Berkala Ilmiah FMIPA – UGM, Tahun V, No. 2, April 1994
hal. 41 – 51

MEKANIKA GELOMBANG DALAM KOORDINAT KURVELINEAR

Muslim dan Zahara M.

Jurusan Fisika, FMIPA – UGM, Yogyakarta 55281

INTISARI

Disajikan cara yang sederhana untuk membentuk wakilan mekanika kuantum di ruang Hilbert dengan menggunakan basis kontinu yang merupakan eigenkeadaan perangkat operator koordinat Cartesan dan kurvelinear ortogonal yang saling berkomutasi. Dengan menggunakan asas-asas mekanika kuantum dan teori wakilan dalam ruang Hilbert mulai dari wakilan dalam koordinat Cartesan, dihasilkan mekanika gelombang dalam koordinat Cartesan dan kurvelinear. Wakilan koordinat berbagai operator dinamik baik yang memuat koordinat atau momentum kanonisnya, maupun yang memuat kedua perangkat observabel yang berjodoh kanonis tersebut, diturunkan bentuk eksplisitnya dalam sistem koordinat kurvelinear ortogonal. Hasilnya dibandingkan dengan bentuk baku yang ada disertai pembahasan beberapa permasalahan terkait. Keinvarianan tera persamaan Schrüdinger gayut waktu untuk muatan yang bergerak dalam medan elektromagnet $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})$ ditinjau dalam sistem koordinat kurvelinear dideduksikan secara sederhana.

Kata kunci : Mekanika Kuantum, Mekanika Gelombang, Koordinat Kurvelinear.

Wave Mechanics in Curvilinear Coordinates

ABSTRACT

A simple method for constructing a representation of quantum mechanics in Hilbert space using a continuous basis produced from eigenstates of a commuting set of Cartesian and orthogonal curvilinear coordinate operators is presented using quantum mechanics principles as well as the representation theory in Hilbert space starting from a representation in a Cartesian coordinates system. This construction generates wave mechanics in curvilinear coordinates. The representation of various dynamical operators containing either coordinates or canonical momenta as well as those containing both set of the canonically conjugate observables, are derived for their explicit forms in orthogonal curvilinear coordinates system. The results are compared with standard forms and some related problems are discussed. The gauge invariance of the time dependent Schrüdinger equation for a charged particle moving in an electromagnetic field $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})$ referred to a curvilinear coordinates system is conveniently deduced.

Key words : Quantum Mechanics, Wave Mechanics, Curvilinear Coordinates.

I. PENDAHULUAN

Dalam makalah yang terdahulu berjudul ***Relativitas Khusus dan Mekanika Kuantum sebagai Sokoguru Fisika Masa Kini*** (Zahara M. dan Muslim, 1992), telah disajikan asas-asas pokok yang melandasi Mekanika Kuantum sebagai disiplin fisika yang menangani aspek mekanika sistem mikroskopik yang memerlukan ruang Hilbert wakilan kompleks untuk penampilan keadaan kuantum dan observabel, masing-masing sebagai suatu vektor ket $|\psi\rangle$ (untuk suatu keadaan murni) dan suatu operator linear hermitan $\hat{\Omega}$.

Apabila dalam ruang Hilbert tersebut dipilih suatu basis wakilan perangkat vektor lengkap yang merupakan eigenkeadaan serempak sejumlah observebel yang kompatibel/rukun (dengan operator hermitan yang saling komutatif), maka akan dihasilkan **mekanika matriks** untuk wakilan berbasis eigenkeadaan dengan spektrum eigenilai diskret (misalnya eigenkeadaan operator $\hat{L}_z$ dan $\hat{L}^2$ yaitu komponen-*z* dan kuadrat momentum sudut orbit sistem N zarah) dan **mekanika gelombang** untuk wakilan berbasis dengan spektrum kontinu (misalnya basis eigenkeadaan perangkat operator koordinat Cartesan $x_{i\alpha}$; $i = 1, .., N$; $\alpha = 1, 2, 3$, perangkat koordinat umum q^μ; $\mu = 1, 2, .. f = 3N$ = derajat kekebasan sistem N zarah tersebut, atau eigenkeadaan operator momentum pendamping mereka masing-masing yaitu $p_{i\alpha}$ atau p_μ).

Dalam makalah ini akan disajikan mekanika gelombang dalam wakilan koordinat kurvelinear ortogonal yang jarang disajikan dalam buku-buku ajar secara lengkap. Hanya sedikit buku ajar yang menyajikannya, itupun dengan pendekatan yang agak rumit (Trigg, 1964). Masalah yang sama masih juga dibahas dalam jurnal (H. G. Kjaergaard dan O. E. Mortensen, 1990) dan dalam makalah ini akan disajikan cara sederhana untuk memperoleh wakilan mekanika gelombang dalam koordinat kurvelinear dengan menggunakan notasi seperti pada makalah terdahulu (Zahara M. dan Muslim, 1992).

Dalam bagian II akan disajikan langkah pembentukan fungsi gelombang di ruang koordinat Cartesan maupun koordinat kurvelinear, serta sifat-sifat analitis basis $|\boldsymbol{x}\rangle$ serta $|\boldsymbol{q}\rangle$ dan fungsi gelombang terkait yaitu $|\psi(\boldsymbol{x})\rangle$ serta $|\chi(\boldsymbol{q})\rangle$ dengan $\boldsymbol{x} = \{x_{i\alpha}\}$ dan $\boldsymbol{q} = \{q^\mu\}$. Kedua fungsi gelombang tersebut masing-masing merupakan wakilan keadaan kuantum terhadap basis $|\boldsymbol{x}\rangle$ dan $|\boldsymbol{q}\rangle$, yang berturut-turut merupakan eigenkeadaan perangkat operator. $\{\hat{x}_{i\alpha}\}$ dan $\{\hat{q}^\mu\}$, masing-masing dengan eigenilai $\{x_{i\alpha}\}$ dan $\{q^\mu\}$. Dalam bagian III akan disajikan wakilan observabel yang mengandung koordinat ruang, momentum pendamping (konjugat kanonis)nya maupun mengandung kedua-duanya seperti operator tenaga kinetis, operator hamilton dan operator momentum sudut orbit. Demikian juga keinvarianan tera

persamaan Scrüdinger gayut waktu untuk zarah bermuatan yang bergerak dalam medan elektromagnet $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})$ dideduksikan secara sederhana. Pembahasan dan kesimpulan akan disajikan dalam bagian IV.

II. MEKANIKA GELOMBANG DALAM RUANG KOORDINAT

Agar supaya rincian pembahasan tidak terlalu rumit, hanya akan dibahas secara lengkap kasus satu zarah dalam medan potensial dengan koordinat Cartesan (x_1, x_2, x_3) dan koordinat kurvelinear (q^1, q^2, q^3) yang saling terkait melalui transformasi koordinat tak singular $q^\alpha = q^\alpha(x_1, x_2, x_3)$ dengan determinan Jacobi

$$J = |\, \partial x_\alpha / \partial q_\beta \,| = |\mathcal{T}_{\alpha\beta}| \neq 0. \quad (1)$$

dan unsur volume invarian $d\tau = d^3x = |J|\, dq^1 dq^2 dq^3 = |J|\, \Pi^3_{\alpha=1} dq^\alpha = |J|\, d^3q$.

Perkalian unsur matriks $\mathcal{T}_{\alpha\beta}$ dengan unsur matriks $\mathcal{T}_{\alpha\delta}$ diikuti penjumlahan ke indeks α akan menghasilkan unsur $(\beta\delta)$ matriks $\mathcal{T}^{\mathrm{T}}\mathcal{T}$ dengan $\mathcal{T}^{\mathrm{T}}$ adalah matriks transpose dari $\mathcal{T}$. Bentuk

$$(\mathcal{T}^{\mathrm{T}}\mathcal{T})_{\beta\delta} = \Sigma^3_{\alpha=1} (\partial x_\alpha / \partial q^\beta)(\partial x_\alpha / \partial q^\delta)$$

$$= (\partial \boldsymbol{r} / \partial q^\beta) \cdot (\partial \boldsymbol{r} / \partial q^\delta) = g_{\beta\delta} \quad (2)$$

merupakan komponen-komponen kovarian *tensor metrik* yang muncul dalam kuadrat unsur garis infinitesimal

$$ds^2 = d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r} = \Sigma^3_{\alpha,\beta=1} dq^\beta (\partial \boldsymbol{r} / \partial q^\beta) \cdot (\partial \boldsymbol{r} / \partial q^\delta)\, dq^\delta = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} g_{\beta\delta}\, dq^\beta dq^\delta. \quad (3)$$

Apabila pers. (2) dipandang sebagai suatu persamaan matriks, maka kesamaan determinannya akan memberikan kaitan

$$\det(\mathcal{T}^{\mathrm{T}}\mathcal{T}) = \det(\mathcal{T}^{\mathrm{T}}) \det(\mathcal{T}) = \det(g_{\beta\delta})$$

atau mengingat $\det(\mathcal{T}^{\mathrm{T}}) = \det(\mathcal{T})$, maka

$$\{\det \mathcal{T}\}^2 = J^2 = g = \det g_{\beta\delta}$$

Jadi $\quad |J| = |\det \mathcal{T}| = \sqrt{g}, \quad (4)$

sehingga unsur volume invarian infinitesimal dapat dituliskan sebagai

$$d\tau = d^3x = g^{1/2}\, \Pi^3_{\alpha=1} dq^\alpha = g^{1/2} d^3q. \quad (5)$$

Perangkat operator $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = \{\hat{x}_\alpha\}$ dan $(\hat{q}^1, \hat{q}^2, \hat{q}^3) = \{\hat{q}^\alpha\}$ berturut-turut mempunyai eigenkeadaan serentak $|\boldsymbol{x}\rangle = |x_1, x_2, x_3\rangle$ dan $|\boldsymbol{q}\rangle = |q^1, q^2, q^3\rangle$ yang memenuhi persamaan eigenilai

$$\hat{x}_\alpha |\boldsymbol{x}\rangle = x_\alpha |\boldsymbol{x}\rangle \text{ dan } \hat{q}^\alpha |\boldsymbol{q}\rangle = q^\alpha |\boldsymbol{q}\rangle \quad (6)$$

$|\boldsymbol{x}\rangle$ dan $|\boldsymbol{q}\rangle$ berturut-turut melukiskan keadaan zarah yang pasti terletak di $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{q}$ dengan spektrum nilai yang kontinu. Operator translasi infinitesimal

$$\hat{I} - \frac{i}{\hbar} \delta\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{p} = \hat{I} - \frac{i}{\hbar} \sum_{\alpha=1}^{3} dq^\alpha\, \hat{\pi}_\alpha \quad (7)$$

akan membawa ket $|\boldsymbol{x}\rangle$ dan $|\boldsymbol{q}\rangle$ masing-masing menjadi ket $|\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x}\rangle$ dan

$|\, q+\delta q\rangle$ dengan $\delta x = \Sigma_{\alpha=1}^{3} b_\alpha\, \delta q^\alpha$ apabila $b_\alpha = \partial x/\partial q^\alpha$ adalah basis kontravarian di ruang konfigurasi zarah. $\hat{\pi}_\alpha = b_\alpha \cdot \hat{p}$ adalah komponen kovarian operator momentum kanonis p.

Bergantung pada basis yang digunakan apakah $|x\rangle$ atau $|q\rangle$, akan diperoleh fungsi gelombang $\psi(x)$ atau $\chi(q)$ melalui penguraian (ekspansi)

$$|\psi\rangle = \int d^3x\, \psi(x)\,|x\rangle \qquad (8a)$$

dengan $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$, (8b)

atau $|\psi\rangle = \int d^3q\, \chi(q)\,|q\rangle$ (9a)

dengan $\chi(q) = \langle q|\psi\rangle$. (9b)

Antara invarian volume d^3x dan unsur volume d^3q terdapat kaitan $d^3x = g^{1/2}\, d^3q$ yang akan memberikan kaitan antara $\psi(x)$ dengan $\chi(x)$ dan antara $|x\rangle$ dengan $|q\rangle$.

Dari pers. (8b) dan (8a) diperoleh

$$\psi(x) = \int d^3x'\, \psi(x')\,\langle x|x'\rangle$$

sehingga $\langle x|x'\rangle = \delta(x-x')$ (10a)

yaitu delta Dirac dengan penormalan

$$\int \delta(x-x')\, d^3x = 1. \qquad (10b)$$

Juga

$$\chi(q) = \int d^3q'\, \chi(q')\,\langle q|q'\rangle$$

sehingga

$$\langle q|q'\rangle = \delta(q-q') = \prod_{\alpha=1}^{3} \delta(q^\alpha - q'^\alpha) \qquad (11a)$$

yaitu delta Dirac dengan penormalan

$$\int \delta(q-q')\, d^3q = \int \delta(q^\alpha - dq'^\alpha)\, dq^\alpha = 1. \qquad (11b)$$

Apabila ke dalam pers. (10b) diisikan $d^3x = g^{1/2}\, d^3q$ dan hasilnya dibandingkan dengan pers. (11b), diperoleh kaitan

$$\delta(x-x') = g^{-1/2}\,\delta(q-q') \qquad (12a)$$

atau

$$\langle x|x'\rangle = g^{-1/2}\langle q|q'\rangle. \qquad (12b)$$

Dengan demikian berlaku kaitan

$$|x\rangle = g^{-1/4}\,|q\rangle\, e^{i\Lambda(q)} \qquad (12c)$$

dengan $\Lambda(q)$ merupakan fungsi sebarang dalam argumennya. Dengan menggunakan kaitan (12c) ini, dapatlah dicari kaitan antara $\psi(x)$ dengan $\chi(q)$.

$$\chi(q) = \int d^3q'\, g^{1/2}(q')\,\langle q|x'\rangle\,\psi(x')$$
$$= \int d^3q'\, g^{1/4}\, e^{i\Lambda(q')}\,\delta(q-q')\,\psi(x')$$
$$= g^{1/4}\, e^{i\Lambda(q)}\,\psi(x). \qquad (13)$$

Wakilan berbasis $|q\rangle$ lebih sederhana karena volume yang terlibat yaitu d^3q tidak memuat faktor skala. Selain sifat ortogonal (10a) dan (11a), berlaku juga sifat lengkap

$$\int |x\rangle\langle x|\, d^3x = \hat{I}; \qquad (14a)$$

$$\int |q\rangle\langle q|\, d^3q = \hat{I}. \qquad (14b)$$

III. WAKILAN-*X* DAN -*Q* OBSERVABEL

Wakilan koordinat operator $\hat{\Omega}$ dalam basis $|x\rangle$ maupun $|q\rangle$ serta kaitan di antaranya dapat diperoleh dengan menggunakan definisi mereka masing-

masing.

$$\hat{\Omega}_q\, \chi(q) = \langle q|\hat{\Omega}|\psi\rangle = g^{1/4}\, e^{i\Lambda(q)}\,\langle x|\hat{\Omega}|\psi\rangle$$
$$= g^{1/4}\, e^{i\Lambda(q)}\,\hat{\Omega}_x\,\psi(x) = \hat{\Omega}_q\, g^{1/4}\, e^{i\Lambda(q)}\,\psi(x) \qquad (15a)$$

Dari persamaan yang terakhir diperoleh

$$g^{1/4}\, e^{i\Lambda(q)}\,\hat{\Omega}_x = \hat{\Omega}_q\, g^{1/4}\, e^{i\Lambda(q)} \quad \text{atau}$$

atau

$$\hat{\Omega}_x = g^{-1/4}\, e^{-i\Lambda(q)}\,\hat{\Omega}_q\, g^{1/4}\, e^{i\Lambda(q)} \qquad (15b)$$

dengan inversi

$$\hat{\Omega}_q = g^{1/4}\, e^{i\Lambda(q)}\,\hat{\Omega}_x\, g^{-1/4}\, e^{-i\Lambda(q)}. \qquad (15b)$$

Wakilan operator yang hanya memuat $\hat{x}$ atau $\hat{q}$ dengan mudah dapat dicari, misalnya operator tenaga potensial $V(\hat{x}) = V(\hat{q})$.

$$V_x\,\psi(x) = \langle x|V(\hat{x})|\psi(x)\rangle$$
$$= \langle\psi|V(\hat{x})|x\rangle^* = V(x)\,\psi(x)$$

untuk sebarang $\psi(x)$ sehingga

$$V_x(\hat{x}) = V(x) \qquad (16a)$$

dan apabila bentuk ini diisikan ke dalam pers. (15b), diperoleh

$$V_q(q) = V(x) = V(q). \qquad (16b)$$

Wakilan koordinat untuk operator momentum lebih mudah dicari dalam basis $\{|q\rangle\}$ dengan memanfaatkan operator translasi infinitesimal (7).

$$\hat{T}_{\delta q} = \hat{I} - i\hbar^{-1}\,\Sigma_{\alpha=1}^{3}\, \delta q^\alpha\, \hat{\pi}_\alpha. \qquad (17)$$

dengan sifat

$$\hat{T}_{\delta q}|q\rangle = |q\rangle - i\hbar^{-1}\,\delta q\cdot\hat{p}\,|q\rangle$$
$$= |q+\delta q\rangle \qquad (18a)$$

dan vektor bra konjugat

$$\langle q+\delta q| - \langle q| = \frac{i}{\hbar}\,\langle q|\,\delta q\cdot\hat{p}. \qquad (18b)$$

Perkalian bentuk ini dengan vektor ket $|\psi\rangle$ akan menghasilkan

$$\chi(q+\delta q) - \chi(q) = \frac{i}{\hbar}\,\delta q\cdot\langle q|\hat{p}|\chi\rangle$$

atau

$$\Sigma_{\alpha=1}^{3}\, \delta q^\alpha\,(\partial\chi/\partial q^\alpha)$$
$$= \Sigma_{\alpha=1}^{3}\, i\hbar^{-1}\,\delta q^\alpha\,\hat{\pi}_{q\alpha}\,\chi(q).$$

Karena δq^α dan $\chi(q)$ boleh dipilih sebarang maka haruslah

$$\hat{\pi}_{q\alpha} = (\hbar/i)\,\partial/\partial q^\alpha \qquad (19)$$

yang merupakan wakilan-q operator komponen-α momentum kanonik zarah.

Wakilan-x yang bekerja pada $\psi(q)$ dapat dicari dengan menggunakan pers. (15b) yang dalam hal ini akan menghasilkan

$$\hat{\pi}_{x\alpha} = \frac{\hbar}{i}\, g^{-1/4}\, e^{-i\Lambda(q)}\,(\partial/\partial q^\alpha)\, g^{1/4}\, e^{i\Lambda(q)}$$
$$= \frac{\hbar}{i}\,\{(\partial/\partial q^\alpha) + \tfrac{1}{4}\,\partial \ln g/\partial q^\alpha$$
$$+\, i\,\partial\Lambda/\partial q^\alpha\} \qquad (20)$$

Suku terakhir lenyap apabila fase fungsi gelombang untuk wakilan-x dan wakilan-q dipilih sama; bentuk yang dihasilkan sesuai dengan yang terdapat dalam beberapa buku ajar (Park, 1992, hal. 6; Trigg, 1964, hal. 73). Kaitan (20) berlaku untuk sistem koordinat kurvelinear umum dengan tensor metrik $g_{\alpha\beta}$ yang mempunyai determinan g tak perlu diagonal. Suku $(\hbar/4i)\,(\partial/\partial q^{\alpha})\ln g$ dapat diganti dengan $(\hbar/2i)\,(\partial/\partial q^{\alpha})\ln\sqrt{g}$.

Untuk sistem koordinat kurvelinear ortogonal dalam ruang berdimensi-3, $ds^2 = \Sigma_{\alpha=1}^{3} h_\alpha^2\,(dq^\alpha)^2$ dengan faktor skala $h_\alpha = |\,\boldsymbol{b}_\alpha\,|$ dan $g_{\alpha\beta} = h_\alpha^2\,\delta_{\alpha\beta}$ sehingga $g = \det(g_{\alpha\beta}) = h_1^2 h_2^2 h_3^2$. Misalnya dalam koordinat bola ($q_1 = r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}, q_2 = \theta = \arccos(z/r)$, dan $q = \phi = \mathrm{arc\,tg}\,(y/x)$, maka $h_1 = h_r = 1, h_2 = h_\theta = r$ dan $h_3 = h_\phi = r\sin\theta$. Jadi $J = \sqrt{g} = h_r h_\theta h_\phi = r^2\sin\theta$.

Operator momentumnya dalam wakilan-x (berkerja terhadap fungsi gelombang $\psi(r,\theta,\phi)$ bukan pada $\chi(r,\theta,\phi)$, berbentuk (Park, 1992; Trigg, 1964)

$$(\hat{\pi}_x)_r = (\hbar/i)\,(r\sin^{1/2}\theta)^{-1}\,(\partial/\partial r)\,(r\sin^{1/2}\theta) = (\hbar/i)(1/r)\,(\partial/\partial r)\,(r) = (\hbar/i)\,\{\,(\partial/\partial r) + 1/r\,\}; \quad (21a)$$

$$(\hat{\pi}_x)_\theta = (\hbar/i)\,(r\sin^{1/2}\theta)^{-1}\,(\partial/\partial\theta)\,(r\sin^{1/2}\theta) = (\hbar/i)\,\{\,(\partial/\partial\theta) + \tfrac{1}{2}\cot\theta\,\}; \quad (21b)$$

$$(\hat{\pi}_x)_\phi = (\hbar/i)\,(r\sin^{1/2}\theta)^{-1}\,(\partial/\partial\phi)\,(r\sin^{1/2}\theta) = (\hbar/i)\,\partial/\partial\phi. \quad (21c)$$

Operator (31a) merupakan wakilan observabel momentum radial $p_r = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}/r = \Sigma_{\alpha=1}^{3} p_\alpha x_\alpha/r$. Dalam basis vektor satuan $\boldsymbol{u}_\alpha = \boldsymbol{b}_\alpha/h_\alpha$ (misalnya $\boldsymbol{u}_r = \boldsymbol{r}/r$), momentum linear $\boldsymbol{p}$ dapat diuraikan menjadi $\boldsymbol{p} = \Sigma_{\alpha=1}^{3}\boldsymbol{u}_\alpha p_\alpha$ sehingga terdapat hubungan berikut antara p_α dan momentum kanonis π_α :

$$\pi_\alpha = h_\alpha p_\alpha;\; p_\alpha = \boldsymbol{u}_\alpha\cdot\boldsymbol{p}. \quad (22)$$

Ini menunjukkan bahwa momentum kanonis pendamping koordinat sudut dengan h_α merupakan skala jarak, merupakan besaran momentum sudut.

Sesudah pengkuantuman, karena operator $\hat{\boldsymbol{p}}$ dan $\hat{\boldsymbol{u}}_\alpha$ tidak berkomutasi, maka agar supaya operator $\hat{p}_\alpha$ bersifat hermitan, haruslah diadakan pensimetrian, misalnya $\hat{p}_r$ menjadi

$$\hat{p}_r = \tfrac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}\{\hat{p}_\alpha\hat{x}_\alpha/\hat{r} + (\hat{x}_\alpha/\hat{r})\hat{p}_\alpha\}. \quad (23)$$

Bentuk $\hat{p}_\alpha\hat{x}_\alpha/\hat{r} = (\hat{x}_\alpha/\hat{r})\hat{p}_\alpha + [\hat{p}_\alpha, \hat{x}_\alpha/\hat{r}]$ dengan suku komutatornya dapat dihitung sebagai berikut.

$$[\hat{p}_\alpha, \hat{x}_\alpha/\hat{r}] = [\hat{p}_\alpha, \hat{x}_\alpha]/\hat{r} + \hat{x}_\alpha[\hat{p}_\alpha, 1/\hat{r}] = -i\hbar\,\delta_{\alpha\alpha}/\hat{r} - i\hbar\,\hat{x}_\alpha(\partial/\partial\hat{r})(1/\hat{r}) = -i\hbar(\delta_{\alpha\alpha}/\hat{r} - \hat{x}_\alpha\hat{x}_\alpha/\hat{r}^3)$$

sehingga

$$\hat{p}_r = \hat{\boldsymbol{u}}_r\cdot\hat{\boldsymbol{p}} - \tfrac{1}{2}i\hbar\,(3/r - 1/r)$$

$$\hat{p}_r = \hat{\pi}_r = \hat{\boldsymbol{u}}_r\cdot\hat{\boldsymbol{p}} - i\hbar/\hat{r}. \quad (24)$$

Wakilan koordinatnya berbentuk

$$(\hat{\pi}_x)_r = -i\hbar\,(\partial/\partial r + 1/r) \quad (25)$$

yang sesuai dengan rumus (21a).

Komponen-komponen yang lain yaitu bentuk (21b) dan (21c) dapat diperiksa dengan menggunakan kaitan $\pi_\theta = h_\theta p_\theta$ dan $\pi_\phi = h_\phi p_\phi$. Di sini

$$\hat{p}_\theta = \tfrac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{u}}_\theta\cdot\hat{\boldsymbol{p}} + \hat{\boldsymbol{p}}\cdot\hat{\boldsymbol{u}}_\theta) \text{ dan} \quad (26a)$$

$$\hat{p}_\phi = \tfrac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{u}}_\phi\cdot\hat{\boldsymbol{p}} + \hat{\boldsymbol{p}}\cdot\hat{\boldsymbol{u}}_\phi), \quad (26b)$$

sedangkan $h_\theta = r, h_\phi = r\sin\theta$. Bentuk di ruas kanan pers. (26a) dan (26b) rumit perhitungannya, tetapi untuk keperluan pengecekan akan disajikan cara mencarinya dalam wakilan-x.

$$\hat{p}_\theta = \hat{\boldsymbol{u}}_\theta\cdot\hat{\boldsymbol{p}} + \tfrac{1}{2}\Sigma_{\alpha=1}^{3}[\hat{p}_\alpha, \hat{u}_{\theta\,\alpha}]$$

dengan

$$\Sigma_{\alpha=1}^{3}[\hat{p}_\alpha, \hat{u}_{\theta\,\alpha}] = [\hat{p}_z, -\sin\hat{\theta}] + [\hat{p}_x, \cos\hat{\theta}\cos\hat{\phi}] + [\hat{p}_y, \cos\hat{\theta}\sin\hat{\phi}] = -[\hat{p}_z, \hat{\rho}/r] + [\hat{p}_x, \hat{z}\hat{x}/\hat{r}\hat{\rho}] + [\hat{p}_y, \hat{z}\hat{y}/\hat{r}\hat{\rho}]$$

dengan $\hat{\rho} = (\hat{x}^2 + \hat{y}^2)^{1/2}$.

$$[\hat{p}_z, \hat{\rho}/\hat{r}] = -\hat{\rho}\,i\hbar\,\partial(1/\hat{r})/\partial\hat{z} = i\hbar\,\rho\hat{z}/\hat{r}^3;$$

$$[\hat{p}_x, \hat{z}\hat{x}/\hat{r}\hat{\rho}] = (\hat{z}\hat{x}/\hat{r})[\hat{p}_x, 1/\hat{\rho}] + \hat{z}\hat{x}[\hat{p}_x, 1/\hat{r}]/\hat{\rho} - \hat{z}[\hat{p}_x, \hat{x}]/\hat{r}\hat{\rho} = i\hbar\,[\hat{z}\hat{x}^2/\hat{r}\hat{\rho}^3 + \hat{z}\hat{x}^2/\hat{r}^3\hat{\rho}] - i\hbar\,\hat{z}/\hat{r}\hat{\rho};$$

$$[\hat{p}_y, \hat{z}\hat{y}/\hat{r}\hat{\rho}] = i\hbar\,[\hat{z}\hat{y}^2/\hat{r}\hat{\rho}^3 + \hat{z}\hat{y}^2/\hat{r}^3\hat{\rho}] - i\hbar\,\hat{z}/\hat{r}\hat{\rho};$$

Jadi

$$(\hat{p}_x)_\theta = -i\hbar r^{-1}\,\partial/\partial\theta - \tfrac{1}{2}\{i\hbar\,\rho z/r^3 - i\hbar z\,[\,1/r\rho + \rho/r^3\,] + 2\,i\hbar z/r\rho\,\} = -i\hbar r^{-1}\,(\partial/\partial\theta + \tfrac{1}{2}\cot\theta);$$

$$(\hat{\pi}_x)_\theta = r(\hat{p}_x)_\theta = -i\hbar\,(\partial/\partial\theta + \tfrac{1}{2}\cot\theta);$$

sesuai dengan ungkapan (21b).

Yang terakhir dicari wakilan observabel p_ϕ dan $\pi_\phi = r\sin\phi\,p_\phi$.

$$\hat{p}_\phi = \tfrac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{u}}_\phi\cdot\hat{\boldsymbol{p}} + \hat{\boldsymbol{p}}\cdot\hat{\boldsymbol{u}}_\phi) = \hat{\boldsymbol{u}}_\phi\cdot\hat{\boldsymbol{p}} + \Sigma_{\alpha=1}^{3}[\hat{p}_\alpha, \hat{u}_{\phi\,a}]$$

dengan

$$\Sigma_{\alpha=1}^{3}[\hat{p}_\alpha, \hat{u}_{\phi\,\alpha}] = [\hat{p}_x, -\hat{y}/\hat{\rho}] + [\hat{p}_y, \hat{x}/\hat{\rho}] = -\hat{y}(-i\hbar)(-1/\hat{\rho}^2)(\hat{x}/\hat{\rho}) + \hat{x}(-i\hbar)(-1/\hat{\rho}^2)(\hat{y}/\hat{\rho}) = 0.$$

Jadi

$$(\hat{p}_x)_\phi = -i\hbar\boldsymbol{u}_\phi\cdot\nabla = -i\hbar(r\sin\theta)^{-1}\,\partial/\partial\phi$$

$$(\hat{\pi}_x)_\phi = \tfrac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{b}}_\phi\cdot\hat{\boldsymbol{p}} + \hat{\boldsymbol{p}}\cdot\hat{\boldsymbol{u}}_\phi) = h_\phi\,(\hat{p}_x)_\phi = r\sin\theta\,(-i\hbar)(r\sin\theta)^{-1}\,\partial/\partial\phi = -i\hbar\,\partial/\partial\phi$$

sesuai dengan ungkapan (21c).

Dari operator momentum kanonis $\hat{\pi}_\phi$ dan $\hat{\pi}_\phi$ yang ternyata masing-masing merupakan komponen momentum sudut orbit untuk gerakan mengedari orbit yang terletak dalam bidang meridian (θ = konstan) dengan jari-jari r dan untuk gerak orbit dalam bidang lintang (ϕ = konstan) dengan jari-jari $r\sin\theta$ dan tegaklurus pada bidang meridian, atau dari p_θ dan p_ϕ, dapat dibentuk operator momentum sudut $\hat{\boldsymbol{l}}$ serta kuadratnya yaitu $\hat{l}^2$.

$$\hat{\boldsymbol{l}} = \hat{\boldsymbol{r}}\times\hat{\boldsymbol{p}} = \hat{r}\hat{\boldsymbol{u}}_r\times(\hat{\boldsymbol{u}}_r\hat{p}_r + \hat{\boldsymbol{u}}_\theta\hat{p}_\theta + \hat{\boldsymbol{u}}_\phi\hat{p}_\phi)$$

$$\hat{\boldsymbol{l}} = \hat{\boldsymbol{u}}_\phi \hat{r}\hat{p}_\theta - \hat{\boldsymbol{u}}_\theta \hat{r}\hat{p}_\phi \qquad (27a)$$

sehingga

$$(\hat{l}_x)_\theta = i\hbar \sin^{-1}\theta\, \partial/\partial\phi; \qquad (27b)$$

$$(\hat{l}_x)_\phi = -i\hbar \sin^{-1/2}\theta\, \partial/\partial\theta \sin^{1/2}\theta; \qquad (27c)$$

$$\hat{l}^2 = \hat{l}_\theta^2 + \sin^{-1/2}\theta\, \hat{l}_\phi \sin\theta\, l_\phi \sin^{-1/2}\theta$$

$$\hat{l}_x^2 = -\hbar^2 \{ \sin^{-2}\theta\, \partial^2/\partial\phi^2 + \sin^{-1}\theta\, (\partial/\partial\theta) \sin\theta\, (\partial/\partial\theta)\}. \qquad (27d)$$

Bagaimanakah penyajian operator tenaga kinetis $\hat{T}$ yang merupakan fungsi operator $\hat{\boldsymbol{p}}$? Operator ini yang berbentuk $\hat{T} = \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{p}}^2 / m$ dapat dinyatakan dalam operator p_r dan $\hat{l}^2$ dengan proses terlebih dulu menghitung $\hat{l}^2$ sebagai $(\hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{p}})^2$.

$$\hat{l}^2 = (\hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{p}}) \cdot (\hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{p}}) = (\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{r}})(\hat{\boldsymbol{p}} \cdot \hat{\boldsymbol{p}})$$

$$- \hat{r}^2 (\hat{\boldsymbol{u}}_r \cdot \hat{\boldsymbol{p}} - i\hbar/\hat{r})^2 = \hat{r}^2 2m\hat{T} - \hat{r}^2 \hat{p}_r^2. \qquad (27e)$$

Dalam wakilan-x, didapatkan

$$\hat{T}_x = (\hat{p}_x)_r^2 / 2m + \hat{l}_x^2/(2mr^2) \qquad (27f)$$

dengan $(\hat{p}_x)_r = -i\hbar(\partial/\partial r + 1/r)$ dan $\hat{l}_x^2$ diberikan oleh bentuk (27d). Operator $\hat{l}_x^2$ hanya mengandung derivatif ke koordinat sudut sehingga berkomutasi dengan r^{-2}. Operator Hamilton $\hat{H}$ yang berbentuk $\hat{T} + V(\hat{x})$ dengan demikian dapat dinyatakan dalam operator koordinat bola dan operator derivatifnya secara

$$(\hat{H}_x)_{\text{bola}} = (\hat{p}_x)_r^2/2m + \hat{l}_x^2/(2mr^2) + V(r, \theta, \phi). \qquad (28)$$

Suku kedua sering ditafsirkan sebagai tenaga potensial sentrifugal yang bersama-sama dengan suku ketiga berperan sebagai tenaga potensial efektif yang mengatur gerak radial zarah.

Sebagai topik terakhir akan dibahas wakilan koordinat operator tenaga kinetis dengan observabel klasik $T = \frac{1}{2}\boldsymbol{p}^2/m$. Wakilan Cartesannya sangat sederhana yaitu $\hat{T}_x = (\hbar^2/2m)\nabla^2$ dengan $\nabla^2 = \text{div grad} = \Sigma_{\alpha=1}^3 (\partial^2/\partial x_\alpha^2)$. Operator Laplace ∇^2 tersebut dapat dibawa ke bentuknya yang bersangkutan dalam koordinat kurvelinear q^α yaitu (Weinberg, 1972; Davydov, 1976; Flügge, 1971)

$$\nabla^2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \sqrt{g}\, g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial q^\beta} \qquad (29)$$

dengan $g^{\alpha\beta}$ adalah komponen kontravarian tensor metrik yang memenuhi $\Sigma_{b=1}^3 g^{\alpha\beta} g_{\beta\delta} = \delta_\delta^\alpha$ dan untuk sistem koordinat ortogonal bernilai $\delta_{\alpha\beta}/h_\alpha^2$. Mengingat dalam sistem sedemikian $\sqrt{g} = h_1 h_2 h_3$, maka untuk sistem koordinat kurvelinear ortogonal,

$$\nabla^2 = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \frac{h_1 h_2 h_3}{h_\alpha^2} \frac{\partial}{\partial q^\alpha};$$

$$T = \tfrac{1}{2}\nabla^2/m. \qquad (30)$$

Bentuk klasik observabel dalam koordinat kurvelinear berbentuk

$$T = \frac{1}{2m}\sum_{\alpha=1}^{3} p_\alpha p^\alpha = \frac{1}{2m}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3} p_\alpha g^{\alpha\beta} p_\beta. \qquad (31)$$

Wakilan-x operator ini akan menjadi

operator (30) apabila susunan produk dalam bentuk (31) disusun dalam bentuk sebagai berikut (Messiah, 1965)

$$\hat{T} = \frac{1}{2m}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \hat{g}^{-1/4} \hat{p}_\alpha \hat{g}^{1/2} \hat{g}^{\alpha\beta} \hat{p}_\beta \hat{g}^{-1/4} \qquad (32)$$

Dalam wakilan-x, $\hat{g} = g(q)$, $\hat{p}_\alpha = g^{-1/4} (\partial/\partial q^\alpha) g^{1/4}$ sehingga

$$\hat{T}_x = \frac{1}{2m}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3} g^{-1/2} \frac{\partial}{\partial q^\alpha} g^{1/2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial q^\beta}. \qquad (33)$$

Bentuk ini tepat sama dengan bentuk yang diharapkan (pers. 30 dengan ∇^2 disajikan oleh pers. 29). Dan untuk koordinat bola, wakilan $\hat{T}_x$ ini dapat dibawa ke bentuk (27f) dengan $(\hat{p}_x)_r$ serta $(\hat{l}^2)_x$ berturut-turut diberikan oleh pers. (21a) dan (27d). Nampak di sini bagaimana susunan perkalian operator dalam bentuk $\hat{T}$ harus disusun dan dimodifikasi dari ungkapan klasiknya agar selain masih dipertahankan sifat hermitan $\hat{T}$ (dengan susunan perkalian yang bersifat simetris), wakilan-x nya dalam koordinat kurvelinear sesuai dengan ungkapan baku (33).

Dengan cara ini pula dapat disusun pula wakilan-x operator kuadrat momentum sudut $\hat{l}^2$ yang akhirnya akan menghasilkan ungkapan (27d).

Di dalam medan elektromagnet ($\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$) yang terkait dengan potensial vektor $\boldsymbol{A}$ dan potensial skalar φ melalui persamaan (Zahara M. dan Muslim, 1991)

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A};\ \boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \alpha\, \partial\boldsymbol{A}/\partial t \qquad (34)$$

(dalam satuan SI yang akan digunakan, tetapan satuan $\alpha = 1$), persamaan dinamika kuantum sebuah zarah dengan massa m dan muatan listrik e berbentuk (Zahara M. dan Muslim, 1992)

$$\{\hat{H} - i\hbar(\partial/\partial t)\} \,|\, \Psi(t)\rangle = |\, \theta\rangle, \qquad (35)$$

dengan suku di sebelah kanan adalah suatu ket nol di ruang Hilbert. Operator Hamilton $\hat{H}$ untuk gerak tak relativistik dalam satuan SI ini berbentuk

$$\hat{H} = \tfrac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{p}} - e\hat{\boldsymbol{A}})^2/m + V(\hat{\boldsymbol{r}}) + e\hat{\varphi}. \qquad (36)$$

Dalam koordinat kurvelinear, wakilan-x pers. (35) melibatkan fungsi gelombang $\Psi(\boldsymbol{q}, t) = \langle \boldsymbol{r}(\boldsymbol{q}) \,|\, \Psi(t)\rangle$ dan wakilan-x operator $\hat{H} - i\hbar(\partial/\partial t)$ yang dapat dibentuk dengan menggunakan pers. (15b).

$$\{\hat{H} - i\hbar(\partial/\partial t)\}_x \Psi(\boldsymbol{q}, t) = g^{-1/4} e^{-i\Lambda} \Big[\frac{1}{2m} \Sigma_{\alpha,\beta=1}^3 g^{-1/4}\{(-i\hbar\, \partial/\partial q^\alpha - eA_\alpha) g^{1/2} g^{\alpha\beta} (-i\hbar\, \partial/\partial q^\beta - eA_\beta)\} g^{-1/4} + V(\boldsymbol{q}) + e\varphi - i\hbar(\partial/\partial t)\Big] g^{1/4} e^{i\Lambda} \Psi(\boldsymbol{q}, t)$$

$$= \{\tfrac{1}{2}m^{-1} \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} g^{-1/2}(-i\hbar\, \partial/\partial q^\alpha + \hbar\, \partial\Lambda/\partial q^\alpha - eA_\alpha) g^{1/2} g^{\alpha\beta} (-i\hbar\, \partial/\partial q^\beta + \hbar\, \partial\Lambda/\partial q^\beta - eA_\beta) + V(\boldsymbol{q}) + e\varphi + \hbar\, \partial\Lambda/\partial t - i\hbar(\partial/\partial t)\} \Psi(\boldsymbol{q}, t) = 0. \qquad (37)$$

Di dalam elektrodinamika kita mengetahui bahwa nilai medan ($\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$) invarian terhadap transformasi tera untuk medan potensial (A, φ) yang mengandung fungsi tera sebarang f:

$$A_\alpha \rightarrow A'_\alpha = A_\alpha + \partial f/\partial q^\alpha; \quad (38a)$$

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \partial f/\partial t. \quad (38b)$$

Persamaan gerak kuantum (37) untuk zarah yang berada dalam medan potensial (A, φ) tersebut juga bersifat invarian terhadap gabungan transformasi tera (38 a, b) dan transformasi uniter yang sesuai untuk fungsi gelombang $\Psi(q,t)$.

$$\Psi(q,t) \rightarrow \Psi'(q,t) = g^{-1/4} e^{-i\Lambda'} \chi(q)$$

$$= e^{i\Delta}\, \Psi(q,t) \text{ dengan } \Delta = \Lambda - \Lambda', \quad (39)$$

asalkan pergeseran fase Δ dipilih yang sesuai. Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut.

Akibat transformasi gabungan ini, ruas kiri pers. (37) berubah menjadi

$$\{\tfrac{1}{2} m^{-1} \Sigma^3_{\alpha,\beta=1}\, g^{-1/2} (-i\hbar\, \partial/\partial q^\alpha + \hbar\, \partial\Lambda'/\partial q^\alpha - e\, \partial f/\partial q^\alpha - e A_\alpha) g^{1/2} g^{\alpha\beta} (-i\hbar\, \partial/\partial q^\beta + \hbar\, \partial\Lambda'/\partial q^\beta - e\, \partial f/\partial q^\beta - e A_\beta) + V(q) + e\varphi - e\, \partial f/\partial t + \hbar\, \partial\Lambda'/\partial t - i\hbar\, (\partial/\partial t)\}\, \Psi'(q,t) =$$

$$\{\tfrac{1}{2} m^{-1} \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} g^{-\frac{1}{2}} [-i\hbar\, \partial/\partial q^\alpha + \hbar\, \partial\Lambda/\partial q^\alpha - \partial(ef + \hbar\Delta)/\partial q^\alpha - eA_\alpha]\, g^{1/2} g^{\alpha\beta} [-i\hbar\, \partial/\partial q^\beta + \hbar\, \partial\Lambda/\partial q^\beta - \partial(ef + \hbar\Delta)/\partial q^\beta - e A_\beta] + V(q) + e\varphi - \partial(ef + \hbar\Delta)/\partial t + \hbar\, \partial\Lambda/\partial t - i\hbar\, (\partial/\partial t)\}\, \Psi(q,t) = 0 \quad (40)$$

yaitu apabila Δ dipilih sehingqa $ef + \hbar\Delta = 0$. Dengan demikian maka persamaan gerak kuantum bersifat invarian terhadap transformasi gabungan (38a, b) dan (39) dengan pemilihan pergeseran fase fungsi gelombang sebesar

$$\Delta = -ef/\hbar \quad (41)$$

yang tak mengubah aspek fisis fungsi gelombang.

IV. PEMBAHASAN DAN KESIMPULAN

Penyajian Mekanika Kuantum dalam wakilan koordinat dengan menggunakan sistem koordinat kurvelinear dapat dilakukan secara konsisten dengan mengintroduksikan dua jenis fungsi gelombang (wakilan-x dan wakilan-q) yang masing-masing terkait dengan unsur volume invarian $d\tau = d^3x = \sqrt{g}\, d^3q$ dan $d^3q = dq^1\, dq^2\, dq^3$.

Untuk observabel yang merupakan perkalian operator $\hat{q}^\alpha$ dan $\hat{p}_\alpha$ yang saling tak berkomutasi, diperlukan modifikasi perkalian tersebut sehingga bentuknya tetap mempertahankan sifat hermitan (melalui proses pensimetrian) dan implikasi fisis serta matematis yang diakibatkannya sesuai dengan fakta eksperimen (Messiah, 1965).

Cara yang diuraikan dalam makalah ini memberikan gambaran bagaimana operator Hamilton dan momentum sudut dalam wakilan-x dapat disajikan secara konsisten melalui ungkapannya yang bersifat invarian tera sebagai fungsi koordinat dan momentum kanonisnya dalam wakilan koordinat kurvelinear, bagi observabel maupun keadaan kuantum sistem, tanpa terikat pada bentuk Cartesan yang sangat khusus dan terbatas dalam pemakaiannya.

DAFTAR PUSTAKA

Davydov, A. S., 1976 : ***Quantum Mechanics***, edisi 2, hal. 54 – 55, Pergamon Press, New York.

Flügge, S., 1971 : ***Practical Quantum Mechanics***, jilid I, hal. 19 – 20, Springer Verlag, New York.

Kjaergaard, H. G. dan O. E. Mortensen, 1990 : ***The quantum mechanical Hamiltonian in curvilinear coordinates : A simple derivation***, *Am. J. Phys.*, 58, 344 – 347.

Messiah, A., 1965 : ***Quantum Mechanics***, North Holland Pub. Co., Amsterdam, jilid 1, hal. 70.

Park, D., 1992 : ***Introduction to the Quantum Theory***, edisi 3, hal. 160 – 161, McGraw-Hill, New York.

Trigg, G. L., 1964 : ***Quantum Mechnics***, hal 68 – 74, D. van Nostrand, New York.

Weinberg, S., 1972 : ***Gravitation and Cosmology***, John Wiley, New York, hal. 107.

Zahara M dan Muslim, 1991 : ***A General System of Units in Electromagnetism***, *Proceedings of ASPEN Bicentennial Faraday Meeting, Yogyakarta – Indonesia, July 30 – 31, 1991*, Indonesia Physical Society.

Zahara M. dan Muslim, 1992 : ***Relativitas Khusus dan Mekanika Kuantum sebagai Sokoguru Fisika Masa Kini***, Berkala Ilmiah MIPA, No. 2 Th. IV, 1992, FMIPA – UGM, p. 46-62.