

MODEL NUMERIK ELEMEN HINGGA 3D UNTUK SEBARAN GELEMBUNG UDARA DALAM AIR

FINITE ELEMENT NUMERICAL MODELING OF AIR BUBBLE SPREADING IN WATER

Hartana¹, dan Adam Pamudji Rahardjo²

Program Studi Teknik Sipil
Program Pascasarjana Universitas Gadjah Mada

ABSTRACT

The motion and spreading of air bubble highly affect the effectiveness and efficiency of aeration process. This research developed a numerical model to simulate and to predict the motion and the spreading of air bubble in an aerator column. In this approach, modeling of aeration process considers air bubbles as a material that transported and dispersed in the water. The model assumed that bubble diameter could be ranged in their size. The dynamics of air bubbles motion and spreading is modeled as convection-diffusion equation and implemented only for one diameter range. Petrov-Galerkin Finite Element Method on 20 nodes quadratic brick element is used to solve this equation. To develop the model, velocity and diffusion coefficient was determined based on the results of the investigation of air bubble motion and spreading in the column aerator. From the modeling results of the motion and spreading of air bubble, the relation between diffusion coefficient and the air bubble concentration with 2 lt/mnt sparger discharge was found, $k=0,12(C-0,0006)$, where k is diffusion coefficient and C is air bubble concentration. To show the performance of the model, a comparison to the result of the air bubble motion investigation was carried out. The numerical model that has been obtained is capable in simulating the phenomenon of the dynamics of air bubble motion and spreading.

Keywords : *Air Bubble Spreading, Convection-Diffusion, and Finite Element Method.*

¹ Fakultas Teknik Universitas Mataram

² Fakultas Teknik Universitas Gadjah Mada

PENGANTAR

Model numeris merupakan alternatif yang ekonomis dan praktis dalam pengujian dan pemeriksaan alternatif desain suatu bangunan. Penelitian ini diarahkan untuk membuat model numerik yang dapat mensimulasikan dan memprediksi sebaran gelembung udara dalam air, dan ditujukan untuk dapat diaplikasikan pada pemeriksaan alternatif desain-desain sistem pengolahan limbah cair dengan proses aerasi. Dengan semakin berkembangnya buangan limbah cair sekarang ini menuntut penanganan yang seksama dan serius dalam prediksi efektifitas dan efisiensi sistem pengolahan limbah. Model numerik ini diharapkan dapat membantu usaha tersebut. Perlakuan-perlakuan yang harus diberikan dalam proses aerasi dapat diambil, sehingga efektivitas dan efisiensi proses aerasi dapat dicapai.

Untuk menyatakan fenomena sebaran gelembung udara persamaan yang dipakai adalah persamaan angkutan konveksi-difusi. Untuk mendapatkan fleksibilitas bentuk daerah hitungan yang rumit, metode elemen hingga digunakan untuk menyelesaikan persamaan angkutan tersebut. Metode Elemen Hingga Petrov-Galerkin dengan elemen balok kuadratik 20 titik digunakan untuk menyelesaikan model persamaan.

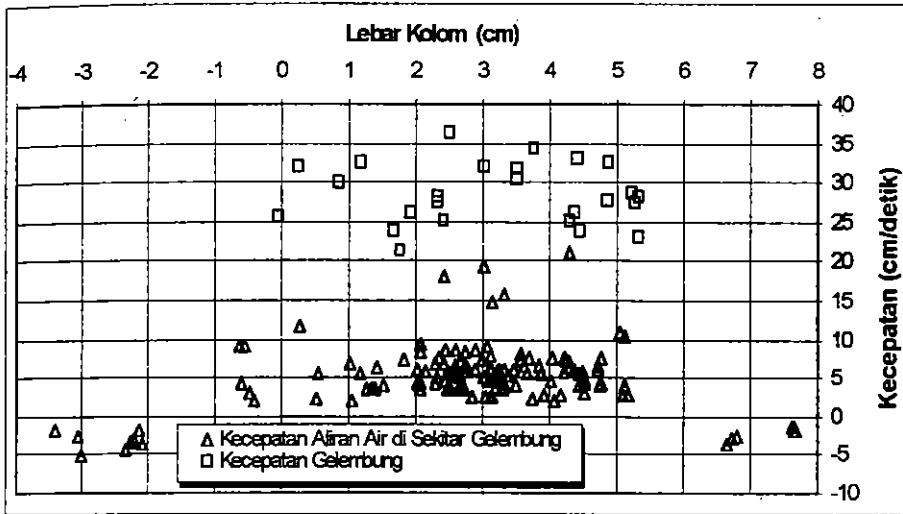
DATA PENGUKURAN

Dengan adanya data hasil pengukuran yang dapat digunakan untuk menentukan parameter-parameter yang terlibat dalam hitungan numerik, dimungkinkan untuk dapat mengetahui sejauh mana dinamika sebaran gelembung udara dapat didekati dan dimodelkan secara numerik dengan model persamaan angkutan konveksi-difusi. Data pengukuran ini diperoleh dari hasil penelitian model fisik yang telah dilakukan oleh peneliti yang lain yang mengamati pergerakan gelembung udara dalam air pada kolom aerator, yaitu Adam Pamudji Rahardjo dan Budi Kamulyan (2000) serta Ahmad Nur Himawan (1999). Data pengukuran diperoleh dari kolom aerator dengan dimensi kolom dasar 30 cm x 30 cm dan tinggi 3,0 m. Pipa *inlet*/pemasukan udara ditempatkan pada bagian tengah dasar kolom. Pengamatan gelembung udara dilakukan pada variasi debit udara masuk sebesar 2, 4 dan 6 liter/menit. Model numerik diarahkan untuk mensimulasikan sebaran gelembung udara dalam kolom aerator seperti yang sudah

dilakukan pada penelitian model fisik pada 1 (satu) debit udara saja, yaitu 2 liter/menit. Data pengukuran yang digunakan dalam pemodelan numerik terdiri atas data pengukuran berikut.

1. Kecepatan gelembung udara dan kecepatan air di sekitar gelembung udara (Gambar 1).

Data pengukuran ini adalah hasil penelitian model fisik yang dilakukan oleh Adam Pamudji Rahardjo dan Budi Kamulyan (2000).



Gambar 1. Data pengukuran kecepatan model fisik (Rahardjo dan Budi Kamulyan, 2000).

2. Konsentrasi gelembung udara.

Ahmad Nur Himawan (1999) melakukan pengamatan terhadap pergerakan kelompok gelembung udara dan menentukan volume gelembung udara pada tinggi pengamatan 0,2 m; 0,3 m; 0,4 m; 0,5 m; 0,6 m dan 0,8 m dari dasar kolom. Pada masing-masing ketinggian tersebut dalam pengukurannya dibagi dalam pias-pias. Pada tiap pias dihitung jumlah gelembung udara yang ada, selanjutnya dari data ini dapat dihitung volume gelembung udara. Data volume gelembung udara tersebut disajikan dalam Tabel 1.

Tabel 1. Data Volume Gelembung Udara.

interval pias (cm)	Tinggi Kolom (meter)					
	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.8
0.0 - 1.5	0	0	0	0	0	0.0102
1.5 - 3.0	0	0	0	0	0	0.0120
3.0 - 4.5	0	0.0018	0.0072	0	0.0084	0.0156
4.5 - 6.0	0.0054	0.0276	0.0126	0.0072	0.0342	0.0240
6.0 - 7.5	0.0156	0.0480	0.0726	0.0366	0.0516	0.0570
7.5 - 9.0	0.0780	0.1062	0.0912	0.0702	0.0468	0.0636
9.0 - 10.5	0.1044	0.1266	0.1302	0.0462	0.0516	0.1008
10.5 - 12.0	0.1560	0.0846	0.0498	0.0828	0.0444	0.0618
12.0 - 13.5	0.0684	0.0582	0.0546	0.0666	0.0498	0.0444
13.5 - 15.0	0.1098	0.0090	0.0480	0.0468	0.0462	0.0324
15.0 - 16.5	0.0102	0.0102	0.0222	0.0102	0.0156	0.0240
16.5 - 18.0	0	0.0018	0.0018	0	0	0.0156
18.0 - 19.5	0	0	0	0	0	0.0054

Selanjutnya data volume gelembung ini akan diubah nilainya menjadi nilai konsentrasi, dengan mengalikan volume gelembung udara pada masing-masing pias dengan volume pias tersebut. Data konsentrasi gelembung udara ini selanjutnya akan digunakan sebagai acuan dalam pemeriksaan model numerik, yaitu dengan membandingkannya dengan hasil keluaran model numerik. Pemeriksaan ini dilakukan untuk memastikan model numerik yang dibangun apakah sudah memadai atau belum.

PENGEMBANGAN MODEL PERSAMAAN KONVEKSI-DIFUSI

Pendekatan model sebaran gelembung udara dalam air memandang gelembung udara sebagai suatu material yang terangkut dan terdispersi dalam air. Dinamika sebaran gelembung udara didekati dan dimodelkan dengan persamaan berikut.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_n} \left[u_n C - \left(k_n \frac{\partial C}{\partial x_n} \right) \right] = 0 \quad (1)$$

dengan C adalah konsentrasi, k_n adalah koefisien difusi arah sumbu ke- n , u_n adalah kecepatan arah sumbu ke- n dengan $n = 1, 2, 3$ (arah sumbu $x, y,$ dan z).

Dalam persamaan di atas kecepatan horisontal (arah x dan y) adalah kecepatan aliran air, sedangkan untuk kecepatan arah vertikal (arah z), kecepatan adalah kecepatan aliran air ditambah dengan kecepatan terminal gelembung udara. Karena tidak adanya data kecepatan aliran air arah horisontal, maka dalam model numerik ini kecepatan arah horisontal diambil 0 (nol). Untuk mendapatkan persamaan kecepatan aliran air, dari data kecepatan pada Gambar 1 dibuat persamaan yang mendekati data pengukuran. Langkah yang ditempuh adalah dengan membuat persamaan regresi data pengukuran, kemudian dibuat persamaan yang mendekati persamaan regresi ini. Kecepatan terminal gelembung udara didapatkan dengan merata-ratakan kecepatan gerak gelembung udara.

Parameter lain yang terlibat dalam model persamaan adalah koefisien difusi. Koefisien difusi yang digunakan adalah koefisien difusi yang merupakan fungsi dari konsentrasi gelembung udara, karena kasusnya adalah aliran *non-Newtonian*, yaitu kekentalannya tergantung dari propertinya sendiri. Dalam kenyataan di lapangan, pada suatu saat akan terjadi kondisi dimana gelembung udara tidak menyebar lagi (koefisien difusi nol). Persamaan yang akan digunakan harus dapat mempresentasikan fenomena ini. Persamaan linier berikut digunakan untuk menghitung koefisien difusi pada tiap elemen.

$$k = A|C - C_{cr}| \quad (2)$$

dengan k adalah koefisien difusi, A adalah konstanta pengali, C adalah konsentrasi, dan C_{cr} adalah konsentrasi pada kondisi dimana gelembung udara tidak menyebar lagi. Dengan menggunakan persamaan di atas pada saat nilai C sama dengan C_{cr} maka nilai k adalah nol, dengan demikian gelembung udara tidak menyebar lagi. Pada persamaan di atas nilai A dicari yang paling optimal, artinya dengan nilai tersebut memberikan hasil hitungan numerik yang mempunyai beda nilai terkecil apabila dibandingkan dengan data pengukuran.

Dalam kenyataan di lapangan, gelembung udara yang terbentuk akan terbagi dalam berbagai diameter. Idealnya persamaan yang digunakan diterapkan pada berbagai range diameter gelembung udara, karena kecepatan terminal gelembung udara berbeda untuk tiap diameter gelembung. Penelitian ini hanya dibatasi untuk 1 (satu) diameter gelembung saja.

FORMULASI NUMERIK ELEMEN HINGGA DAN PENYUSUNAN PROGRAM KOMPUTER

Dalam metode elemen hingga, sistem persamaan yang diselesaikan diberlakukan pada elemen-elemen sehingga diperoleh formulasi dalam bentuk hubungan nilai-nilai yang dicari di elemen-elemen tersebut. Elemen yang digunakan adalah elemen balok kuadratik 20 titik. Pembentukan geometri *mesh* hitungan menggunakan *mesh generator* Program "3D Air Bubble Flow Model", salah satu program yang dikembangkan oleh Laboratorium Komputasi Jurusan Teknik Sipil Fakultas Teknik UGM. Dari berbagai metode yang ada dalam Metode Elemen Hingga, metode Petrov-Galerkin dipilih untuk digunakan dalam penelitian ini.

Dengan menggunakan skema eksplisit untuk suku derivasi waktu, penerapan Metode Sisa Berbobot dan dengan memasukkan fungsi interpolasi ke variabel-variabel dalam Persamaan (1), akan dihasilkan persamaan diskret sebagai berikut.

$$\int_{\Omega} N_i N_j d\Omega \left(\frac{\partial \hat{c}}{\partial t} \right)_l = - \int_{\Omega} U_n N_j \frac{\partial N_l}{\partial x_n} d\Omega \hat{C}_l - \int_{\Omega} \frac{\partial N_j}{\partial x_n} k_n \frac{\partial N_l}{\partial x_n} d\Omega \hat{C}_l - \int_{\Omega} \frac{\alpha U_m h}{2|U|} \frac{\partial N_j}{\partial x_m} U_n \frac{\partial N_l}{\partial x_n} d\Omega \hat{C}_l - \int_{\Gamma} N_j k_n \frac{\partial N_l}{\partial x_n} \bar{n}_n d\Gamma \hat{C}_l \quad ; i, j, l = 1, 2, \dots, M; m, n = 1, 2, 3 \quad (3)$$

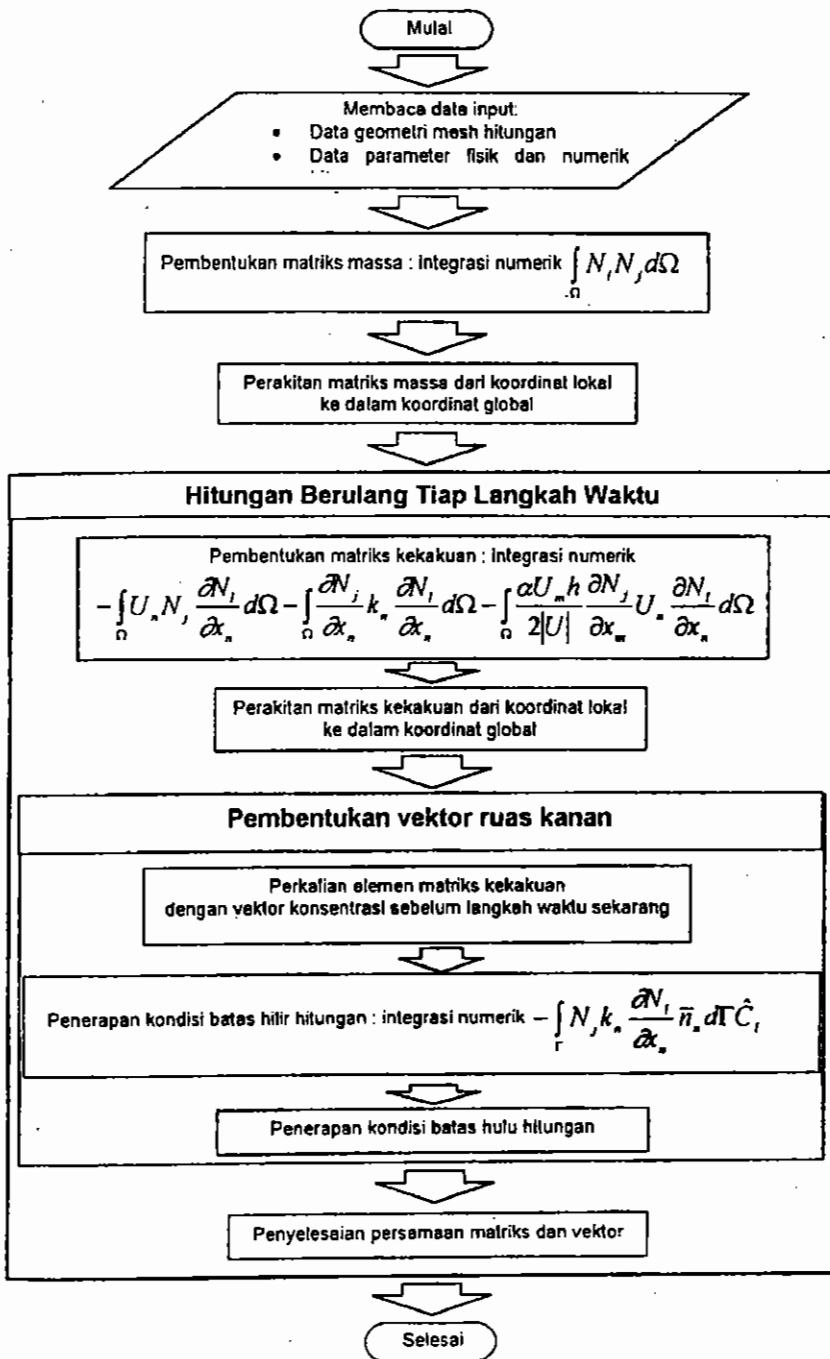
dengan M adalah jumlah titik nodal dalam daerah hitungan.

Persamaan di atas didapatkan dengan menggunakan fungsi pembobot pada Metode Petrov-Galerkin yang diberikan dalam persamaan berikut.

$$W_j = N_j + \alpha \tilde{W}_j \equiv N_j + \frac{\alpha h U_m}{2|U|} \frac{\partial N_j}{\partial x_m} \quad j = 1, 2, \dots, M; m = 1, 2, 3 \quad (4)$$

dengan M adalah jumlah titik nodal dalam daerah hitungan, dan α adalah koefisien *upwinding*.

Berdasarkan pada formulasi elemen hingga yang diperoleh disusun program komputer dengan bahasa FORTRAN. Bagan alir dapat dilihat pada Gambar 2.

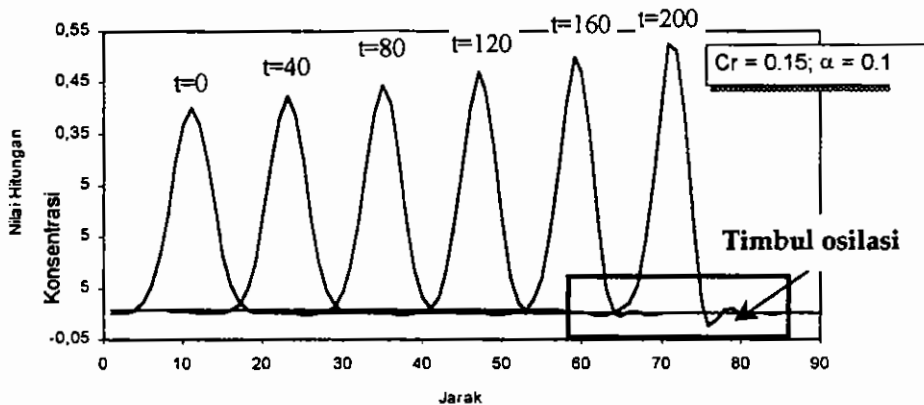


Gambar 2. Bagan alir program

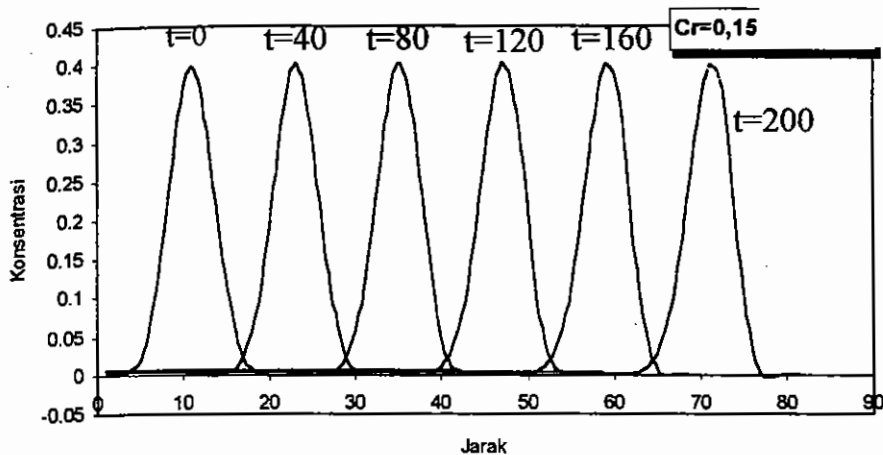
ANALISIS STABILITAS NUMERIK

Analisis stabilitas numerik dimaksudkan untuk mencari batasan-batasan agar model numerik memberikan hasil yang mengarah kepada penyelesaian yang benar. Analisis stabilitas numerik dilakukan pada problem 1 (satu) dimensi. Daerah ruang dibagi dalam 400 elemen dengan panjang elemen, Δx , adalah 1 m, dari $x = 0$ sampai dengan $x = 400$. Langkah waktu (Δt) yang diambil adalah sebesar 0,25 detik. Batasan-batasan yang akan diambil sebagai analisis adalah angka Courant ($Cr = \frac{u \Delta t}{\Delta x}$) dan koefisien *upwinding* (α pada kasus konveksi murni, sedangkan pada kasus yang melibatkan proses konveksi dan difusi akan terlibat angka Peclet ($Pe = \frac{u \Delta x}{2k}$)).

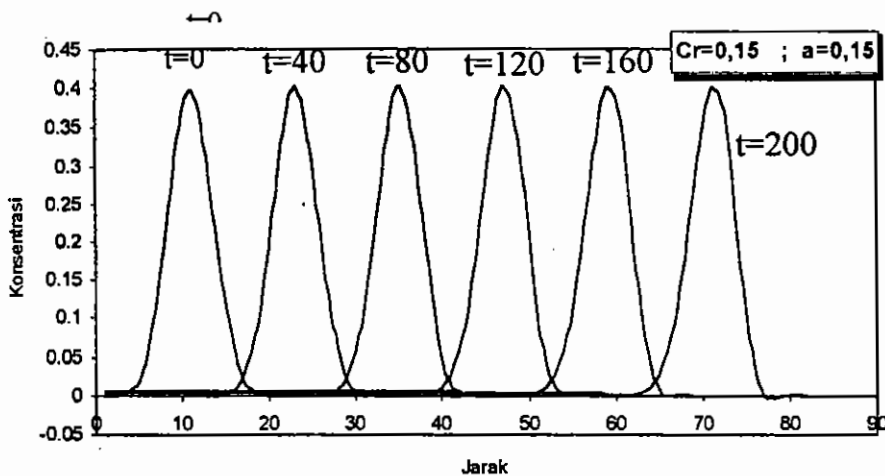
Pada problem konveksi murni untuk memperoleh batasan angka stabilitas dilakukan dengan mengambil nilai koefisien difusi 0 (nol). Analisa stabilitas numerik untuk nilai α menunjukkan bahwa hitungan akan stabil jika nilai α sama dengan angka Courant-nya. Hal ini dapat dilihat pada Gambar 3a sampai dengan 3c. Pada nilai α yang lebih kecil dari nilai Cr -nya, hasil hitungan akan semakin bertambah besar dengan bertambahnya waktu. Sebaliknya, dengan mengambil nilai α yang lebih besar dari nilai Cr -nya, hasil hitungan akan semakin bertambah kecil dengan bertambahnya waktu. Hasil hitungan akan benar apabila nilai hitungan tetap (tidak mengalami pertambahan ataupun pengurangan nilai), karena kasus yang diambil adalah kasus konveksi murni.



Gambar 3a. Hasil penyelesaian program 1D pada $Cr=0,15$ dengan $\alpha = 0,125$.

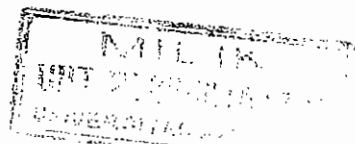


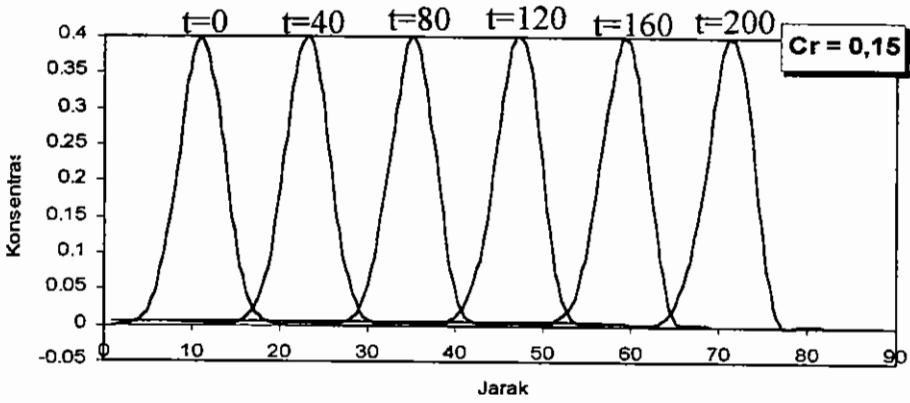
Gambar 3b. Hasil penyelesaian program 1D pada $Cr=0,15$ dengan $\alpha = 0,15$.



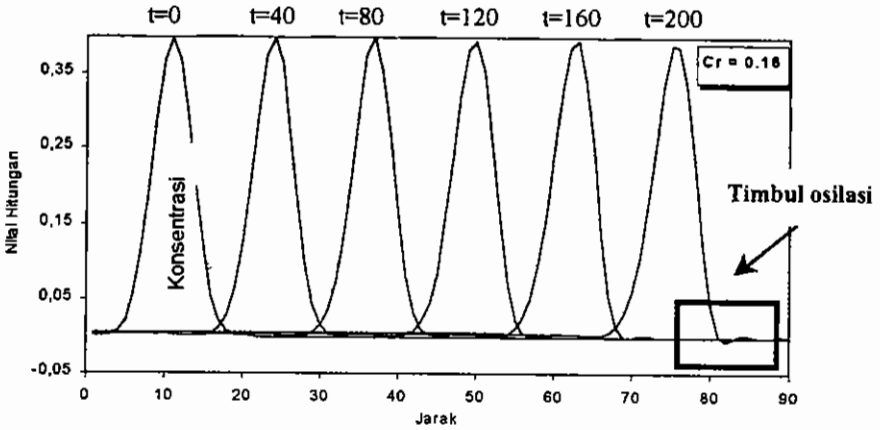
Gambar 3c. Hasil penyelesaian program 1D pada $Cr=0,15$ dengan $\alpha = 0,175$.

Analisis stabilitas untuk nilai Cr menunjukkan bahwa hitungan stabil jika nilai angka Courant lebih kecil atau sama dengan 0,15. Pada angka Courant lebih besar 0,15 akan timbul osilasi, dan osilasi akan semakin besar dengan bertambahnya langkah waktu. Hal ini dapat dilihat pada Gambar 4a sampai dengan 4c.

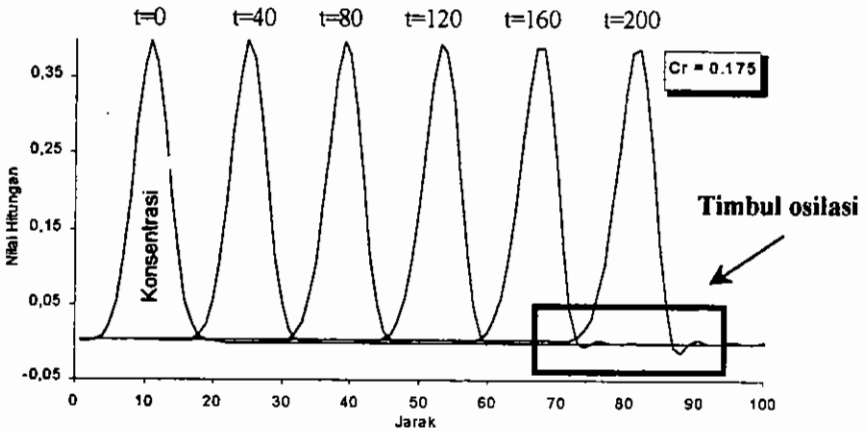




Gambar 4a. Hasil program 1D pada nilai $Cr=0,15$

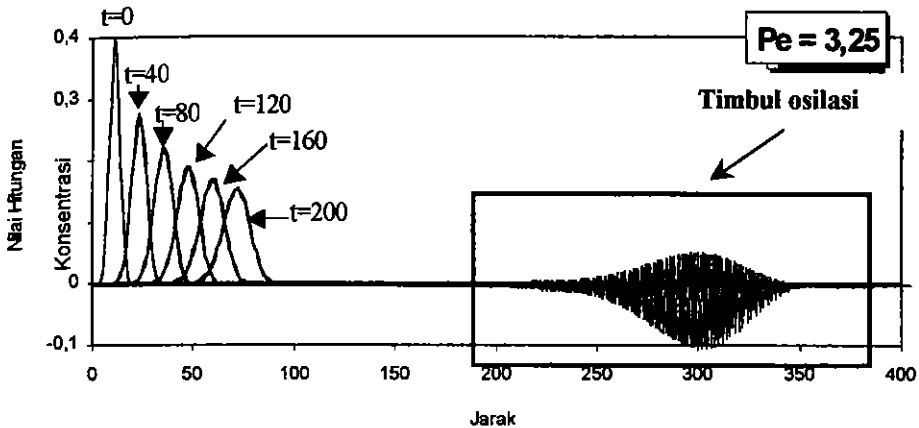


Gambar 4b. Hasil program 1D pada nilai $Cr=0,16$

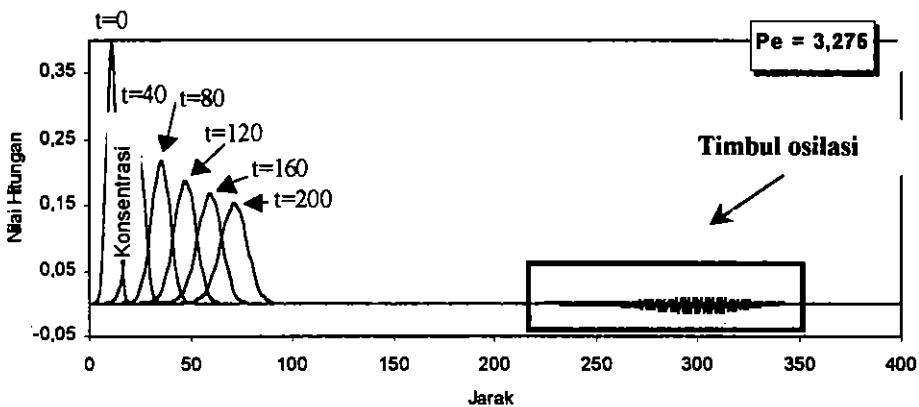


Gambar 4c. Hasil program 1D pada nilai $Cr=0,175$

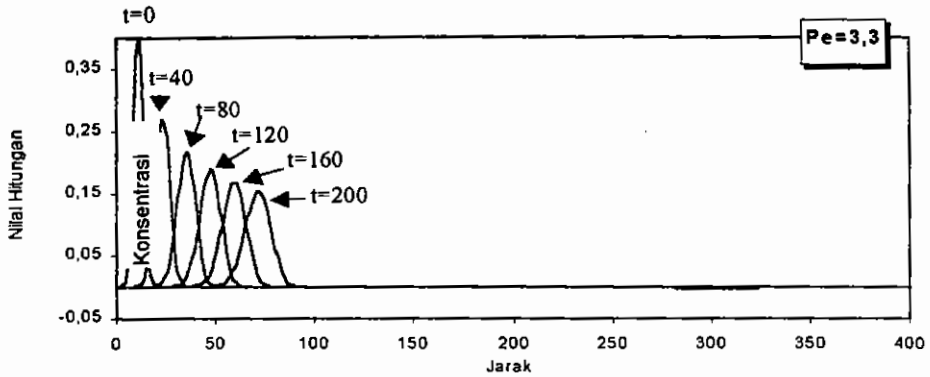
Salah satu hasil dari analisis kestabilan numerik untuk problem konveksi-difusi untuk nilai Pe (Gambar 5a sampai dengan 5d) menunjukkan bahwa hitungan akan stabil jika nilainya lebih besar atau sama dengan 3,3 pada nilai angka Courant dan koefisien *upwinding* sebesar 0,15. Pada nilai Pe yang lebih yang lebih kecil dari 3,3 akan timbul osilasi di daerah hilir hitungan.



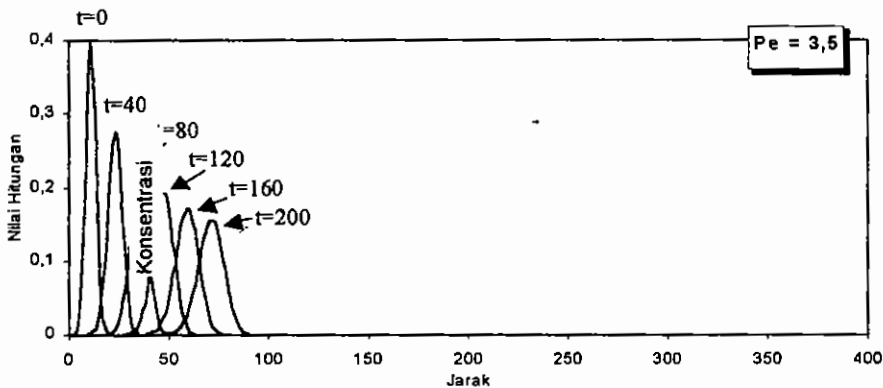
Gambar 5a. Hasil penyelesaian pada nilai $Pe=3,25$ dengan $Cr=0,15$ dan $\alpha=0,15$



Gambar 5b. Hasil penyelesaian pada nilai $Pe=3,275$ dengan $Cr=0,15$ dan $\alpha=0,15$.



Gambar 5c. Hasil penyelesaian pada nilai $Pe=3,3$ dengan $Cr=0,15$ dan $\alpha=0,15$



Gambar 5d. Hasil penyelesaian pada $Pe=3,5$ dengan $Cr=0,15$ dan $\alpha=0,15$.

PEMERIKSAAN PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN

Pemeriksaan terhadap penyelesaian sistem persamaan dilakukan dengan membandingkan hasil hitungan numerik dengan hasil hitungan analitik. Persamaan-persamaan yang digunakan dibawah ini mengacu pada Farlow (1982). Nilai kondisi awal yang dipilih adalah nilai yang mengikuti distribusi Gauss. Untuk kasus satu dimensi persamaannya sebagai berikut.

$$C(x,0) = S e^{-\frac{1}{a}(x-x_c)^2} \quad (5)$$

Penyelesaian analitik dengan nilai kondisi awal di atas mengikuti persamaan berikut.

$$C(x,t) = \frac{S\sqrt{a}}{\sqrt{a+4k_x t}} e^{-\left(\frac{(x-x_c)-U_x t}{x}\right)^2} \quad (6)$$

Pada kasus tiga dimensi persamaan untuk kondisi awal adalah :

$$C(x,y,z,0) = S e^{-\frac{1}{a}[(x-x_c)^2+(y-y_c)^2+(z-z_c)^2]} \quad (7)$$

dan persamaan penyelesaian analitiknya sebagai berikut.

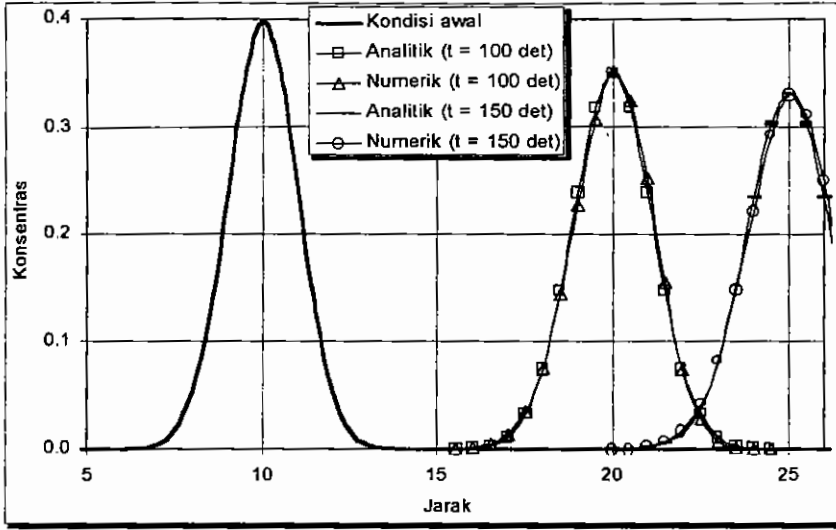
$$C(x,y,z,t) = \frac{S\sqrt{a}}{\sqrt{a+4k_x t} \sqrt{a+4k_y t} \sqrt{a+4k_z t}} e^{-\left(\frac{(x-x_c)-U_x t}{x}\right)^2 - \left(\frac{(y-y_c)-U_y t}{y}\right)^2 - \left(\frac{(z-z_c)-U_z t}{z}\right)^2}$$

$$S = \frac{1}{\sqrt{2\Pi\sigma}}, \quad a = 2\sigma^2 \quad (8)$$

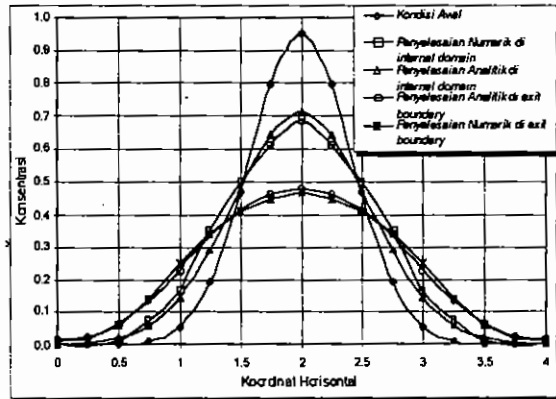
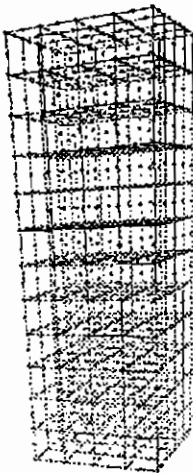
dengan

- x, y, z = koordinat titik nodal pada arah x, y, z
- x_c, y_c, z_c = koordinat titik nodal pusat distribusi Gauss untuk arah x, y, z
- σ = simpangan distribusi Gauss
- k = koefisien difusi
- t = waktu.

Hasil pemeriksaan di daerah *internal* dan di *exit boundary* untuk kasus 1 dimensi dan 3 dimensi disajikan pada Gambar 6a sampai dengan 6c berikut.



Gambar 6a. Penyelesaian numerik dan analitik pada problem 1D.



Gambar 6b. Perspektif daerah hitungan 3D.

Gambar 6c. Penyelesaian numerik dan analitik pada problem 3D.

Dengan melihat gambar di atas dapat ditunjukkan hasil hitungan numerik memberikan hasil yang mendekati hasil hitungan analitik. Dengan demikian model numerik penyelesaian sistem persamaan dapat dikembangkan ke arah simulasi sebaran gelembung udara dalam air, dengan menerapkan kecepatan dan koefisien difusi yang sesuai dengan kondisi di lapangan.

PEMODELAN NUMERIS SEBARAN GELEMBUNG UDARA DALAM AIR

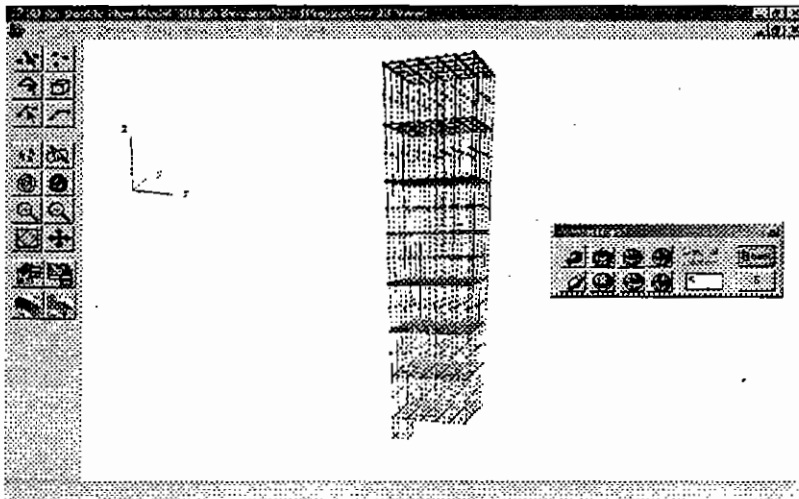
Diskretisasi daerah hitungan menggunakan elemen balok dengan lebar dan panjang 3 cm, serta tinggi 10 cm. Ukuran sisi elemen arah horisontal dibuat kecil dengan tujuan agar kenampakan penyebaran gelembung udara dapat lebih jelas. Dengan asumsi bahwa daerah yang dilalui gelembung udara yang bergerak adalah simetris, daerah dibagi menjadi 4 bagian, dan modelisasi numerik menggunakan seperempat bagian dari daerah hitungan keseluruhan. Satu elemen ditambahkan di bawah salah satu elemen yang berada di sudut lapis elemen dasar kolom (Gambar 7).

Persamaan pendekat kecepatan vertikal yang didapatkan dengan cara mendekati persamaan regresi data pengukuran dapat dilihat pada Gambar 8. Persamaan pendekat untuk kecepatan aliran air yang didapatkan adalah

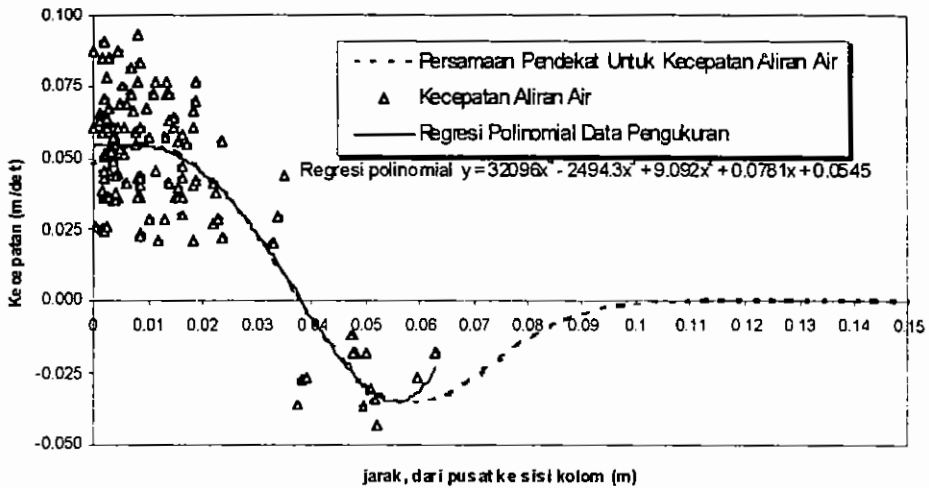
$$u = 0,055e^{\frac{(d-0,04)^2}{0,0007}} - 0,038e^{\frac{(0,057-d)^2}{0,0005}}, \quad d = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (9)$$

dengan

- u = kecepatan aliran air
- x = jarak dari pusat kolom ke sisi kolom arah sumbu x
- y = jarak dari pusat kolom ke sisi kolom arah sumbu y.



Gambar 7. Geometri daerah hitungan simulasi kolom aerator.



Gambar 8. Profil kecepatan aliran air terukur dan pendekatannya.

Untuk lebih mendekati persamaan regresi data pengukuran, nilai persamaan dibatasi pada daerah dari titik tengah kolom sampai jarak 0,01 m dari tengah kolom kecepatan aliran air diberi nilai sama, yaitu sebesar 5,7 cm/detik. Untuk mengukur kesalahan pendekatan kecepatan yang dipakai digunakan metode statistik RMSE (*roots of means squares error*), yaitu sebesar 0,173 cm/detik.

Persamaan di atas diterapkan dalam perhitungan di program komputer untuk mendapatkan kecepatan elemen arah vertikal yaitu dengan menambahkan kecepatan aliran air di atas dengan kecepatan rerata gerak gelembung (= 28,57 cm/detik).

Hasil penelitian model fisik menunjukkan bahwa setelah mencapai tinggi 80 cm, nilai konsentrasi gelembung adalah sebesar 0,0006. Menurut Ahmad Nur Himawan (1999) variasi perubahan konsentrasi gelembung udara akan terjadi dari dasar kolom sampai dengan ketinggian 90 cm dari dasar kolom. Karena pada ketinggian 90 cm tidak tersedia data konsentrasi, maka tinggi kolom dimana konsentrasi gelembung udara bernilai relatif tetap diambil 80 cm, sehingga koefisien difusi mengikuti persamaan sebagai berikut.

$$k = A (C - 0,0006) \quad (10)$$

KONDISI BATAS DAN KONDISI AWAL

Pada dasar daerah hitungan (dalam model fisik daerah ini adalah pada dasar kolom aerator), tipe yang dipakai adalah tipe Dirichlet, yaitu dengan memberikan nilai pada titik-titik di daerah tersebut, yang nilainya mengikuti besarnya masukan konsentrasi gelembung udara pada model fisik. Kondisi batas pada bidang atas daerah hitungan (dalam model fisik daerah ini adalah pada bidang atas kolom aerator) adalah tipe batas bebas (*free surface boundary*). Pada kondisi batas tipe ini gelembung udara akan dilepaskan bebas pada permukaan atas daerah hitungan. Hal ini ditujukan untuk dapat meniru kondisi fisik bahwa setelah sampai di permukaan air, gelembung akan pecah. Untuk memperoleh hasil yang sesuai dengan tujuan ini suku integral batas $\int_{\Gamma} N_j k_n \frac{\partial N_l}{\partial x_n} \bar{n}_n d\Gamma C_l$ diterapkan pada batas atas daerah hitungan.

Kondisi awal gelembung udara adalah 0 (nol) di semua titik elemen selain di titik-titik simpul di bagian dasar kolom. Sedangkan kondisi awal yang sekaligus diterapkan sebagai kondisi batas pada daerah di dasar kolom adalah 0 (nol) pada semua titik simpul kecuali pada titik-titik simpul sebagai sumber pembangkitan gelembung udara.

HASIL PEMODELAN NUMERIS

Hasil hitungan konsentrasi gelembung udara dibandingkan dengan data fisik. Perbandingan tersebut dilakukan pada potongan horisontal pada ketinggian kolom 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; dan 0,8 meter. Dengan cara coba-coba didapatkan koefisien pengali untuk menghitung konsentrasi gelembung yang paling optimal adalah 0,12; sehingga koefisien difusi mengikuti persamaan berikut:

$$k = 0,12 (C - 0,0006) \quad (11)$$

dengan k adalah koefisien difusi dan C adalah konsentrasi.

Dalam tabel berikut di bawah ini ditunjukkan bahwa koefisien pengali yang paling optimal adalah sebesar 0,12. Untuk mengukur simpangan yang terjadi digunakan metode statistik RMSE (*roots of means squares error*).

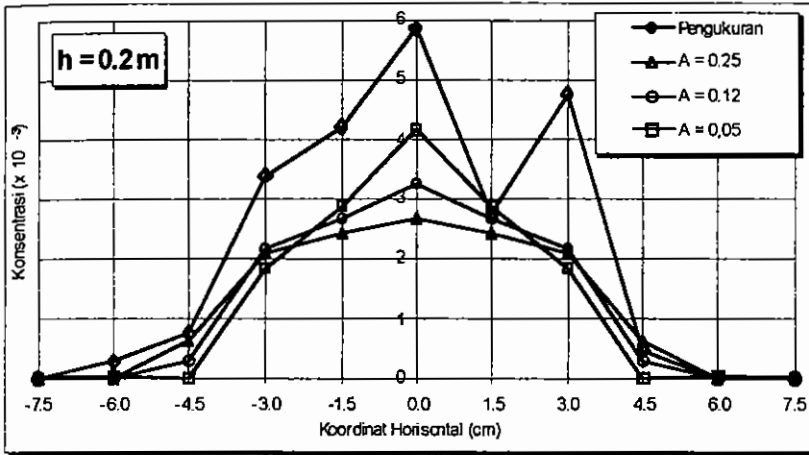
Tabel 2. Nilai Simpangan Hasil Model Numerik dan Data Pengukuran pada Berbagai Nilai Koefisien Pengali (A).

Tinggi Kolom (cm)	Koefisien pengali, A						
	A = 0.25	A = 0.2	A = 0.13	A = 0.12	A = 0.11	A = 0,05	A = 0.01
0.2	0.0014364	0.0013777	0.0012872	0.0012741	0.0012612	0.0012236	0.0013614
0.3	0.0009002	0.0008347	0.0007224	0.0007036	0.0006835	0.0005409	0.0005989
0.4	0.0007139	0.0006729	0.0006289	0.0006261	0.0006247	0.0006653	0.0009544
0.5	0.0003615	0.0003348	0.0003444	0.0003550	0.0003692	0.0005858	0.0011239
0.6	0.0002011	0.0002110	0.0002682	0.0002840	0.0003028	0.0004868	0.0008562
0.8	0.0002201	0.0002450	0.0002884	0.0002947	0.0003017	0.0003946	0.0006975
$\Sigma =$	0.0038331	0.0036762	0.0035396	0.0035375	0.0035431	0.0038969	0.0055922

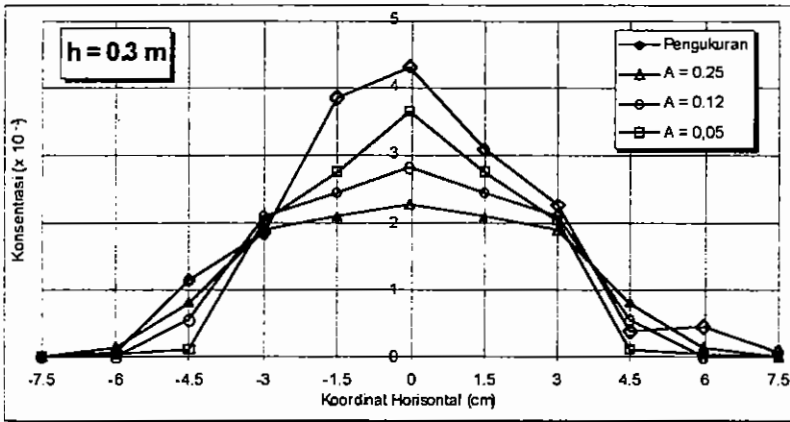
Dengan melihat tabel di atas dapat ditunjukkan bahwa koefisien pengali untuk mendapatkan nilai koefisien difusi yang paling optimal adalah 0,12; yang ditunjukkan dengan nilai simpangan antara data hasil hitungan numerik dan data pengukuran paling kecil. Pada nilai koefisien pengali di bawah atau di atas nilai tersebut, simpangan yang terjadi akan semakin besar. Simpangan yang terjadi antara lain bisa diakibatkan oleh hal-hal berikut.

1. Pada tiap lapis elemen horisontal diterapkan persamaan kecepatan yang sama. Kenyataan di lapangan profil kecepatan tidak sama pada ketinggian berbeda.
2. Model numerik ini menggunakan diameter gelembung udara tunggal, kenyataannya diameter gelembung udara yang terbentuk adalah dalam berbagai diameter. Hal ini akan berpengaruh pada besarnya kecepatan, karena kecepatan terminal dan gaya seret yang dihasilkan untuk masing-masing diameter gelembung udara akan berbeda-beda.

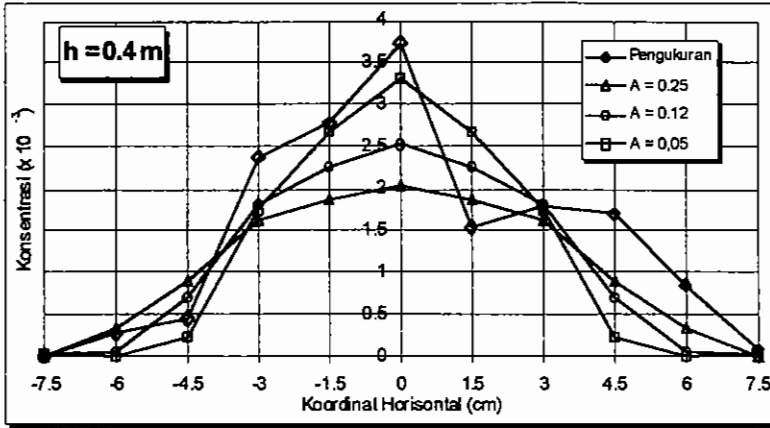
Pada Gambar 9a sampai dengan 9f berikut ditampilkan perbandingan nilai antara hasil hitungan numerik dan data fisik pada titik nodal yang berada pada bidang satu dimensi garis yang melalui pusat kolom pada tinggi kolom 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; dan 0,8 meter dengan 3 (tiga) koefisien pengali sebaran gelembung, yaitu masing-masing 0,25; 0,12; dan 0,01.



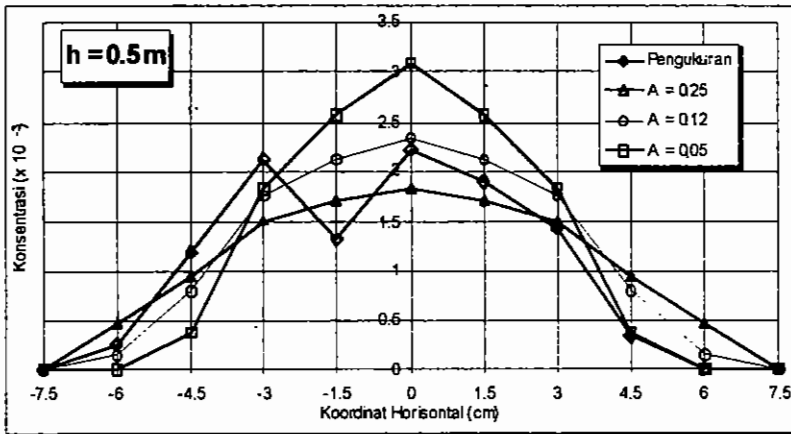
Gambar 9a. Perbandingan konsentrasi gelembung udara hasil hitungan dan data pengukuran pada tinggi kolom 0,2 meter



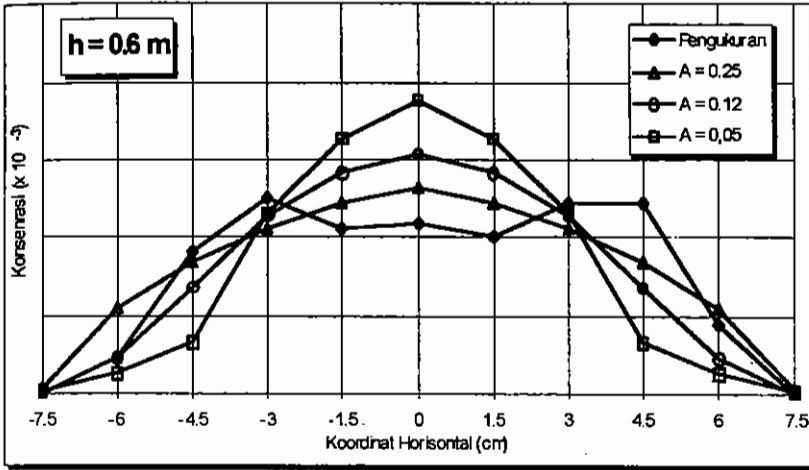
Gambar 9b. Perbandingan konsentrasi gelembung udara hasil hitungan dan data pengukuran pada tinggi kolom 0,3 meter



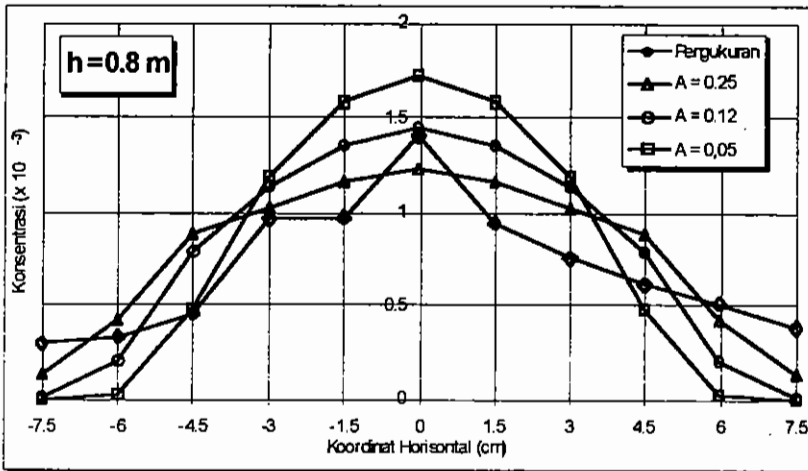
Gambar 9c. Perbandingan konsentrasi gelembung udara hasil hitungan dan data pengukuran pada tinggi kolom 0,4 meter.



Gambar 9d. Perbandingan konsentrasi gelembung udara hasil hitungan dan data pengukuran pada tinggi kolom 0,5 meter.

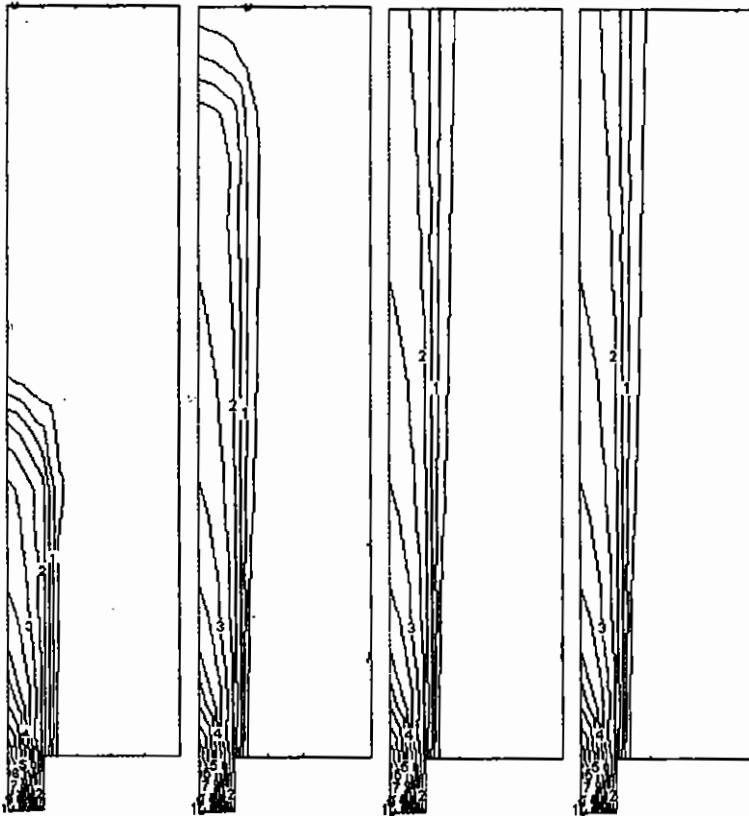


Gambar 9e. Perbandingan konsentrasi gelembung udara hasil hitungan dan data pengukuran pada tinggi kolom 0,6 meter.



Gambar 9f. Perbandingan konsentrasi gelembung udara hasil hitungan dan data pengukuran pada tinggi kolom 0,8 meter.

Hasil hitungan konsentrasi gelembung udara dengan koefisien pengali sebaran gelembung 0,12 ditampilkan menggunakan software SMS pada Gambar 10. Nilai konsentrasi gelembung udara yang ditampilkan adalah nilai-nilai yang berada pada bidang 2 (dua) dimensi potongan verikal (x,z) yang melalui pusat kolom. Pada Gambar 10, nilai konsentrasi gelembung udara yang ditampilkan adalah nilai konsentrasi gelembung udara yang dikalikan dengan $0,001 (10^{-3})$.



Gambar 10. Kontur distribusi konsentrasi gelembung dengan koefisien pengali 0,12 pada 1; 2; 4; dan 15 detik.

KESIMPULAN DAN SARAN

KESIMPULAN

Kesimpulan yang dapat diambil dari penelitian ini adalah :

1. skema numerik Elemen Hingga Petrov-Galerkin persamaan *unsteady* konveksi murni stabil dan konvergen pada nilai angka Courant ($Cr = u \, dt/dx \leq 0.15$) dan koefisien upwinding (θ) bernilai sama dengan angka Courant.
2. model numerik sebaran gelembung udara dalam air memberikan rumusan koefisien difusi $k = 0.12(C-0.0006)$ untuk debit udara yang dilepaskan sebesar 2 lt/mnt.

SARAN

Untuk mengembangkan penelitian ini disarankan hal-hal sebagai berikut.

1. menerapkan persamaan konveksi-difusi untuk berbagai range diameter gelembung udara.
2. menggunakan kecepatan hasil dari hitungan numerik atau pengukuran yang benar.
3. menggunakan variasi debit udara yang lebih banyak, sehingga akan dapat diperoleh hubungan antara koefisien difusi dan konsentrasi gelembung udara yang lebih banyak.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ir. Adam Pamudji Rahardjo, M.Sc., Ph.D dan Ahmad Himawan, ST atas pemberian data pengukuran. Ucapan terima kasih juga ditujukan untuk Kepala Laboratorium Komputasi Jurusan Teknik Sipil UGM.

DAFTAR PUSTAKA

Akin, J. E., 1994, *Finite Element for Analysis and Design*, Academic Press Limited

- Brooks, A.N., Hughes, Th.J.R., 1982, *Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulations for Convection Dominated flows with Particular Emphasis on The Incompressible Navier-Stokes Equations*, Journal of the Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 32, North Holland
- Burnett, David S., 1987, *Finite Element Analysis*, Addison-Wesley Publishing Company
- Donea, Jean, 1984, *A Taylor-Galerkin Method for Convective Transport Problem*, Journal of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol 20
- Farlow, S.J., 1982, *Partial Differential Equations*, John Wiley & Sons
- Himawan, Ahmad Nur, 1999, *Studi Gerak Spiral Gelembung Udara Individual dan Serbaran Kelompok Gelembung Udara Dalam Kolom Aerator*, Tugas Akhir Pogram Ekstensi Jurusan Teknik Sipil, Fakultas Teknik, UGM, Yogyakarta
- Koutitas, Ch.G., 1983, *Elements for Computational Hydraulics*, Pentech Press, London
- Rahardjo, A. P., 1992, *Metode Elemen Hingga Untuk Aliran Air Tanah*, Pusat Antar Universitas Ilmu Teknik, UGM, Yogyakarta
- Rahardjo, A. P., Kamulyan, B.; 1998, *Investigation and Modeling of Air Bubble Swarm Motion in Water Containing Activated Sludge*, ITSF Research Report, Civil Eng. Dept., Fac. of Eng., GMU, Yogyakarta
- Rahardjo, A. P., Kamulyan, B., Rochmadi; 1998, *Pembuatan Model Numerik Elemen Hingga 3D Dengan Gelembung Udara*, Laporan Hibah Bersaing VI, Jurusan Teknik Sipil, Fakultas Teknik, UGM
- Zienkiwicz, O.C., Taylor, R.L., 1991, *The Finite Element Method vol 2 : Solid and Fluid Mechanics Dynamics and Nonlinearity*, Mc Graw Hill Book Company
- Zienkiwicz, O.C., Szmelter, J., Peraire, J., 1990, *Compressible and Incompressible Flow : an Algorithm for All Season*, Journal of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 32, Elsevier Science Publisher, North Holland