

# PENENTUAN BESAR GAYA NORMAL DAN MOMEN LENTUR DENGAN "GAUSSIAN QUADRATURE"

Oleh : Ir. Morisco \*)

## RINGKASAN

Hitungan integrasi secara pendekatan dapat dilakukan dengan "Gaussian Quadrature". Cara ini dapat dipakai dalam menentukan besar momen lentur serta gaya normal suatu tam- pang balok/kolom struktur. Hasil yang diperoleh cukup teliti dan waktu komputasi dapat dihemat. Dalam tulisan ini, hasil hitungan cara tersebut diperbandingkan dengan hasil yang diperoleh dengan cara elemen biasa.

## TEORI

Dalam cara "Gaussian Quadrature", su- atu integrasi dengan batas-batas  $-1$  dan  $+1$  dapat disamakan dengan jumlah hasil kali antara "bilangan berat" dan harga fungsi yang bersangkutan, pada beberapa titik tertentu. Untuk selanjutnya titik titik tertentu ini disebut titik Gauss. Sedang persamaan tersebut dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx = \sum_{i=1}^m H_i \cdot f(a_i) \quad \dots (1)$$

$H_i$  = bilangan berat pada titik Gauss  $i$

$a_i$  = absis titik Gauss

$m$  = jumlah titik Gauss yang dipa- kai.

Korelasi antara  $H_i$ ,  $a_i$  dan  $m$  dapat dili- hat pada tabel 1.

Hasil integrasi yang diperoleh akan tepat, bila  $f(x)$  adalah fungsi berdera- jat tidak lebih dari  $(2m - 1)$ . Dan sam- pai pada batas-batas tertentu, kesaksama- an hasil hitungan dapat ditingkatkan de- ngan menambah jumlah titik Gauss yang di tinjau.

Persyaratan batas integrasi harus  $-1$  dan  $+1$  ini tidaklah mempersempit peng- gunaan cara tersebut. Karena integrasi dengan batas-batas yang lain dapat diu- bah bentuknya, sehingga persyaratan ter- penuhi. Penyesuaian bentuk ini dapat di lakukan sebagai berikut :

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

$$= \frac{x_2 - x_1}{2} \int_{-1}^{+1} f\left\{\frac{(x_2 - x_1)z + x_2 + x_1}{2}\right\} dz \quad \dots (2)$$

$$z = \frac{2x - (x_1 + x_2)}{x_2 - x_1} \quad \dots (3)$$

Dalam praktek, perubahan bentuk fung- si ini tidak perlu dikerjakan. Dan penye- lesaiannya tidaklah sesulit yang diba- yangkan. Penyelesaian akan menjadi lebih

---

\*) Anggota Staf Pengajar Jurusan Teknik Sipil FT.UGM.

sedemikian bisa diadakan transformasi sistem sumbu yang dipakai. Adapun langkah-langkah penyelesaian dapat dituliskan sebagai berikut :

1. Gambarkan sumbu X dan X' saling berimpitan.
2. Pasang harga-harga  $X_1$  dan  $X_2$  pada sumbu X
3. Pasang harga-harga  $x_1 = -1$  dan  $x_2 = +1$  pada sumbu X', titik-titik ini berimpitan dengan titik  $X_1$  dan  $X_2$  dari sumbu X.
4. Baca harga  $H_i$  dan  $a_i$  sesuai dengan jumlah titik Gauss yang dipakai, pada tabel 1.
5. Pasang harga-harga  $a_i$  pada sumbu X', sehingga  $x_i = a_i$ .
6. Dari posisi  $x_i$  dapat dihitung/dibaca harga pasangannya menurut sumbu X.
7. Integrasi dapat diperoleh dengan persamaan (4).

$$I = \int_{X_1}^{X_2} f(x) dx \approx \frac{X_2 - X_1}{2} \sum_{i=1}^m H_i \cdot f(x_i) \dots \dots \dots (4)$$

Dalam analisa momen lentur atau gaya normal akibat tegangan yang timbul pada suatu tampang balok/kolom struktur, di jumpai bentuk integrasi ganda. Untuk menyelesaikan integrasi ganda ini dapat digunakan persamaan "Gauss Quadrature" berikut ini :

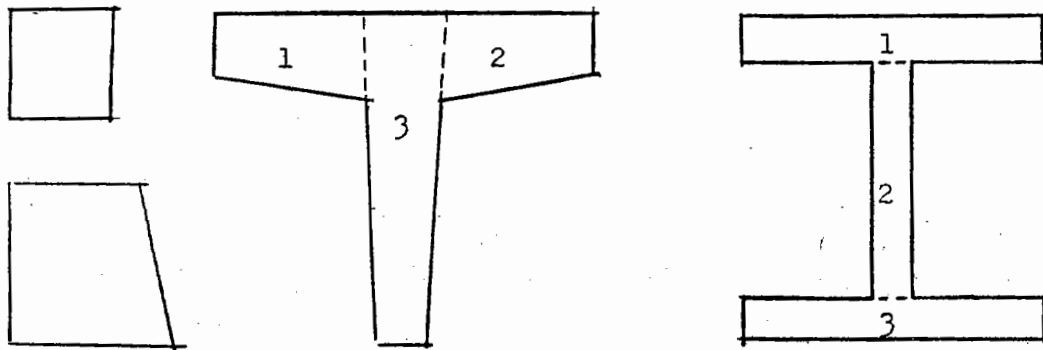
$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(x,y) dx dy \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n H_i H_j f(a_i, a_j) \dots \dots \dots (5)$$

$H_i, H_j$  = bilangan berat titik Gauss dengan koordinat  $(a_i, a_j)$ .  
 $a_i, a_j$  = absis dan ordinat titik Gauss.

Tampak dari persamaan (5), bahwa batas-batas integrasi yang dipakai adalah -1 dan +1. Seperti persamaan (1), maka persamaan (5) inipun dapat dipakai untuk penyelesaian integrasi ganda yang batas-batasnya bukan -1 dan +1. Dan persamaan (5) dapat berlaku bagi semua bentuk segi empat, atau bentuk lain yang tersusun dari beberapa segi empat, seperti tampak pada gambar 1. Untuk bentuk yang tersusun dari beberapa segi empat, maka integrasi dilakukan pada setiap segi empat. Sehingga transformasi sistem sumbu harus dilakukan sebanyak jumlah segi empat yang ada.

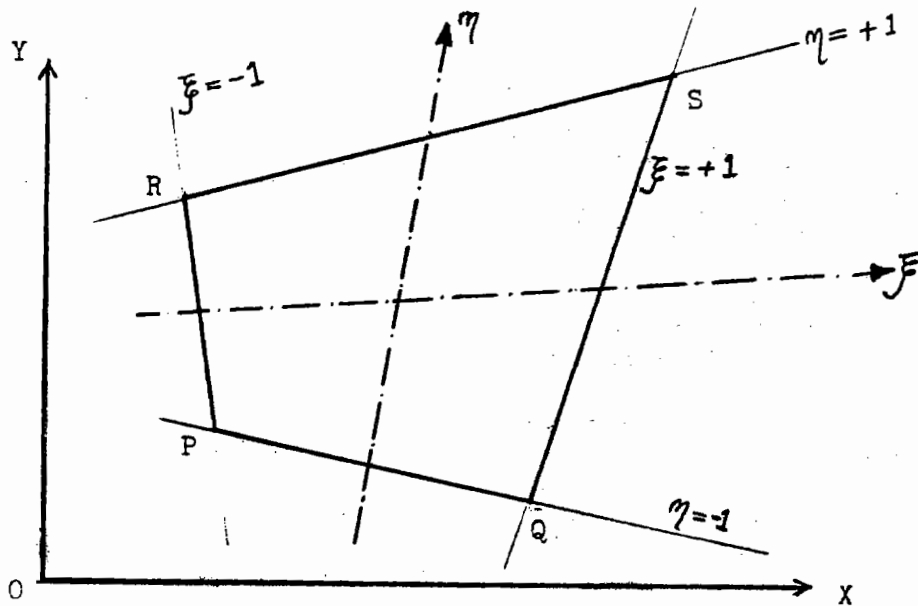
Dalam transformasi sistem sumbu pada integrasi ganda ini, maka sistem sumbu X-Y ditransformasikan ke sistem sumbu  $\xi - \eta$ . Sumbu-sumbu  $\xi$  dan  $\eta$  melewati pertengahan batas-batas integrasi.

Dari Gambar 2, tampak bahwa antara sumbu dan sumbu tidak harus saling tegak lurus



Gambar 1 : Berbagai bentuk segi empat dan susunan beberapa segi empat.

Dari Gambar 2, tampak bahwa antara sumbu  $\xi$  dan sumbu  $\eta$  tidak harus saling tegak lurus.



Gambar 2 : Sistem sumbu X-Y dan sumbu  $\xi - \eta$

Untuk transformasi dari sistem sumbu X-Y ke sistem sumbu  $\xi - \eta$ , berlaku persamaan persamaan berikut ini :

$$x = \frac{1}{4} \left[ (1-\xi)(1-\eta)x_p + (1+\xi)(1-\eta)x_q + (1-\xi)(1+\eta)x_r + (1+\xi)(1+\eta)x_s \right] \dots (6).$$

$$y = \frac{1}{4} \left[ (1-\xi)(1-\eta)y_p + (1+\xi)(1-\eta)y_q + (1-\xi)(1+\eta)y_r + (1+\xi)(1+\eta)y_s \right] \dots (7).$$

$$dx dy = |J| d\xi \cdot d\eta \dots (8).$$

$|J|$  = determinan matriks Jacoby di bawah ini

$$J = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & -(1+\eta) & (1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1-\xi) & (1+\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p & y_p \\ x_q & y_q \\ x_r & y_r \\ x_s & y_s \end{bmatrix} \dots (9).$$

Selanjutnya persamaan integrasi dapat ditulis sebagai berikut :

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(x,y) dx dy = J \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n H_i \cdot H_j \cdot f(x_i, y_j) \dots (10).$$

$x_i, y_j$  adalah koordinat titik Gauss dalam sistem sumbu X-Y.

## PEMAKAIAN

Suatu contoh pemakaian "Gaussian Quadrature" pada analisa gaya normal dan momen lentur dapat dilihat pada program komputer, lampiran 1. Pada contoh tersebut, dianalisa besar gaya normal serta momen akibat tegangan yang timbul pada tampang balok/kolom struktur baja. Sedangkan data yang diperlukan meliputi tegangan luluh, modulus elastisitas bahan pada keadaan tanpa tegangan, ukuran-ukuran pokok profil, kelengkungan serta letak dan arah garis netral. Dengan memperhatikan gambar 3, penjelasan dapat diberikan sebagai berikut :

1. Tampang profil dibagi menjadi tiga, , yang masing-masing berbentuk segi empat. Dan koordinat titik-titik batas ditentukan berdasarkan sistem sumbu X-Y. Titik-titik batas ini meliputi P, Q, R dan S pada setiap bagian. Kemudian langkah 2 - 7 dikerjakan pada bagian-bagian tersebut.
2. Pada bagian yang ditinjau, dipasang sumbu  $\xi$  dan  $\eta$ . Dengan sistem sumbu ini titik-titik Gauss dipasang. Koordinat titik Gauss ini dapat diperoleh dari tabel 1,  $\xi_i = a_i$  dan  $\eta_j = a_j$ .  
Bila digunakan n buah titik Gauss pada setiap arah, maka akan diperoleh n buah titik Gauss.

## PEMBAHASAN

Hasil hitungan gaya normal serta momen suatu tampang profil baja, dengan berbagai jumlah elemen yang dipakai, dapat dilihat pada tabel 2 dan 3. Tabel 2 diperoleh dengan pembagian elemen secara Gauss, sedang tabel 3 diperoleh dengan pembagian elemen secara biasa.

Dari tabel 2 tampak bahwa perbedaan hasil hitungan, yang diperoleh dari 75 elemen dan 108 elemen, tidaklah begitu besar. Sedangkan pada tabel 3, terlihat perbedaan hasil hitungan yang diperoleh dengan 80 elemen dan 100 elemen, lebih besar dari yang tersebut pertama. Sehingga, untuk memperoleh kesaksamaan yang sama, cara Gauss akan memerlukan jumlah elemen yang lebih rendah. Hal ini akan berarti bahwa waktu komputasi dapat dihemat dengan cara Gauss tersebut.

3. Bagian dipecah menjadi  $n^2$  elemen. Masing-masing elemen yang berdekatan, dibatasi oleh suatu garis lurus yang melintasi kedua titik Gauss bersangkutan.
4. Koordinat titik-titik Gauss ditransformasikan ke dalam sistem sumbu X-Y. Dengan sistem sumbu X-Y dapat dihitung besar tegangan yang timbul pada setiap titik Gauss.
5. Gaya normal pada satu bagian dapat diperoleh dari persamaan (10), dengan  $f(x_i, y_j)$  sebesar tegangan yang timbul pada titik-titik yang bersangkutan.
6. Momen lentur terhadap sumbu X pada satu bagian dapat diperoleh dari persamaan (10), dengan  $f(x_i, y_j)$  sebesar hasil kali antara tegangan dan ordinat titik yang bersangkutan (dalam sistem sumbu X-Y).
7. Momen lentur terhadap sumbu Y pada satu bagian dapat diperoleh seperti langkah 6, tetapi ordinat digantikan dengan absis.
8. Gaya normal serta momen untuk satu tampang profil dapat diperoleh dengan menjumlahkan harga-harga yang bersangkutan, pada semua bagian yang ada.

## DAFTAR PUSTAKA

1. Basu, A.K., and Sommerville, W. (1968). Derivation of formulae for the design of composite columns. Proc. Instn. Civ. Engrs., vol. 40, May, pp. 37-60.
2. Kopal, Z. (1961). Numerical Analysis, Chapman and Hall, London.
3. Virdi, K.S. (1981). Design of Circular and Rectangular Hollow Section Columns, Journal of Constructional Steel Research, September, pp. 35-45.
4. Zienkiewicz, O.C. (1971). The Finite Element Method in Engineering Science, Mc Graw Hill, London.