JOINT SPECTRUM KOLEKSI OPERATOR PADA RUANG HILBERT

JOINT SPECTRUM OF A COLLECTION OF OPERATORS ON A HILBERT SPACE

Ilham Minggi[1], Soeparna Darmawijaya[2]

Program Studi Matematika
Program Pasca Sarjana Universitas Gajah Mada

ABSTRACT

In this paper we study some properties of the Joint Spectrum of a collection of bounded linear operators on a Hilbert Spaces. First of all, if A is a unital commutative Banach Algebra and A' is its dual, we define subsets σ_A of the dual space A'. The Joint Spectrum of subset $\{T_\lambda\}$ of the operator algebra A, is defined as set $\{\{h(T_\lambda)\} : h \in \sigma_A\}$.

Most of the results, we adopted from Dekker (1969) and Folland (1995).

Key words: *Joint Spectrum,*

PENDAHULUAN

Salah satu masalah di dalam teori operator yang masih terbuka untuk diselidiki adalah bagaimana menyusun teori spektral untuk koleksi operator. Dalam kaitan ini beberapa peneliti telah mendefinisikan Joint Spectrum untuk koleksi operator, kemudian menyusun beberapa sifat yang dimilikinya .

Muller dan Soltysiak (1992) mendefinisikan Joint Spectrum, Joint approximate point spectrum dan Joint spectral radius untuk himpunan berhingga operator kemudian membuktikan formula untuk menghitung radius spectral koleksi berhingga operator commuting pada ruang Hilbert.

---

[1] Fakultas MIPA Universitas Negeri Makasar, Makasar
[2] Fakultas MIPA Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta

Disamping itu dari teori Gelfand, diketahui bahwa spektrum $\sigma(x)$ untuk $x \in B$, dengan B aljabar Banach unital dan komutatif, merupakan himpunan semua nilai $h(x)$ dengan h fungsional multiplikatif tak nol pada B (Folland, 1995: 7). Jadi terdapat kaitan antara spektrum $\sigma(x)$, $x \in B$ dengan ruang dual B'. Khususnya karena himpunan semua operator linier dan terbatas pada suatu ruang Hilbert merupakan aljabar Banach unital, maka spektrum operator linier terbatas di dalam suatu subaljabar operator komutatif dapat didefinisikan dengan cara serupa.

Hal tersebut di atas memberikan inisiatif untuk mempelajari lebih lanjut bagaimana mendefinisikan Joint Spectrum untuk sebarang koleksi operator melalui teori Gelfand, dan sifat apa yang dimiliki oleh himpunan tersebut.

LANDASAN TEORI

Dianggap telah dikenal ruang Hilbert/Banach separable, ruan metrik, ruang topologi, beserta teorema-teorema kekontinuan fung pada ruang topologi.

Jika H ruang Hilbert, A subaljabar di dalam $B(H)$, A dikataka **komutatif maksimal** jika A komutatif dan jika $S \in B(H)$ komutat dengan semua anggota A, maka $S \in A$.

Untuk selanjutnya **A selalu dipandang sebagai aljabar Bana unital dan komutatif,** dengan elemen satuan ***e***.

Diberikan A aljabar Banach komutatif dan unital. **spektru** $x \in A$ dinotasikan $\sigma_A(x)$, didefinisikan dengan:

$$\sigma_A(x) = \{\lambda \in C : \lambda e - x \text{ tidak invertible di dalam } A\}$$

Fungsional multiplikatif pada A didefinisikan seba **homomorfisma tak nol** $h: A \to C$. Himpunan semua fungsio multiplikatif pada A disebut **spectrum** A, dinotasikan dengan σ (Jadi σ_A merupakan himpunan bagian dari ruang dual A', sedangk $\sigma_A(x)$ merupakan himpunan bilangan kompleks). Untuk setiap h σ_A berlaku: $h(e) = 1$; jika x invertible maka $h(x) \neq 0$; dan $|h(x)| \leq$ untuk setiap $x \in A$

Jika $x \in A$, didefinisikan fungsional $\hat{x}$ pada σ_A den rumus:

$$\hat{x}(h) = h(x) \text{ untuk setiap } h \in \sigma_A .$$

$\hat{x}$ kontinu pada σ_A , jadi $\hat{x} \in C(\sigma_A)$ (koleksi semua fungsi kontinu pada σ_A) dan pemetaan $\Gamma: A \to C(\sigma_A)$ dengan rumus $\Gamma(x) = \hat{x}$ disebut **Transformasi Gelfand** pada A.

Dari transformasi Gelfand tersebut diperoleh *range* $(\hat{x}) = \sigma_A(x)$. Ini berarti $\alpha \in \sigma_A(x)$ jika dan hanya jika terdapat $h \in \sigma_A$ sehingga $\hat{x}(h) = h(x) = \alpha$. Berdasarkan hal tersebut didefinisikan **Joint Spectrum** himpunan $\{x_\lambda\} \subset A$ sebagai berikut:

Definisi (Joint Spectrum)

Joint Spectrum (JS) dari $\{x_\lambda : \lambda \in \Omega\} \subset A$ *dinotasikan dengan* $\sigma_A\{x_\lambda\}$ *didefinisikan sebagai :*

$\sigma_A\{x_\lambda\} = \{f \in C^\Omega :$ *terdapat* $h \in \sigma_A$ *sehingga* $f(\lambda) = h(x_\lambda),\ \lambda \in \Omega\}$ ...... (1)

Teorema

Diberikan A_1, A_2 *aljabar Banach unital yang komutatif,*
Jika $A_1 \subset A_2$ *maka* $\sigma_{A_2}\{x_\lambda\} \subset \sigma_{A_1}\{x_\lambda\}$ .... (2)

Teorema

Diberikan $f \in C^\Omega$ *dan* $\{x_\lambda\} \subset A$. $f \in \sigma_A\{x_\lambda\}$ *jika dan hanya jika untuk setiap himpunan berhingga* $\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\} \subset \Omega$ *dan* $\{y_1,\dots,y_n\} \subset A$, *berlaku:*

$$\sum_{i=1}^{n} y_i(f(\lambda_i)e - x_{\lambda_i})) \neq e \quad \text{.............. (3)}$$

Teorema di atas menyatakan bahwa $f \in \sigma_A\{x_\lambda\}$ jika dan hanya jika $(f(\lambda_1),\dots,f(\lambda_n)) \in \sigma_A\{x_{\lambda_1},\dots,x_{\lambda_n}\}$ untuk setiap himpunan berhingga $\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\} \subset \Omega$.

Joint Spectrum Koleksi Operator pada Ruang Hilbert.

Telah diketahui $B(H)$ koleksi semua operator linear terbatas pada H merupakan aljabar Banach unital-*.

Jika $\{T_\lambda : T_\lambda \in B(H), \lambda \in \Omega\} \subset B(H)$ dengan Ω himpunan indeks, dan $A \subset B(H)$ subaljabar maka pengertian Joint Spectrum Koleksi Operator $\{T_\lambda\}$, yaitu:

$\sigma_A\{T_\lambda\} = \{f \in C^\Omega$: *terdapat* $h \in \sigma_A$, *sehingga* $f(\lambda) = h(T_\lambda),\ \lambda \in \Omega\}$, *jika* A *subaljabar di dalam* $B(H)$, dapat dipandang sebagai Joint Spectrum anggota-anggota aljabar Banach $B(H)$. Berdasarkan Teorema (3) di atas, dapat ditunjukkan bahwa definisi Joint Spectrum untuk koleksi berhingga operator $\{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ dan definisi Joint Spectrum versi **Muller-Soltysiak** (Muller dan Soltysiak, 1992) ekuivalen.

Secara umum Joint Spectrum $\sigma_A\{T_\lambda\}$ bergantung pada pemilihan subaljabar Banach $A \subset B(H)$ yang memuat $\{T_\lambda\}$. Oleh karena itu untuk mendefinisikan Joint Spectrum $\sigma_{B(H)}\{T_\lambda\}$ akan dipilih suatu subaljabar Banach komutatif $A \subset B(H)$ yang memuat $\{T_\lambda\}$ sehingga $\sigma_A\{T_\lambda\} = \sigma_{B(H)}\{T_\lambda\}$. Untuk itu himpunan operator $\{T_\lambda\}$ **selalu dianggap sebagai himpunan komutatif.** Selain itu, notasi Joint Spectrum $\sigma_{B(H)}\{T_\lambda\}$ **ditulis singkat** $\sigma\{T_\lambda\}$

Telah diketahui pula bahwa jika A **komutan** $\{T_\lambda\}$, yaitu A himpunan semua operator linear terbatas pada H yang **komutatif dengan setiap** T_λ maka A_o **bikomutan** $\{T_\lambda\}$ (yaitu A_o komutan A); merupakan aljabar Banach komutatif

Lema

Jika A_o bikomutan (T) maka $\sigma_{A_o}(T) = \sigma(T)$ .... (4)

Bukti:

Menurut Teorema (2) $\sigma(T) \subset \sigma_{A_o}(T)$ ....*

Sebaliknya jika $\alpha \notin \sigma(T)$ maka terdapat $S \in B(H)$ sehingga $(\alpha I - T)S = S(\alpha I - T) = I$. Diambil $T' \in B(H)$ sehingga $TT' = T'T$.
Berlaku $(\alpha I - T)T' = T'(\alpha I - T)$ dan $ST' = ST'(\alpha I - T)S = S(\alpha I - T)T'S = T'S$.
Jadi $S \in A_o$. Dengan kata lain terdapat $S \in A_o$ sehingga $(\alpha I - T)S =$ $S(\alpha I - T) = I$. Terbukti bahwa $\alpha \notin \sigma_{A_o}(T)$ ....**

*) dan **) menunjukkan $\sigma(T) = \sigma_{A_o}(T)$ ■

Dimotivasi oleh Lema 4, didefinisikan Joint Spectrur koleksi operator
$\{T_\lambda\} \subset B(H)$ sebagai berikut:

Definisi

Diberikan $\{T_\lambda\} \subset B(H)$. Joint Spectrum $\sigma\{T_\lambda\}$ didefinisikan sebag
$\sigma_{A_o}\{T_\lambda\}$ *dengan A_o bikomutan $\{T_\lambda\}$*

Selanjutnya akan didefinisikan Joint Point Spectrum dan Joint Approximate Point Spectrum himpunan operator sebagai berikut:

Definisi

(1) Diberikan $\{T_1,\ldots,T_n\} \subset B(H)$.

*$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in C^n$ disebut **Joint eigenvalue** dari himpunan operator $\{T_1,\ldots,T_n\}$ jika terdapat $x \in H, x \neq o$ sehingga:*

$$T_i x = \alpha_i x \quad (i = 1,2,\ldots,n)$$

*$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in C^n$ disebut **Joint Approximate eigenvalue** dari himpunan operator $\{T_1,\ldots,T_n\}$ jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat $x \in H, \|x\| = 1$ sehingga $\|T_i x = \alpha_i x\| < \varepsilon$, $(i = 1,2,\ldots,n)$*

(2) Diberikan $\{T_\lambda : \lambda \in \Omega\} \subset B(H)$ himpunan bagian tak hingga,

$f \in C^n$ disebut **Joint eigenvalue (Joint Approximate eigenvalue)** dari himpunan operator $\{T_\lambda\}$ bilamana $(f(\lambda_1),\ldots,f(\lambda_n))$ Joint eigenvalue (Joint Approximate eigenvalue) dari $\{T_{\lambda_1},\ldots,T_{\lambda_n}\} \subset \Omega$

Himpunan semua Joint eigenvalue dari himpunan $\{T_\lambda\}$ disebut **Joint Point Spectrum (JPS)** dari $\{T_\lambda\}$ dan dinotasikan dengan $e\{T_\lambda\}$.
Himpunan semua Joint Approximate eigenvalue dari himpunan $\{T_\lambda\}$ *disebut **Joint Approximate Point Specterum (JAPS)** dari* $\{T_\lambda\}$ *dan dinotasikan dengan* **a**$\{T_\lambda\}$.
Notasi $e\{T_1,\ldots,T_n\}$ dan $a\{T_1,\ldots,T_n\}$ digunakan untuk himpunan berhingga operator $\{T_1,\ldots,T_n\}$

Dari Definisi Joint Spectrum di atas jelas bahwa setiap Joint Point Spectrum merupakan Joint Approximate Point Spectrum; jadi $e\{T_\lambda\} \subset a\{T_\lambda\}$. Berdasarkan definisi tersebut, Joint Point Spectrum dan Joint Approximate Point Spectrum masing-masing tidak bergantung pada aljabar Banach yang memuat $\{T_\lambda\}$.

Teorema berikut menunjukkan kaitan antara Joint Spectrum (JS) dan Joint Approximate Point Spectrum (JAPS).

Teorema

Jika $\{T_\lambda\}$ himpunan bagian komutatif di dalam B(H), maka:

(1) $a\{T_\lambda\} \subset \sigma_A\{T_\lambda\}$ untuk setiap subaljabar Banach komutatif $A \subset B(H)$ yang memuat $\{T_\lambda\}$. Khususnya $a\{T_\lambda\} \subset \sigma\{T_\lambda\}$.

(2) Selanjutnya jika T_λ normal untuk setiap λ, maka $a\{T_\lambda\} = \sigma\{T_\lambda\}$

Bukti:

(1) $f \notin \sigma_A\{T_\lambda\}$ berarti terdapat himpunan berhingga operator

$\{S_{\lambda_1},\ldots,S_{\lambda_n}\} \subset A$ sehingga $\sum_{i=1}^{n} S_{\lambda_i}(f(\lambda_i)I - T_{\lambda_i}) = I$.

Dengan I menotasikan operator identitas.

Dinamakan $\alpha = maks\{\|S_i\| : i = 1,2,\ldots,n\}$ dan dipilih $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{n\alpha+1} > 0$.

Untuk setiap $x \in H, \|x\| = 1$, berlaku:

$$1 = \|x\| = \|Ix\| = \left\|\sum_{i=1}^{n}(S_{\lambda_i}(f(\lambda_i)I - T_{\lambda_i})x\right\| \le \alpha\sum_{i=1}^{n}\|(f(\lambda_i)I - T_{\lambda_i})x\|$$

Jadi $maks\{\|(f(\lambda_i)I - T_{\lambda_i})x\| : i = 1,2,\ldots,n\} \ge \dfrac{1}{n\alpha+1} = \varepsilon_0$.

Dengan kata lain terdapat j sehingga $\|(f(\lambda_j)I - T_{\lambda_j})x\| > \varepsilon_0$.

Terbukti $(f(\lambda_1),\ldots,f(\lambda_n)) \notin a\{T_{\lambda_1},\ldots,T_{\lambda_n}\}$. Jadi $f \notin a\{T_\lambda\}$.

Ini menunjukkan $a\{T_\lambda\} \subset \sigma_A\{T_\lambda\}$

Selanjutnya jika A_0 bikomutan $\{T_\lambda\}$, maka A_0 komutatif, dan karena $\sigma_{A_0}\{T_\lambda\} = \sigma\{T_\lambda\}$, maka $a\{T_\lambda\} \subset \sigma\{T_\lambda\}$

(2) Diketahui T_λ normal untuk setiap λ, akan ditunjukkan $a\{T_\lambda\} = \sigma\{T_\lambda\}$ Menurut (1), $a\{T_\lambda\} \subset \sigma\{T_\lambda\}$, jadi tinggal menunjukkan $\sigma\{T_\lambda\} \subset a\{T_\lambda\}$. Diambil sebarang himpunan berhingga operator $\{T_{\lambda_1},\ldots,T_{\lambda_n}\}$. Jika $f \notin a\{T_{\lambda_1},\ldots,T_{\lambda_n}\}$ maka terdapat $\varepsilon_0 > 0$ dan $1 \le k \le n$ sehingga untuk setiap $x \in H, \|x\| = 1$ berlaku:

$$\|(f(\lambda_k)I - T_{\lambda_k})x\| \ge \varepsilon_0$$

Ini berakibat : $\sum_{i=1}^{n}\|(f(\lambda_i)I - T_{\lambda_i})x\|^2 \ge \varepsilon_0^2$

Diambil $B = \sum_{i=1}^{n}(f(\lambda_i)I - T_{\lambda_i})^*(f(\lambda_i)I - T_{\lambda_i})$.

Karena T_λ normal $(T_\lambda T_\lambda^* = T_\lambda^* T_\lambda)$ maka $B^* = B$, atau B self adjoint.

Menurut Teorema Fuglede-Putnam (Teorema 2.1.2), untuk setiap $T \in B(H)$ sehingga $TT_\lambda = T_\lambda T$, berlaku $TT_\lambda^* = T_\lambda^* T$.

Ini berakibat $BT = TB$.

Jadi B adalah elemen bikomutan himpunan $\{T_{\lambda_1},...,T_{\lambda_n}\}$

Selanjutnya berlaku:

$$< Bx,x > = < (\sum_{i=1}^{n}(f(\lambda_i)I - T_{\lambda_i})^*(f(\lambda_i)I - T_{\lambda_i}))x,x >$$

$$= \sum_{i=1}^{n} < (f(\lambda_i)I - T_{\lambda_i})x,(f(\lambda_i)I - T_{\lambda_i})x >$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \|(f(\lambda_i)I - T_{\lambda_i})x\|^2 \geq \varepsilon_0^2$$

Jadi B positif.

Karena B self adjoint dan positif, maka B invertible.

Selanjutnya diambil $S_i = B^{-1}(f(\lambda_i)I - T_{\lambda_i})^*$. Untuk setiap $T \in B(H)$ sehingga $TT_\lambda = T_\lambda T$, berlaku:

$$S_iT = B^{-1}(f(\lambda_i)I - T_{\lambda_i})^* T$$

$$= \overline{f(\lambda_i)}B^{-1}T - B^{-1}T_{\lambda_i}^*T$$

$$= \overline{f(\lambda_i)}TB^{-1} - B^{-1}TT_{\lambda_i}^*$$

$$= TB^{-1}(f(\lambda_i)I - T_{\lambda_i}) = TS_i$$

Ini berarti S_i bikomutan $\{T_{\lambda_i} : i = 1,2,...,n\}$ dan:

$$\sum_{i=1}^{n} S_i(f(\lambda_i)I - T_{\lambda_i}) = B^{-1}B = I$$

Jadi $(f(\lambda_1),...,(f(\lambda_n)) \notin \sigma_{A_0}\{T_{\lambda_1},...,T_{\lambda_n}\}$ dengan A_0 bikomutan $\{T_{\lambda_1},...,T_{\lambda_n}\}$. Terbukti $f \notin \sigma\{T_{\lambda_1},...,T_{\lambda_n}\}$

Jadi $\sigma\{T_\lambda\} \subset a\{T_\lambda\}$.

Juga telah dibuktikan $a\{T_\lambda\} \subset \sigma\{T_\lambda\}$ (bagian (1)), maka $a\{T_\lambda\} = \sigma\{T_\lambda\}$ ■

Teorema

Jika $\{T_\lambda\}$ himpunan operator kompak pada ruang Hilbert berdimensi tak hingga, maka $\theta \in a\{T_\lambda\}$

Bukti:

Diambil sebarang himpunan berhingga $\{T_{\lambda_1},...,T_{\lambda_n}\}$, dan diandaikan $0 \notin a\{T_{\lambda_1},...,T_{\lambda_n}\}$. Terdapat bilangan $\varepsilon_0 > 0$ dan $1 \le k \le n$ sehingga untuk setiap $x \in H, \|x\| = 1$ berlaku $\|T_k x\| \ge \varepsilon_0$. Akibatnya:

$$\sum_{i=1}^{n} \|T_i x\|^2 \ge \varepsilon_0^2$$

Diambil $B = \sum_{i=1}^{n} T_i^* T_i$. Berlaku $B^*=B$ (B self adjoint) dan:

$$< Bx, x > = < (\sum_{i=1}^{n} T_i^* T_i)x, x > = \sum_{i=1}^{n} < T_i^* T_i x, x >$$

$$= \sum_{i=1}^{n} < T_i x, T_i x > \varepsilon_0^2$$

Jadi B positif.

Karena B self adjoint dan positif, maka B invertible.

Selanjutnya diperoleh:

$$\sum_{i=1}^{n} B^{-1} T_i^* T_i = B^{-1} \sum_{i=1}^{n} T_i^* T_i = B^{-1} B = I$$

Karena T_i kompak untuk setiap $i=1,2,...,n$ maka $T_I T_I^{-1} = I$ juga kompak. Akibatnya setiap bola tertutup satuan $\{x \in H, \|x\| \le 1\}$ merupakan himpunan kompak di dalam H. Ini berarti H berdimensi hingga. Ini bertentangan dengan kenyataan H berdimensi tak hingga.

DAFTAR PUSTAKA

Berberian,S.K.,1961,"Introduction to Hilbert Space",Oxford University

Conway, John B., 1990, "A Course in Functional Analysis" ,2 ec Springer-Verlag, New York.

Dekker, Nicolaas Pieter, 1969,"Joint Numerical Range and Joir Spectrum of Hilbert Space Operators", Vrije Universiteit Th Amsterdam.

DeVito,Carl L.,1990, "Functional Analysis and Linear Operator Theory", Addison-Wesley Publishing Co.,California.

Douglas,Ronald G.,1972,"Banach Algebra Techniques in Operator Theory", Academic Press, New York.

Folland, Gerald.B., 1995, "A Course in Abstract Harmonic Analysis" CRC Press Boca Raton, Florida

Hu, Sze-Tsen, 1965,"Elements of General Topology", Holden-Day, San Francisco.

Limaye,Balmohan Vishnu, 1984, "Functional Analysis", Wiley Estern Limited, New Delhi.

Muller,V. and Soltysiak,A., 1992, "Spectral Radius Formula for Commuting Hilbert Space Operators", Stúdia Mathematica 103 (3) : 329-333.