

**DINAMIKA GETARAN KAOTIK BANDUL BERPEGAS :
STUDI AWAL DINAMIKA TIDAK LINIER DI DALAM
SISTEM SEISMOMETER SATU KOMPONEN**

oleh,
Budi Eka Nurcahya, Sismanto, Ari Setiawan
Lab. Geofisika, FMIPA, UGM.

INTISARI

Penelitian ini dilakukan untuk mengetahui sifat getaran bandul berpegas dengan cara simulasi numerik. Simulasi numerik dilakukan untuk memvariasi syarat awal dan redaman bandul berpegas.

Pada harga syarat awal dan redaman tertentu di dalam simulasi numerik menunjukkan bahwa simpangan ayunan menjadikan osilasi pada pegas bersifat kaotik. Keadaan ini dapat diatasi dengan memperbesar redaman ayunan pegas.

Sistem bandul berpegas dengan harga koefisien redaman lebih besar daripada harga kritisnya dapat dipakai sebagai syarat untuk pembuatan seismometer satu komponen.

**CHAOTIC VIBRATION OF DYNAMICAL SPRING PENDULUM:
PRELIMINARY STUDY OF NONLINEAR DYNAMIC IN
ONE COMPONENT SEISMOMETER SYSTEM**

Budi Eka Nurcahya, Sismanto, Ari Setiawan

ABSTRACT

This research has been done in order to understand characteristic of vibrations spring pendulum by means of numerical computations. Numerical simulation displayed several kind of oscillations with different initial condition and damping coefficients of spring pendulum.

The numerical simulation shown chaotic oscillations spring at critical values of initial condition and damping coefficients. This chaotic oscillations can be avoided by increasing the damping coefficient of the spring pendulum.

The spring pendulum with damping coefficient greater than the critical values is recommended as a component of seismometer system.

I. PENDAHULUAN

Masalah perekaman getaran seismik seperti gempa tektonik dan gempa vulkanik menggunakan seismometer satu komponen vertikal sudah biasa dilakukan, tetapi secara simulasi tentang mekanisme getaran seismometernya belum pernah dilakukan. Akibatnya belum diketahui dengan jelas dinamika getarannya, maksudnya, apakah getarannya bersifat kaotik (chaotic) atau tidak. Oleh karena itulah kajian ini dilakukan dengan tujuan untuk mengetahui dinamika getaran bandul berpegas dengan berbagai parameter fisika baik yang statik (redaman) dan yang dinamik (gaya luar).

Telah banyak dilakukan orang kajian tentang dinamika kaotik pada bandul matematis yang berosilasi akibat gaya luar dengan simpangan besar. Sedang pada bandul berpegas hanya sebatas tentang penjabaran persamaan diferensial getarannya tanpa memperhatikan redaman dan gaya luar yang bekerja.

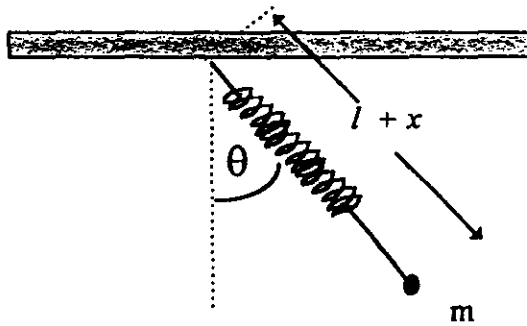
Dinamika tidak linier merupakan masalah yang akhir-akhir ini dibahas dengan hangat oleh berbagai kalangan ilmuwan. Dinamika tidak linier didalamnya termasuk juga masalah mekanika getaran. Dinamika getaran bandul berpegas yang dalam dinamikanya selain berosilasi (bergetar) dan juga berayun, secara analitik persamaan dinamikanya telah dikemukakan oleh Nayfeh (1979). Sistem ini termasuk sistem getaran tidak linier.

Pembahasan tentang kekacauan (chaos) dalam masalah dinamika tidak linier akan memunculkan ilmu baru (Gleick, 1987). Pembahasan masalah ini melibatkan analisis geometri fraktal (attractor) dari data runtun waktu yang diakibatkan dinamika tersebut (Moon, 1992). Cara analisis untuk dinamika tidak linier telah dikemukakan antara lain oleh Crawford (1991), Abrabanel (1993), Erzan (1995), serta Garssberger (1983). Langkah analisis secara kuantitatif untuk dinamika getaran tidak linier antara lain adalah; analisis spektrum (transformasi fourier), penentuan dimensi fraktal, dan penentuan eksponen Lyapunov. Dengan diketahui dinamika getaran bandul berpegas ini maka dapat dipergunakan untuk memprediksi

kelayakan hasil rekaman seismometer serta berguna sebagai masukan dalam rangka pembuatan seismometer satu komponen.

II. LANDASAN TEORI

Persamaan gerak untuk bandul berpegas seperti yang ditunjukkan oleh gambar-1 dapat diturunkan dengan Lagrangian. Besarnya energi kinetik dan energi potensial bandul berpegas dengan massa m dan panjang pegas l tanpa memperhatikan redaman dan gaya luar (Nayfeh, 1979) adalah,



Gambar-1. Sketsa bandul berpegas.

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + (l+x)^2 \dot{\theta}^2) \tag{1a}$$

$$V = \frac{1}{2}kx^2 + mg(l+x)(1 - \cos\theta) - mgx \tag{1b}$$

dengan x adalah simpangan getaran dari posisi setimbang, θ adalah simpangan ayunan dari posisi setimbang dan g adalah percepatan gravitasi bumi.

Persamaan Lagrangnya adalah,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \tag{2a}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \tag{2b}$$

atau

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - (l+x)\dot{\theta}^2 - g \cos \theta = 0 \tag{3a}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g \sin \theta}{l+x} + \frac{2\dot{x}\dot{\theta}}{l+x} = 0 \tag{3b}$$

dimana $\omega_0^2 = k/m$ dan L adalah,

$$L = T - V \tag{4}$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + (l+x)^2 \dot{\theta}^2) - \frac{1}{2}kx^2 - mg(l+x)(l - \cos \theta) + mgx$$

Apabila memperhatikan redaman dan gaya luar maka persamaan diferensialnya adalah,

$$\ddot{x} + D_1 \dot{x} + \omega_0^2 x - (l+x)\dot{\theta}^2 - g \cos \theta = A_1 \sin(2\pi f_1 t) \tag{5a}$$

$$\ddot{\theta} + D_2 \dot{\theta} + \frac{g \sin \theta}{l+x} + \frac{2\dot{x}\dot{\theta}}{l+x} = A_2 \sin(2\pi f_2 t) \tag{5b}$$

Persamaan 5a dan 5b inilah yang dipakai untuk simulasi. Untuk menyelesaikan secara numerik kedua persamaan ini dinyatakan kedalam persamaan diferensial orde satu yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y = \dot{x} \\ \frac{dy}{dt} &= A_1 \sin(2\pi f_1 t) - D_1 y - \omega_0^2 x + (l+x)\theta^2 + g \cos \theta = \ddot{x} \\ \frac{d\phi_1}{dt} &= 2\pi f_1 \\ \frac{d\theta}{dt} &= \theta = \dot{\theta} \\ \frac{d\theta}{dt} &= A_2 \sin(2\pi f_2 t) - D_2 \theta - \frac{g \sin \theta}{l+x} - \frac{2\theta y}{l+x} = \ddot{\theta} \\ \frac{d\phi_2}{dt} &= 2\pi f_2 \end{aligned} \tag{6}$$

III. METODE PENELITIAN

Langkah pertama yang dilakukan adalah membuat program simulasi.. Program simulasi yang dibuat merupakan penyelesaian numerik persamaan

diferensial yang dinyatakan dalam persamaan (6). Penyelesaian numerik yang dilakukan menggunakan metoda Rungga-Kutta orde 4 tanpa gaya luar atau $F_1(t)=0$ dan $F_2(t)=0$, sedangkan langkah yang kedua dengan memasukkan faktor gaya luar. Gaya luar yang dipakai adalah gaya luar yang besarnya periodik yang didekati dengan fungsi sinus.

Simulasi pertama, variabel yang divariasi adalah D_1 , D_2 , dan variasi sarat awal untuk $\theta(t=0)$ dengan harga $x(t=0) = 0$. Langkah ini untuk mengetahui tentang sifat ketidaklinieran sistem dinamika bandul berpegas tersebut. Kemudian dilakukan analisis untuk hasil yang diperoleh. Analisis yang dilakukan adalah analisis linier, yaitu dengan cara transformasi fourier dan analisis tidak linier. Analisis tidak linier yang dilakukan yaitu dengan membuat diagram attractor , phase-space, kemudian dihitung harga dimensi fraktalnya D_{c2} dan eksponen Lyapunov λ_1 .

IV. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

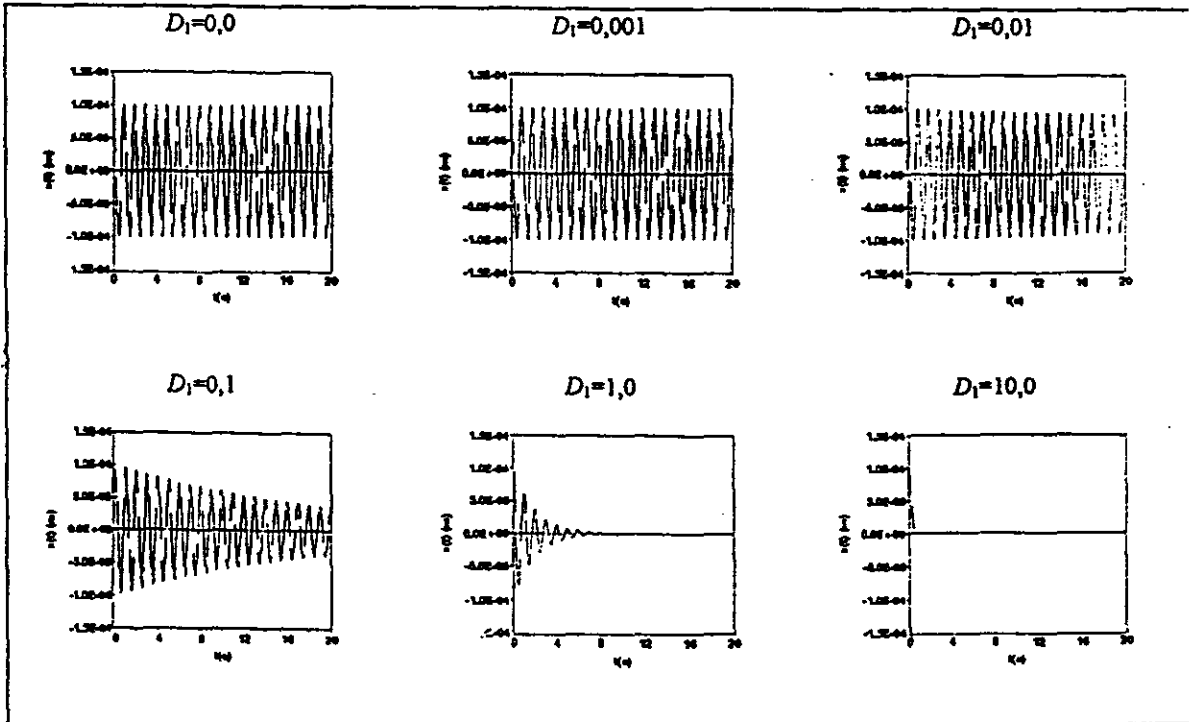
Simulasi untuk variasi harga D_1 , dengan harga $\omega_0=2\pi$ atau $f_0=1,0$ Hz, $l=0,1$ m, $x(t=0)=10^{-4}$ m, $dx(t=0)/dt=0$ m/s, $d\theta(t=0)/dt=0$ rad/s, $\theta(t=0)=0$ rad, $D_2=0$, $F_1(t)=0$ dan $F_2(t)=0$ menunjukkan bahwa amplitudo meluruh secara eksponensial sebagai fungsi waktu seperti terlukis pada gambar-2, dan besarnya peluruhan tergantung dari harga D_1 . Frekuensi getaran pegas $f_0 = 1$ Hz terlihat dari hasil sepektrumnya gambar-3.

Berdasarkan analisis tak-linier (hasil eksponen Lyapunov) menunjukkan sistem osilasi dengan sarat awal dan harga parameter fisis seperti diatas menunjukkan bahwa sistem tersebut linier. Harga λ_1 pada keadaan ini berharga negatif (Tabel-1), hal ini menyiratkan bahwa sistem tersebut tidak kaotik (Moon,1992) dan harga D_{c2} semakin kecil. Gambar-4 adalah gambar diagram phase-space .

Tabel -1 :

Harga dimensi fraktal dan eksponen Lyapunov data hasil simulasi untuk variasi harga D_1

D_1	D_{c2}	$\lambda_1(x(t))$	Keterangan
0,0	$0,92 \pm 0,03$	-0,75	<div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 100px; margin-right: 5px;"></div> <div style="text-align: center;">tidak kaotik</div> </div>
0,001	$0,92 \pm 0,03$	-0,76	
0,01	$0,85 \pm 0,03$	-0,79	
0,1	$0,68 \pm 0,03$	-1,19	
1,0	$0,223 \pm 0,007$	-5,31	
10,0	$0,017 \pm 0,002$	-7,52	



Gambar-2. $x(t)$ hasil simulasi untuk variasi harga D_1 .

Simulasi kedua dilakukan untuk variasi harga D_2 dengan harga $\omega_f=2\pi$ atau $f_f=1,0$ Hz, $l=0,1$ m, $x(t=0)=0,0$ m, $dx(t=0)/dt=0$ m/s, $d\theta(t=0)/dt=0$ rad/s,

$\theta(t=0)=\pi/4 \cdot 10^{-6}$ rad, $D_1=0$, $F_1(t)=0$ dan $F_2(t)=0$. Hasil simulasi menunjukkan bahwa $x(t)$ dari kaotik menuju periodik dan $\theta(t)$ periodik dengan amplitudo meluruh secara eksponensial, hal ini terlihat pada gambar-5 dan gambar-7. Perubahan kaotik untuk $x(t)$ dan $\theta(t)$ sebanding dengan perubahan harga D_2 hal ini terlihat pada gambar-6, gambar-8, serta gambar-9 dan perubahan harga D_{e2} serta harga λ_1 disajikan dalam Tabel-2.

Dari hasil tranformasi fourier menunjukkan bahwa $x(t)$ mempunyai dua kandungan frekuensi yang dominan yaitu 1,0 Hz dan 2,0 Hz serta beberapa frekuensi tinggi. Kandungan frekuensi 2,0 Hz pada $x(t)$ diakibatkan oleh ayunan pegas. Kandungan frekuensi 2,0 Hz pada $x(t)$ hilang apabila redaman ayunan pegas besar ($D_2=10,0$).

Tabel -2:

Harga dimensi fraktal D_{e2} dan eksponen Lyapunov λ_1 data hasil simulasi untuk variasi harga D_2

D_2	D_{e2}	λ_1		Keterangan	
		$x(t)$	$\theta(t)$	$x(t)$	$\theta(t)$
0,0	$1,49 \pm 0,06$	5.78	-0.68	↑ kaotik	↓ tidak kaotik
0,001	$1,49 \pm 0,06$	5.77	-0.69		
0,01	$1,46 \pm 0,06$	5.76	-0.74		
0,1	$1,40 \pm 0,07$	5.73	-1.19		
1,0	$0,97 \pm 0,03$	5.64	-5.69		
10,0	$0,89 \pm 0,06$	5.60	-5.79		

Simulasi yang ketiga dilakukan dengan memvariasi syarat awal untuk harga $\theta(t=0)$ dengan harga $\omega_0=2\pi$ atau $f_0=1,0$ Hz, $l=0,1$ m, $x(t=0)=0,0$ m, $dx(t=0)/dt=0$ m/s, $d\theta(t=0)/dt=0$ rad/s, $D_1=0$, $D_2=0$, $F_1(t)=0$ dan $F_2(t)=0$. Hasil simulasi menunjukkan bahwa $x(t)$ kaotik, seperti yang ditampilkan pada gambar-10 sampai dengan gambar-14 dan dirangkum ke dalam Tabel-3. Sifat kaotik $x(t)$ perubahannya tidak teratur, keadaan ini tercermin dari harga D_{e2} dan harga λ_1 .

Hasil transformasi fourier $x(t)$ dan $\theta(t)$ pada gambar-11 menunjukkan bahwa $x(t)$ mempunyai kandungan frekuensi ganda 1,0 Hz dan 2,0 Hz sedangkan $\theta(t)$ hanya mempunyai kandungan frekuensi 2,0 Hz. $x(t)$ dan $\theta(t)$ akan mempunyai banyak kandungan frekuensi pada harga syarat awal $\theta(t=0) = \pi/4 \cdot 10^{-1}$ rad.

Berdasar hasil simulasi yang ketiga ini menunjukkan bahwa apabila bandul berayun akibat adanya simpangan awal akan menjadikan pegas berosilasi, dengan osilasi yang sifatnya kaotik.

Tabel -3:

Harga dimensi fraktal D_{c2} dan eksponen Lyapunov λ_1 data hasil simulasi untuk variasi harga $\theta(t=0)$

$\theta(t=0)$ (rad)	D_{c2}	λ_1		Keterangan	
		$x(t)$	$\theta(t)$	$x(t)$	$\theta(t)$
$\pi/4 \cdot 10^{-6}$	$1,49 \pm 0,06$	5,780	-0,684818	↑ kaotik ↓ kaotik	↓ tidak kaotik
$\pi/4 \cdot 10^{-5}$	$2,17 \pm 0,03$	5,216	-0,684824		
$\pi/4 \cdot 10^{-4}$	$1,92 \pm 0,05$	5,148	-0,684896		
$\pi/4 \cdot 10^{-3}$	$2,01 \pm 0,04$	5,134	-0,685731		
$\pi/4 \cdot 10^{-2}$	$2,13 \pm 0,05$	5,142	-0,696302		
$\pi/4 \cdot 10^{-1}$	$2,07 \pm 0,02$	5,175	-0,764347		

Simulasi yang keempat dilaksanakan dengan memasukan gaya luar $F_1(t)$ yang berupa fungsi sinus dengan frekuensi 2,0 Hz serta amplitudonya sebesar 10^{-5} m, dan gaya luar $F_2(t)$ yang juga berupa fungsi sinus dengan frekuensi 0,5 Hz dan amplitudonya sebesar $\pi \cdot 10^{-4}$ rad. Harga parameter lainnya untuk simulasi ini adalah $f_0=1,0$ Hz, $l=0,1$ m, $x(t=0)=0,0$ m, $dx(t=0)/dt=0$ m/s, $d\theta(t=0)/dt=0$ rad/s, $\theta(t=0)=0$, $D_1=5$, dan $D_2=5$. Pemilihan harga D_1 dan D_2 sebesar 5 memberikan respon pegas dengan baik. Keadaan ini terbukti gaya luar $F_2(t)$ tidak mempengaruhi osilasi pegas. Besarnya harga dimensi fraktal dan eksponen Lyapunov untuk $x(t)$ adalah $D_{c2}=0,836 \pm 0,036$ dan $\lambda_1=1,24 \cdot 10^{-5}$. Harga D_{c2} dan λ_1 tersebut menunjukkan $x(t)$ tidak kaotik. Gambar-15 adalah hasil simulasi yang keempat tersebut.

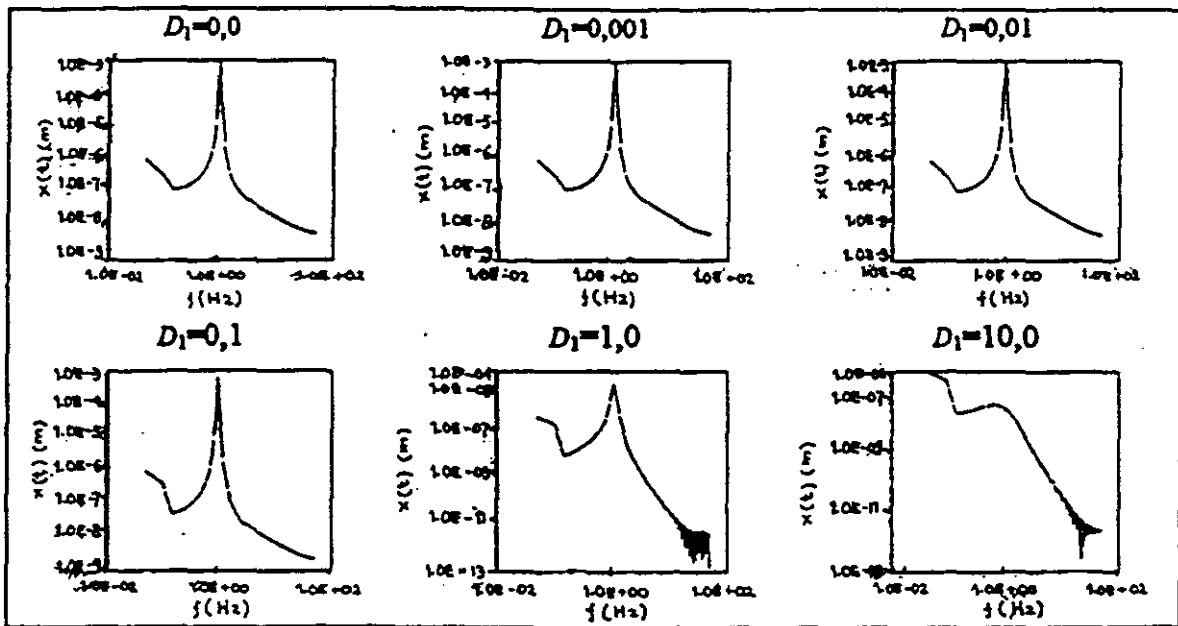
V. KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil simulasi dan analisis linier maupun tak linier, dapat disimpulkan bahwa adanya ayunan pada sistem bandul berpegas menjadikan adanya osilasi pegas yang bersifat kaotik. Sifat osilasi kaotik ini semakin chaos apabila simpangan ayunannya semakin besar.

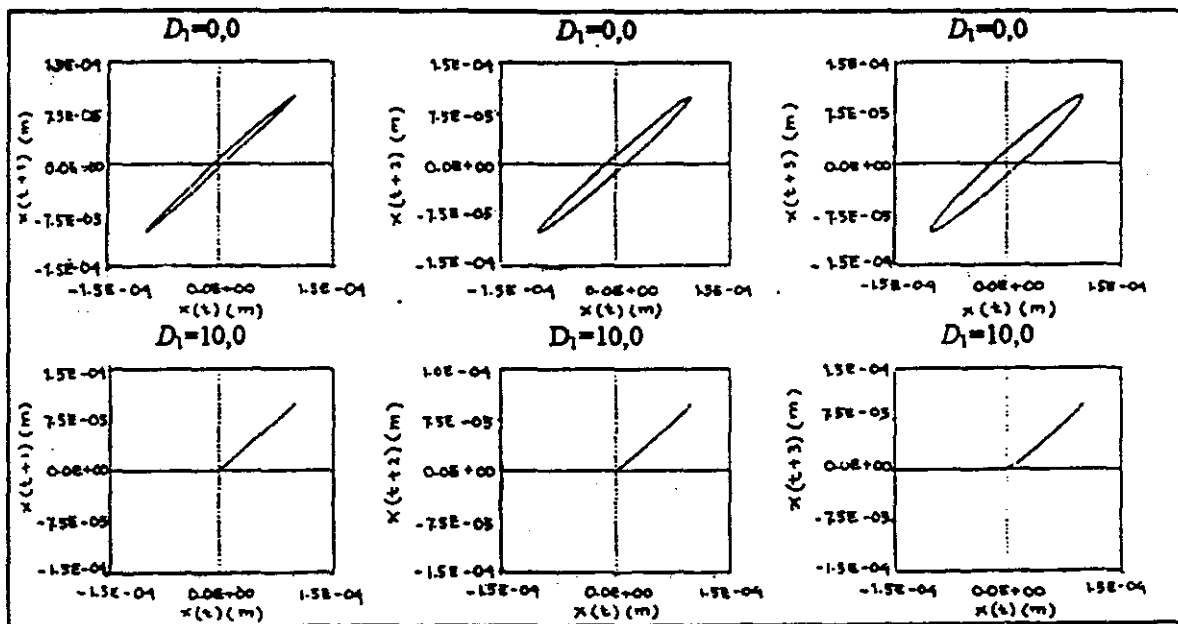
Untuk menghindari terjadinya osilasi yang kaotik akibat ayunan pegas maka harus dihilangkan adanya ayunan pegas tersebut atau dibuat sistem redaman yang relatif besar pada ayunannya. Sistem bandul berpegas dengan redaman ayunan yang besar merupakan syarat, yang harus dipenuhi dalam pembuatan seismometer satu komponen vertikal yang menggunakan sistem osilasi pegas.

DAFTAR PUSTAKA

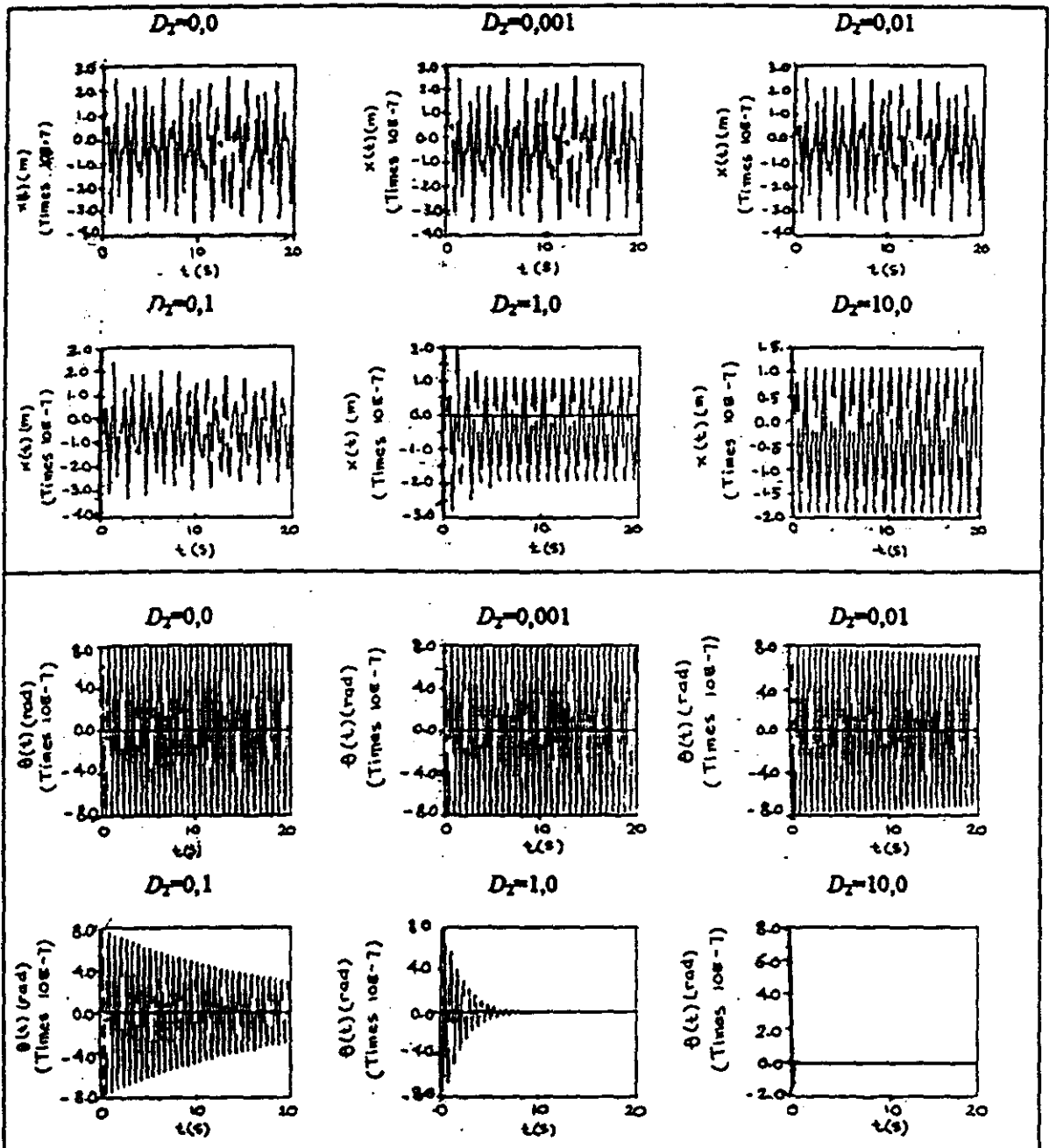
- Abrabanel, H.D.I., Reggie B., Sidorowich J.J, Tsimiring, L.S., 1993, *The analysis of observed chaotic data in physical system*, Rev. Mod. Phys. Vol. 65, No. 4, p.1331-1392.
- Crawford, J. D., 1991, *Introduction to bifurcation theory*, Rev. Mod. Phys. Vol. 63, No. 4, p.991-1037.
- Erzan, A., Pietronero, L., Vespigiani, A., 1995, *The fixed-scale transformation approach to fractal growth*, Rev. Mod. Phys. Vol. 67, No. 3, p. 545-604.
- Grassberger, P., Procaccia, I., 1983, *Characterization of strange attractor*, Physical Review Letters, Vol. 50, No. 5, p. 346-451.
- Gleick J., 1987, *Chaos making a new sciences*, First Ed., p. 301-318, Penguin Books Inc., New York.
- Moon, F. C., 1992, *Chaotic and fractal dynamics: an introduction applied scientists and engineers*, First Ed., p. 250-260., John Willey & Sons Inc., New York.
- Nayfeh, A.H., Mook, D. T., 1979, *Nonlinear Oscillations*, First Ed, p.369-370, John Willey & Sons Inc., New York.



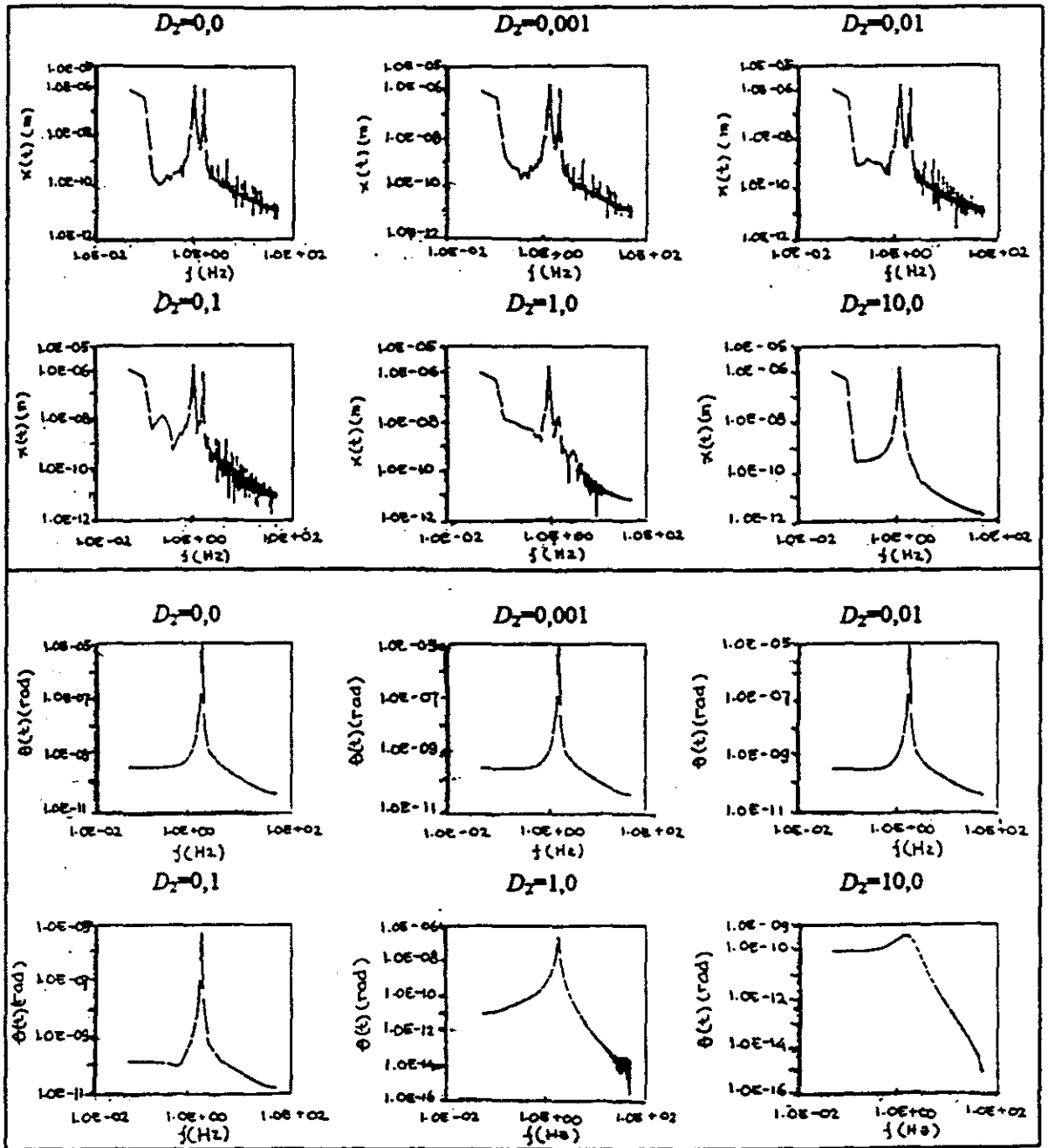
Gambar-3. Transformasi Fourier $x(t)$ hasil simulasi untuk variasi harga D_1 .



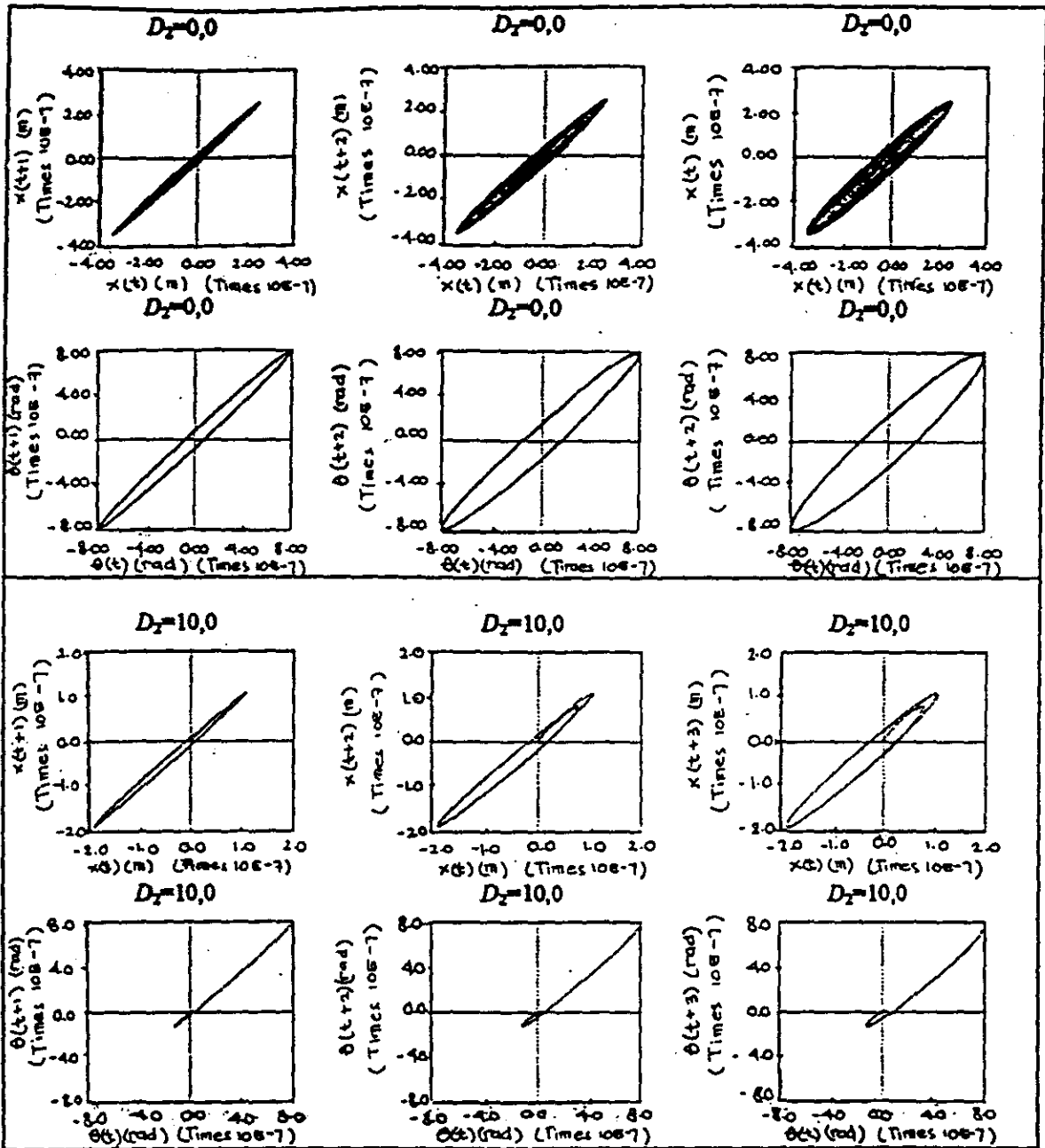
Gambar-4. Diagram phase-space $x(t)$ dengan lag-time $1\Delta t$ ($i+1$), $2\Delta t$ ($i+2$) dan $3\Delta t$ ($i+3$) untuk $D_1=0,0$ dan $D_1=10,0$ hasil simulasi untuk variasi harga D_1 .



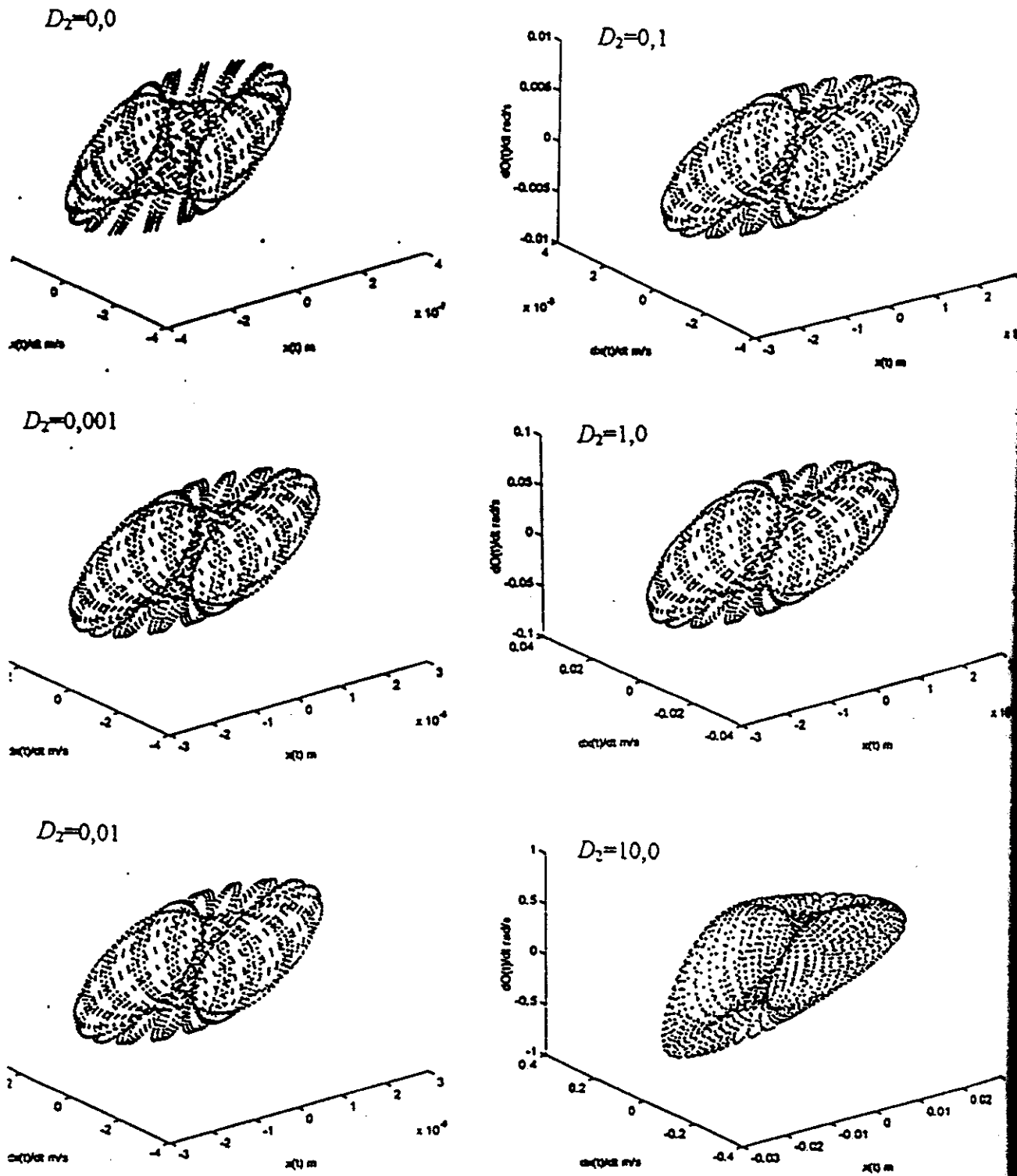
Gambar-5. $x(t)$ dan $\theta(t)$ hasil simulasi untuk variasi harga D_2 .



Gambar-6. Transformasi Fourier $x(t)$ dan $\theta(t)$ hasil simulasi untuk variasi harga D_2

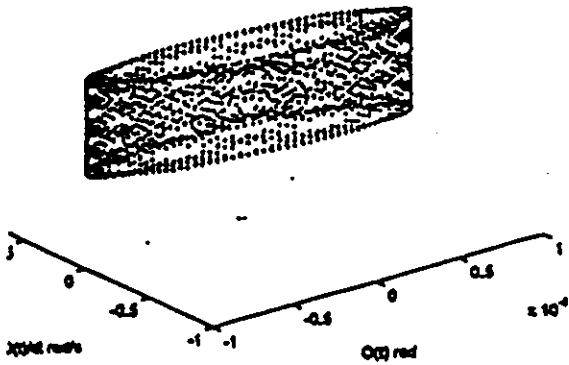


Gambar-7. Diagram phase-space untuk $x(t)$ dan $\theta(t)$ dengan lag-time $1\Delta t$ ($i+1$), $2\Delta t$ ($i+2$), $3\Delta t$ ($i+3$) pada $D_2=0,0$ dan $D_2=10,0$ hasil simulasi untuk variasi harga D_2 .

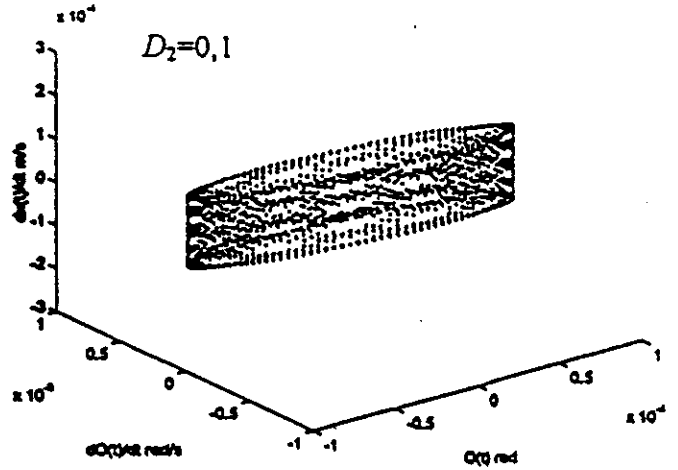


Gambar-8. Attractor $(x(t), dx(t)/dt, d\theta(t)/dt)$ hasil simulasi untuk variasi D_2 .

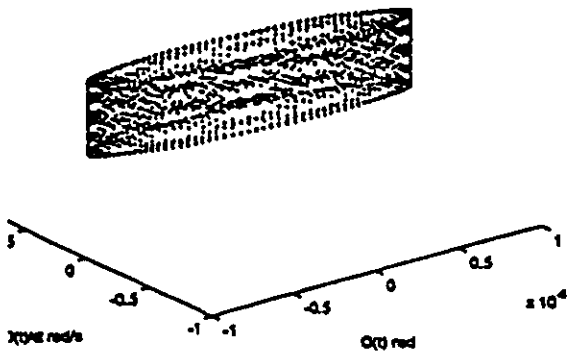
$D_2=0,0$



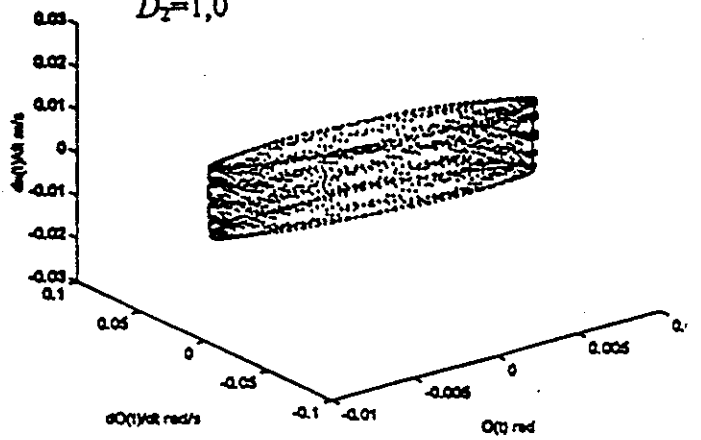
$D_2=0,1$



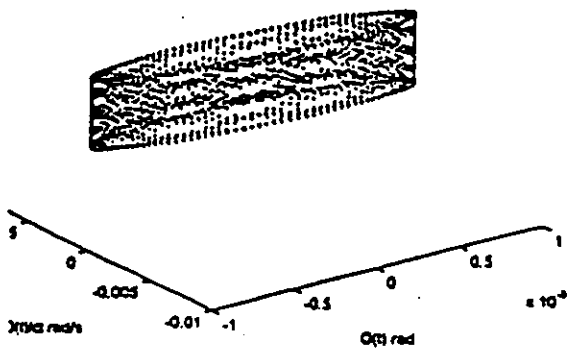
$D_2=0,001$



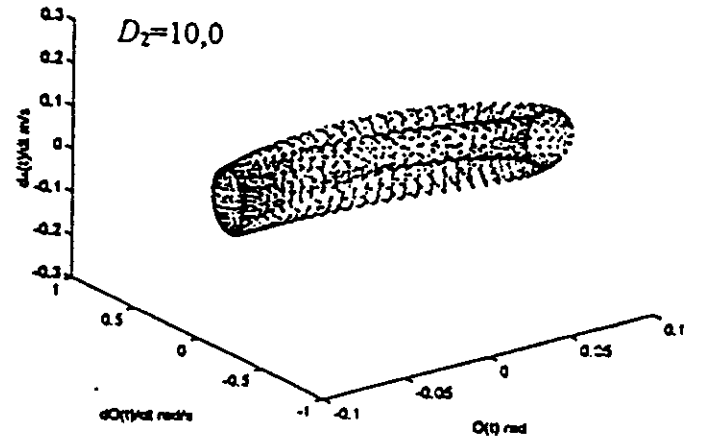
$D_2=1,0$



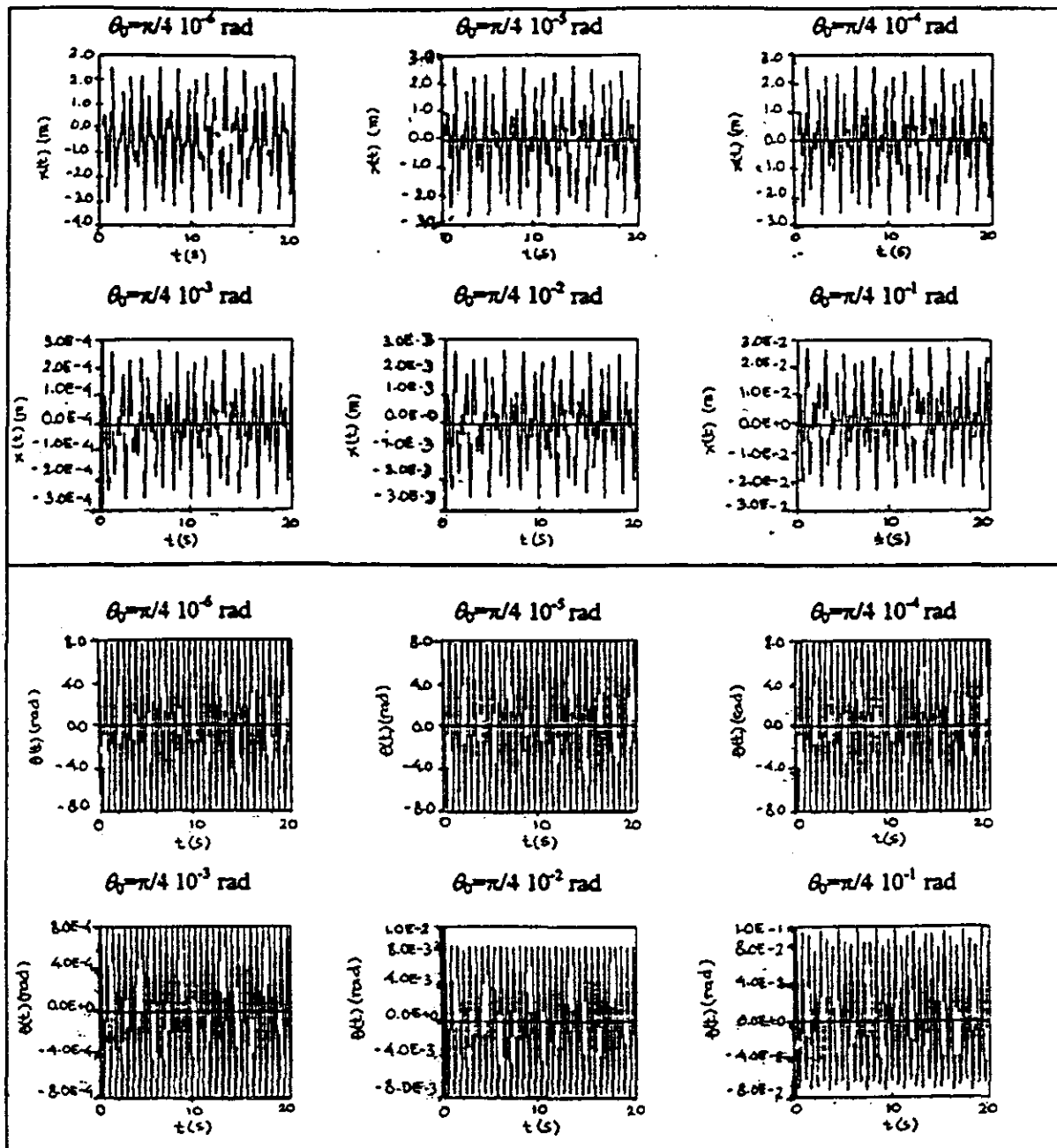
$D_2=0,01$



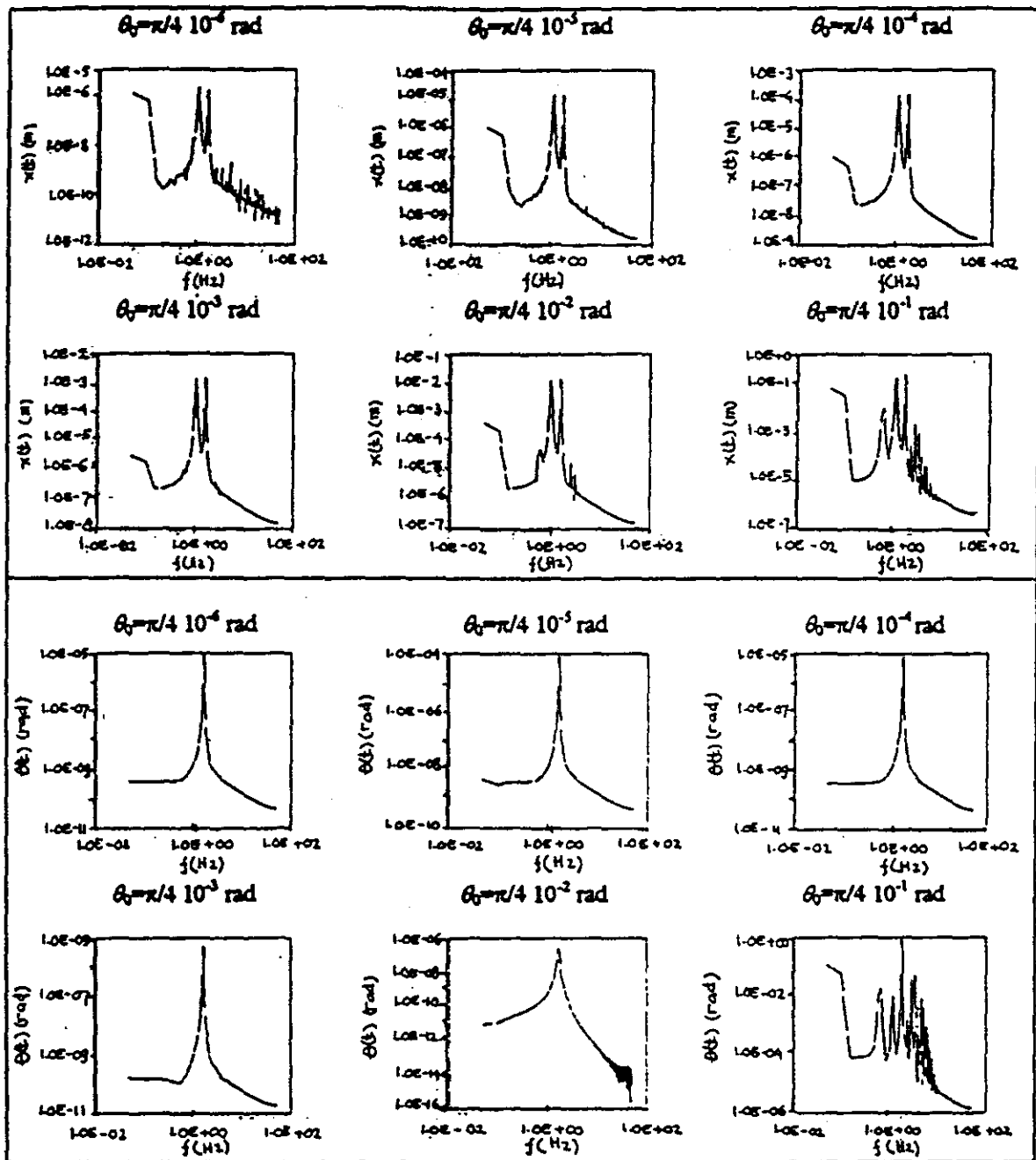
$D_2=10,0$



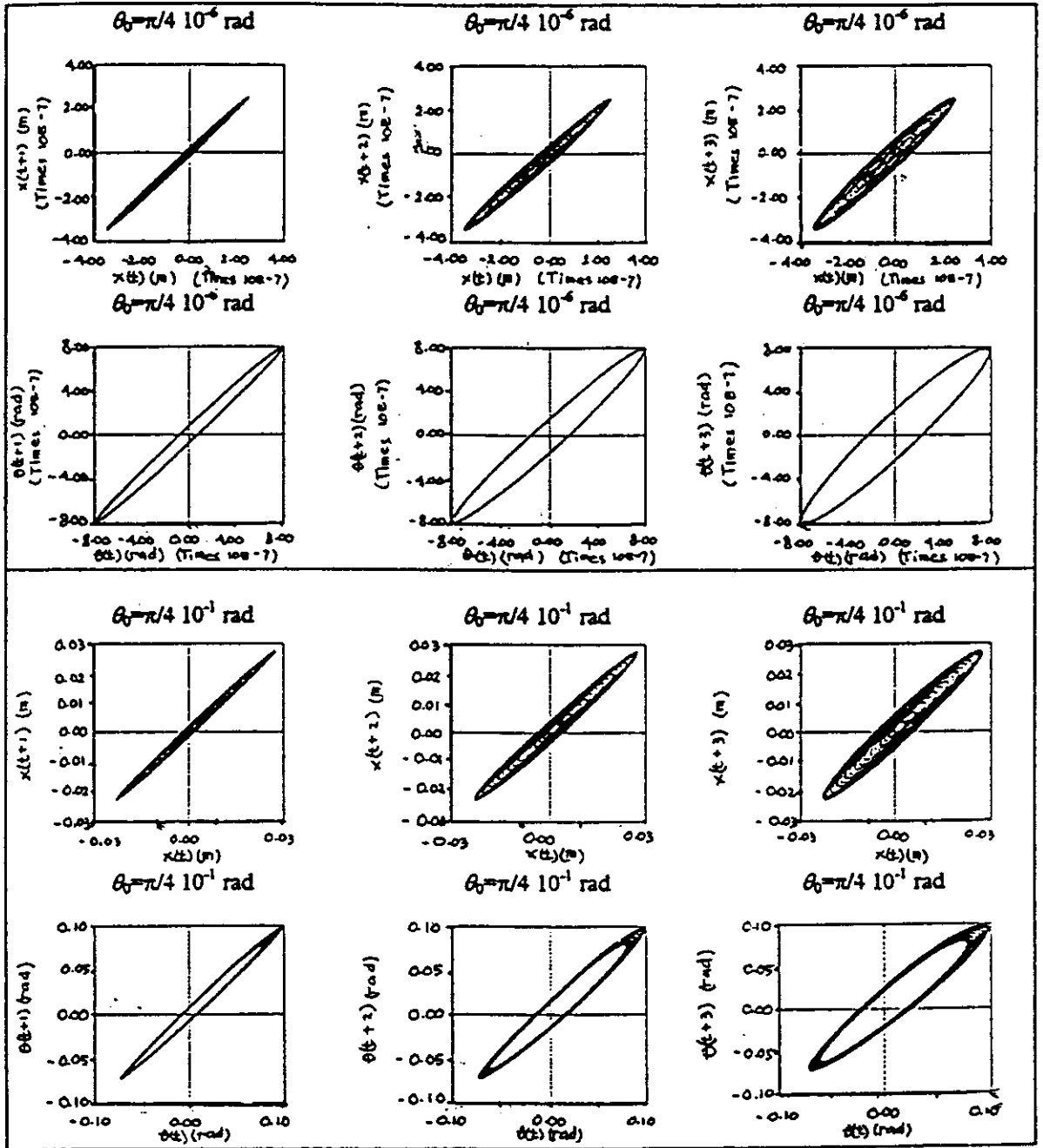
Gambar-9. Attractor $(\theta(t), d\theta(t)/dt, dx(t)/dt)$ hasil simulasi untuk variasi D_2 .



Gambar-10. $x(t)$ dan $\theta(t)$ hasil simulasi untuk variasi $\theta(t=0)$.

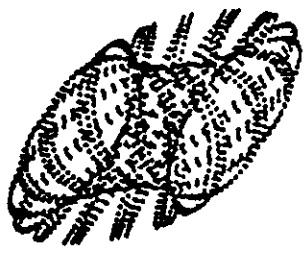


Gambar-11. Transformasi Fourier $x(t)$ dan $\theta(t)$ hasil simulasi untuk variasi $\theta(t=0)$

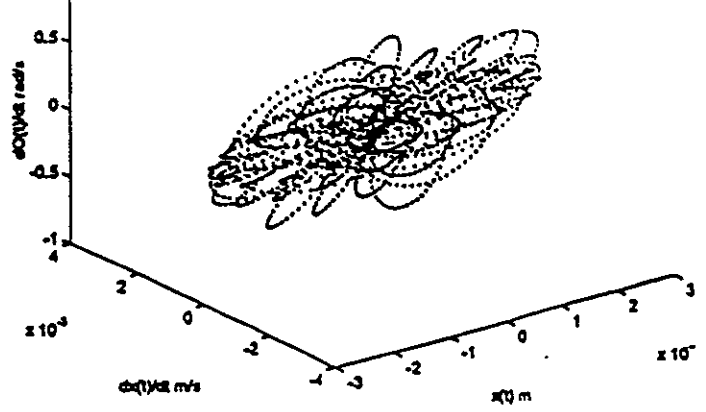


Gambar-12. Diagram phase-space untuk $x(t)$ dan $\theta(t)$ dengan lag-time $1\Delta t$ ($i+1$), $2\Delta t$ ($i+2$), $3\Delta t$ ($i+3$) pada $\theta(t=0) = \pi/4 \cdot 10^{-1}$ rad dan $(t=0) = \pi/4 \cdot 10^{-6}$ rad, hasil simulasi variasi harga $\theta(t=0)$.

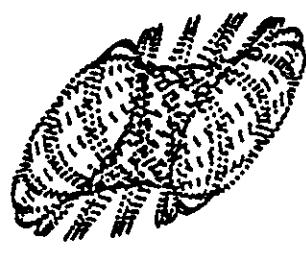
$\theta_0 = \pi/4 \cdot 10^{-6}$ rad



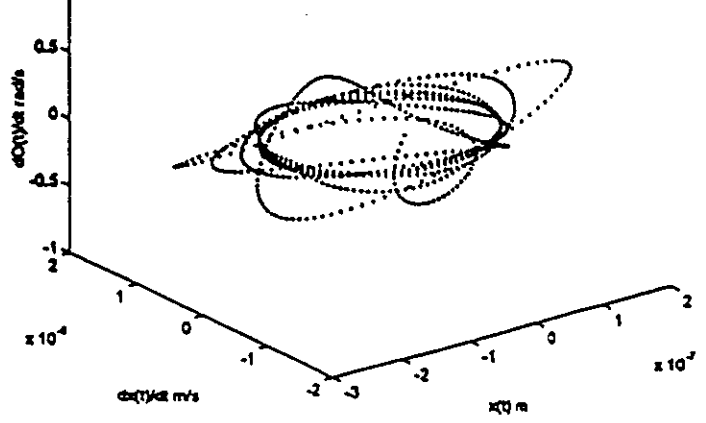
$\theta_0 = \pi/4 \cdot 10^{-5}$ rad



$\theta_0 = \pi/4 \cdot 10^{-3}$ rad



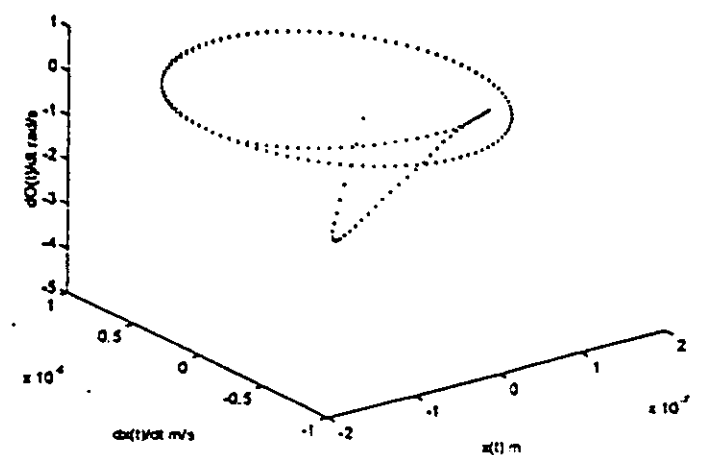
$\theta_0 = \pi/4 \cdot 10^{-2}$ rad



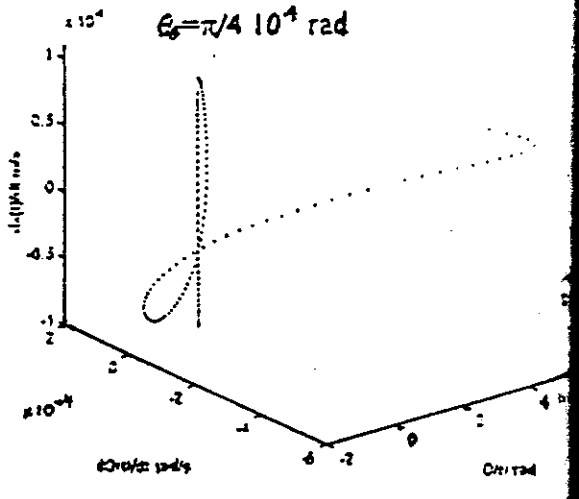
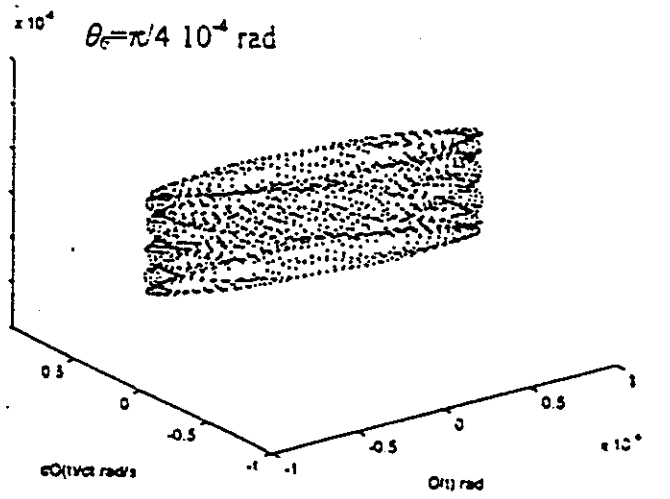
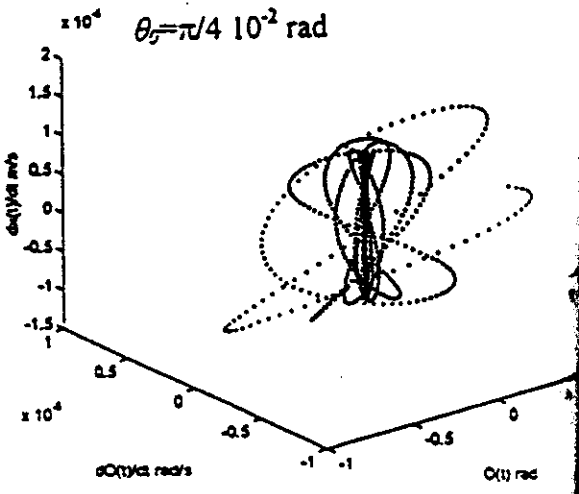
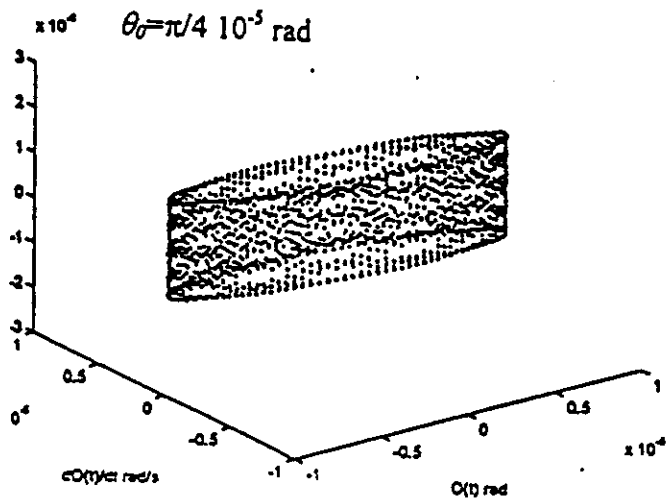
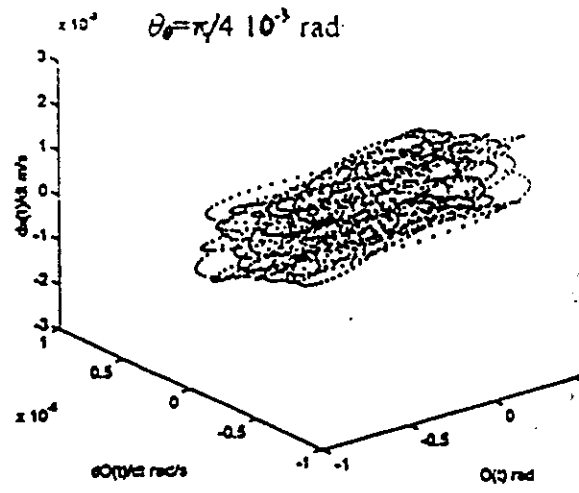
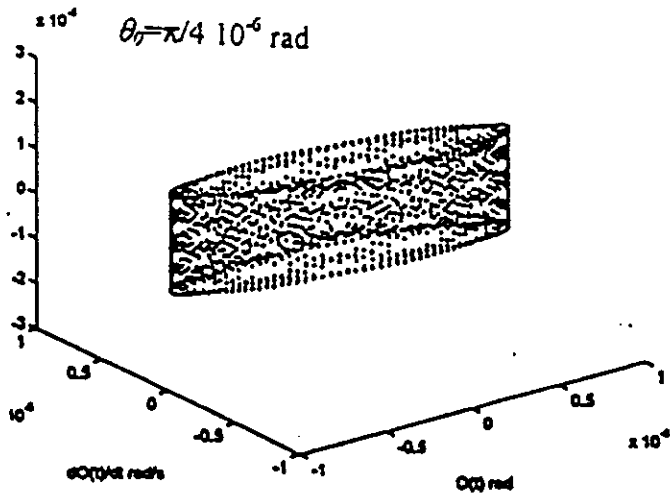
$\theta_0 = \pi/4 \cdot 10^{-1}$ rad



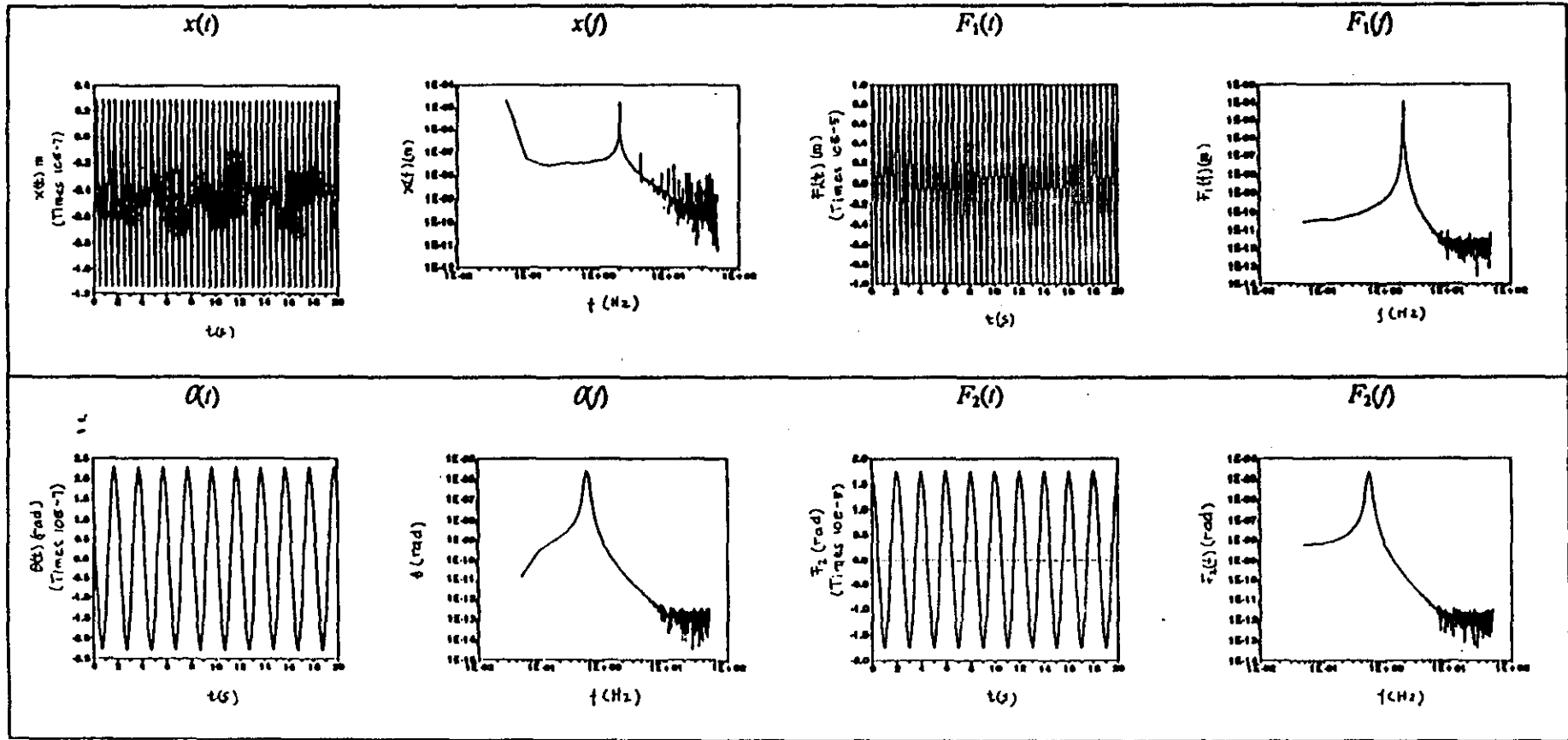
$\theta_0 = \pi/4 \cdot 10^{-1}$ rad



Gambar-13. Attractor $(x(t), dx(t)/dt, d\theta(t)/dt)$ hasil simulasi untuk variasi $\theta(t=0)$.



Gambar-14. Attractor $(\theta(t), d\theta(t)/dt, dx(t)/dt)$ hasil simulasi untuk variasi $\theta(t=0)$.



Gambar-15. $x(t)$, $\alpha(t)$, $F_1(t)$ dan $F_2(t)$ beserta transformasi Fourier-nya dari hasil simulasi dengan gaya luar $F_1(t)$ dan $F_2(t)$.