Berkala Ilmiah FMIPA - UGM, Tahun IV, No. 2, Oktober 1992
hal. 1 - 14

PROGRAM KESETIMBANGAN

B. Susanta

Jurusan Matematika, FMIPA UGM, Yogyakarta 55281

INTISARI

Program Kesetimbangan timbul bila beberapa pihak yang saling terkait ingin mengoptimalkan sasaran masing-masing. Dari segi model, masalah masing-masing pihak merupakan model Program Non Linear. Dalam tulisan ini diperkenalkan metode pendekatan "ikuti jalur" lewat Homotopi untuk menyelesaikan Program Kesetimbangan secara analitis. Metode baru ini memberi harapan bagi penyelesaian masalah yang sebelumnya sukar diselesaikan.

Equilibrium Programming

ABSTRACT

An Equilibrium Programming arises when each of the interrelated components in a system is attempting to optimize its objective function. From the point of view of modeling, the problem of each component is a Non Linear Programming model. In this paper, a "path following" method is introduced, a method which via a Homotopy, tries to solve the Equilibrium Programming analytically. This new method gives hope for the solution of many "unsolved" problems.

I. PENDAHULUAN

1. 1. *Latar Belakang*

Masalah optimasi dengan kendala dapat ditulis sebagai

Mencari x_i, i = 1, . . , n yang memaksimalkan $f(x_i)$ dengan $f = R^n \to R'$, dengan kendala

$g_j(x_i) \geq 0$, j = 1, . . . , r ;
$h_k(x_i) = 0$ k = 1, . . . , s.

Secara umum untuk kejadian yang tak linear masalahnya disebut Program Non Linear (PNL). Untuk ini sudah tersedia bermacam metode analitis maupun metode numeris bila yang analitis gagal (Mital, 1976 dan Shapiro, 1979).

Program Kesetimbangan (PK) melibatkan banyak pihak dengan masing-masing mempunyai PNL sendiri-sendiri tetapi dengan peubah yang dimiliki bersama. Ternyata PK ini banyak sekali terapannya. Dalam bidang Ekonomi banyak masalah yang masuk ke lingkup "Kesetimbangan Ekonomi" antara lain *exchange model*, juga model-model kebutuhan (*utility*) (Gale, 1960; Shapiro, 1979, Bab 7). Teori Permainan sebagai kejadian khusus dari PK mempunyai penggunaan cukup luas, di samping bidang Ekonomi juga di bidang lain seperti Psikologi yang membahas "kepentingan yang bertentangan" (*conflicting interest*). (Coombs *et al.*, 1970 dan Thomas, 1984). Kesetimbangan juga terdapat dalam masalah jaringan, baik lalu-lintas maupun jaringan listrik. Demikian pula dalam jaringan konstruksi sipil.

Persoalan timbul karena metode-metode analitis untuk menyelesaikan PK masih banyak keterbatasannya. Sebelum lari ke metode numeris, maka metode "ikuti jalur" masih mencoba untuk mencari penyelesaian secara analitis. Metode ini sebetulnya sudah mulai diperkenalkan oleh Davidenko pada tahun 1953, tetapi baru berkembang mulai tahun 1967 dengan tokoh-tokoh : Scarf, Cohen, Lemke, Howson, Kuhn dan lain-lain.

Seperti halnya dalam PNL, dikenal dua pendekatan ialah pendekatan fungsi diferensiabel dan pendekatan linear potong demi potong, demikian pula dalam PK. Dalam penelitian berikut yang dibahas adalah pendekatan diferensiabel.

Untuk masuk ke PK, dianggap pengenalan terhadap Teori Permainan (*Theory of Games*) dan Program Non Linear sudah dirintis.

II. PROGRAM KESETIMBANGAN

2. 1. Hukum Penawaran dan Permintaan

Bila dianggap bahwa hubungan antara harga dan besar permintaan / penawaran suatu komoditi tidak tergantung kepada harga komoditi lain, maka timbul fungsi penawaran dan fungsi permintaan untuk satu komoditi pada harga p sebagai berikut

$x_s = f(p)$: besar penawaran (*supply*),
$x_D = g(p)$: besar permintaan (*demand*).

Bila untuk $p = p_0$ dipenuhi $x_s = x_D$ ($= x_0$) maka timbul titik $E(x_0, p_0)$ yang disebut titik kesetimbangan pasar (*market equilibrium*). Nilai p_0 bukanlah harga maksimum bagi produsen atau harga minimum bagi konsumen, tetapi adalah harga optimal yang dapat dicapai oleh masing-masing dan tidak ada yang lebih baik lagi.

Meningkat sedikit, andaikan bahwa harga beberapa (n) komoditi saling berkaitan sehingga timbul n pasang fungsi penawaran / permintaan sebagai berikut :

$$\left.\begin{array}{l} x_{si} = f_i(p_1, \dots, p_n) \\ x_{Di} = g_i(p_1, \dots, p_n) \end{array}\right\} i = 1, \dots, n.$$

Dengan menyamakan $x_{si} = x_{Di}$, timbul susunan n persamaan dalam n peubah $p_1, \dots, p_n$. Hasil penyelesaian susunan ini beserta x_i yang sesuai menghasilkan "titik kesetimbangan" ($\{x_i\}, \{p_i\}$).

Dalam hal semua fungsi di atas linear, maka konsep determinan dan teori matriks dapat digunakan untuk mencari penyelesaian perangkat $\{ p_i \}$.

2. 2. Permainan Dua-Pihak Jumlah - Nol (*Two-Person Zero-Sum Games*)

Permainan ini timbul bila dua pihak saling berhadapan, masing-masing mempunyai pilihan langkah untuk menyusun strategi optimal berdasarkan tabel pembayaran yang sudah diketahui kedua pihak [tabel (2. 1)].

Tabel 2. 1

		P_2	
		y_1	y_2
P_2	x_1	a_{11}	a_{12}
	x_1	a_{21}	a_{22}
	x_3	a_{31}	a_{32}

x_i : besar peluang P_1 (pihak-1) memilih langkah-i. $\Sigma_{i=1}^{m} x_i = 1$;

y_j: besar peluang P_2 (pihak-2) memilih langkah-j. $\Sigma_{j=1}^{n} y_j = 1$;

a_{ij} : besar pembayaran dari P_2 kepada P_1. (= besar kemenangan P_1 terhadap P_2).

Perumusan masalah permainan dua-pihak jumlah-nol adalah sebagai berikut. Masalah bagi P_1 ialah mencari $x_i \geq 0$, $\Sigma_{i=1}^{n} x_i = 1$ dan menghasilkan

$$\underline{V}^* = \max_{x_i} \min_{y_j} \underline{V}(x_i, y_j) \quad (2.1)$$

(strategi maksimin)

sedang bagi P_2 ialah mencari $y_j \geq 0$, $\Sigma_{j=1}^{n} y_j = 1$ dan menghasilkan

$$\bar{V}^* = \min_{y_j} \max_{x_i} \bar{V}(x_i, y_j) \quad (2.2)$$

(strategi minimaks)

Von Neumann dalam *Teorem Minimaks* nya mengatakan :

Dalam permainan dua pihak jumlah-nol seperti di atas selalu dapat ditemukan $V = \underline{V}^* = \bar{V}^*$.

Bila (x_i^*, y_j^*) adalah pasangan strategi optimal bagi kedua pihak, maka

$$\underline{V}(x_i, y_j^*) \leq V(x_i^*, y_j^*) \leq \bar{V}(x_i^*, y_j) \quad (2.3)$$

dan

$$[\underline{V}(x_i, y_j^*)]_{maks} = V(x_i^*, y_j^*) = [\bar{V}(x_i^*, y_j)]_{min}$$

dan ini disebut **nilai permainan.**

$$\{ x_i^*, y_j^*, V \}$$

disebut **penyelesaian** permainannya.

Bila ada dua pasang strategi optimal :

$$(x^*_i, y^*_j) \text{ dan } (x_k^*, y_l^*)$$

maka

$$V(x_i^*, y_j^*) = V(x_k^*, y_l^*).$$

Ternyata keduanya merupakan pasangan soal Program Linear yang saling dual.

Karena (x_i^*, y_j^*) memenuhi pers. (2. 3), maka pasangan (x_i^*, y_j^*) disebut **titik kesetimbangan** (*equilibrium point*) karena P_1 tidak dapat memperoleh nilai $\underline{V}$ yang lebih besar dari V dengan mengambil $x_i \neq x_i^*$ demikian pula P_2 tidak dapat memperoleh $\bar{V}$ yang lebih kecil dari V dengan mengambil $y_j \neq y_j^*$

Karena berlakunya pers. (2. 3) pula maka (x_i^*, y_j^*) disebut titik pelana (*saddle point*). (Mital, 1976, hal. 45). Beberapa buku membatasi istilah titik pelana hanya untuk kejadian strategi murni saja.

2. 3. Permainan Dua-Pihak Jumlah-Tak-Nol

Permainan dua-pihak jumlah-tak-nol timbul bila jumlah kemenangan keduanya tidak sama dengan nol, berarti masing-masing pihak mempunyai matriks pembayaran sendiri-sendiri. Dengan demikian P_2 tidak lagi memainkan strategi minimaks melainkan strategi maksimin seperti halnya P_1. Kedua soal tidak lagi saling dual.

Contoh 2. 1

Contoh klasik untuk ini ialah kejadian dua orang yang tertangkap dengan sebagian hasil rampokan. Dalam pemeriksaan **yang terpisah**, masing-masing mempunyai dua pilihan langkah : atau mengaku merampok atau tidak, dengan matriks pembayaran berupa lama tahun mendekam di penjara seperti dalam Tabel 2. 2 (diambil negatifnya untuk dimaksimalkan).

Tabel 2. 2. Matriks pembayaran untuk kedua perampok

		Perampok-2 Mengaku	tidak
Perampok 1	Mengaku	$(-6, -6)$	$(0, -10)$
	tidak	$(-10, 0)$	$(-2, -2)$

Contoh 2. 2

Tabel 2. 3. Tabel bersama dan tabel masing-masing

(a)

P_1 \ P_2	1	2
1	(2, 3)	(1, 1)
2	(5, 4)	(6, 5)

(b)

P_1 \ P_2	1	2
1	2	1
2	5	6

(c)

P_2 \ P_1	1	2
1	3	4
2	1	5

Tabel 2. 3a : Tabel pembayaran bersama;
Tabel 2. 3b : tabel pembayaran untuk P_1
Tabel 2. 3c : tabel pembayaran untuk P_2.

Dalam model ini mungkin sekali strategi optimal bagi kedua pihak saling sama dan sama pula dengan strategi setimbangnya (seperti contoh 2. 1), tetapi mungkin pula bahwa strategi optimal bagi masing - masing tidak sama dan berbeda pula dengan strategi setimbang mereka (contoh 2. 3).

Nash (1951) memperluas teorem minimaks von Neumann sebagai berikut.

Teorem Nash : Setiap permainan dua pihak (jumlah-nol maupun tidak) dengan banyak pilihan langkah yang berhingga mempunyai paling sedikit satu titik kesetimbangan.

2. 4. Permainan m-Pihak

Anggap ada m pihak yang bermain, P_i, i = 1, . . . , m, dengan P_i mempunyai n_i pilihan langkah dengan strategi $x^i = \{x^i_j\}$, j = 1, . . , n_i dan matriks pembayaran A^i; di sini dianggap permainan bersifat jumlah-tak-nol, sedangkan permainan dengan jumlah-nol dianggap sebagai kejadian khusus.

Gabungan m-tupel strategi $(x^{1*}, x^{2*}, \ldots, x^{m*})$ disebut **titik kesetimbangan** bila untuk semua strategi y^i yang lain dipenuhi

$V_i(x^{1*}, .., x^{i*}, .., x^{m*}) \geq V_i(x^{1*}, .., y^i, .., x^{m*})$ untuk i = 1, . ., m (V_i adalah nilai harapan untuk P_i).

Ini berarti bahwa bagi **setiap** pihak P_k, dengan diberikan x^{i*}, i ≠ k, maka x^{k*} adalah strategi yang sudah optimal, sehingga setiap pihak tidak ingin berpindah dari strateginya karena akan merugi. Inilah ciri titik kesetimbangan.

Untuk permainan m-pihak inipun berlaku Teoreml Nash : Setiap permainan m-pihak yang hingga mempunyai paling sedikit satu titik kesetimbangan.

Biasanya diusahakan penyelesaian setengah kooperatif yang menuntut sebagian dapat berkelompok membentuk koalisi dan yang lain juga sehingga masalah kembali ke model 2-pihak.

Bila masalah sudah terselesaikan, maka dalam kelompok koalisi kemenangan / kekalahan diratakan lagi berdasar kesepakatan sebelumnya atau dengan perbaikan lewat **imputasi** (Thomas, 1984).

Karena penelitian ini ditekankan pada pengutamaan model yang kompetitif murni, maka setiap pihak dianggap berdiri sendiri-sendiri.

2. 5. Program Kesetimbangan

Masalah kesetimbangan dapat dirumuskan sebagai berikut.

P^i: pihak yang terlibat dalam sistem tertutup ; i = 1, . ., m ;

$x^i = (x^i_1, x^i_2, .., x^i_{ni})$: peubah keputusan bagi P^i;

$x = (x^1, x^2, . ., x^m)$;

$(x^{-i}) = (x^1, . . , x^{i-1}, x^{i+1}, . ., x^m)$ yaitu x dikurangi satu anggotanya x^i. Jadi

$x = (x^i, x^{-i})$

$f^i(x)$: fungsi sasaran bagi P^i.

Maka masalah bagian bagi P^i berbunyi :

Diberikan x^{-i}, dicari x^i yang membuat

$$\begin{aligned} &\max_{x_i} f^i(x^i, x^{-i}) \text{ dengan kendala} \\ &g^i_j(x^i, x^{-i}) \geq 0, \ j = 1, . ., r_i; \\ &h^i_k(x^i, x^{-i}) = 0, \ k = 1, . ., s_i. \end{aligned} \qquad (2.4)$$

Bila setiap pihak P^i berusaha menyelesaikan masalah bagian masing-masing, maka model ini disebut **Program Kesetimbangan** (PK). Masalah lengkapnya akan mempunyai :

n peubah dengan n = $\Sigma^m_{i=1} n_i$,
r kendala pertidaksamaan dengan r = $\Sigma^m_{i=1} r_i$
s kendala persamaan dengan s = $\Sigma^m_{i=1} s_i$.

Model di atas perlu dibandingkan dengan model Program Non Linear (PNL) yang dengan beberapa tambahan Kualifikasi Kendala (*Constraint Qualification*) dapat dirumuskan sebagai berikut.

Dicari x yang membuat maksimal $f(x)$

dengan kendala

$$\begin{aligned} &g_j(x) \geq 0, j = 1, ., r ; \\ &h_k(x) = 0, k = 1, ., s. \end{aligned} \qquad (2.5)$$

Jelas bahwa masalah bagian program kesetimbangan merupakan suatu PNL.

3. IKUTI JALUR

3. 1. Homotopi

Banyak algoritme penyelesaian masalah kembali ke bentuk penyelesaian susunan persamaan. Metode homotopi mencoba mencari penyelesaian dengan cara memilih suatu penyelesaian yang dikenal dari suatu susunan persamaan yang "berdekatan" dengan susunan semula, lalu bergerak "membelok" menuju ke penyelesaian susunan yang semula.

Contoh 3. 1

Dicari penyelesaian susunan

$$\text{(i)}\quad \left\{ \begin{array}{r} x^3 + 2x^2 - x + 2y = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{array} \right\}$$

disusun

$$\text{(ii)}\quad \left\{ \begin{array}{r} x^3 - x + 2yt\,(2x^2) = 0 \\ x - y + t\,(1) = 0 \end{array} \right\}$$

untuk $t = 0$, diperoleh susunan persamaan

$$\text{(iii)}\quad \left\{ \begin{array}{r} x^3 - x + 2y = 0 \\ x - y = 0 \end{array} \right\} \text{ yang}$$

mempunyai $(x^0, y^0) = (0, 0)$ sebagai penyelesaiannya. Kemudian dari (ii), y dapat dieliminasi untuk mencari hubungan $x = x(t)$ sebagai berikut :

$$x^3 + 2tx^2 + x + 2t = 0$$

$$(x^2 + 1)(x + 2t) = 0,$$

maka $x = x(t) = -2t$
dan $y = y(t) = -2t + 1$.

Untuk $t = 0$, $(x^0, y^0) = (0, 0)$ akan memenuhi (iii) dan

Untuk $t = 1$, $(x^*, y^*) = (-2, -1)$ akan memenuhi (i) yaitu penyelesaian yang dicari.

Secara umum

R^n = ruang Euclides dimensi n

Fungsi $F : R^n \to R^n$ dengan $F = (F_1, \ldots, F_n)$; $F = F(x)$ berarti $F_i = F_i(x)$ dengan $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Menyelesaikan $F(x) = 0$ berarti menyelesaikan susunan n persamaan dengan n peubah. Misalkan x^* adalah penyelesainnya.

Untuk menemukan x^*, metode homotopi menempuh langkah-langkah sebagai berikut.

a. Menyusun fungsi homotopi $H(x, t)$: $R^{n+1} \to R^n$ dengan

$$(x, t) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \in R^{n+1};$$

$$H = (H_1, H_2, \ldots, H_n) \in R^n.$$

sedemikian sehingga untuk $t = 0$, $H(x, 0) = E(x)$ dengan nilai nolnya x^0 mudah diketahui .

Namakan $E(x)$ **fungsi awal**. Untuk $t = 1$, $H(x, 1) = F(x)$ (fungsi semula).

b. Dari susunan $H(x, t) = 0$ dicari fungsi-fungsi $x = x(t)$ sehingga

$$H(x, t) = H(x(t), t).$$

Untuk $t = 0$ maka $x = x(0)$ akan memenuhi $H(x, 0) = E(x) = 0$ sehingga $x(0) = x^0$ yang sudah dikenal. Berangkat dari x^0 ini, t dijalankan dari 0 sampai 1, maka $x(t)$ akan berangkat dari x^0 melalui jalur tertentu menuju ke $x = x(1)$ yang akan memenuhi $H(x, 1) = 0$, berarti memenuhi $F(x) = 0$.

Seperti diketahui, fungsi $x = x(t)$

menyajikan suatu kurve dalam R^n, yang dinamai jalur (*path*) yaitu kurve dalam ruang yang potong demi potong harus diferensiabel.

3. 2. Beberapa Macam Homotopi

Sementara ini dikenal 3 macam bentuk fungsi homotopi sebagai berikut :

a. *Homotopi Newton*

$$H(x, t) = F(x) - (1 - t)\,F(x^0)$$

sehingga

$E(x) = F(x) - F(x^0)$ yang jelas mempunyai x^0 sebagai nilai nol

b. *Homotopi Titik Tetap (Fixed - Point Homotopy)*

$$H(x, t) = (1 - t)(x - x^0) + t\,F(x)$$

dengan $E(x) = x - x^0$.

c. *Homotopi Linear*

$$H(x, t) = t\,F(x) + (1 - t)\,E(x)$$
$$= E(x) + t\,[F(x) - E(x)]\,.$$

Homotopi Newton dan titik-tetap lebih mudah ditentukan karena x^0 dapat dipilih sebarang. Homotopi linear dapat disusun asal dikenal x^0 yang memenuhi $E(x) = 0$ dan diusahakan mudah menentukan $x = x(t)$. Contoh 3. 1 menggunakan homotopi linear ini.

3. 3 Eksistensi Jalur

Timbul pertanyaan apa syaratnya supaya jalur dari x ke x^* ada sehingga dapat "diikuti". Secara ringkas jawabannya adalah sebagai berikut.

Jika disusun fungsi homotopi H = $R^{n+1} \to R^n$:

Disusun

$$H(x, t) = 0\ ;$$

$$H^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{ (x, t) \mid H(x, t) = 0 \}.$$

Jadi H^{-1} adalah himpunan penyelesaian $(x, t) \in R^{n+1}$ dari persamaan $H(x, t) = 0$.

Untuk t tertentu, $H^{-1}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \{ x \mid H(x, t) = 0 \}$ berarti $H^{-1}(t)$ masih merupakan fungsi t.

Dengan demikian $H^{-1}(0)$ adalah himpunan $x(0)$ ialah himpunan penyelesaian dari $H^{-1}(x, 0) = E(x) = 0$.

Akan dibuktikan bahwa H^{-1} memuat jalur, dan tidak memuat titik terisolasi, percabangan dsb. Jacobian dari $H(x, t)$ dapat ditulis sebagai

$$H'(x, t) = \left\{ \begin{array}{ccc|c} \dfrac{\partial H_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial H_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial H_1}{\partial t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial H_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial H_n}{\partial x_n} & \dfrac{\partial H_n}{\partial t} \end{array} \right\}$$

$$= \left(H'_x(x, t), \partial H/\partial t \right)$$

Misalkan $(\bar{x}, \bar{t}) \in H^{-1}$, jadi

$$H(\bar{x}, \bar{t}) = 0 \cdot \qquad (3.2)$$

Misalkan H mempunyai turunan pertama yang kontinu. Ekspansi $H(x, t)$ dapat digunakan sebagai penghampiran linear di sekitar (x, t) sebagai berikut.

$$H(x, t) \approx H(\bar{x}, t) + H'_x(\bar{x}, \bar{t})\,(x - \bar{x})$$
$$+ [\partial H/\partial t]\,(t - \bar{t})$$

karena berlakunya pers. (3. 2).

$$H(x, t) \approx H'_x(x, t)\,(x - \bar{x})$$
$$+ [\partial H/\partial t]\,(t - \bar{t}). \qquad (3.3)$$

Tinjau $(x,t) \in H^{-1}$ di sekitar $(\bar{x},t)$, jadi (x,t) memenuhi

$$H(x,t) = 0. \qquad (3.4)$$

Apabila H memang linear di sekitar $(\bar{x}, \bar{t})$, maka dari pers. (3.3) dan (3.4)

$$H'_x(\bar{x},\bar{t})(x-\bar{x}) + [\partial H/\partial t](t-\bar{t}) = 0$$

anggap H'_x mempunyai inversi, maka

$$(x-\bar{x}) = -\frac{\frac{\partial H}{\partial t}(t-\bar{t})}{[H'_x]} \qquad (3.5)$$

Ini merupakan susunan n persamaan linear dalam n + 1 peubah $(x_1,..x_n,t)$ sehingga penyelesaiannya berupa garis lurus melalui $(\bar{x},\bar{t})$.

Apabila H tidak linear, tetapi di sekitar (x,t) H masih dapat dihampiri secara linear dan pers. (3.5) akan mempunyai penyelesaian berupa kurve melalui $(\bar{x},\bar{t})$. Untuk ini diperlukan penunjang Teorem Fungsi Implisit yang dikenakan terhadap $H(x,t)$ sebagai berikut.

Teorem Fungsi Implisit

Jika $H : \mathrm{R}^{n+1} \to \mathrm{R}^n$ mempunyai turunan kontinu, dan bahwa untuk sebarang $(x,t) \in H^{-1}$, Jakobian $H'(x,t)$ mempunyai *rank* penuh (= n) maka semua $(x,t) \in H^{-1}$ akan terletak pada jalur lewat $(\bar{x},\bar{y})$ yang berturunan kontinu.

$H(x,t)$ disebut *regular* bila $H'(x,t)$ mempunyai *rank* penuh untuk semua $(x,t) \in H^{-1}$. Dengan demikian ini berakibat bahwa H^{-1} hanya memuat jalur yang berturunan kontinu.

3.4. Arah Jalur

Di muka disebutkan bahwa $x = x(t)$ memberikan jalur tetapi penyajian secara ekplisit seperti itu tidak selalu dapat ditemukan. Untuk mempermudah dan untuk memberikan arah kepada jalurnya, maka diadakan parametrisasi dengan memasukkan parameter p yaitu panjang busur pada jalur tersebut.

Sebelumnya sebagai ganti lambang (x,t), akan ditulis

$y = (y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})$ dengan $y_i = x_i$, $i = 1,\ldots,n$; $y_{n+1} = t$, sehingga

$$y = (x,t).$$

Disusun $y = y(p) \in H^{-1}$, jadi $H(y(p)) = 0$.

Kedua ruas diturunkan ke p; hasilnya

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial H}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dp} = 0 \text{ atau } H'(y)\dot{y} = 0$$

dengan $\dot{y} = \{dy_i/dp\}$ (3.6)

Pers. (3.6) merupakan susunan n buah persamaan linear dalam (n + 1) peubah $\dot{y}_i$, maka dengan metode Cramer penyelesaiannya dapat ditulis sebagai

$$\dot{y}_i = (-1)\det H'_{-i}(y);\ i = 1,\ldots,n+1 \qquad (3.7)$$

dengan H'_{-i} diperoleh dari matriks Jacobi dengan mencoret kolom ke-i. Susunan (3.7) disebut persamaan diferensial basis. Dengan memberikan titik awal $y^0 = y(p^0) = (x^0,t^0) \in H^{-1}$, maka penyelesaian pers. (3.7) akan memberikan kurve yang tunggal ialah jalur dalam H^{-1} yang dicari.

Dengan menjalankan p, orang dapat menelusuri atau mengikuti jalur sesuai dengan pertambahan nilai p menuju titik sasaran.

Dengan demikian parametrisasi akan memberikan arah pada jalur dan inilah yang melahirkan istilah ikuti jalur.

3.5 Terapan ke Program Non Linear (PNL)

Masalah PNL dapat dirumuskan sebagai berikut (lihat Bagian II):

Mencari x yang memaksimalkan $f(x)$ dengan kendala

$$\begin{aligned} g_j(x) &\geq 0, j = 1,\ldots,r \\ h_k(x) &= 0, k = 1,\ldots,s \end{aligned} \qquad (3.8)$$

Titik x yang memenuhi kendala di atas disebut titik fisibel sedang himpunan titik fisibel (D) disebut himpunan fisibel. Bagi suatu titik yang menjadi titik optimal bagi (3.8) tersedia syarat perlu dan cukup yang terkenal dengan syarat Kuhn-Tucker (K-T) sebagai berikut.

Syarat Kuhn Tucker:

$$\nabla f(x)^T + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \nabla g_j(x)^T + \sum_{k=1}^{s} \mu_k \nabla h_k(x)^T = 0. \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} &\lambda_j \geq 0,\ g_j(x) \geq 0, j = 1,\ldots,r; \\ &\lambda_j g_j(x) = 0,\ j = 1,\ldots,r; \qquad (3.9) \\ &h_k(x) = 0,\ k = 1,\ldots,s. \end{aligned}$$

Kualifikasi Kendala (*Constraint Qualification*):

1. Ada titik $x^0 \in \mathrm{R}^n$ yang memenuhi

$$g_j(x) > 0,\ j = 1,\ldots,r;$$
$$h_l(x) = 0,\ k = 1,\ldots,s.$$

2. Untuk setiap $x \in$ D, vektor-vektor $\nabla h_k(x)$, k = 1, .., s, saling tak gayut linear. (3.10)

Teorem Titik Optimal

Bila f dan g_j adalah fungsi-fungsi yang konkaf dan C^1, h_k linear, dan pers. (3.10) dipenuhi, maka x^* adalah penyelesaian optimal dari PNL (3.10) bila dan hanya bila terdapat $\lambda^* = (\lambda_1^*,\ldots,\lambda_r^*)$ dan $\mu^* = (\mu_1^*,\ldots,\mu_s^*)$ sedemikian hingga pers. (3.9) dipenuhi pada (x^*, λ^*, μ^*).

Syarat K-T yang memuat pertidaksamaan akan diubah menjadi berbentuk persamaan dengan pertolongan fungsi α sebagai berikut.

Definisikan $\alpha^+ = [\text{maks}\{0,\alpha\}]^q$;

$\alpha^- = [\text{maks}\{0,-\alpha\}]^q$

q bilangan asli.

Dari definisi diturunkan

$$\alpha^+ > 0,\ \alpha^- > 0,\ \alpha^+\alpha^- = 0$$

dan α^+ maupun α^- adalah C^{q-1}.

Syarat K-T (3.9) berubah menjadi **Persamaan Kuhn-Tucker**:

$$\nabla f(x)^T + \sum_{j=1}^{r} \alpha_j^+ \nabla g_j(x)^T + \sum_{k=1}^{s} \mu_k \nabla h_k(x)^T = 0;$$

$$\alpha^- - g_j(x) = 0,\ j = 1,\ldots,r; \quad (3.12)$$

$h_k(x) = 0$, k = 1, .., s dengan $\alpha \in \mathrm{R}^r$.

Metode Ikuti Jalur untuk PNL

Tinjau kembali masalah (3. 8). Anggap f dan g_j konkaf dalam C^3 sedang h_k linear. Anggap kualifikasi kendala (3. 10) dipenuhi.

Untuk menyusun fungsi homotopi, dipilih fungsi awal sebagai berikut.

$$f^0(x) = -\tfrac{1}{2}\,\| x - x^0 \|^2 = -\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^0)^2$$

Bila x^0 diambil memenuhi pers. (3. 10), maka jelas bahwa x^0 adalah penyelesaian bagi masalah.

Maksimalkan $f^0(x)$ dengan kendala

$$\left.\begin{aligned} g_j(x) &\geq 0, \ \ j = 1, .., r; \\ h_k(x) &= 0, \ \ k = 1, .., s. \end{aligned}\right\} \quad (3.13)$$

Kemudian disusun persiapan fungsi homotopi :

$$\underset{x}{\text{maks}}\, f(x, t) = (1 - t) f^0(x) + t f(x)$$

dengan kendala

$$g_j(x) > 0, \ \ j = 1, .., r; \quad (3.14)$$

$$h(x) = 0, \ \ k = 1, .., s$$

untuk t tertentu, $0 \leq t \leq 1$.

Jelas bahwa untuk $t = 0$, pers. (3. 14) menjadi (3. 13) dengan x^0 sebagai penyelesaiannya. Kemudian dengan metode ikuti jalur, t dibawa ke $t = 1$, pers. (3. 13) akan menjadi pers. (3. 8) ialah masalah PNL semula yang dicari penyelesaiannya misalnya x^* yang sesuai dengan $t = 1$.

Untuk maksud di atas disusun persamaan K-T (3. 12) untuk (3. 14) sebagai berikut.

$$H(x,\alpha,\mu,t) \equiv \begin{cases} -(1-t)(x - x^0) \\ \quad + \Sigma_{j=1}^{r} \alpha_j^{+} \nabla g_j(x)^T \\ \quad + \Sigma_{k=1}^{r} \mu_k \nabla h_k(x)^T \\ \quad + t \nabla f(x)^T = 0 \\ \alpha_j^{+} - g_j(x) = 0, \ j = 1 \to r \\ h_k(x) = 0, \ \ k = 1 \to s \end{cases} \quad (3.15)$$

H inilah fungsi homotopinya.

Catatan : Karena dianggap bahwa f, g, h adalah C^3 dan dipilih $q = 3$, maka ada jaminan bahwa H adalah C^2.

Dengan menambah bukti bahwa untuk $t = 0$ ada penyelesaian tunggal dan hadirnya jalur membawa $t = 0$ sampai ke $t = 1$, maka penyelesaian x^* akan diperoleh.

IV. PROGRAM KESETIMBANGAN DENGAN IKUTI JALUR

4. 1. Perumusan Masalah

Ada m pihak P^i, i = 1, . . , m .

Setiap P^i mempunyai n_i buah peubah keputusan (pilihan langkah), namakan $x^i = (x_1^i, x_2^i, \ldots x_{n_i}^i)$, jadi $x^i \in R^{n_i}$

$x = (x^1, \ldots, x^m)$ adalah vektor peubah keputusan untuk semua P^i, jadi $x \in R^n$ dengan $n = \Sigma_{i=1}^m n_i$.

$x^{-i} = (x^1, .., x^{i-1}, x^{i+1}, .., x^m)$, didapat dengan mencoret x^i dari x.

Jadi dengan mengubah urutan dapat ditulis

$$x = (x^i, x^{-i}).$$

Masalah bagian bagi P^i

Diberikan x^{-i}

P^i mencari x^i untuk membuat

$$\left.\begin{aligned} &\underset{x^i}{\text{maks}}\, f^i(x^i, x^{-i}) \text{ dengan kendala} \\ &g_j^i(x^i, x^{-i}) \geq 0, \ j = 1, .., r_i; \\ &h_k^i(x^i, x^{-i}) = 0, \ k = 1, .., s_i. \end{aligned}\right. \quad (4.1)$$

Vektor $x^* = (x^{i*}, x^{-1*})$ merupakan titik kesetimbangan bagi masalah lengkapnya bila diberikan x^{-1*}, maka x^{i*} merupakan penyelesaian pers. (4. 1) untuk semua i = 1, . . , m.

4. 2. Eksistensi Titik Kesetimbangan

Dianggap semua fungsi dalam pers. (4. 1) adalah C^3 sedang untuk x^{-i} tertentu f dan g dianggap konkaf sedang h linear. Masalah bagian adalah suatu PNL dan persamaan K-T untuknya dapat ditulis sebagai berikut.

$$\nabla_{x_i} f^i(x)^T + \sum_{j=1}^{r_i} (\alpha_j^i) + g_j^i(x)^T + \sum_{k=1}^{s_i} \mu_j^i \nabla_{x_i} h_k^i(x)^T = 0$$

$$\left.\begin{aligned} (\alpha_j^i)^{-} - g_j^i(x) &= 0, \ j = 1, .., r_i; \\ h_k^i(x) &= 0, \ \ k = 1, .., s_i. \end{aligned}\right. \quad (4.2)$$

Untuk α^i, diambil $q = 3$ jadi $(\alpha_j^i)^+ = [\text{maks}\{0, \alpha_j^i\}]^3$; $(\alpha_j^i)^- = [\text{maks}\{0, -\alpha_j^i\}]^3$.

Jadi untuk masalah bagian ini terdapat $n_i + r_i + s_i$ buah persamaan dalam $n_i + r_i + s_i$ peubah.

Dengan menunjuk ke Teorem Titik Optimal (Bagian III) dan dengan penggantian Syarat K-T (3. 10) menjadi Persamaan K-T (3. 13), maka sesudah memenuhi Kualifikasi Kendala yang sesuai, pers. (4. 2) merupakan syarat perlu dan cukup untuk dapat ditemukannya penyelesaian untuk pers. (4. 1).

Peningkatan ke masalah lengkapnya menjadi sebagai berikut.

Ambil $u = \Sigma_{i=1}^m (n_i + r_i + s_i)$.

Masalah lengkapnya diperoleh dari pers. (4. 1) dengan menjalankan i = 1, . ., m. Demikian pula syarat perlu dan cukup untuk masalah umum tersebut didapat dari pers. (4. 2) dengan menjalankan i = 1, . ., m. Maka akan terdapat susunan u persamaan dalam u peubah yang dijamin ada penyelesaiannya, yang tidak lain adalah titik kesetimbangan yang dicari.

Jadi x^* (x^{i*}, x^{-1*}) adalah titik kesetimbangan bagi masalah kesetimbangan yang lengkap bila

diberikan x^{-i*} untuk semua i

$(x^{i*}, \alpha^{i*}, \mu^{i*})$ merupakan penyelesaian pers. (4. 2) untuk semua i.

4. 3. Algoritme

Seperti dikerjakan terhadap PNL, untuk Program Kesetimbangan juga ditempuh cara yang sama. Diadakan parametrisasi dengan memasukkan t ke dalam susunan. Masalah bagian (4. 1) menjadi sebagai berikut.

Diberikan t dan x^{-i}.

Dicari x^i yang membuat

$$\underset{x^i}{\text{maks}}\, f^i(x^i, x^{-i}, t)$$

dengan kendala

$$\left.\begin{aligned} &g_j^i(x^i,x^{-i},t) \geq 0,\ j = 1,..,r_i; \\ &h_k^i(x^i,x^{-i},t) = 0,\ k = 1,..,s_i. \end{aligned}\right\} \quad (4.3)$$

Persamaan K-T (4.2) berubah menjadi

$$\begin{aligned} &\nabla_{x_i} f^i(x,t)^T + \sum_{j=1}^{r_i} (\alpha_j^i)^+ \nabla_{x_i} g_j^i(x,t)^T \\ &\quad + \sum_{k=1}^{s_i} \mu_k^i \nabla_{x_i} h_k^i(x,t)^T = 0; \\ &(\alpha_j^i)^- - g_j^i(x,t) = 0,\ j = 1,..,r_i; \\ &h_j^i(x,t) = 0,\ k = 1,..,s_i. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Untuk t tertentu, penyelesaian m buah susunan (4.4) untuk i = 1, .., m akan memberikan penyelesaian bagi masalah lengkapnya, namakan $(x^*, \alpha^*, \mu^*, t)$ yang memenuhi susunan persamaan lengkap : $H(x, \alpha, \mu, t) = 0$ (u buah persamaan dalam u + 1 peubah).

Bila Jacobian H' mempunyai rank penuh (= n) untuk setiap penyelesaian $(x^*, \alpha^*, \mu^*, t) \in H^{-1}$, maka H regular, dan $(x^*, \alpha^*, \mu^*, t)$ menyusun suatu jalur.

Kualifikasi kendala

Sebelumnya ditulis kualifikasi kendala untuk PK ini sebagai berikut (lihat pers. 3. 11). Ambil D sebagai daerah fisibel.

1. Terdapat titik $x^0 \in D, x^0 = (x^{10}, .., x^{m0})$ sehingga untuk setiap $x \in D$, $x = (x^i, x^{-i})$ berlaku

$$\begin{aligned} &g_j^i(x^{i0},x^{-i}) > 0,\ j = 1,..,r_i; \\ &h_k^i(x^{i0},x^{-i}) = 0,\ k = 1,..,s_i. \end{aligned}$$

2. Untuk setiap $x \in D$, i = 1, .., m, vektor-vektor $\nabla_{x_i} h_k^i(x)$, k = 1, .., s_i takgayut linear. (4.5)

Fungsi homotopi

Sekarang disusun fungsi homotopi dengan memilih suatu fungsi awal seperti pada pers. 3. 14.

Diberikan x^{-i} dan t; dicari x^i yang membuat

$$\underset{x_i}{\text{maks}}\ t f^i(x^i,x^{-i}) - \tfrac{1}{2}(1-t)\ \|x^i - x^{i0}\|^2$$

dengan kendala

$$\left.\begin{aligned} &g_j^i(x^i,x^{-i}) \geq 0,\ j = 1,..,r_i; \\ &h_k^i(x^i,x^{-i}) = 0,\ k = 1,..,s_i. \end{aligned}\right\} \quad (4.6)$$

x^0 diambil dari pers. (4.5), sedang i = 1, .., m. Terlihat bahwa untuk t = 0, $x^0 = (x^{i0}, x^{-i0})$ adalah titik kesetimbangan untuk pers. (4. 6) sebab x^{i0} merupakan penyelesaian (titik optimal) bagi masalah :

Maksimalkan $-\frac{1}{2}\ \|x^i - x^{-i0}\|^2$ dengan kendala

$$\left.\begin{aligned} &g_j^i(x^i,x^{-i0}) \geq 0,\ j = 1,..,r_i; \\ &h_k^i(x^i,x^{-i0}) = 0,\ k = 1,..,s_i. \end{aligned}\right\} \quad (4.7)$$

dan karena ini berlaku untuk setiap i maka juga berlaku untuk seluruh masalah lengkapnya.

Ketunggalan x^0

Dimisalkan ada titik kesetimbangan lain $\bar{x} \neq x^0$. Pilih i yang memenuhi $\bar{x}^{-i} \neq x^{i0}$, berarti masalah bagian untuk P^i mempunyai dua titik optimal, $\bar{x}^{-i}$ dan x^{0i}. Karena $\bar{x} \in D$, maka dari 4. 5 diperoleh

$$(x^{i0}, \bar{x}^{-1}) \in D.$$

Tinjau masalah bagian ke-i untuk t = 0. Diberikan $\bar{x}^{-1}$, dicari x^i yang membuat

$$\underset{x_i}{\text{maks}}\ -\tfrac{1}{2}\ \|x^i - x^{-i0}\|^2$$

dengan kendala

$$\left.\begin{aligned} &g_j^i(x^i,\bar{x}^{-i}) \geq 0,\ j = 1,..,r_i; \\ &h_k^i(x^i,\bar{x}^{-i}) = 0,\ k = 1,..,s_i. \end{aligned}\right\} \quad (4.8)$$

Jadi jelas bahwa $(x^{i0}, \bar{x}^{-i})$ merupakan penyelesaian optimal bagi masalah bagian di atas dan tunggal (Bagian III), sehingga $(\bar{x}^i, \bar{x}^{-i})$ tidak mungkin menjadi penyelesaian optimal bagi P^i, berarti $\bar{x} = (\bar{x}^i, \bar{x}^{-i})$ bukan titik kesetimbangan bagi P. K nya. Terbukti bahwa x^0 adalah tunggal.

Penyusunan jalur

Dari x^0 diikuti jalur tertentu menuju ke t = 1 untuk mendapatkan titik kesetimbangan yang dicari diperlukan penyusunan jalur yang merupakan penyelesaian m buah persamaan K-T bagi pers. (4. 8) yang berbentuk

$$\begin{aligned} &t\,\nabla_{x_i} f^i(x)^T - (1-t)(x^i - x^{i0}) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{r_i} (\alpha_j^i)^+ \nabla_{x_i} g_j^i(x)^T \\ &\quad + \sum_{k=1}^{s_i} \mu_k^i \nabla_{x_i} h_k^i(x)^T = 0 \\ &(\alpha_j^i) - g_j^i(x) = 0,\ j = 1,..,r_i; \\ &h_k^i(x) = 0,\ k = 1,..,s_i \end{aligned} \quad (4.9)$$

untuk i = 1, . . , m.

Diperoleh u buah persamaan dalam u + 1 peubah :

$$H(x, \alpha, \mu, t) = 0. \quad (4.10)$$

Untuk t = 0, pers. (4.9) menjadi

$$\begin{aligned} &-(x^i, x^{i0}) + \sum_{j=1}^{r_i} (\alpha_j^i)^+ \nabla_{x_i} g_j^i(x)^T \\ &\quad + \sum_{k=1}^{s_i} \mu_k^i \nabla_{x_i} h_k^i(x)^T = 0 \\ &(\alpha_j^i)^- - g_j^i(x) = 0,\ j = 1,..,r_i; \\ &h_k^i(x) = 0,\ k = 1,..,s_i \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} &\text{Di } t = 0, x = x^0,\ \alpha_j^{i0} = 0,\ j = 1,..,r_i; \\ &\qquad \mu_k^{i0} = 0,\ k = 1,..,s_i, \\ &\text{dan } (\alpha_j^{i0})^- = g_j^i(x^0),\ j = 1,..,r_i. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Menuju ke titik kesetimbangan

Masih perlu dibuktikan bahwa dari titik awal di atas akan dapat dicapai titik kesetimbangan pada t = 1.

Anggaplah bahwa H regular, ini berarti pada setiap titik $(x, \alpha, \mu, t) \in H$. Jacobian H mempunyai rank penuh, jadi jalur $[x(p), \alpha(p), \mu(p), t(p)] \in H^{-1}$ memang ada. Di muka sudah terbukti bahwa untuk $t = 0$ x^0 adalah tunggal. Dari pers. (4. 11) dan (4. 12).

$$\alpha_j^{i0} = g_j^i(x) > 0, j = 1, .., r_i.$$

Karena kepositifan α_j^{i0} dan tunggalnya x^0, maka α_j^{i0} tunggal untuk j = 1, .., r_i.

Karena ketakgayutan $\nabla_{xi} h_k^i(x)$, maka μ_k^{i0}, k = 1, .., s_i juga tunggal. Jadi titik awal $(x^0, \alpha^0, \mu^0, 0)$ adalah titik tunggal dalam H^{-1}. Pada titik ini tinjau Jacobian (u × u) H'_{-t} (didapat dari Jacobian H' dengan mencoret kolom terakhir).

$$\det H'_{-t} \neq 0.$$

Dari Bagian III [persamaan diferensial basis (3. ,8)], diperoleh bahwa pada (x^0, α^0, μ^0, 0), $dt/dp \neq 0$, berarti bahwa jalur yang bermula dari (x^0, α^0, μ^0, 0) akan selalu naik.

Dengan menggunakan bukti keterbatasan dalam PNL maka di sinipun jalur akan terbatas dan menuju ke titik kesetimbangan pada saat $t = 1$.

V. KESIMPULAN

Masalah Program Kesetimbangan akan berubah menjadi masalah penyelesaian susunan persamaan (tak linear) yang biasanya sukar untuk diselesaikan, dalam arti menemukan penyelesaian eksak lewat metode analitik. Sebelum lari ke metode numerik, ternyata masih ada metode yang dapat menolong ialah metode "ikut jalur" lewat Homotopi. Masalahnya beralih ke pemilihan fungsi homotopinya.

DAFTAR PUSTAKA

Coombs, C. H., R. M. Dawes, Amos Tversky, 1970 : ***Mathematical Psychology***, Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, N. J.

Gale, David, 1960 : ***The Theory of Linear Economic Models***, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York.

Mital, K. V., 1976 : ***Optimization Methods in Operations Research and Systems Analysis***, Wiley Eastern Limited, New Delhi.

Shapiro, J. F., 1979 : ***Mathematical Programming***, John Wiley & Sons, New York.

Thomas, L. C., 1984 : ***Games, Theory and Applications***, Ellis Horwood Limited Publishers, Chichester.

Zangwill, W. I. dan C. B. Garcia, 1981 (1) : ***Equilibrium***, *Mathematical Programming* 21 (1981), North - Holland Publishing Company.

Zangwill, W. I. dan C. B. Garcia, 1981 (2) : ***Pathways to Solutions, Fixed Points, and Equilibria***. Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, N. J.