)}(s)).\partial_y\phi(s,y) =$$

$$= [D_2auD_2Z + (D_3 + aD_2)(uD_2Z)](\gamma_{(x,y,0)}(s)).\partial_y\phi(s,y). \tag{4.4.37}$$

Lembremo-nos que $\partial_s\phi(s,y) = a(x,\phi(s,y),s) = a(\gamma_{(x,y,0)}(s))$. Assim, temos $\partial_s(\partial_y\phi(s,y)) = \partial_y(\partial_s\phi(s,y)) = D_2a(\gamma_{(x,y,0)}(s)).\partial_y\phi(s,y)$, e, por (4.4.37), obtemos

$$\partial_y\{[u.(D_3Z + aD_2Z)] \circ \gamma_{(x,y,0)}(s)\} = \partial_s[(u.D_2Z)(\gamma_{(x,y,0)}(s)).\partial_y\phi(s,y)].$$

Logo,

$$\partial_y\left\{\int_0^{2\pi}[u.(D_3Z + aD_2Z)](\gamma_{(x,y,0)}(s))ds\right\} =$$

$$= u.D_2Z(\gamma_{(x,y,0)}(s)).\partial_y\phi(s,y)\Big|_0^{2\pi}. \tag{4.4.38}$$

Por outro lado, por uma mudança $s \mapsto \psi(s,\phi(2\pi,y))$ obtém-se

$$\int_0^{s_0}(u. - sgn(\lambda)\ bD_2Z)(\beta_{(x,\phi(s,y),0)}(s))ds = \int_{\phi(2\pi,y)}^{y}(u.D_2Z)(x,s,0))ds.$$

Além disso,

$$\partial_y\left\{\int_{\phi(2\pi,y)}^{y=\phi(0,y)}(u.D_2Z)(x,s,0)ds\right\} =$$

$$= u\cdot D_2Z(x,y,0).\partial_y\phi(0,y) - u.D_2Z(x,\phi(2\pi,y),0).\partial_y\phi(2\pi,y). \tag{4.4.39}$$

Portanto, de (4.4.38) e (4.4.39) segue o resultado. ■

Provaremos, agora, nossa principal redução.

Consideremos $\tilde{K}_\sigma = \bigcup_{\substack{x\in[-\sigma_0,\sigma_0]\\ y\in[-M-\sigma_0,M+\sigma_0]}} \alpha_{(x,y,0)}(D_{\alpha_{(x,y,0)}})$.

Proposição 4.4.1 *Dado $\sigma > 0$, pequeno, existe $0 < \sigma_0 \leq \sigma$ e $0 < \epsilon < 1$ satisfazendo*

$$(x, y, t) \in \tilde{K_{\sigma_0}} \implies Z(x, y, t) \in \mathcal{A}(\epsilon'),$$

e tal que a seguinte afirmação é válida: se $u \in C^\infty(K_\sigma)$ satisfaz $\mathcal{L}u = 0$ então existe uma função suave H sobre $[-\sigma_0, \sigma_0]$ a valores no espaço da funções holomorfas sobre $\mathcal{A}(\epsilon)$ tal que

$$u(x, y, t) = H(x, Z(x, y, t)), \quad se \quad (x, y, t) \in \tilde{K_{\sigma_0}}. \tag{4.4.40}$$

Demonstração:

Seja $u \in C^\infty(K_\sigma)$ tal que $\mathcal{L}u = 0$.

Fazendo uso de (4.4.31) e (4.4.32) obtemos, por continuidade uniforme, a existência de $0 < \kappa < \sigma$, $\rho_1 > e^{\frac{8\pi^2 M}{4\pi^2+\lambda^2}}$ e $\rho_2 < e^{-\frac{4\pi^2(2M-\lambda)}{4\pi^2+\lambda^2}}$ se $\lambda \geq 0$, ou, ainda, $\rho_1' > e^{\frac{4\pi^2(2M+\lambda)}{4\pi^2+\lambda^2}}$ e $\rho_2' < e^{-\frac{8\pi^2 M}{4\pi^2+\lambda^2}}$ se $\lambda < 0$, tal que, para $|x| \leq \kappa$ e $s \in D_\alpha$,

$$|Z(\alpha_{(x,2M+\sigma,0)}(s))| \geq \rho_1, \quad |Z(\alpha_{(x,-2M-\sigma,0)}(s))| \leq \rho_2, \text{ se } \lambda \geq 0; \tag{4.4.41}$$

$$|Z(\alpha_{(x,2M+\sigma,0)}(s))| \geq \rho_1', \quad |Z(\alpha_{(x,-2M-\sigma,0)}(s))| \leq \rho_2', \text{ se } \lambda < 0. \tag{4.4.42}$$

De fato, por (4.4.31) e (4.4.32), obtemos

$$|Z \circ \beta_{(0,\phi(2\pi,y)),0)}(s)| = e^{\frac{4\pi^2\psi(s,\phi(2\pi,y))}{4\pi^2+\lambda^2}} \quad \text{e} \quad |Z(\gamma_{(0,y,0)}(s))| = e^{\frac{2\pi}{4\pi^2+\lambda^2}\left(2\pi y+\lambda\int_0^s b_\bullet(t)dt\right)},$$

e, assim, quando $\lambda \geq 0$

$$|Z(\alpha_{(0,2M+\sigma,0)}(s))| \geq e^{\frac{4\pi^2(2M+\sigma)}{4\pi^2+\lambda^2}} \quad \text{e} \quad |Z(\alpha_{(0,-2M-\sigma,0)}(s))| \leq e^{-\frac{4\pi^2(2M+\sigma-\lambda)}{4\pi^2+\lambda^2}};$$

quando $\lambda < 0$

$$|Z(\alpha_{(0,2M+\sigma,0)}(s))| \geq e^{\frac{4\pi^2(2M+\sigma+\lambda)}{4\pi^2+\lambda^2}} \quad \text{e} \quad |Z(\alpha_{(0,-2M-\sigma,0)}(s))| \leq e^{-\frac{4\pi^2(2M+\sigma)}{4\pi^2+\lambda^2}}.$$

Pelo lema 4.4.2, podemos considerar as seguintes funções suaves de $x \in [-\kappa, \kappa]$:

$$A_j(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{u(\gamma_{(x,y,0)}(s))}{Z(\gamma_{(x,y,0)}(s))^{j+1}}\,(Z_t + aZ_y)(\gamma_{(x,y,0)}(s))ds$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_0^{s_0}\frac{u(\beta_{(x,\phi(2\pi,y),0)}(s))}{Z(\beta_{(x,\phi(2\pi,y),0)}(s))^{j+1}}(-sgn(\lambda)bZ_y)(\beta_{(x,\phi(2\pi,y),0)}(s))ds, \quad j\in\mathbb{Z}.$$

De (4.4.41) e (4.4.42) obtemos, para $x\in[-\kappa,\kappa]$, as seguintes majorações, para $j\neq 0$:

$$\left|A_j^{(\ell)}(x)\right|\leq C_\ell\,|j|^\ell\,\rho_2^{|j|},\ j\leq -1 \text{ e } \left|A_j^{(\ell)}(x)\right|\leq C_\ell\,|j|^\ell\,\rho_1^{-|j|},\ j>-1,\ \text{se } \lambda\geq 0;$$

ou, então,

$$\left|A_j^{(\ell)}(x)\right|\leq C_\ell\,|j|^\ell\,{\rho'_2}^{|j|},\ j\leq -1 \text{ e } \left|A_j^{(\ell)}(x)\right|\leq C_\ell\,|j|^\ell\,{\rho'_1}^{-|j|},\ j>-1,\ \text{se } \lambda< 0.$$

Conseqüentemente, para algum $\epsilon'>0$, a série de Laurent

$$H(x,\zeta)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}A_j(x)\zeta^j \tag{4.4.43}$$

define uma função suave de $x\in[-\kappa,\kappa]$ a valores em $\mathcal{O}(\mathcal{A}(\epsilon'))$. Notemos que ϵ depende somente de $\rho_1,\ \rho_2$ (resp. $\rho'_1,\ \rho'_2$), e, em particular, independe da solução u.

Escolhemos, agora, $0<\sigma_0<\kappa$ de modo que

$$(x,y)\in[-\sigma_0,\sigma_0]\times[-M-\sigma_0,M+\sigma_0]\Rightarrow Z(\alpha_{(x,y,0)}(D_{\alpha_{(x,y,0)}}))\subset\mathcal{A}(\epsilon'),$$

e prosseguimos para a prova de (4.4.40); para isto fixemos $(x,y,0)\in\tilde{K_{\sigma_0}}$ em todo o argumento. Observemos que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{H(x,Z(\gamma_{(x,y,0)}(s)))}{Z(\gamma_{(x,y,0)}(s))^{j+1}}(Z_t+aZ_y)(\gamma_{(x,y,0)}(s))\mathrm{d}s+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\phi(2\pi,y)}^{y}\frac{H(x,Z(x,s,0))}{Z(x,s,0)^{j+1}}Z_y(x,s,0)\mathrm{d}s=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{Z\circ\alpha_{(x,y,0)}}\frac{H(x,\zeta)}{\zeta^{j+1}}d\zeta=-A_j(x).$$

Assim, para cada $j\in\mathbb{Z}$, temos

$$\int_0^{2\pi}[u(\gamma_{(x,y,0)}(s))-H(x,Z(\gamma_{(x,y,0)}(s)))]\frac{(Z_t+aZ_y)(\gamma_{(x,y,0)}(s))}{Z(\gamma_{(x,y,0)}(s))^{j+1}}\,\mathrm{d}s\,+$$

$$+\int_{\phi(2\pi,y)}^{y}[u(x,s,0)-H(x,Z(x,s,0))]\frac{Z_y(x,s,0)}{Z(x,s,0)^{j+1}}\mathrm{d}s=0. \tag{4.4.44}$$

Existe uma função contínua $u^\sharp : Z(\alpha_{(x,y,0)}(D_{\alpha_{(x,y,0)}})) \to \mathbb{C}$ tal que $u(\alpha_{(x,y,0)}(s)) = u^\sharp(Z(\alpha_{(x,y,0)}(s)))$. A função $u^\sharp$ está bem definida em vista do lema 4.4.1, pois $\mathcal{L}u = 0$. A continuidade verifica-se como a seguir: seja ζ_j seqüência em $Z(\alpha_{(x,y,0)}(D_{\alpha_{(x,y,0)}}))$ tal que $\zeta_j \to \zeta_0 \in Z(\alpha_{(x,y,0)}(D_{\alpha_{(x,y,0)}}))$. Tomemos s_j tal que $Z(\alpha_{(x,y,0)}(s_j)) = \zeta_j$. Passando a uma subseqüência, se necessário, podemos assumir que ocorre uma das duas situações seguintes:

i) $Z(\alpha_{(x,y,0)}(s_j)) = Z(\gamma_{(x,y,0)}(s_j))$, com $s_j \to s^\bullet \in [0, 2\pi]$;

ii) $Z(\alpha_{(x,y,0)}(s_j)) = Z(\beta_{(x,\phi(2\pi,y)),0)}(s_j))$, com $s_j \to s^\bullet \in [0, s_0]$.

Se *i)* ocorre então $\zeta_j = Z(\gamma_{(x,y,0)}(s_j)) \to Z(\gamma_{(x,y,0)}(s_0))$ e, assim, $Z(\gamma_{(x,y,0)}(s_0)) = \zeta_0$. Portanto, $u^\sharp(\zeta_j) = u^\sharp(Z(\gamma_{(x,y,0)}(s_j))) = u(\gamma_{(x,y,0)}(s_j)) \to u(\gamma_{(x,y,0)}(s_0)) = u^\sharp(Z(\gamma_{(x,y,0)}(s_0)) = u^\sharp(\zeta_0)$. Se *ii)* ocorre o resultado segue de modo análogo.

Se considerarmos $v^\sharp = u^\sharp - H(x, \cdot)$, então, por (4.4.44), temos

$$\int_{Z\circ\alpha_{(x,y,0)}} \frac{v^\sharp(\zeta)}{\zeta^{j+1}}\,\mathrm{d}\zeta = 0, \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{4.4.45}$$

Como a função $F(z) = \displaystyle\int_{Z\circ\alpha_{(x,y,0)}} \frac{v^\sharp(\zeta)}{z-\zeta}\mathrm{d}\zeta$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus Z\circ\alpha_{(x,y,0)}$ (lema 1.0.2) temos $F(z) = 0$ para qualquer $z \notin Z\circ\alpha_{(x,y,0)}$. De fato, se $\dfrac{|z|}{|\zeta|} < 1$ então

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)} = \frac{1}{\zeta}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^j}{\zeta^{j+1}}.$$

Assim, para $|z| < r = \dfrac{1}{2}\cdot \displaystyle\min_{\zeta\in Z\circ\alpha_{(x,y,0)}} |\zeta|$, temos que

$$\frac{v^\sharp(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{j=0}^{\infty} v^\sharp(\zeta)\cdot\frac{z^j}{\zeta^{j+1}}.$$

Logo, de (4.4.45), para $|z| < r$ temos

$$-\int_{Z\circ\alpha_{(x,y,0)}} \frac{v^\sharp(\zeta)}{z-\zeta}\mathrm{d}\zeta = \sum_{j=0}^{\infty} z^j \int_{Z\circ\alpha_{(x,y,0)}} \frac{v^\sharp(\zeta)}{\zeta^{j+1}}\,\mathrm{d}\zeta = 0.$$

Portanto, $F \equiv 0$ na região interior a curva $Z \circ \alpha_{(x,y,0)}$. Agora, se $|z| > r' = 2 \cdot \max_{\zeta \in Z\circ\alpha_{(x,y,0)}} |\zeta|$, fazemos

$$\frac{1}{z-\zeta} = \frac{1}{z\left(1-\frac{\zeta}{z}\right)} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{\zeta}{z}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\zeta^j}{z^{j+1}}$$

e usamos (4.4.45), com $j < 0$, para obter, de modo análogo ao feito para $|z| < r$, que $F \equiv 0$ na região exterior a curva $Z \circ \alpha_{(x,y,0)}$. Assim, $F \equiv 0$ em $\mathbb{C} \setminus Z \circ \alpha_{(x,y,0)}$, isto é,

$$\int_{Z\circ\alpha_{(x,y,0)}} \frac{v^\sharp(\zeta)}{z-\zeta} \mathrm{d}\zeta = 0, \quad z \notin Z \circ \alpha_{(x,y,0)}. \tag{4.4.46}$$

Logo, segue do lema 1.0.1 que $v^\sharp = 0$. Portanto, a prova de (4.4.40) está completa. ■

Retornemos para (4.3.18) com $K = K_\sigma$. Como também temos $\mathcal{L}(\mathsf{X}Z) = 0$, podemos aplicar a proposição 4.4.1 e representar

$$g(x,y,t) = G(x, Z(x,y,t)), \quad \mathsf{X}Z = A(x, Z(x,y,t));$$

aqui G e A são funções suaves sobre um intervalo $[-\eta, \eta]$ e a valores em $\mathcal{O}(\mathcal{A}(\epsilon'))$, para $\eta, \epsilon' > 0$ convenientemente pequenos; além disso, G é flat em $x = 0$.

Estudaremos, agora, a função $A(x, \zeta)$. Notemos que

$$(\mathsf{X}Z)(x,y,t) = \mathsf{X}\{\theta(x)V(x,y,t)\}Z(x,y,t).$$

Como

$$\mathsf{X}\{\theta(x)V(x,y,t)\} = \theta(x)\partial_y V - x^m V \partial_x \theta - x^m \theta \partial_x V = \theta(x) e^{U(x,y,t)} + \mathrm{O}(|x|^m),$$

temos

$$\mathsf{X}\{\theta(x)V(x,y,t)\} - \theta(x) = \theta(x)\left\{e^{U(x,y,t)} - 1\right\} + \mathrm{O}(|x|^m).$$

Fazendo uso de (4.4.25), concluímos que

$$\mathsf{X}\{\theta(x)V(x,y,t)\} - \theta(x) = \mathrm{O}(|x|^m).$$

Assim,

$$A(x, Z(x,y,t)) = \mathsf{X}\{\theta(x)V(x,y,t)\}Z(x,y,t) =$$

$$\theta(x)Z(x,y,t) + \mathrm{O}(|x|^m). \tag{4.4.47}$$

Definamos

$$A^\bullet(x,\zeta) = A(x,\zeta) - \theta(x)\zeta. \tag{4.4.48}$$

Então, (4.4.47) implica

$$\left(\partial_x^j A^\bullet\right)(0, Z(0,y,t)) = 0, \quad j = 0, \ldots, m-1,$$

e, portanto,

$$A^\bullet(x,\zeta) = \mathrm{O}(|x|^m). \tag{4.4.49}$$

(aqui usamos o fato de $A^\bullet(x,\zeta)$ ser holomorfa em ζ e $\partial_x^j A^\bullet(0,\zeta) = 0$, se $j = 0, ..., m-1$, sobre $Z(0,y,t)$).

Finalmente, podemos construir o operador

$$\mathcal{P} = A(x,\zeta)\partial_\zeta - x^m \partial_x\,. \tag{4.4.50}$$

Proposição 4.4.2 *Suponha que para algum* $0 < \eta' \leq \eta$ *exista uma solução para*

$$\mathcal{P}W = G \tag{4.4.51}$$

pertencente a $C^\infty((-\eta', \eta'), \mathcal{O}(\mathcal{A}(\epsilon)))$. *Então,*

$$w(x,y,t) = W(x, Z(x,y,t))$$

resolve (4.3.18) numa vizinhança de $\{0\} \times \{0\} \times S^1$.

Esta proposição está demonstrada em [BCP, proposição 6.2].

Tendo em vista o que foi desenvolvido acima, vemos que a resolubilidade de (4.3.18) é reduzida à resolubilidade de (4.4.51).

Como feito em [BCP, páginas 22 e 23], verificamos que para resolver (4.4.51) é suficiente resolver a equação

$$x^m w'(x) = \theta(x)Tw(x) + x^m(B(x)Tw(x) + g(x)), \tag{4.4.52}$$

sendo $m \geq 2$, $T \doteq \zeta\partial_\zeta$, $B(x) = B(x,\zeta) = \dfrac{A^\bullet(x,\zeta)}{x^m\zeta}$ e $g : [-\eta,\eta] \to \mathrm{H} = \mathcal{O}(\mathcal{A}(\epsilon')) \cap L^2(\mathcal{A}(\epsilon'))$ (g é uma função suave dada, a qual é flat para $x = 0$); além disso, (4.4.52) satisfaz as hipóteses do [BCP, teorema A.1.1]. Como [BCP, teorema A.1.1] resolve (4.4.52), a demonstração fica completa. ■

Referências Bibliográficas

[BCP] A. P. Bergamasco, P. D. Cordaro e G. Petronilho, Global solvability for a class of complex vector fields on the two-torus, Comm. in PDE, **29** (2004), 785-819.

[BNZ] A. P. Bergamasco, W. V. L. Nunes e S. L. Zani, Global properties of a class of overdetermined systems, Journal of Function Analysis 200 (2003) 31-64.

[BM] A. P. Bergamasco e A. Meziani, Semiglobal solvability of a class of planar vector fields of infinite type. Mat. Contemporânea, **18** (2000), 31-42.

[BP] A. P. Bergamasco e G. Petronilho, Closedness of the range for vector fields on the torus, J. Dif. Eq. **154** (1999), 132-139.

[C] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable I.* Springer-Verlag, New York, 1973.

[E] D. B. A. Epstein, Curves on 2-manifolds and isotopies, Acta Math. 115 (1966) 83-107.

[Go] P. Godin, Propagation des singularités pour les opérateurs différentiels de type principal, localement résolubles, a coefficients analytiques, en dimension 2, **29**(1979), 223-245.

[GW] S. Greenfield e N. Wallach, Global hypoellipticity and Liouville numbers, Proc. Amer. Math. Soc. **31** (19972), 112-114.

[H1] L. Hörmander, Propagation of singularities and semi-global existence theorems for (pseudo-)differential operators of principal type. Ann. of Math., **108** (1978), 569-609.

[H2] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators IV.* Springer-Verlag, 1984.

[H3] L. Hörmander, Pseudodifferential operators of principal type. Singularities in boundary value problems. Proc. NATO Adv. Study Inst. (1980), 69–96, NATO Adv. Study Inst. Ser. C: Math. Phys. Sci., **65** (1981).

[He] C. Herz, Functions which are divergences, Amer. J. Math. **92** (1970), 641-656.

[Hel] B. Helffer, Addition de variables et applications à la régularité. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **28:2**(1978), 221-231.

[Hi] M. W. Hirsch, *Differential Topology, in: Graduate Texts in Mathematics*, vol. 33, Springer, New York, 1976.

[Ho1] J. Hounie, Globally hypoelliptic and globally solvable first order evolutions equations, Trans. Amer. Math. Soc. **252** (1979), 233-248.

[Ho2] J. Hounie, A note on global solvability of vector fields, Proc. of the Amer. Math. Soc., **94:1** (1985).

[Ho3] J. Hounie, Globally Hypoelliptic Vector Fields on Compact Surfaces, Comm. in Partial Diferential Equations, 7(4), 343-370 (1982).

[Ho4] J. Hounie, Minimal sets of families of vector fields on compact surfaces, J. Dif. Geometry **16** (1981), 739-744.

[Kö] G. Köthe, *Topological vector spaces II.* Springer-Verlag, New York, 1979.

[S] H. J. Sussmann, Orbits of families of vector fields and integrability of distributions. Trans. Amer. Math. Soc., **180**(1973), 171-188.

[Sc] A. Schwartz, A generalization of the Poincaré-Bendixon theorem to closed two-dimensional manifolds, Amer. J. Math. **85**(1963), 453-458.

[T] F. Treves, *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*, Academic Press, New York, 1967.

[W] J. Wermer, *Banach algebras and several complex variables, 2nd. edition.* Springer-Verlag, 1976.