MATEMATIKA PENDEKATAN UNTUK DERAU DALAM KAWASAN FREKUENSI

Oleh : Ir Ismadi *)

Intisari

Dalam teknik penyampaian informasi dari sumber ke penerima diperlukan media elektronika terutama untuk tranmisi jarak jauh, baik melalui saluran kawat, maupun lewat ruang bebas. Persoalan yang selalu timbul adalah adanya derau yang mengganggu informasi tersebut. Derau berasal dari peralatan elektronis dan dari media yang dilewati gelombang elektro magnetis misalnya interferensi dan gangguan-gangguan lain terhadap isyarat informasi.

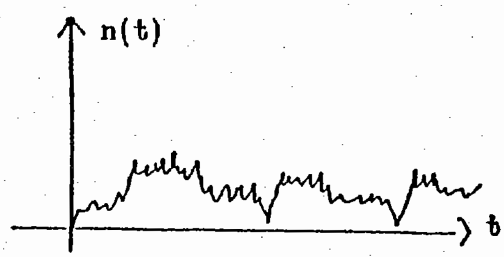
Derau yang bersumber dari peralatan dapat didekati dengan analisis pendekatan matematis, sedang derau-derau yang lain dianalisis dengan metode statistika.

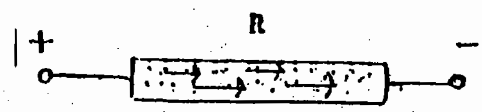
Pendahuluan

Alat-alat elektronis yang dipakai untuk memancarkan isyarat informasi ternyata juga merupakan sumber derau. Derau dapat terjadi di resistor, di komponen-komponen aktif dan peralatan lain, terutama karena pengaruh panas dan gerakan-gerakan elektron pada saat peralatan tersebut bekerja. Analisis derau yang bersumber dari peralatan elektronis, didekati dengan matematika kawasan frekuensi berdasarkan metode deret Fourier. Dalam peralatan elektronis, sumber derau dapat digolongkan menjadi dua katagori, yaitu derau termal dan derau "shot noise", yang selanjutnya dirumuskan secara matematis dalam deret Fourier. Dengan deret Fourier dapat dihitung nilai-nilai daya derau dan spektral daya deraunya, sehingga besarnya gangguan daya derau yang akan timbul bersama isyarat informasi dapat ditentukan.

Derau Termal

Derau yang timbul karena adanya gerakan elektron-elektron dalam suatu resistor walaupun resistor tidak mendapat tegangan dari luar dinamakan derau termal. Derau ini terdengar sebagai gemuruh untuk frekuensi rendah dan desis untuk frekuensi tinggi.

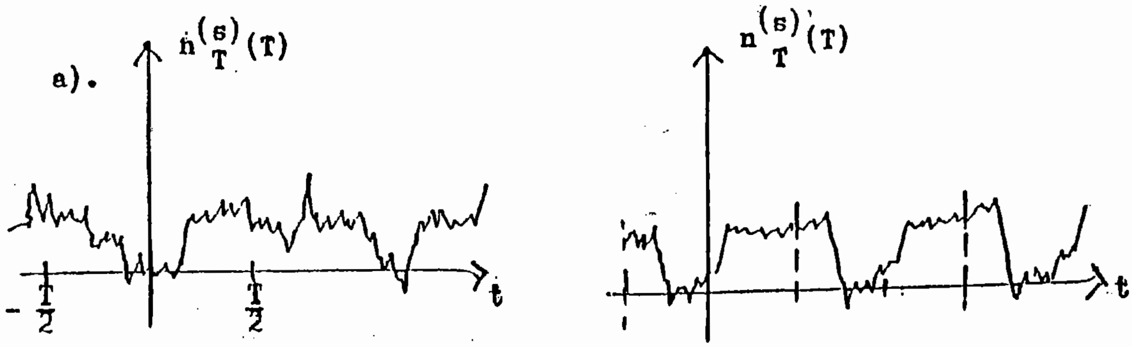




Gambar 1. **Bentuk gelombang derau termal.**

*) Anggota Staf Pengajar Jurusan Teknik Elektro FT-UGM

Semakin tinggi temperatur resistor, semakin besar hambatannya maka semakin besar aplitudo derau sehingga derau semakin besar. Dari rumus fisika, dinyatakan $R_t = R_0(1 + \alpha\ t)$ yaitu nilai R bertambah karena kenaikan temperatur. Dengan α adalah koefisien resistansi, R_0 resistan pada temperatur awal, R_t resistan pada temperatur akhir, dengan t adalah kenaikan temperatur. Tampak dari rumus bahwa R bertambah dengan kenaikan temperatur dan menimbulkan gerakan-gerakan tak teratur elektron dalam resistor yang selanjutnya disebut sebagai derau. Dalam teknik transmisi isyarat, terutama untuk isyarat digital banyak menggunakan tapis yaitu untuk membatasi bidang frekuensinya agar tidak mengganggu isyarat lainnya. Karenanya analisis untuk tapis diberikan dalam kawasan frekuensi.



Gambar 2. **a) suatu fungsi sampel derau**
b) bentuk gelombang periodik dengan waktu T detik dibangkitkan dari a). untuk -T/2 sampai T/2.

Gelombang pada gambar b). $n_T^{(s)}(T)$ dapat diuraikan menjadi deret Fourier dan dianggap tidak mempunyai komponen dc.

$$n_T^{(s)}(T) = \sum_{k=1}^{\nu} (a_k \cos 2\ k\ ft + b_k \sin 2\ k\ ft)$$

dengan frekuensi dasar : $f = 1/T$

atau :

$$n_T^{(s)}(t) = \sum_{k=1}^{\nu} c_k \cos (2\ \pi\ k\ \Delta\ ft + \Theta_k)$$

dimana c_k, a_k, b_k adalah koefisien konstan dari bentuk spektral dan Θ_k adalah sudut fase dengan rumus

$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}\ ;\ \Theta_k = -\tan \frac{b_k}{a_k}$$

Rapat spektral daya pada frekuensi $k\ \Delta\ f$,

$$G_n(k\ \Delta\ f) = G_n(-K\ \Delta\ f) = \frac{a_k^2}{4\ \Delta\ f} = \frac{a_k^2 + b_k^2}{4\ \Delta\ f}$$

dan daya total adalah,

$$P_T = 2\ G_n(k\ \Delta\ f).\Delta\ f.$$

MEDIA TEKNIK Edisi No. 1 Tahun VII, Desember 1984 — Maret 1985 No. ISSN 0216 — 3012

Kemudian derau n (T) disajikan sebagai berikut :

$$n(t) = \lim_{\Delta f \to C} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos 2 \pi k \Delta ft + b_k \sin 2 \pi k \Delta ft)$$

Rapat spektral daya derau n(t) juga dapat dibuat,

$$G_n(f) = \lim_{\Delta f \to 0} \frac{c_k^2}{4 \Delta f} = \lim_{\Delta f \to 0} \frac{a_k^2 + b_k^2}{4 \Delta f}$$

Karena :

$$n(t) = \lim_{\Delta f \to 0} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos (2 \pi k \Delta ft + \Theta_k)$$

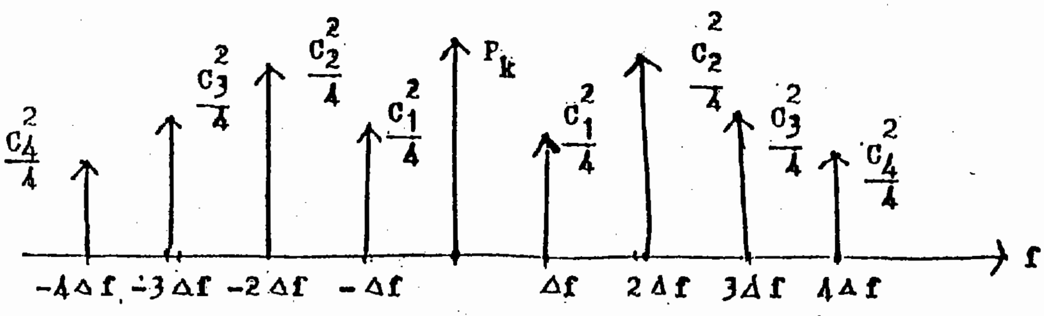
Sehingga untuk frekuensi dari f_1 ke f_2 dapat ditulis daya derau sebesar,

$$P(f_1 \to f_2) = \int_{-f_2}^{-f_1} G_n(f)\, df + \int_{f_1}^{f_2} G_n(f)\, df$$

$$= 2 \int_{f_1}^{f_2} G_n(f)\, df$$

dan akhirnya daya total adalah P_T dirumuskan sebagai,

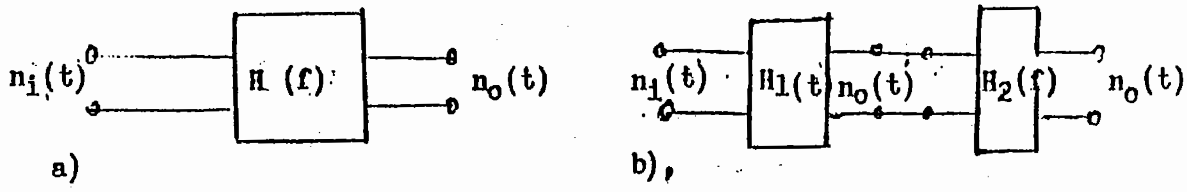
$$PT = \int_{-\infty}^{\infty} G_n(f)\, df = 2 \int_{0}^{\infty} G_n(f)\, df$$



Gambar 3. **Spektrum daya dari $n_T^{(S)}$**

Pengaruh Tapis Pada Rapat Keboleh Jadian Derau Gaussian

Akan dilihat bahwa jika derau masukan n_I (t) gaussian dilewatkan pada masukan tapis maka derau yang keluar n_o (t) adalah juga gaussian.



Gambar 4. **a. Derau gaussian n_I (t) dilewatkan pada tapis linier.**
b. Tapis pada a) dibagi menjadi dua bagian.

Dengan mengikuti teori Konvolusi di mana $V_1(t) = n_I(t)$, dan $V_2(t) = h$ (t) serta keluaran V (t) = $n_o(t)$ didapat :

$$n_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} n_i(t) \cdot h(t - \tau)\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} n(\tau) \cdot h(t - \tau)\, d\tau$$

Rumus di atas dapat diuraikan dalam persamaan sebagai berikut :

$$n_o(t) = \lim_{\Delta\tau \to 0} \sum_{k=-\infty}^{k=t/\Delta\tau} n_i(k\Delta\tau)h(t - k\Delta\tau) \cdot \Delta\tau$$

dengan k adalah harga integral dan n_i ($k \Delta \tau$) adalah variabel acak, sedang h($t - k\Delta\tau$) adalah bilangan tertentu dan tergantung dari tapisnya. Karena k berjalan dari $-\infty$ sampai $t/\Delta\tau$ maka diambil dua variabel acak n_i ($k\Delta\tau$) dan n_i ($l\Delta\tau$) yang saling independent kecuali bila k = 1. Sehingga persamaan n_o (t) di atas merupakan superposisi linier dari variabel random gaussian yang independent dan menurut pelajaran 2.16 derau yang keluar dari tapis n_o (t) adalah variabel acak gaussian dan juga merupakan proses acak gaussian.

Kemudian tapis H(f) dibagi atau dipecah menjadi dua bagian yaitu H_1 (f) dan H_2 (f) di mana H(f) = H_1 (f). H_2 (f). Dan derau masukan n_i (t) adalah derau putih dan gaussian, maka menurut pembahasan sebelumnya (di atas) bahwa n_o' (t) dan n_o (t) adalah gaussian dan pada umumnya (biasanya) tidak putih. Lalu karena n_o (t) dan n_o' (t) merupakan derau tidak putih yang tidak independent satu terhadap yang lain, n_o' ($k\Delta\tau$) dan n_o' ($l\Delta\tau$) adalah gaussian tetapi tidak independen sehingga ditemukan bahwa n_o (t) adalah *gaussian.*

Akhirnya dapat disimpulkan bahwa suatu superposisi linear dari variabel acak gaussian yang dependen adalah juga gaussian.

Komponen Spektral Daya Derau

Derau n (t) yang telah disajikan sebelumnya merupakan suatu superposisi dari komponen spektral dari derau untuk interval frekuensi k pada batas $\Delta f \rightarrow 0$ ditulis sebagai

$$n_k(t) = a_k \cos 2\pi k \Delta ft + b_k \sin 2\pi k \Delta dt$$

atau

$$n_k(t) = c_k \cos(2\pi k \Delta ft + \Theta_k)$$

dan karena isyarat ini merupakan proses random maka a_k, b_k, c_k, dan Θ_k merupakan variabel acak.

Daya normal P_k (varians) dari $n_k(t)$ didapat dengan mengambil rata-rata dari $(n_k(t))^2$

$$P_k = \overline{[n_k(t)]^2} = \overline{a_k^2} \cos^2 2\pi k \Delta ft + \overline{b_k^2} \sin 2\pi k \Delta ft$$

$$+ \overline{2a_k \cdot b_k} \sin 2\pi k \Delta ft. \cos 2\pi k \Delta ft.$$

Karena n_k (t) merupakan proses statis maka

$\overline{[n_k(t)]^2}$ tidak tergantung pada waktu yang dipilih untuk pengecekan sehingga untuk suatu harga $t = t_1$, $\cos 2\pi k \Delta ft_1 = 1$ dan $\sin 2\pi k \Delta ft_1 = 0$, sehingga,

$P_k = \overline{a_k^2}$, dengan cara yang sama juga didapat bahwa

$P_k = \overline{b_k^2}$ sehingga : $\overline{a_k^2} = \overline{b_k^2}$ dan akhirnya,

$$P_k = 2G_n(k\Delta f). \Delta f = 2G_n(-k\Delta f). \Delta f$$

$$= \overline{a_k^2} = \overline{b_k^2} = \frac{\overline{a_k^2}}{2} + \frac{\overline{b_k^2}}{2} + \frac{\overline{c_k^2}}{2}$$

atau $P = \overline{a_k^2} (\cos^2 2\pi k \Delta ft + \sin^2 2\pi k \Delta ft) + \overline{2a_k b_k} \sin 2\pi k \Delta ft$

$\cos 2\pi k \Delta ft.$

$$= \overline{a_k^2} + \overline{2a_k b_k} \sin 2\pi k \Delta ft \cos 2\pi k \Delta ft.$$

karena $P_k = \overline{a_k^2}$, maka $\overline{a_k . b_k} = 0$. Jadi koefisien a_k dan b_k tidak berhubungan (uncorrelated) dan adalah gaussian. Kemudian untuk $\cos 2\ \pi\ k\ \Delta\ ft_1 = 1$ di dapat bahwa : $\overline{n_k (t_1)} = \overline{a_k}$ dan karena derau tidak mempunyai komponen dc maka $\overline{a_k} = 0$ dan $\overline{b_k} = 0$.

Kemudian dimisalkan bahwa dua komponen spektral dari derau adalah

$$n_k (t) = a_k \cos 2\ \pi\ k\ \Delta\ ft + b_k \sin 2\ \pi\ k\ \Delta\ ft$$

dan

$$n_l (t) = a_l \cos 2\ \pi\ l\ \Delta\ ft + b_l \sin 2\ \pi\ l\ \Delta\ ft$$

Apabila kedua komponen tersebut di atas digandakan maka didapat

$$\overline{a_k\, a_l} = \overline{a_k\, b_l} = \overline{b_k\, a_l} = \overline{b_k\, b_l} = 0$$

Akhirnya dapat disimpulkan bahwa koefisien a_k dan b_k adalah variabel random gaussian yang harga rata-ratanya adalah nol dan daya-normal (varians) adalah sama pada "two-sided" rapat spektral dayanya. Dan a_k dan b_k adalah "uncorrelated" satu sama lain maupun terhadap komponen spektral pada frekuensi yang berbeda ($l\ \Delta\ f$).

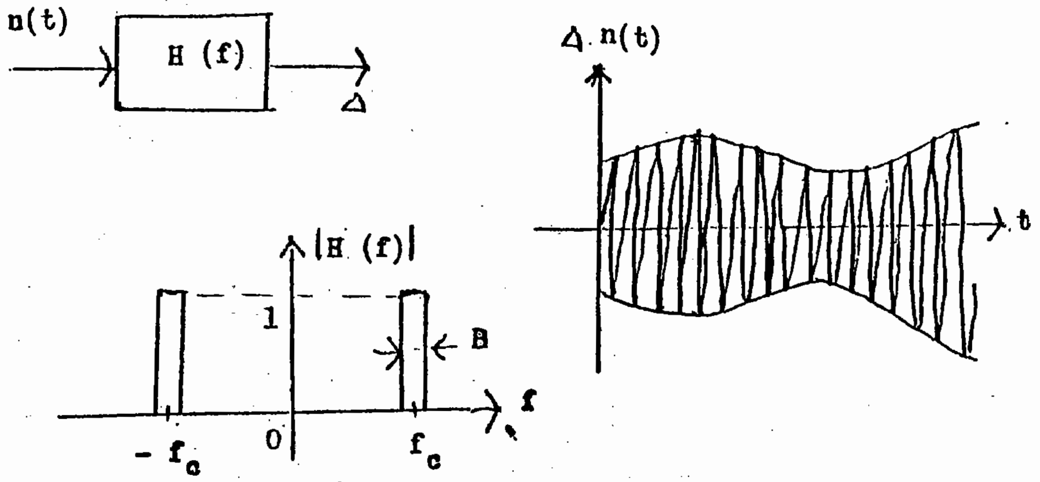
Selanjutnya rapat keboleh jadian variabel random c_k adalah, untuk $c_k \geqslant 0$ dan rapat keboleh jadian dari sudut Θ_k yang juga merupakan variabel random adalah,

$$f(c_k) = \frac{c_k}{P_k} e^{-c_k^2 / 2P_k}$$

$$f(\Theta_k) = \frac{1}{2\pi}$$

untuk $\quad -\pi \leqslant \Theta_k \leqslant \pi$

Tanggapan Suatu Tapis Bidang Sempit Terhadap Derau



Gambar 5. **Tanggapan suatu tapis bidang sempir terhadap derau.**

Derau dilewatkan pada suatu tapis bidang sempit dan terlihat outputnya berbentuk gelombang sinusoida dan amplitudonya berubah secara random, dan mempunyai bungkus yang daerah spektralnya dari -B/2 sampai B/2 untuk B adalah lebar band tapis. Frekuensi rata-rata dari gelombang ini adalah frekuensi center dari tapis f_c. Jika $B << f_c$ maka bungkusnya akan berubah pelan sekali. Akhirnya semakin kecil B maka bentuk gelombang yang keluar dari tapis bidang sempit ini akan semakin sinusoida (semakin baik).

Pengaruh Suatu Tapis Pada Rapat Spektral Daya Derau

Telah ditulis bahwa komponen spektral dari suatu derau adalah :

$$n_{ki}(t) = a_k \cos 2\pi k \Delta ft + b_k \sin 2\pi k \Delta ft$$

Kemudian suatu tapis dengan "transfer function" pada frekuensi k Δ f adalah :

$$H(k \Delta f) = | H(k \Delta f) | . e^{j \phi_k} = H(k \Delta f)(\cos \phi_k + j\sin \phi_k)$$

atau

$$H(k \Delta f) = | H(kf) | \angle \phi_k$$

Dan komponen spektral dari serau output menjadi :

$$n_{ko}(t) = | H(k \Delta f) | a_k . \operatorname{Cos}(2\pi k \Delta ft + \phi_k) + | H(kf) | b_k . \sin(2\pi k \Delta ft + \phi_k)$$

Tapis berguna untuk melewatkan atau menahan bidang frekuensi tertentu sesuai yang dikehendaki. Dengan demikian isyarat yang ditransmisikan merupakan hasil kali antara watak tapis dan rumusan matimatis isyarat tersebut dalam kawasan frekuensi.

Daya P_{ki} yaitu akibat derau semakin $n_{ki}(t)$,

$$P_{ki} = (a_k^2 + b_k^2)/2$$

Sedang daya ditulis sebagai,

$$P_{ko} = | (k \Delta f) |^2$$

(daya untuk derau output $n_{ko}(t)$)

karena | H (k f) | adalah fungsi deterministik sehingga,

$$[| H(k \Delta f) | a_k]^2 = | H(k \Delta f) |^2 a_k^2 \text{ dan}$$

$$[| H(k \Delta f) | b_k]^2 = | H(k \Delta f) |^2 b_k^2$$

Rapat spektral daya output adalah :

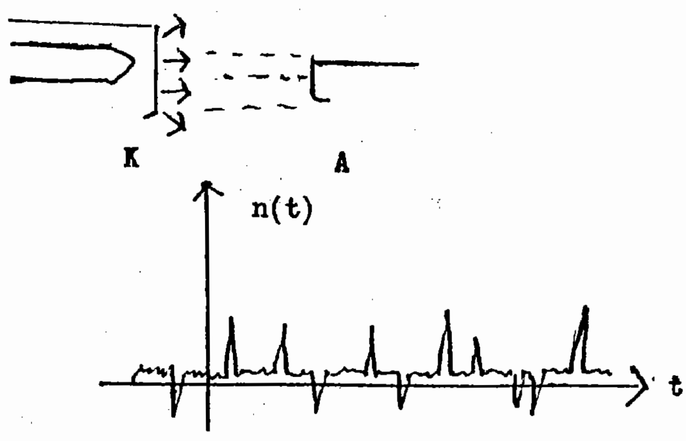
$$G_{no}(k \Delta f) = | H(k \Delta f) |^2 . G_{ni}(k \Delta f)$$

dan dengan menempatkan/mengganti frekuensi k Δ f dengan variabel kontiniu f pada batas limit Δ f → 0, maka rapat spektral daya menjadi

$$G_{no}(f) = | H(f) |^2 . G_{ni}(f)$$

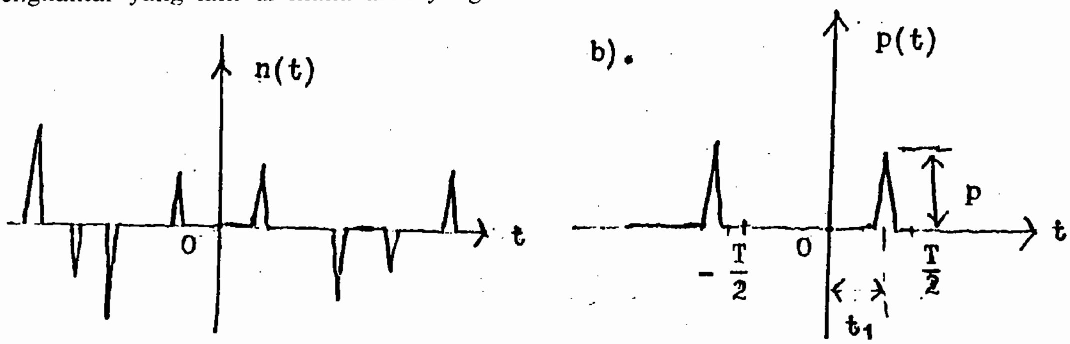
"Shot Noise"

Derau ini timbul karena adanya udara yang melesat keluar dari suatu permukaan tabung, seperti ditembakkan. Hal ini terjadi pada suatu tabung di mana terjadi gerakan elektron dari katode ke anoda. Derau ini terjadi secara acak dan mempunyai harga rata-rata, dan mengakibatkan penyusutan pada isyarat yang dipancarkan.



Gambar 6. **Bentuk gelombang "shot noise".**

"Shot noise" ini timbul karena arus elektrik yang berupa pulsa-pulsa seperti yang dijumpai pada diode atau semi penghantar yang lain di mana arus yang mengalir seakan-akan ditembakkan dari katode ke anode.



Gambar 7. **a. "Shot noise"**
b. Gelombang pulsa periodik. Amplitudo P dan waktu t_1 adalah variabel-variabel random.

Berikut ini diambil suatu pulsa tunggal yang terjadi setiap T detik. Gelombang p(t) dapat diuraikan dalam suatu deret Fourier,

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k \, e^{jk2\pi t/T} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k \, e^{j2\pi \Delta ft}$$

dimana :

$$f = 1/T$$

$$D_k = |D_k| \, e^{j\Theta_k}$$

D_k dan Θ_k adalah variabel-variabel acak

Dan rapat spektral dayanya,

$$C_P(k\Delta f) . \Delta f = \overline{D_k D_k^*}$$

Untuk waktu rata-rata tiap pulsa adalah T_s maka jumlah pulsa setiap T detik adalah $T/T_s = n$ dan $n_T(t)$ menyajikan n (t) pada suatu interval T.

$$n_T(t) = \sum_{\lambda=i}^{n} p(t) = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_{k\lambda} \, e^{jk2\pi\Delta ft}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \, e^{j2\pi\Delta ft}$$; karena $n_T(t)$ periodik dan periodenya T.

dan didapat,

$$G_{n_T}(k\,\Delta\,f).\,\Delta\,f = \overline{F_k F_k^*}$$

sedang

$$F_k = (D_{k1} + D_{k2} + D_{k3} + \ldots\ldots\ldots + D_{kn})$$

sehingga $\overline{F_k F_k^*} = \overline{D_{k1} + D_{k2} + \ldots\ldots + D_{kn})(D_{k1}^* + D_{k2}^* + \ldots\ldots + D_{kn}^*)}$

Untuk pembahasan diambil dua angka dari koefisien di atas,

$$\overline{D_{k1} D_{k2}^* + D_{k1}^* D_{k2} = |D_{k1}|\, e^{j\Theta k1}\, |D_{k2}|\, e^{-jVk_2} + |D_{k1}|\, e^{-j\Theta k1}\, |D_{k2}|\, e^{j\Theta k2}}$$

$$= \overline{2\,|D_{k1}||D_{k2}|\,\mathrm{Cos}\,(\Theta_{k1} - \Theta_{k2})}$$

$$= \overline{2\,|D_{k1}||D_{k2}|\,.\cos(\Theta_{k1} - \Theta_{k2})}$$

Dari persamaan tersebut dapat dibuktikan bahwa :

$$\overline{D_{k1} D_{k2}^* + D_{k1}^* D_{k2}} = 0$$

Apabila λ * dihilangan karena D_k tidak tergantung dari harga λ, sehingga

$G_{n_T}(k\,\Delta\,f).\,\Delta\,f = n\,\overline{|D_k|^2}$, di mana D dirumuskan sebagai berikut;

$$D_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} p(t)\, e^{-jk2\pi\Delta ft}\, dt.$$

$$G_{n_T}(k\,\Delta\,f) = \frac{1}{T_s} \overline{\left| \int_{-T/2}^{T/2} p(t)\, e^{jk2\pi\Delta ft}\, dt \right|^2}$$

Dengan mengganti (k Δ f) dengan variabel kontinyu f, maka rapat spektral daya $n_T(t)$ menjadi :

$$G_n(f) = \frac{1}{T_s} \overline{\left| \int_{-\infty}^{\infty} p(t)\, e^{-j2\pi\Delta ft} dt \right|^2}$$

$$= \frac{1}{T_s} \overline{|P(f)|^2} \qquad \text{untuk} -\infty < f < \infty$$

Dimana P(f) adalah transformasi Fourier dari pulsa tunggal p(t). Untuk hal-hal yang tertentu yaitu bila p(t) adalah suatu impuls dengan panjang I maka $| P(f) | = I$, dan selanjutnya nilai spektral daya derau dapat dituliskan sebagai berikut :

$$G_n(f) = \frac{I^2}{T_s} ; - \quad < f <$$

Kesimpulan

Dalam penyaluran informasi selalu terdapat gangguan berupa derau. Derau ini disebabkan oleh peralatan elektronis dan disebabkan oleh penyebab yang lain, yang sifatnya sangat acak.

Agar dapat dianalisis maka derau yang disebabkan peralatan alektronis, diuraikan menjadi deret Fourier, dengan anggapan bahwa derau tersebut masih bersifat periodik. Derau yang benar-benar acak dan tidak dapat diduga penyebabnya dan kapan timbulnya hanya dapat diselesaikan dengan metoda statistik.

Nilai daya derau mempunyai hubungan dengan spektral daya derau adalah sebagai berikut :

$$P_T = 2 \int_0^{\infty} C_n(f)\, df$$

Tampak dari persamaan, bahwa nilai daya derau merupakan hasil integral dari spektral daya derau dalam kawasan frekuensi. Jelaslah bahwa spektral daya derau merupakan diferensiasi dari daya derau terhadap variabel frekuensi.

Derau yang dilewatkan tapis akan menghasilkan derau yang terpengaruh oleh watak tapis, yang dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$C_{no}(f) = | H(f) |^2 . C_{ni}(f)$$

Dengan C_{no} adalah spektral daya derau keluaran dari tapis, H(f) adalah watak tapis terhadap kawasan frekuensi, sedang C_{ni} adalah spektral daya derau masukan.

Untuk derau yang bersifat impuls, yaiu 'shot noise" mempunyai nilai spektral daya derau sebagai berikut :

$$C_n(f) = \frac{1}{T_s} \overline{| P(f) |}^2 ; -\infty < f < \infty$$

Bila nilai isyarat impuls adalah I, maka nilai spektral daya derau adalah :

$$C_n(f) = \frac{I^2}{T_s} ; \qquad -\infty < f > \infty$$

Dengan dapat dihitungkan nilai spektral daya derau maka daya derau dapat dihitung pula.

Daftar Pustaka

1. Stremler, Ferrel G, Introduction to Communication System, 2 ed, Philippines, Addison — Wesley Publishing Company, Inc., 1982.
2. Shammugam K. Sam, Digital and Analog Communication Systems, Copy Right, John Wiley & Sons, Inc., 1979.
3. Viterbi J Andrew & Omuda K Jim, Principles of Digital Communication and Coding, Mc.Grwa-Hill Kogakusha, Ltd., 1979.
4. Taub, H. & Shilling, D.L., Principles of Communication System, Mc. Graw-Hill Kogakusha, Ltd., 197