SYARAT PERLU DAN CUKUP ELEMEN NILPOTEN DALAM RING DERET PANGKAT

THE NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITIONS FOR NILPOTENT ELEMENTS IN RING OF GENERALIZED POWER SERIES

I Ketut Suastika[1] dan Sri Wahyuni[2]

Program Studi Matematika
Program Pascasarjana Universitas Gadjah Mada

ABSTRACT

Let S be a strictly ordered monoid and R be a ring with an identity element. In this thesis we study some properties of Artinian ordered set and Notherian ordered set of support of functions from S to R. The structure is used to construct the ring of generalized power series $A = [[R^{S,\leq}]]$, that is more general than the formalized power series ring $R[[X]]$.

Furthermore, in this thesis we will investigate the condition of $A = [[R^{S,\leq}]]$ to be an integral domain, a primary ring. Then start learning the nilpotent elements of $A=[[R^{S,\leq}]]$, as well as determining the conditions of $A = [[R^{S,\leq}]]$ to be a reduced ring.

Key words : *ordered monoid, prime ideal, primary ideal, nilpotent element.*

PENGANTAR

Seperti pada ring semigrup, maka dalam konstruksi ring deret pangkat ini juga diawali dengan menghimpun fungsi-fungsi dari S ke R. R merupakan ring komutatif dengan elemen satuan dan S merupakan monoid yang terurut tegas (monoid S dikatakan monoid terurut tegas bilamana urutan pada monoid S adalah tegas, yakni jika $(\forall x, y, s, \in S)(x < y \Rightarrow x + s < y + s)$). Himpunan fungsi-fungsi dari S ke

[1] FPMIPA IKIP PGRI Malang
[2] FMIPA Universitas Gadjah Mada Yogyakarta

R dinotasikan dengan R^S, yaitu $R^S = \{f \mid f : S \rightarrow R;$ f fungsi$\}$. Untuk $f \in R^S$, didefinisikan suatu support f, yakni: $supp(f) = \{s \in S \mid f(s) \neq 0\}$. Selanjutnya dihimpun semua fungsi $f \in R^S$ yang mempunyai support Artinian dan *narrow*, kemudian dinotasikan dengan $A = [[R^{S,\leq}]]$. Dengan menggunakan operasi jumlahan dan pergandaan seperti pada ring semigrup dapat ditunjukkan A merupakan ring. Ring baru A yang terbentuk itu disebut ring deret pangkat. Berkaitan dengan ring polinomial, Adkins (1992:74) mengemukakan bahwa ring polinomial R[X] akan merupakan daerah integral jika ring R-nya juga merupakan daerah integral.

Terkait dengan sifat R[X], timbul pertanyaan bagaimana dengan $A = [[R^{S,\leq}]]$? Dari pertanyaan ini, penulis akan mempelajari sifat-sifat dari ring A, kapan ring A akan merupakan suatu daerah integral. Disamping itu, penulis juga akan mempelajari sifat-sifat dari ring A, kapan ring A akan merupakan ring primer, serta kapan ring A akan merupakan ring tereduksi. Dari ring A yang dikonstruksi, penulis juga akan mempelajari elemen-elemen nilpotennya, maksudnya untuk mempelajari kapan suatu elemen A menjadi nilpoten.

Konstruksi tentang ring deret pangkat telah dipertimbangkan oleh Higman (1952) dan ring deret pangkat ini telah dipelajari oleh Neumann (1949) dalam kasus khusus S adalah grup yang terurut total dan R suatu field. Juga terdapat beberapa hasil penelitian yang bersesuaian dengan ring deret pangkat formal, Field (1971) mengemukakan jika R ring Notherian maka $g(x) \in R[[X]]$ nilpoten jika dan hanya jika koefisien-koefisien g(x) nilpoten, dan dikemukakan pula bahwa jika R ring yang mempunyai karakteristik positif maka $g(x) \in R[[X]]$ nilpoten jika dan hanya jika koefisien-koefisien g(x) nilpoten. Selanjutnya, berkaitan dengan ring deret pangkat, Ribenboim (1990) mengemukakan jika $(S, \leq)$ monoid terurut total maka ring $A = [[R^{S,\leq}]]$ merupakan field jika dan hanya jika R suatu field dan S grup.

KONSEP DASAR

Untuk sebarang himpunan tak kosong S yang dilengkapi dengan suatu urutan disebut himpunan terurut. Jika $(S,\leq)$ himpunan terurut, dua elemen $x, y \in S$ dikatakan tak terurut bilamana $x \not\leq y$ dan $y \not\leq x$.

Definisi 2.4 (Ribenboim, 1994)
Diberikan $(S,\leq)$ himpunan terurut. Himpunan terurut $(S,\leq)$ dikatakan Artinian, jika setiap barisan turun tegas dari elemen-elemen S berhingga. Himpunan terurut $(S,\leq)$ dikatakan narrow, jika setiap subhimpunan S yang terurut trivial berhingga.
Suatu subhimpunan merupakan terurut trivial, jika setiap pasangan dari dua elemen yang berbeda adalah tak terurut.
Lemma 2.1 (Elliot, 1990)
Pada himpunan terurut $(S,\leq)$ berlaku sifat-sifat sebagai berikut:
1. *Jika S Artinian (narrow) dan $X \subseteq S$ maka X Artinian (narrow).*
2. *Jika $X_1, X_2, \ldots X_n$ subhimpunan-subhimpunan Artinian (narrow) di S maka $\bigcup_{i=1}^{n} X_i$ Artinian (narrow).*

Lemma 2.3 (Elliot, 1990)
Diberikan $(S,\leq)$ himpunan terurut. Himpunan terurut $(S,\leq)$ dikatakan Artinian, jika dan hanya jika untuk setiap himpunan tak kosong $X \subseteq S$ selalu mempunyai elemen minimal.
Teorema 2.2 (Elliot, 1990)
Misalkan $(S_i, \leq_i)$ Artinian dan narrow, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$. Jika $S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ dan "$\leq$" urutan produk, maka $(S,\leq)$ Artinian dan narrow.

Definisi 2.9 (Ribenboim, 1991)
Diberikan sebarang monoid S. Sebuah elemen $t \in S$ dikatakan kanselatif bilamana dipenuhi: jika $(\forall s,s' \in S)$ $(t + s = t + s' \Rightarrow s = s')$.
Definisi 2.12 (Ribenboim, 1991)
Diberikan S monoid. Relasi kongruensi torsi $\widetilde{\tau}$ didefinisikan sebagai berikut: dua elemen $s,t \in S$, $s \widetilde{\tau}\, t$, jika terdapat $k \geq 1$ sehingga $ks = kt$.
S dikatakan bebas torsi bilamana kongruensi torsi adalah trivial, yakni $ks = kt$ berakibat $s = t$.
Himpunan terurut $(S,\leq)$ dkatakan monoid terurut tegas compatible jika $(\forall t \in S)(s < s' \Rightarrow s + t < s' + t)$.
Teorema 2.4 (Elliot, 1990)
Misalkan S monoid kanselatif dan bebas torsi. Jika $\leq$ sebarang urutan pada S yang tegas compatible, maka terdapat urutan total yang tegas compatible pada S, yang mana finer dari $\leq$.
Teorema 2.5 (Ribenboim, 1994)
Jika X, Y Artinian dan narrow subhimpunan dari monoid terurut $(S,\leq)$ maka $X + Y = \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$ Artinian dan narrow.

Sebagai catatan bahwa monoid S pada tulisan ini selalu dianggap komutatif.

Definisi 2.18 (Adkins, 1992:63)
Diberikan ring komutatif R dan ideal $I \neq R$. Ideal I disebut ideal prima, jika untuk sebarang $a,b \in R$ dengan $ab \in I$ maka $a \in I$ atau $b \in I$.

Teorema 2.10 (Adkins, 1992: 63)
Misalkan R ring komutatif dan memuat elemen satuan. Jika I ideal dalam R dengan $I \neq R$, maka R/I merupakan daerah integral jika dan hanya jika I ideal prima.

Definisi 2.19 (Hungerford, 1980: 380)
Diberikan ring komutatif R dan $I \neq R$ merupakan ideal dalam R. Ideal I dikatakan ideal primer jika untuk sebarang $a,b \in R$ dengan $ab \in I$ dan $a \notin I$ berakibat $b^n \in I$ untuk suatu bilangan asli n.

Definisi 2.20 (Hungerford, 1980: 379)
Diberikan I ideal dalam ring komutatif R. Radikal I, dinotasikan dengan $\sqrt{I}$ adalah ideal $\cap P$, yaitu irisan dari semua ideal-ideal prima P yang memuat I.

Teorema 2.12 (Spindler, 1994: 97)
Jika I ideal dalam ring komutatif R maka $\sqrt{I}$ ideal dalam R, dengan $I \subseteq \sqrt{I} \subseteq R$.

Teorema 2.13 (Spindler, 1994: 98)
Jika R ring komutatif dan I ideal primer dalam R, maka $\sqrt{I}$ ideal prima dalam R.

Teorema 2.14 (Fraleigh, 1994: 362)
Jika A dan B ideal-ideal dalam ring R maka pergandaan ideal A dengan B yang didefinisikan dengan $AB = \{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i ; a_i \in A, b_i \in B\}$ juga ideal dalam R.

Dari Teorema 2.14, secara umum diperoleh:

$$I^n = \{ \sum_{j_{k-1}=1}^{n_{k-1}} a_{j_{k-1}} [\sum_{j_{k-2}=1}^{n_{k-2}} a_{j_{k-1}j_{k-2}} [\ldots[\sum_{j_1=1}^{n_1} a_{j_{k-1}j_{k-2}\cdots j_1} b_{j_{k-1}j_{k-2}\cdots j_1}]]\ldots]; a_{\bar{i}}, b_{\bar{i}} \in I\}$$ ideal dalam R.

Teorema 2.15 (Adkins, 1992: 98)
Jika R ring komutatif dan $N = \{a \in R \mid a \text{ nilpoten}\}$ maka N ideal dalam R.

KONSTRUKSI RING DERET PANGKAT

Seperti tersurat dalam pendahuluan, operasi jumlahan pada A sama seperti operasi jumlahan pada ring semigrup, yaitu: $(f + g)(s) = f(s) + g(s)$, $\forall f, g \in A$, $s \in S$.

Dapat ditunjukkan A tertutup terhadap operasi jumlahan tersebut, sebab:

$$\text{supp}\,(f + g) \subseteq \text{supp}\,(f) \cup \text{supp}\,(g)$$

menurut Lemma 2.1 supp (f + g) Artinian dan narrow. Ini berarti $f+g \in A$.

Teorema 3.1

Jika $f_1, f_2, \ldots, f_k \in A$ maka $X = X_s(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ berhingga, $\forall s \in S$.

Dengan mengikuti hasil teorema di atas, jika $f, g \in A$, dan $s \in S$ maka jumlahan dari $\sum_{(t,u)\in X_s(f,g)} f(t)g(u)$ adalah berhingga.

Operasi pergandaan pada A adalah $(f*g)(s) = \sum_{(t,u)\in X_s(f,g)} f(t)g(u)$, $\forall s \in S$.

Dapat ditunjukkan A tertutup terhadap operasi pergandaan tersebut, sebab:

$$\text{supp}\,(f * g) \subseteq \text{supp}\,(f) + \text{supp}\,(g)$$

Dengan menggunakan Teorema 2.5, supp (f*g) adalah Artinian dan narrow.

Selanjutnya diperoleh (A,+,*) merupakan ring komutatif dengan elemen satuan.

Ring A yang diperoleh itu disebut ring deret pangkat.

Ring monoid R[S] jelas merupakan subring dari ring deret pangkat A.

IDEAL DALAM RING DERET PANGKAT

Jika I sebarang ideal dalam R maka $[[I^S]] = \{f \in A \mid f(s) \in I, \forall s \in S\}$ ideal dalam A. Dengan cara yang sama, $I[S] = \{f \in R[S] \mid f(s) \in I, \forall s \in S\}$ ideal dalam R[S], dan berlaku hubungan $I[S] = [[I^S]] \cap R[S]$

Teorema 3.3

Jika I proper ideal maka kondisi berikut ekuivalen:

a. $[[I^S]]$ ideal prima dalam A.

b. I[S] ideal prima dalam R[S].

c. I ideal prima dalam R serta S bebas torsi dan kanselatif.

Bukti:

$a \Rightarrow b$ Misalkan $fg \in I[S]$, dengan $f, g \in R[S]$. Karena $I[S] = [[I^S]] \cap R[S]$ berakibat $fg \in [[I^S]]$. Padahal $[[I^S]]$ ideal prima dalam A, artinya untuk f, $g \in A$, dan $fg \in [[I^S]]$ berakibat $f \in [[I^S]]$ atau $g \in [[I^S]]$.
Jadi $f \in R[S] \cap [[I^S]] = I[S]$ atau $g \in R[S] \cap [[I^S]] = I[S]$
Ini berarti I[S] ideal prima R[S].

$b \Rightarrow c$ Pandang isomorphik: $\dfrac{R[S]}{I[S]} \approx \left(R/I\right)[S]$

Karena R[S] ring komutatif dengan elemen satuan dan I[S] ideal prima R[S] maka menurut Teorema 2.10, R[S]/I[S] merupakan daerah integral.
Akibatnya (R/I) [S] juga merupakan daerah integral. Apakah R/I harus daerah integral? Dan, apakah S harus kanselatif dan bebas torsi?
Andaikan R/I bukan daerah integral. Ambil sebarang $\bar{a}, \bar{b} \in R/I$ sehingga $\bar{a}\,\bar{b} = \bar{0}$. Jika diambil sebarang $s \in S$ maka $\bar{a} e_s . \bar{b} e_s = \bar{0}$, dengan $\bar{a} e_s \neq \bar{0}$ dan $\bar{b} e_s \neq \bar{0}$. Ini tidak mungkin, karena $\bar{a} e_s . \bar{b} e_s \in (R/I)[S]$. Jadi haruslah R/I daerah integral. Selanjutnya, andaikan S tidak kanselatif, berarti untuk $s,t,u \in S$ dengan $s + t = s + u$ maka $t \neq u$. Akibatnya untuk $\bar{r} \in (R/I)\backslash\{0\}$ berlaku $\bar{r} e_s(\bar{r} e_t - \bar{r} e_u) = \bar{0}$ dengan $\bar{r} e_s \neq \bar{0}$ dan $\bar{r} e_t - \bar{r} e_u \neq \bar{0}$. Jadi (R/I)[S] punya pembagi nol, sehingga (R/I)[S] bukan daerah integral. Ini tidak mungkin. Karena itu haruslah S kanselatif.
Lebih lanjut, andaikan R/I daerah integral dan S kanselatif tapi S tidak bebas torsi. Misalkan $s,t \in S$ sehingga $s \neq t$ sementara $ns = nt$ untuk $n \in Z^+$. Pilih $k \in Z^+$ yang minimal sehingga $ks = kt$. Jika $\bar{r} \in R/I$, $\bar{r} \neq \bar{0}$,

maka $\bar{0} = \bar{r}^2 e_{ks} - \bar{r}^2 e_{kt} = (\bar{r} e_s - \bar{r} e_t)\left(\sum_{i=0}^{k-1} \bar{r} e_{(k-i-1)s+it}\right)$. Karena S

kanselatif pemilihan k seperti itu berakibat: $(k - i_1 - 1)s + i_1 t \neq (k - i_2 - 1)s + i_2 t$, untuk $0 \leq i_1 < i_2 \leq k-1$. Jadi, $\sum_{i=0}^{k-1} \bar{r} e_{(k-i-1)s+it} \neq \bar{0}$.

Ini tidak mungkin. Karena itu haruslah S bebas torsi.
$c \Rightarrow a$. Diketahui S kanselatif dan bebas torsi, dan $(S,\leq)$ merupakan monoid terurut tegas compatible, maka menurut Teorema 2.4. terdapat urutan total $\leq'$ pada S yang tegas compatible, yang mana "finer" daripada $\leq$.
Asumsikan bahwa $f, g \in A$ tetapi $f, g \notin [[I^S]]$
Misalkan $X = \{ s \in S \mid f(s) \notin I\} \neq \emptyset$ dan $Y = \{ s \in S \mid g(s) \notin I\} \neq \emptyset$

Karena X, Y artinian dan narrow yang tidak kosong subhimpunan S (relatif ke $\leq$), maka menurut Lemma 2.3, S mempunyai elemen minimal. Misalkan Min(X), Min(Y) adalah himpunan elemen-elemen minimal dari X, Y.

Jelas himpunan tersebut berhingga dan tidak kosong.

Misalkan Min(X) = $\{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$dengan $s_1 <' s_2 <' \ldots <' s_m$, dan Min(Y) = $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$dengan $t_1 <' t_2 <' \ldots <' t_n$.

Karena I ideal prima dalam R maka $f(s_1)g(t_1) \notin I$. Jika $(fg)(s_1+t_1) \in I$ maka terdapat elemen-elemen $u, v \in S$ sehingga $u + v = s_1 + t_1$, dengan $u \neq s_1$ atau $v \neq t_1$ dan $f(u)g(v) \notin I$. Maka $f(u), g(v) \notin I$ sehingga $u \in X$, $v \in Y$. Jadi terdapat s_i, t_j sedemikian hingga $s_i \leq u$, $t_j \leq v$.

Akibatnya $s_1 \leq' s_i \leq' u$, $t_1 \leq' t_j \leq' v$. Jika $s_1 <' u$ atau $t_1 <' v$ maka $s_1+t_1 <' u + v = s_1+t_1$.

Yang mana ini tidak mungkin,. Jadi $fg \notin [[I^S]]$

Teorema 3.4

Kondisi-kondisi berikut adalah ekuivalen:

a. A daerah integral.

b. R[S] daerah integral.

c. R daerah integral serta S bebas torsi dan kanselatif.

Bukti: Ini merupakan akibat Teorema 3.3, dengan mengambil I = {0}.

Teorema 3.5

Jika I proper ideal dalam R maka akan diperoleh a⇒b⇒c, dengan:

a. $[[I^S]]$ ideal primer dalam A, dengan radikal $\left[\left[\sqrt{I}^{\,S}\right]\right]$

b. I[S] ideal primer dalam R[S], dengan radikal $\sqrt{I}$ [S].

c. I ideal primer dalam A, dengan radikal $\sqrt{I}$ dan S kanselatif.

Jika terdapat $k \geq 1$ sehingga $(\sqrt{I})^k \subseteq I$, maka c⇒a.

Bukti:

a ⇒ b Diketahui $[[I^S]]$ ideal primer dalam A.

Jika $f, g \in A$, $fg \in [[I^S]]$ dan $f \notin [[I^S]]$ maka terdapat $n \geq 1$ sehingga $g^n \in [[I^S]]$.

Selanjutnya ambil $f, g \in R[S]$, $fg \in I[S]$ dengan $f \notin I[S]$. Karena $fg \in I[S]$ maka $fg \in [[I^S]]$. Jadi terdapat $n \geq 1$ sehingga $g^n \in [[I^S]]$.

Karena $g \in R[S]$ jelas $g^n \in R[S]$, untuk $n \geq 1$. Jadi terdapat $n \geq 1$ sehingga $g^n \in [[I^S]] \cap R[S] = I[S]$. Ini berarti I[S] ideal primer dalam R[S].

b ⇒ c Diketahui $I[S]$ ideal primer dalam $R[S]$.
Ambil sebarang $f,g \in R[S]$ dengan $fg \in I[S]$ dan $f \notin I[S]$ maka terdapat $n \geq 1$ sehingga $g^n \in I[S]$.
Selanjutnya ambil sebarang $s\in S$. Karena $fg \in I[S]$ maka $(fg)(s) \in I$.
Sementara itu $(fg)(s) = \sum_{t+u=s} f(t)g(u)$, sehingga $f(t)g(u) \in I$, dengan $f(t)$, $g(u) \in R$ dan $u, t \in S$.
Jika $f \notin I[S]$ jelas $f(t) \notin I$, untuk suatu $t \in S$. Berarti $g(u) \in I$, untuk suatu $u\in S$. Karena $I[S]$ ideal primer maka terdapat $n \geq 1$ sehingga $g^n \in I[S]$, berakibat $g^n(u)\in I$, untuk suatu $u\in S$. Jadi, jika $f(t)g(u) \in I$ dan $f(t) \notin I$ maka terdapat $n \geq 1$ sehingga $g^n(u)\in I$. Ini berarti terbukti I ideal primer dalam R.
Selanjutnya akan ditunjukkan S kanselatif, sebagai berikut:
Andaikan $s\in S$ bukan kanselatif, maka $e_s(e_t - e_u) = 0$, untuk suatu $t, u \in S$ dengan $t \neq u$, sehingga $e_s(e_t - e_u) \in I[S]$, $e_t - e_u \notin I[S]$ dan tidak terdapat $n \geq 1$ sehingga $(e_s)^n \in I[S]$. Padahal $I[S]$ ideal primer. Ini suatu kantradiksi.

c ⇒ a Jika $f \in \left[\left[\sqrt{I}^{\,S}\right]\right]$ maka $f^k\in \left[\left[\left(\left(\sqrt{I}^{\,S}\right)^k\right)\right]\right]$, $k \geq 1$.

Menurut hipotesisnya: $\left(\sqrt{I}\right)^k \subseteq I$, sehingga $f^k \in[[I^S]]$ dan dengan menggunakan Teorema 2.12 diperoleh $[[I^S]] \subseteq \left[\left[\sqrt{I}^{\,S}\right]\right]$. Sementara itu I ideal primer dalam R dengan radikal $\sqrt{I}$, maka menurut Teorema 2.13, $\sqrt{I}$ merupakan ideal prima.
Akibatnya $\left[\left[\sqrt{I}^{\,S}\right]\right]$ juga ideal prima dalam A. Karena $\left[\left[\sqrt{I}^{\,S}\right]\right]$ radikal dari ideal $[[I^S]]$, haruslah $[[I^S]]$ merupakan ideal primer dalam A.

Definisi 3.1 (Ribenboim, 1994)
Sebuah ring R sedemikian hingga $\{0\}$ merupakan ideal primer dikatakan ring primer.

Teorema 3.6
Jika diberikan kondisi-kondisi berikut maka akan diperoleh $a\Rightarrow b\Rightarrow c$, dengan:
a. A ring primer dan $N_A = [[(N_R)^S]]$.

b. $R[S]$ ring primer dan $N_{R[S]} = N_R[S]$.
c. R ring primer dan S kanselatif.
Selanjutnya jika N_R ideal nilpoten maka $c \Rightarrow a$.
Bukti:
Ini merupakan akibat dari Teorema 3.5, dengan mengambil $I = \{0\}$

ELEMEN NILPOTEN

Pertimbangkan kondisi-kondisi berikut untuk $f \in A$:
(N1) f nilpoten.
(N2) $f(s)$ nilpotent, untuk setiap $s \in S$.
(N3) $C(f) = \{f(s) \mid s \in S\}$ ideal nilpoten dalam R.

Teorema 4.1.
Dengan notasi di atas akan diperoleh (N3) $\Rightarrow$(N1) dan (N3) $\Rightarrow$(N2).
Bukti:
(N3) $\Rightarrow$(N1). $C(f) = \{f(s) \mid s \in S\}$, sehingga untuk sebarang $k \geq 1$ diperoleh:

$$(C(f))^k = \{ \sum_{j_{k-1}=1}^{n_{k-1}} f(s)_{j_{k-1}} [\cdots[\sum_{j_1=1}^{n_1} f(s)_{j_{k-1}j_{k-2}\cdots j_1} f(t)_{j_{k-1}j_{k-2}\cdots j_1}]\ldots]; f(s)_{\bar{i}}, f(t)_{\bar{i}} \in C(f)\}$$

. Untuk setiap $s \in S$, $f^k(s) = \sum_{(s_1,\ldots,s_k)\in X} f(s_1)f(s_2)\ldots f(s_k)$

dengan $X = \{(s_1, s_2, \ldots, s_k)\} \mid s_1 + s_2 + \ldots + s_k = s, f(s_1) \neq 0, \ldots, f(s_k) \neq 0\}$.
Dapat ditunjukkan bahwa masing-masing jumlahan $f(s_1)f(s_2) \ldots, f(s_k)$, merupakan anggota $C(f)$. Karena $C(f)$ nilpoten maka $(C(f))^k = 0$. Ini berakibat $f^k(s) = 0$. Karena berlaku untuk setiap $s \in S$ haruslah $f^k = \theta$, atau f nilpoten.
(N3) $\Rightarrow$(N2). $(f(s))^k = \underbrace{f(s)f(s)\ldots\ldots f(s)}_{k \text{ faktor}}$. Jelas $(f(s)) \in (C(s))^k$. Padahal $C(f)^k = 0$,

karena itu haruslah $(f(s))^k = 0$, untuk $k \geq 1$, yang berarti $f(s)$ nilpoten.

Teorema 4.2
Jika S bebas torsi dan kanselatif maka (N1) $\Rightarrow$ (N2; yakni $N_A \subseteq [[(N_R)^S]]$; $N_{R[S]} \subseteq N_R[S]$.
Bukti:
Misalkan (P_α) merupakan keluarga ideal-ideal prima dalam R.

N_R ideal elemen-elemen nilpoten R, sehingga $N_R = \{a \in R \mid a^n = 0,$ untuk $n \geq 1\}$.

Dapat ditunjukkan $N_R = \bigcap_{\alpha} P_\alpha$.

Lebih lanjut dengan menggunakan Teorema 3.3, $[[P_\alpha^S]]$ ideal prima dalam A, dan $P_\alpha[S]$ ideal prima dalam R[S].

Jika $f \in A$ nilpoten ($f \in N_A$) maka $f \in [[P_\alpha^S]]$ untuk setiap P_α, sehingga $f \in \bigcap_{\alpha} [[P_\alpha^S]] = [[(N_R)^S]]$. Juga jika $f \in R[S]$ nilpoten ($f \in N_{R[S]}$) maka $f \in P_\alpha[S]$ untuk setiap P_α, sehingga $f \in \bigcap_{\alpha} P_\alpha[S] = N_R[S]$. Jadi $f(s) \in N_R$ untuk setiap $s \in S$.

Dan berlaku: $N_A \subseteq [[(N_R)^S]]$, $N_{R[S]} \subseteq N_R[S]$.

Teorema 4.3

Jika C(f) ideal yang dibangun secara hingga, maka (N2) $\Rightarrow$ (N3)

Bukti:

Karena C(f) dibangun secara hingga, berarti C(f) dibangun oleh berhingga banyak elemen-elemen; $f(s_1)f(s_2) \ldots, f(s_m)$.

Diketahui f(s) nilpoten untuk setiap $s \in S$, maka $(f(s_1))^{h_1} = 0$, untuk suatu $h_1 \geq 1$, $(f(s_2))^{h_2} = 0$, untuk suatu $h_2 \geq 1$, ..., $(f(s_m))^{h_m} = 0$, untuk suatu $h_m \geq 1$.

Jika diambil $k \geq m(h-1) + 1$, dengan $h = \text{maks}\{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$maka $(C(f))^k = 0$.

Jadi terdapat $k \geq 1$ sehingga $(C(f))^k = 0$.

Suatu ring dikatakan tereduksi bilamana ideal dari elemen-elemen nilpotennya sama dengan nol (Ribenboim, 1991).

Teorema 4.5

Jika S bebas torsi dan kanselatif, maka A tereduksi jika dan hanya jika R tereduksi.

Bukti:

($\Leftarrow$) Jika R tereduksi maka $N_R = \{0\}$.

Karena S bebas torsi dan kanselatif maka menurut Teorema 4.2, $N_A \subseteq [[(N_R)^S]]$. Karena $N_R = \{0\}$ maka $N_A \subseteq [[(0)^S]]$. Jadi haruslah $N_A = \{\vartheta\}$.

Akibatnya A tereduksi.

($\Rightarrow$) $N_R = \{ a \in R \mid a^n = 0.$ untuk suatu $n \geq 1\}$.

Jelas $0 \in N_R$, sehingga $\{0\} \subseteq N_R$. Sebaliknya, ambil sebarang $a \in N_R$, dengan $a = f(s)$ untuk suatu $s \in S$. Jelas $(f(s))^n = 0$, untuk suatu $n \geq 1$, atau $f(s)$ nilopten.
Akibatnya f nilpoten, artinya $f \in N_A$. Karena A tereduksi maka $N_A = \{\vartheta\}$.
Padahal $N_A = \{ f \in A \mid f^n = \vartheta$. untuk suatu $n \geq 1\}$, karena itu haruslah $f = \vartheta$.
Ini berarti $a = \vartheta(s) = 0$, atau $a \in \{0\}$, sehingga diperoleh $N_R \subseteq \{0\}$.
Jadi $N_R \subseteq \{0\}$. Akibatnya R tereduksi.

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan dari tema kajian diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Ring deret pangkat $A = [[S^{S,\leq}]]$ akan merupakan daerah integral jika dan hanya jika R daerah integral serta S kanselatif dan bebas torsi.
2. Ring deret pangkat $A = [[S^{S,\leq}]]$ akan merupakan ring primer jika dan hanya jika R ring primer dan S kanselatif.
3. Jika S kanselatif dan bebas torsi maka $f \in A$ nilpoten jika dan hanya jika koefisien-koefisien f nilpoten.
4. Jika $f \in A$ maka f nilpoten jika dan hanya jika $C(f) = \{f(s) \mid s \in S\}$ merupakan ideal nilpoten dalam R yang dibangun secara hingga.
5. Ring deret pangkat $A = [[S^{S,\leq}]]$ akan merupakan ring tereduksi jika dan hanya jika R tereduksi serta S kanselatif dan bebas torsi.

DAFTAR PUSTAKA:

Adkins, W.A. and Weintraub S.H., 1992, "Algebra an Approach Via Module Theory", Springer-Verlag, New York.

Elliot, G.A., and Ribenboim, P., 1990, "Fields of Generalized Power Series", Archiv d. Math. 54, 365 – 371.

Fields, D.E., 1971, "Zero Divisor and Nilpotent Element in Power Series Rings", American Math. Soc. Vol. 27, 3, 427 - 433.

Fraleigh, J.B., 1994, "A First Course in Abstract Algebra", Addison-Wesley Publishing Company, New York.

Higman, G., 1952, "Ordering by Divisibility in Abstract Algebras", Proc. London Math. Soc. (3), 2, 326 - 336.

Hungerford, T.W., 1974, "Algebra", Springer-Verlag, New York,

Neumann, B.H., 1949, "On Ordered Division Rings", Trans. Amer. Math. Soc. 66, 202 - 252.

Ribenboim, P., 1990, "Generalized Power Series Rings", Plenum Press, New York, 271 - 277.

________, 1991, "Rings of Generalized Power Series: Nilpotent Elements", Abh.Math.Sem.Univ.Hamburg, 61, 15 – 33.

________, 1994 , "Rings of Generalized Power Series: Units and Zero Divisor", J. Algebra 168, 72 – 89.

Spindler, K., 1994, "Abstract Algebra with Applications", Vol. II, Marcel Dekker inc, New York.