MASALAH RUANG BAGIAN INVARIAN UNTUK ALJABAR OPERATOR DAN DUALNYA

THE INVARIANT SUBSPACE PROBLEM FOR ALGEBRA OF OPERATORS AND ITS DUAL

Atok Zulijanto [1] dan Soeparna Darmawijaya [2]

Program Studi Matematika
Program Pascasarjana Universitas Gadjah Mada

ABSTRACT

In this paper, it is presented the characterization of the invariant subspace problem for algebras of operators and its dual by introducing two other topologies which are the analogues of the weak and strong operator topologies. This result is closely related to the presence of compact operator.

Key words : *The space $C(S, \mathcal{X}')$, topology τ_W, topology τ_S, invariant.*

PENGANTAR

Pertanyaan "Apakah operator linear kontinu $T: X \rightarrow X$ pada ruang Banach X menghasilkan ruang bagian invarian tertutup yang sejati?" dikenal sebagai masalah ruang bagian invarian. Ruang bagian V di dalam X dikatakan invarian-T jika $T(V) \subset V$.

Enflo (1987) berhasil mengkonstruksikan operator linear kontinu pada suatu ruang Banach yang dapat dipisah *(separable)* tanpa menghasilkan ruang bagian invarian tertutup yang sejati. Meskipun demikian Lomonosov (1991) memperkirakan bahwa adjoin setiap operator linear kontinu pada ruang Banach menghasilkan ruang bagian invarian tertutup yang sejati yang dikenal sebagai dugaan Lomonosov. Dugaan Lomonosov itu memberikan inisiatif untuk [1]mempelajari lebih lanjut tentang eksistensi ruang bagian invarian tertutup yang sejati untuk operator adjoin, bahkan untuk dual aljabar operator.

Selanjutnya, Branges (1993) mempelajari dugaan Lomonosov itu dengan bekerja pada Aljabar Operator yang beraksi pada ruang

---

[1] FMIPA Universitas Gadjah Mada

[2] FMIPA Universitas Gadjah Mada

fungsi kontinu lemah*. Tulisan ini bertujuan untuk mempresentasikan pendekatan alternatif dalam mengkarakterisasikan masalah ruang bagian invarian untuk adjoin operator dengan memanfaatkan topologi konvek lokal τ_S dan topologi konvek lokal τ_W yang diperkenalkan oleh Abramovich dkk (1995).

Tentang topologi konvek lokal telah banyak dibicarakan oleh Taylor dan Lay (1980), Dunford dan Schwartz (1958), dan Conway (1990)

HASIL DAN PEMBAHASAN

Di dalam tulisan ini X menotasikan ruang Banach atas bilangan kompleks dengan dimensi lebih dari satu dan X' ruang dualnya. Bola satuan tertutup di dalam X' dinotasikan dengan S, jadi $S=\{x' \in X'; \|x'\| \leq 1\}$. Ruang vektor yang terdiri atas semua fungsi kontinu lemah* dari S ke X' yang masing-masing dilengkapi dengan topologi lemah*, akan dinotasikan dengan $C(S, X')$, sedangkan $C(S)$ dimaksud sebagai himpunan semua fungsi kontinu yang bernilai kompleks yang didefinisikan pada S.

$C(S, X')$ dan $C(S)$ itu masing-masing merupakan ruang Banach dengan norma masing-masing

$$\|f\| = \sup_{s\in S}\|f(s)\| \ , \quad f \in C(S, X')$$

$$\|\alpha\| = \sup_{s\in S}|\alpha(s)| \ , \quad \alpha \in C(S)$$

Setiap $\alpha \in C(S)$ dan $f \in C(S, X')$ menghasilkan $\alpha f \in C(S, X')$ yang didefinisikan sebagai :

$$(\alpha f)(s) = \alpha(s).f(s)$$

Ruang dual ganda X akan ditulis X''. Setiap $x'' \in X''$ dan $s \in S$, menghasilkan fungsional linear kontinu-norma $x'' \otimes s$ pada $C(S, X')$ dengan formula :

$$\langle x'' \otimes s, f \rangle = (x'' \otimes s)(f) = x''(f(s)),$$

untuk setiap $f \in C(S, X')$.

Selanjutnya, akan didefinisikan dua topologi pada $C(S, X')$ yang analog dengan topologi operator kuat dan topologi operator lemah, sebelum disajikan beberapa sifatnya.

Definisi . *Topologi* τ_w *pada* $C(S, \mathcal{X}')$ *merupakan topologi konvek lokal yang dibangun oleh keluarga semua seminorma* $\{ \rho_{x'',s}$; $x'' \in \mathcal{X}''$ *dan* $s \in S \}$ *dengan*

$$\rho_{x'',s}(f) = |\langle x'' \otimes s, f \rangle|$$

untuk setiap $f \in C(S, \mathcal{X}')$.

Definisi . *Topologi* τ_s *pada* $C(S, \mathcal{X}')$ *merupakan topologi konvek lokal yang dibangun oleh keluarga semua seminorma* $\{ \rho_s ; s \in S \}$ *dengan*

$$\rho_s(f) = \|f(s)\|$$

untuk setiap $f \in C(S, \mathcal{X}')$.

Hasil yang berkaitan dengan fungsional linear kontinu-τ_W dan kontinu-τ_S disajikan sebagai berikut.

Teorema . *Diberikan* ϕ *fungsional linear yang didefinisikan pada* $C(S, \mathcal{X}')$. *Ketiga pernyataan di bawah ini ekuivalen.*

1. $\phi = \sum_{i=1}^{n} x_i'' \otimes s_i$, *dengan* $x_i'' \in \mathcal{X}''$, $s_i \in S$ *untuk setiap* $i = 1, 2, \ldots, n$
2. ϕ *kontinu*-τ_w
3. ϕ *kontinu*-τ_s

Abramovich dkk. (1995) telah membuktikan teorema itu dengan menggunakan pendekatan sistem dual $\langle Y, Y^\# \rangle$, dengan $Y = C(S, \mathcal{X}')$ dan $Y^\# = \{ \sum_{i=1}^{n} x_i'' \otimes s_i \, ; \, x_i'' \in \mathcal{X}''$, $s_i \in S$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n\}$. Beliau membuktikan bahwa $\tau_w \subset \tau_s \subset \tau(Y, Y^\#)$ dengan $\tau(Y, Y^\#)$ sebagai topologi Mackey. Pada tulisan ini diberikan bukti dengan metode lain.

Bukti : (1)$\Rightarrow$ (2) Karena $x_i'' \otimes s_i$ fungsional linear, maka $x_i'' \otimes s_i$ kontinu-τ_w untuk setiap i. Akibatnya $\phi = \sum_{i=1}^{n} x_i'' \otimes s_i$ kontinu-τ_w.

(2)$\Rightarrow$(3) Jelas bahwa $\tau_w \subset \tau_s$, sebab $\left|\left\langle x''\otimes s, f\right\rangle\right| \leq \|x''\|\|f(s)\|$.

(3)$\Rightarrow$(1) Diberikan ϕ fungsional linear pada $C(S, \mathcal{X}')$ dengan ϕ kontinu-τ_s, artinya untuk setiap $\varepsilon_1 > 0$ terdapat $\delta_1 > 0$ dan koleksi berhingga $s_1, s_2, \ldots, s_n \in S$ sehingga jika $\|f(s_i)\| < \delta_1$ untuk $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ berlaku $|\phi(f)| < \varepsilon_1$. Diberikan ruang Banach $X'_n = \mathcal{X}' \oplus \mathcal{X}' \oplus \ldots \oplus \mathcal{X}'$ yang terdiri atas n pasang fungsional $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ dengan $x'_i \in \mathcal{X}'$ untuk i=1, 2,...,n dengan norma pada X'_n yang didefinisikan sebagai

$$\|(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)\| = \operatorname*{maks}_{1\leq i\leq n}\|x'_i\|$$

Didefinisikan $H : C(S, \mathcal{X}') \to X'_n$ dengan $H(f)=(f(s_1), f(s_2), \ldots, f(s_n))=y$ dan $g(y)=\phi(f)$. Diberikan sebarang $\varepsilon_2 > 0$ karena jika $\|H(f)\| = \operatorname*{maks}_{1\leq i\leq n}\|f(s_i)\| < \delta_1\varepsilon_2$ berakibat $|\phi(f)| < \varepsilon_2\,\varepsilon_1$, sehingga g linear kontinu pada $H(C(S, \mathcal{X}'))$. Karena itu g mempunyai perluasan linear kontinu g_1 yang terdefinisikan pada semua X'_n. Sebagai akibat setiap $f \in C(S, \mathcal{X}')$, $\phi(f) = g_1(H(f))$ mempunyai bentuk

$$\phi(f) = \sum_{i=1}^{n} x''_i(f(s_i)) = \sum_{i=1}^{n}\left\langle x''_i \otimes s_i, f\right\rangle = \sum_{i=1}^{n}(x''_i \otimes s_i)(f)$$

Dengan kata lain $\phi = \sum_{i=1}^{n} x''_i \otimes s_i$.

M ruang bagian $C(S, \mathcal{X}')$ dikatakan invarian-$C(S)$ jika $\alpha f \in M$ untuk setiap $\alpha \in C(S)$ dan $f \in M$. Berikut ini disajikan teorema separasi untuk M ruang bagian di dalam $C(S, \mathcal{X}')$ ketika ia invarian-$C(S)$. Bukti dapat dilakukan dengan memanfaatkan teorema di atas dan Lemma Urysohn.

Teorema . *Diberikan M ruang bagian $C(S, \mathcal{X}')$ yang invarian-$C(S)$. Jika $f_0 \in C(S, \mathcal{X}')$ berada di luar penutup-τ_S M maka* *terdapat* $x'' \in \mathcal{X}''$ *dan* $s \in S$ *sehingga* $\langle x'' \otimes s, f_o \rangle = 1$ *dan* $\langle x'' \otimes s, f \rangle = 0$ *untuk setiap* $f \in M$.

Definisi . *Fungsi* $f \in C(S, \mathcal{X}')$ *dikatakan kontinu lengkap jika* $s_n \to s$ *lemah* maka* $\|f(s_n) - f(s)\| \to 0$.

Jadi fungsi $f \in C(S, \mathcal{X}')$ dikatakan kontinu lengkap jika f juga kontinu-norma. Ruang bagian $C(S, \mathcal{X}')$ yang terdiri atas semua fungsi kontinu lengkap akan dinotasikan dengan $K(S, \mathcal{X}')$. Berikut ini disajikan karakter ruang bagian tertutup di dalam $K(S, \mathcal{X}')$ yang invarian-$C(S)$ berkaitan dengan topologi τ_W, topologi τ_S, dan topologi norma.

Teorema. *Diberikan M ruang bagian* $K(S, \mathcal{X}')$ *yang invarian-*$C(S)$. *Pernyataan -pernyataan berikut ekuivalen*

1. *M tertutup-*τ_W *didalam* $K(S, \mathcal{X}')$
2. *M tertutup-*τ_S *di dalam* $K(S, \mathcal{X}')$
3. *M tertutup- norma di dalam* $K(S, \mathcal{X}')$

Bukti : Jelas bahwa (1)$\Rightarrow$(2)$\Rightarrow$(3) sebab topologi $\tau_W \subset$ topologi $\tau_S \subset$ topologi norma. Tinggal dibuktikan (3)$\Rightarrow$(1) sebagai berikut. Ambil $f_o \in K(S, \mathcal{X}')$ dengan f_o berada pada penutup-τ_W M. Ambil fungsional linear kontinu ϕ pada $C(S, \mathcal{X}')$ dengan $\|\phi\| = 1$ sehingga $\langle \phi, f \rangle = 0$ untuk setiap $f \in M$. Untuk setiap $\alpha \in C(S)$, didefinisikan fungsional linear kontinu ϕ_α pada $C(S, \mathcal{X}')$ dengan $\phi_\alpha(f) = \phi(\alpha f)$, $f \in C(S, \mathcal{X}')$. Karena M invarian-$C(S)$, diperoleh $\phi_\alpha(f) = \phi(\alpha f) = 0$ untuk setiap $f \in M$. Dinotasikan $\mathcal{V}$ sebagai ruang bagian tertutup lemah* yang di bangun oleh ϕ_α. Dinotasikan pula $W = \{\varphi \in (C(S, \mathcal{X}'))' ; \|\varphi\| \le 1\}$ dan $U = \mathcal{V} \cap W$. Jelas bahwa $\phi = \phi_1 \in U$. Selanjutnya ambil ψ titik ekstrim U. Berdasarkan hasil yang diperoleh Branges (1993) terdapat $s \in S$ dan $x'' \in \mathcal{X}''$ sehingga

$$\psi(f) = \langle x'' \otimes s, f \rangle = x''(f(s))$$

untuk setiap $f \in K(S, \mathcal{X}')$.

Khususnya $\psi(f_o) = \langle x''\otimes s, f_o \rangle$ dan $\psi(f) = \langle x''\otimes s, f \rangle = 0$ untuk setiap $f \in M$. Karena f_o berada pada penutup-τ_W M maka $\psi(f_o) = \langle x'', f_o(s) \rangle = 0$. Berdasarkan Teorema Krein-Milman, diperoleh $U = \overline{CO}$ (eks U). Karena $\phi \in U$ maka ϕ $(f_o) = 0$. Dengan kata lain f_o berada pada penutup-norma M, dan karena M tertutup-norma maka $f_o \in M$.

Berikut ini disajikan suatu karakterisasi ruang bagian invarian untuk aljabar operator, yang akan dipergunakan untuk mempresentasikan hasil utama tulisan ini.

Teorema . *$\mathcal{A}$ aljabar bagian di dalam B $(\mathcal{X})$ menghasilkan ruang bagian invarian-$\mathcal{A}$ tertutup yang sejati jika dan hanya jika terdapat $x \in X$ dengan $x \neq 0$ dan $x' \in \mathcal{X}'$ dengan $x' \neq 0$ sehingga*
$\langle x', Tx \rangle = x'(Tx) = 0$ *untuk setiap* $T \in \mathcal{A}$

Bukti : ($\Rightarrow$) Diberikan $\mathcal{V}$ ruang bagian invarian-$\mathcal{A}$ tertutup yang sejati. Diambil sebarang $x \in \mathcal{V}$ dengan $x \neq 0$ dan dibentuk :
$\mathcal{A}x = \mathrm{Cl}\,\{ Tx \,;\, T \in \mathcal{A} \}$.
Berdasarkan perluasan Teorema Hahn - Banach, terdapat $x' \in \mathcal{X}'$ dengan $x' \neq 0$ sehingga $\langle x', Tx \rangle = x'(Tx) = 0$ untuk setiap $T \in \mathcal{A}$.
($\Leftarrow$) Jelas bahwa $\mathcal{A}x = \mathrm{Cl}\,\{ Tx \,;\, T \in \mathcal{A} \}$ tidak padat (*not dense*) di dalam X. Jika $\mathcal{A}x \neq \{0\}$ maka $\mathcal{A}x$ merupakan ruang bagian invarian-$\mathcal{A}$ tertutup yang sejati . Jika $\mathcal{A}x = \{0\}$, maka $V = \{ \lambda x \,;\, \lambda \in \mathbb{C} \}$ merupakan ruang bagian invarian-A tertutup yang sejati.

Sebelum melangkah lebih jauh, berikut ini akan dijelaskan tentang operator rank satu beserta adjoinnya. Untuk sebarang $b \in \mathcal{X}$ dan $b' \in \mathcal{X}'$ dibentuk operator rank satu $A = b' \otimes b$ yang didefinisikan dengan $A(x) = (b'\otimes b)(x) = b'(x).b \in X$ untuk setiap $x \in \mathcal{X}$ .Secara analog untuk $b \otimes b' : \mathcal{X}' \to \mathcal{X}'$ didefinisikan sebagai $(b \otimes b')\ (x') = x'(b).\ b'$ untuk setiap $x' \in \mathcal{X}'$.Perhatikan bahwa $(b' \otimes b)' = b \otimes b'$.

Hasil utama tulisan ini menyajikan karakterisasi masalah ruang bagian invarian dalam kaitannya dengan topologi-norma, beserta dualnya, dan ternyata hal ini berkaitan erat dengan operator kompak.

Teorema . *Diberikan $\mathcal{A}$ aljabar bagian $B(\mathcal{X})$. Dua pernyataan berikut ekuivalen.*

1. *Terdapat ruang bagian invarian-$\mathcal{A}'$ tertutup yang sejati di dalam $\mathcal{X}'$.*
2. *Terdapat operator B, $K \in B(\mathcal{X})$ dengan K operator kompak sehingga operator $B'K' \notin \text{Cl } M$, dengan M ruang bagian di dalam $C(S, \mathcal{X}')$ yang dibangun oleh keluarga*

$$\{\alpha T'K'; \alpha \in C(S) \text{ dan } T \in \mathcal{A}\}$$

Bukti : (1)$\Rightarrow$(2) Diketahui terdapat ruang bagian invarian-$\mathcal{A}'$ tertutup yang sejati di dalam $\mathcal{X}'$. Karena itu terdapat $x'' \in \mathcal{X}''$ dan $s \in S$ sehingga $\langle x'', T's \rangle = 0$ untuk setiap $T \in \mathcal{A}$. Selanjutnya diambil $b \in \mathcal{X}$ dan $b' \in \mathcal{X}'$ sehingga $\langle s, b \rangle = 1$ dan $\langle x'', b' \rangle = 1$. Pandang operator rank satu $K = s \otimes b$ dan $B = b' \otimes b$ pada $B(\mathcal{X})$. Dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa $K'(s) = s$ dan $B'(s) = b'$. Sekarang akan dibuktikan bahwa $B'K' \notin \text{Cl } M$. Untuk itu perhatikan fungsional linear kontinu $\phi = x'' \otimes s$ pada $C(S, \mathcal{X}')$. Diperoleh:

$$\langle \phi, \alpha T'K' \rangle = \langle x'' \otimes s, \alpha T'K' \rangle = \langle x'', (\alpha T'K')(s) \rangle$$
$$= \langle x'', \alpha(s).((T'K')(s)) \rangle = \alpha(s) \langle x'', T'K's \rangle$$
$$= \alpha(s) \langle x'', T's \rangle = 0$$

untuk setiap $T \in \mathcal{A}$ dan $\alpha \in C(S)$.
Di sisi lain :

$$\langle \phi, B'K' \rangle = \langle x'' \otimes s, B'K' \rangle = \langle x'', B'K's \rangle = \langle x'', B's \rangle$$
$$= \langle x'', b' \rangle = 1$$

Dengan kata lain $B'K' \notin \text{Cl } M$.

(2)$\Rightarrow$(1) Karena K operator kompak maka $B'K' \in K(S, \mathcal{X}')$, $M \subset K(S, \mathcal{X}')$, dan M invarian-$C(S)$. Karena $B'K' \notin \text{Cl } M$ maka $B'K'$ tidak berada pada penutup-τ_S M di dalam $K(S, \mathcal{X}')$. Karena itu , terdapat $x'' \in \mathcal{X}''$ dan $s \in S$ sehingga

$$\langle x'', B'K's \rangle = 1 \text{ dan } \langle x'', T'K's \rangle = 0$$

Karena $K'(s) = s$ dan $B'(s) = b'$ serta $\langle x'', B'K's \rangle = 1$ diperoleh $K's \neq 0$, dan karena $\langle x'', T'K's \rangle = 0$ untuk setiap $T \in \mathcal{A}$, maka $\mathcal{X}'$ mempunyai ruang bagian invarian-$\mathcal{A}'$ tertutup yang sejati.

Teorema . *Diberikan A aljabar bagian $B(\mathcal{X})$. Dua pernyataan berikut ekuivalen*

1. *$\mathcal{X}$ mempunyai ruang bagian invarian-A tertutup yang sejati.*
2. *Terdapat $B,K \in B(\mathcal{X})$ dengan K operator kompak sehingga operator $K'B' \notin \mathrm{Cl}\ N$ dengan N ruang bagian di dalam $C(S,\mathcal{X}')$ yang dibangun oleh*

$$\{\alpha K'T' ;\ \alpha \in C(S) \text{ dan } T \in A\}.$$

Bukti : (1)$\Rightarrow$(2) Karena X mempunyai ruang bagian invarian-A tertutup yang sejati, maka terdapat $x \in \mathcal{X}$ dan $x' \in S$ dengan $x \neq 0$, $x' \neq 0$ sehingga $\langle x', T x\rangle = 0$ untuk setiap $T \in A$. Selanjutnya ambil $b' \in \mathcal{X}'$ dan $b \in \mathcal{X}$ sehingga $\langle b', x\rangle = 1$ dan $\langle x', b\rangle = 1$. Perhatikan operator rank satu $K = b' \otimes x$ dan $B = b' \otimes b$ pada $B(\mathcal{X})$. Mudah ditunjukkan bahwa $K(x) = x$ dan $B'x' = b'$. Berikutnya akan dibuktikan bahwa $K'B' \notin \mathrm{Cl}\ N$. Untuk itu diambil $\phi = x \otimes x'$ dengan

$$\phi(f) = \langle x \otimes x', f\rangle = \langle x, f(x')\rangle = (f_o x')(x) \in C$$

untuk setiap $f \in C(S,\mathcal{X}')$.

Jelas bahwa $\phi = x \otimes x'$ merupakan fungsional linear kontinu pada $C(S,\mathcal{X}')$.

Selanjutnya $\phi = x \otimes x'$ itu memenuhi sifat

$$\langle \phi, \alpha K'T'\rangle = \langle x \otimes x', \alpha K'T'\rangle = \langle x, (\alpha K'T')(x')\rangle = 0$$

untuk setiap $T \in A$, $\alpha \in C(S)$. Di sisi lain

$$\phi(K'B') = \langle x \otimes x', K'B'\rangle = \langle x, K'B'x'\rangle = \langle x, K'b'\rangle = \langle K x, b'\rangle$$
$$= \langle x, b'\rangle = 1.$$

Hal itu menunjukkan bahwa $K'B' \notin \mathrm{Cl}\ N$.

(2)$\Rightarrow$(1) Karena K operator kompak, maka $K'B' \in K(S,\mathcal{X}')$ dan $N \subset K(S,\mathcal{X}')$, juga N invarian-$C(S)$. Karena operator kompak $K'B' \notin \mathrm{Cl}\ N$, maka $K'B'$ tidak berada pada penutup-τ_S N. Akibatnya, terdapat $x'' \in \mathcal{X}''$ dan $s \in S$ sehingga

$$\langle x'', K'B's\rangle = 1 \text{ dan } \langle x'', K'T's\rangle = 0$$

untuk semua $T \in A$. Karena $\langle x'', K'B's\rangle = \langle x'', K'b'\rangle = \langle K''x'', b'\rangle = 1$ maka $x_o = K''x'' \neq 0$. Lebih lanjut, karena K operator kompak, maka $x_o = K''x'' \in \mathcal{X}$

Karena itu untuk setiap $T \in A$ diperoleh :

$$\langle T\, x_0, s \rangle = \langle TK''\, x'', s \rangle = \langle K''\, x'', T'\, s \rangle = \langle x'', K'T'\, s \rangle = 0,$$

yang menunjukkan bahwa X mempunyai ruang bagian invarian-A tertutup yang sejati.

KESIMPULAN

Berdasarkan uraian di atas, terlihat bahwa dengan pemilihan ruang fungsi yang tepat dan topologi linear di dalamnya yang cocok dapat diperoleh suatu karakterisasi masalah ruang bagian invarian, baik untuk aljabar operator maupun dualnya, yang ternyata berkaitan erat dengan operator kompak.

Meskipun hasil ini belum menjawab Dugaan Lomonosov, namun diharapkan dapat memberikan kontribusi yang berarti.

DAFTAR PUSTAKA

Abramovich, Y. A., Aliprantis, C. D., and Burkinshaw, O., 1995, " Another Characterization of The Invariant Subspace Problem ", Operator Theory : Advances and Application, Vol. 75, 15 – 30.

Branges, L. de., 1993, " A Construction of Invariant Subspaces ", Math. Nachr., 163, 163-175.

Conway, John. B., 1990, " A Course in Funtional Analysis ", 2 ed, Springer-Verlag, New York.

Dunford , N., and Schwartz, J. T., 1958, " Linear Operators, I ", 1 ed, John Wiley and Sons, New York.

Enflo, P., 1987, " On The Invariant Subspace Problem for Banach spaces ", Acta math., 158 , 213-313.

Lomonosov, V. I., 1991, An Extension of Burnside"s Theorem to Infinite-Dimensional Spaces ", Israel. J. Math., 75, 329-339.

Taylor, A. E., and Lay, David. C., 1980, " Introduction to Functional Analysis ", 2ed, John Wiley and Sons, New York.