

WAVESHRIK DAN PERMASALAHANNYA

WAVESHRIK AND ITS PROBLEM

I Putu Wisna Ariawan¹ dan Subanar²

*Program Studi Matematika
Program Pascasarjana Universitas Gadjah Mada*

ABSTRACT

Suppose that given the regression model

$$y_i = f(t_i) + \sigma z_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

where $f(t_i)$ is an unknown function, σ is the known standard deviation of the noise, z_i are independent and identically standard Gaussian random variables. One of the problem in regression analysis is how to estimate the regression function $f(t_i)$ with small risk

$$R(\hat{f}, f) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(\hat{f}_i - f_i)^2.$$

Donoho and Johnstone (1994) have developed a powerful methodology based on the principle of shrinking wavelet coefficients towards zero. Their procedure is called WaveShrink.

The computationally efficient formula for computing the exact risk of WaveShrink estimates in finite sample situations can be derived. From this formula, the behaviour of WaveShrink estimator such as the accuracy of two different function models such as Doppler and Heavisine can be observed.

Using S+Wavelets computer simulation for four different functions models can be observed that

- (1) significantly WaveShrink using soft shrinkage and the universal threshold have the biggest risk, and it is not appropriate to apply the universal threshold when using soft shrinkage in WaveShrink.
- (2) WaveShrink using hard shrinkage have smaller risk than WaveShrink using soft shrinkage for all sample size.
- (3) for all sample size, the risk of the WaveShrink estimate decrease as sample size increase.

Key words : *nonparametric regression, wavelet transform, WaveShrink*

¹ STKIP Singaraja.

² FMIPA Universitas Gadjah Mada Yogyakarta.

PENGANTAR

Misalkan sekumpulan observasi diambil dari suatu variabel random Y pada n nilai variabel t dan diasumsikan bahwa $n = 2^j$ untuk suatu bilangan asli j , t_i dan y_i memenuhi model regresi :

$$y_i = f(t_i) + \sigma z_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (1)$$

dengan :

f : suatu fungsi yang tidak diketahui yang sering disebut dengan fungsi regresi.

t_i : $\frac{i}{n} \in [0, 1]$ yang sering disebut dengan variabel desain.

z_i : variabel random normal standar berdistribusi independen dan identik (iid)

σ : deviasi standard noise dan diasumsikan diketahui.

Untuk penyederhanaan notasi, selanjutnya bentuk $f(t_i)$ akan dinyatakan dengan f_i , sehingga model (1) dapat dinyatakan kembali dalam bentuk :

$$y_i = f_i + \sigma z_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2)$$

Permasalahan yang muncul berdasarkan model (2) adalah bagaimana mengestimasi $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ sedemikian sehingga kesalahan kuadrat rata-ratanya sekecil mungkin. Dengan kata lain, akan dicari estimator \hat{f} yang meminimumkan nilai resiko L_2 yang didefinisikan dengan :

$$R(\hat{f}, f) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(\hat{f}_i - f_i)^2 \quad (3)$$

Menurut Ogden (1997), teori Wavelet sebagai suatu perkembangan terbaru dalam bidang matematika, merupakan suatu teori yang sangat potensial digunakan dalam banyak aplikasi yang sangat luas, misalnya dalam statistika nonparametrik. Penggunaan wavelet dalam model regresi nonparametrik telah banyak dilakukan. Salah satu hasil dalam teori wavelet yang banyak diaplikasikan dalam model regresi nonparametrik adalah metode WaveShrink yang dipelopori oleh Donoho dan Johnstone (1994), Donoho dan Johnstone (1995), Donoho, dkk. (1995), dan Johnstone dan Silverman (1997). Prinsip metode WaveShrink adalah menyusutkan koefisien wavelet menuju nol dengan menggunakan fungsi penyusut keras ataupun fungsi penyusut lunak melalui pemilihan nilai ambang (threshold) tertentu.

Permasalahan yang akan dikaji dalam tulisan ini meliputi : (1) Penurunan rumus untuk menghitung resiko eksak WaveShrink pada

ukuran sampel berhingga. (2) Akurasi penggunaan fungsi penyusut keras dan lunak pada WaveShrink jika digunakan model fungsi doppler dan fungsi heavisine yang masing-masing punya karakteristik berbeda-beda.

PEMBAHASAN

$L^2(\mathbb{R})$ yang merupakan ruang dari fungsi-fungsi terukur f yang terdefiniskan pada garis real \mathbb{R} yang memenuhi $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$

merupakan suatu ruang Hilbert. Selanjutnya, untuk sembarang $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ didefinisikan perkalian dalam f dan g dan norm suatu fungsi f masing-masing dengan

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx \text{ dan } \|f\|_2 = \langle f, f \rangle^{1/2}$$

Definisi

Suatu himpunan vektor-vektor $\{x_n\}$ dikatakan total jika vektor yang ortogonal terhadap setiap vektor x_n hanyalah vektor nol.

Definisi

Koleksi vektor-vektor $\{x_n\}$ dikatakan merupakan basis ortonormal untuk ruang Hilbert \mathcal{H} jika $\{x_n\}$ ortonormal dan $\{x_n\}$ total.

Lemma

Misalkan $\{e_n\}$ adalah himpunan ortogonal pada ruang Hilbert \mathcal{H} , maka kedua pernyataan berikut ekuivalen.

(1) $\langle x, e_n \rangle = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x = \vec{0}$.

(2) $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$.

Akibat

Koleksi $\{x_n\}$ pada ruang Hilbert \mathcal{H} merupakan basis ortonormal jika dan hanya jika $\{x_n\}$ ortonormal dan

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n, \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

Misalkan $C = (c_{ij})$ adalah suatu matrik real ortogonal berukuran $n \times n$. Jika variabel – variabel $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ ditransformasikan ke variabel-variabel

$Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^T$ melalui aturan $y_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j$ dengan $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$ dan c_{ij} elemen matrik ortogonal C , maka terdapat transformasi invers untuk memperoleh X yang dinyatakan dengan $X_i = \sum_{j=1}^n c_{ji} Y_j$. Dengan demikian maka diperoleh Jacobian dari transformasinya adalah

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} = |C^T| = \pm 1$$

sehingga densitas vektor random $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^T$ akan berbentuk

$$f_Y(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{cases} f_X\left(\sum_{j=1}^n c_{j1} y_j, \sum_{j=1}^n c_{j2} y_j, \dots, \sum_{j=1}^n c_{jn} y_j\right) & (4) \\ 0 & \text{untuk yang lainnya} \end{cases}$$

Teorema

Misalkan $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ adalah variabel random independent dengan $X_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Pandang transformasi ortogonal yang dinyatakan dengan $Y_i = \sum_{j=1}^n c_{i,j} X_j$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Dengan transformasi itu maka variabel random $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n$ juga independent dan masing-masing berdistribusi normal dengan varian σ^2 dan mean $E(Y_i) = \sum_{j=1}^n c_{i,j} \mu_j$.

Bukti :

Karena X_1, X_2, \dots, X_n adalah variabel random independent maka

$$f_X(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_i)^2\right]$$

sebagai akibat:

$$f_Y(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \right)^n \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n c_{ji} y_j - \mu_i \right)^2 \right] \quad (5).$$

Perhatikan bahwa

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n c_{ji} y_j - \mu_i \right)^2 = \sum_{j=1}^n \left(y_j - \sum_{i=1}^n c_{ji} \mu_i \right)^2 \quad (6).$$

Dengan menyubstitusikan (6) pada (5) maka diperoleh

$$f_Y(y_1, y_2, \dots, y_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \right)^n \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n \left(y_j - \sum_{i=1}^n c_{ji} \mu_i \right)^2 \right]$$

Ide pengkonstruksian wavelet adalah bagaimana mengkonstruksikan suatu fungsi tunggal ψ (yang selanjutnya disebut wavelet) yang dapat membangun $L^2(\mathbb{R})$ sedemikian sehingga setiap $f \in L^2(\mathbb{R})$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari ψ .

Untuk menyatakan suatu fungsi atau signal dalam koefisien-koefisien wavelet ortogonal pada tingkat resolusi yang berbeda-beda maka digunakanlah Analisis Multi Resolusi (AMR).

Definisi

Keluarga subruang tertutup $\{ V_j : j \in \mathbb{Z} \}$ dari $L^2 \otimes$ yang memenuhi sifat

- (1) $V_j \subset V_{j+1}, \forall j \in \mathbb{Z}$
- (2) $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$
- (3) $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$
- (4) $f \in V_0 \Leftrightarrow f(2^j \cdot) \in V_j, \forall j \in \mathbb{Z}$
- (5) $f \in V_0 \Rightarrow f(\cdot - k) \in V_0, \forall k \in \mathbb{Z}$
- (6) Terdapat $\phi \in V_0$ sedemikian sehingga $\{ \phi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z} \}$ merupakan basis ortonormal untuk V_0

disebut AMR pada $L^2(\mathbb{R})$. Fungsi ϕ disebut fungsi skala pada AMR.

Akibat

Misalkan $\{ V_j : j \in \mathbb{Z} \}$ adalah suatu AMR pada $L^2(\mathbb{R})$ dan $\phi \in V_0$ adalah fungsi skala yang bersesuaian pada AMR itu. Selanjutnya didefinisikan :

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k), j, k \in \mathbb{Z}$$

maka $\forall j \in \mathbb{Z}, \{ \phi_{j,k} : k \in \mathbb{Z} \}$ merupakan basis ortonormal untuk V_j

Lemma

Misalkan $\psi \in W_0$ sedemikian sehingga $\{ \psi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z} \}$ merupakan basis ortonormal untuk W_0 . Misalkan pula $\psi_{j,k} = 2^{j/2} \psi(2^j \cdot - k)$ dengan $j, k \in \mathbb{Z}$ maka $\{ \psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z} \}$ merupakan basis ortonormal untuk $L^2(\mathbb{R})$.

Fungsi Penyusut Keras dan Fungsi Penyusut Lunak

Definisi

Fungsi penyusut keras didefinisikan dengan

$$\eta_H(x, \lambda) = x I(|x| > \lambda)$$

sedangkan untuk fungsi penyusut lunak didefinisikan dengan

$$\eta_S(x, \lambda) = \text{sgn}(x) (|x| - \lambda) \text{ untuk } |x| > \lambda$$

dengan $\lambda \in [0, \infty)$ menyatakan suatu ambang.

Sifat yang berlaku baik pada fungsi penyusut keras maupun fungsi penyusut lunak adalah :

$$\eta(X, \lambda\sigma) = \sigma \eta\left(\frac{X}{\sigma}, \lambda\right)$$

Hubungan antara fungsi penyusut keras dengan fungsi penyusut lunak adalah :

$$\eta_S(x, \lambda) = \eta_H(x, \lambda) - \lambda \text{ sign}(x) I(|x| > \lambda)$$

Misalkan X menyatakan koefisien wavelet dan diasumsikan $X \sim N(\theta, 1)$ selanjutnya didefinisikan mean, variansi, dan fungsi resiko L_2 estimator untuk θ di bawah fungsi penyusut $\eta(\cdot, \lambda)$ seperti berikut.

Definisi

Ambil $X \sim N(\theta, 1)$. Misalkan $M_\lambda(\theta)$, $V_\lambda(\theta)$, $R_\lambda(\theta)$ masing-masing menyatakan mean, variansi dan fungsi resiko L_2 estimator untuk θ di bawah fungsi penyusut $\eta(\cdot, \lambda)$, dan selanjutnya didefinisikan :

$$M_\lambda(\theta) = E\{\eta(X, \lambda)\}$$

$$V_\lambda(\theta) = \text{var}\{\eta(X, \lambda)\}$$

$$R_\lambda(\theta) = E\{[\eta(X, \lambda) - \theta]^2\} = V_\lambda(\theta) + [M_\lambda(\theta) - \theta]^2$$

Teorema

Berdasarkan fungsi penyusut keras $\eta_H(x, \lambda)$, maka fungsi resiko L_2 memenuhi

$$R_{\lambda}^H(\theta) = (\theta^2 + 1)\{2 - \Phi(\lambda - \theta) - \Phi(\lambda + \theta)\} + (\lambda + \theta)\phi(\lambda - \theta) + (\lambda - \theta)\phi(\lambda + \theta) + \theta^2 - 2\theta [M_{\lambda}^H(\theta)]$$

dengan Φ adalah fungsi distribusi normal standar, ϕ adalah fungsi densitas normal standar.

Bukti : Gunakan sifat $E(I_S(x)) = P(x \in S)$, I suatu fungsi indikator dan beberapa perhitungan kalkulus.

Teorema

Berdasarkan fungsi penyusut lunak $\eta_S(x, \lambda)$, maka fungsi resiko L_2 memenuhi

$$R_{\lambda}^S(\theta) = \{v_1(\lambda, \theta) + v_1(\lambda, -\theta)\} + \theta^2 - 2\theta\{M_{\lambda}^S(\theta)\}$$

dengan

$$v_1(\lambda, \theta) = (\theta^2 + 2\lambda\theta + \lambda^2)\{1 - \Phi(\lambda + \theta)\} - (\theta + \lambda)\phi(\lambda + \theta) + \{1 - \Phi(\lambda + \theta)\}$$

Bukti : serupa dengan bukti teorema sebelumnya.

Estimasi WaveShrink

Misalkan $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ menyatakan koefisien-koefisien wavelet empiris yang diperoleh melalui transformasi $w = Hy$. Estimator WaveShrink diperoleh melalui langkah berikut.

1. Menghitung transformasi wavelet $w = Hy$ melalui Transformasi Wavelet Diskrit (TWD)
2. Gunakan fungsi penyusut nonlinear $\eta(\cdot, \lambda)$ terhadap koefisien-koefisien w_k untuk memperoleh \hat{w}_k , melalui

$$\hat{w}_k = \sigma \eta\left(\frac{w_k}{\sigma}, \lambda\right),$$

dengan menyusutkan seluruh koefisien detail d_j untuk $j = 1, 2, \dots, J$.

3. Estimator WaveShrink \hat{f} diperoleh dengan menginversikan \hat{w}_k melalui Transformasi Wavelet Diskrit Invers (TWDI)

$$\hat{f} = H^T \hat{w} \text{ dengan } \hat{w} = [\hat{w}_1 \ \hat{w}_2 \ \dots \ \hat{w}_n]^T$$

Selanjutnya misalkan $w_i = H y_i$, $\theta_i = H f_i$, $e_i = H \sigma z_i$. Dengan demikian maka bentuk model (2) dapat ditulis kembali dalam bentuk :

$$w_i = \theta_i + e_i$$

Karena $\hat{f} = H^{-1} \hat{w}$ maka estimator dari WaveShrink dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\hat{f}_i = \sum_{k=1}^n h_{ki} \hat{w}_k, \text{ dengan } \hat{w}_k = \sigma \eta\left(\frac{w_k}{\sigma}, \lambda\right) \quad (7)$$

Berdasarkan rumus (7) maka ekspektasi dan variansi dari WaveShrink masing - masing dapat dinyatakan dalam bentuk

$$E(\hat{f}_i) = E\left(\sum_{k=1}^n h_{ki} \hat{w}_k\right) = \sum_{k=1}^n h_{ki} E(\hat{w}_k) \quad (8)$$

$$\text{var}(\hat{f}_i) = \text{var}\left(\sum_{k=1}^n h_{ki} \hat{w}_k\right) = \sum_{k=1}^n (h_{ki})^2 \text{var}(\hat{w}_k) \quad (9)$$

Teorema

Berdasarkan model (2) dan ortogonalitas dari H, jika σ diketahui maka

$$E(\hat{f}_i) = \sigma \left(\sum_{k=1}^n h_{ki} M_\lambda\left(\frac{\theta_k}{\sigma}\right)\right) \quad (10)$$

$$\text{var}(\hat{f}_i) = \sigma^2 \sum_{k=1}^n (h_{ki})^2 V_\lambda\left(\frac{\theta_k}{\sigma}\right) \quad (11)$$

Bukti :

Gunakan sifat $\eta(X, \lambda\sigma) = \sigma \eta\left(\frac{X}{\sigma}, \lambda\right)$, $\hat{w}_k = \sigma \eta\left(\frac{w_k}{\sigma}, \lambda\right)$, rumus (8) dan rumus (9). \square

Teorema

Misalkan $L_\lambda(\Theta) = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^{n/2^j} R_\lambda(\theta_{j,k})$ dengan $\Theta = (\theta_{j,k})$,

$j = 1, 2, 3, \dots, J$ dan $k = 1, 2, 3, \dots, \frac{n}{2^j}$. Jika σ diketahui maka

$$R(\hat{f}_i, f_i) = \frac{\sigma^2}{n} L_\lambda \left(\frac{\Theta}{\sigma} \right) + \frac{\sigma^2}{2^J}$$

Bukti :

$$\begin{aligned} R(\hat{f}_i, f_i) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(\hat{w}_i - \theta_i)^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^{n/2^j} E(\hat{w}_{j,k} - \theta_{j,k})^2 + \\ &\quad \frac{1}{n} \left\{ \sum_{k=1}^{n/2^j} E(w_{J+1,k} - \theta_{J+1,k})^2 \right\} \end{aligned}$$

(w_{J+1} merupakan koefisien s_j yang tidak disusutkan)

Karena masing-masing $w_{J+1,k}$ berdistribusi $N(\theta_{J+1,k}, \sigma^2)$ maka

$$E(w_{J+1,k}) = \theta_{J+1,k} \text{ dan } \text{var}(w_{J+1,k}) = \sigma^2,$$

akibatnya,

$$E(w_{J+1,k})^2 = \sigma^2 + (\theta_{J+1,k})^2 \text{ dan } E(w_{J+1,k} - \theta_{J+1,k})^2 = \sigma^2.$$

Karena $\hat{w}_k = \sigma \eta\left(\frac{w_k}{\sigma}, \lambda\right)$ maka $\hat{w}_{j,k} = \sigma \eta\left(\frac{w_{j,k}}{\sigma}, \lambda\right)$.

Akibatnya,

$$\begin{aligned} E(\hat{w}_{j,k} - \theta_{j,k})^2 &= \sigma^2 E\left[\eta\left(\frac{w_{j,k}}{\sigma}, \lambda\right) - \left(\frac{\theta_{j,k}}{\sigma}\right)\right]^2 \\ &= \sigma^2 R_\lambda\left(\frac{\theta_{j,k}}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

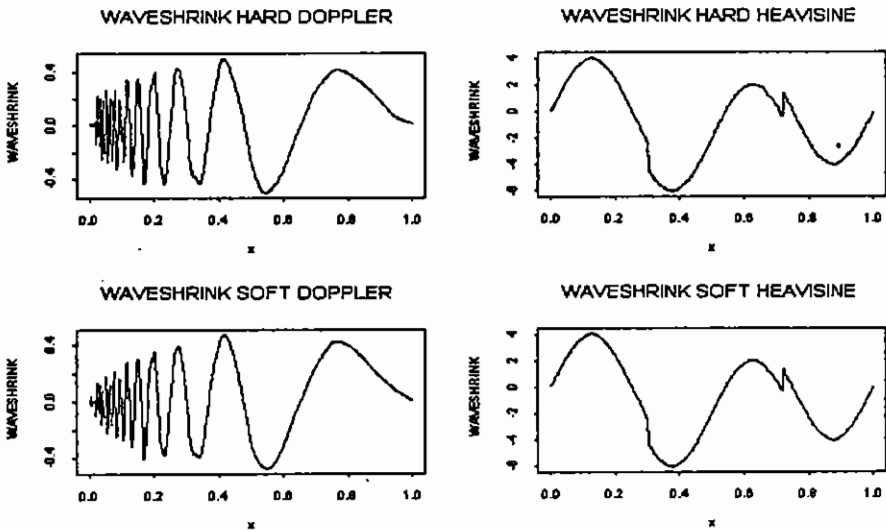
$$\begin{aligned} \text{Jadi, } R(\hat{f}_i, f_i) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^{n/2^j} \sigma^2 R_\lambda\left(\frac{\theta_{j,k}}{\sigma}\right) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n/2^j} \sigma^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^{n/2^j} R_\lambda\left(\frac{\theta_{j,k}}{\sigma}\right) + \frac{\sigma^2}{2^J} \end{aligned}$$

□

Pada masing-masing fungsi penyusut, digunakan ambang universal dan ambang minimax sesuai dengan ukuran sampel n yang diberikan. Nilai-nilai ambang tersebut diambil secara langsung dari nilai ambang yang telah ditabelkan oleh Donoho dan Johnstone (1994).

Hasil Simulasi

Model fungsi yang digunakan dalam penelitian ini adalah fungsi doppler dan fungsi heavisine. Masing-masing fungsi mempunyai karakteristik tertentu. Untuk simulasinya digunakan software *S+Wavelets Version 3.3 Release 1 for MS Windows* (Bruce dan Gao (1996)) dengan menggunakan wavelet $s8$ sebagai basisnya dan $\sigma = 0,05$.



Gambar 1. Hasil WaveShrink yang Diperoleh pada Estimasi Fungsi Doppler dan Heavisine dengan Menggunakan Fungsi Penyusut Keras (hard) dan Lunak (Soft).

Tabel 1. Nilai Resiko Eksak WaveShrink yang Dicapai dengan Menggunakan Fungsi Penyusut Keras dan Lunak pada Masing-Masing Nilai Ambang Minimax dan Universal untuk Fungsi Doppler dan Fungsi Heavisine.

| n | DOPPLER | | HEAVISINE | |
|-----------|--------------|-------------|--------------|--------------|
| | UNIVERSAL | MINIMAX | UNIVERSAL | MINIMAX |
| 64 KERAS | 0,002639626 | 0,002257211 | 0,002968376 | 0,002400766 |
| LUNAK | 0,007057588 | 0,003031758 | 0,00953487 | 0,003889159 |
| 128 KERAS | 0,001691628 | 0,001853966 | 0,002335124 | 0,001890498 |
| LUNAK | 0,005219044 | 0,002311979 | 0,006880483 | 0,002922657 |
| 256 KERAS | 0,00126131 | 0,001423221 | 0,001453759 | 0,001453926 |
| LUNAK | 0,004418358 | 0,001996752 | 0,004474967 | 0,002006817 |
| 512 KERAS | 0,0009495465 | 0,001047537 | 0,0008160008 | 0,0009842575 |
| LUNAK | 0,002767616 | 0,001336922 | 0,002751197 | 0,001263488 |

KESIMPULAN

Dalam mengestimasi f dari model regresi nonparametrik :

$$y_i = f(t_i) + \sigma z_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

dengan menggunakan WaveShrink, diperoleh hasil seperti berikut.

- (1) Rumus untuk menghitung L_2 eksak dari estimator WaveShrink pada sampel berhingga dapat dicari secara efisien dan dapat diimplementasikan dalam software S+Wavelets dengan mudah dan cepat.
- (2) Pada setiap ukuran sampel yang digunakan, fungsi penyusut lunak yang menggunakan nilai ambang universal memiliki nilai resiko paling besar. Dengan demikian nilai ambang universal kurang cocok digunakan pada fungsi susut lunak.
- (3) Nilai resiko fungsi susut keras dan fungsi susut lunak baik yang menggunakan nilai ambang universal maupun nilai ambang minimax mengecil seiring dengan kenaikan ukuran sampel yang digunakan.

DAFTAR PUSTAKA

- Donoho, D. L., Johnstone, I. M., Kerkyacharian, G. and Picard, D. 1995. Wavelet Shrinkage : Asymptopia ?. *J. R. Statist. Soc. B*, vol. 57, no. 2, 301-337 .
- Donoho, D. L. , Johnstone, I. M. 1994 . Ideal Spatial Adaptation via Wavelet Shrinkage. *Biometrika*, vol. 81, no. 3, 425-455.
- _____. 1995 . Adapting to Unknown Smoothness via Wavelet Shrinkage. *J. Am. Statist. Assoc.*, vol. 90, no. 432, 1200-1224.
- Ogden, R . T. 1997. *Essential Wavelets for Statistical Applications and Data Analysis*. Boston, Birkhäuser.
- Johnstone, IM, Silverman 1997 Wavelet Threshold Estimator for Date with Correlated Noise. *J.R. Statist, Soc B*, Vol. 59, No. 2, 319 – 351.