Jurnal Fisika Indonesia, No: 21, vol.VII. Edisi Agustus 2003 ISSN:1410-2994, hal.1 – 12

MODEL MATEMATIS TENTANG ALIRAN FLUIDA DAN PENGANGKUTAN ENERGI DALAM SISTEM HIDROTERMAL DOMINASI-UAP

Yosaphat Sumardi
Jurdik Fisika FMIPA UNY, Yogyakarta

INTISARI

Model matematis tentang aliran fluida dan pengangkutan energi diturunkan untuk menggambarkan sistem hidrotermal dominasi-uap. Penggambaran ini dimulai dari persamaan kekekalan massa, momentum, dan energi dalam media berpori. Persamaan ini digabungkan dengan asumsi dan penyederhanaan yang sesuai untuk menghasilkan dua persamaan diferensial parsial taklinear dalam tekanan dan entalpi.

Kata kunci: model matematis, aliran fluida, pengangkutan energi, sistem geotermal dominasi uap

MATHEMATICAL MODEL OF FLUID FLOW AND ENERGY TRANSPORT IN VAPOR-DOMINATED HYDROTHERMAL SYSTEMS

ABSTRACT

Mathematical models of fluid flow and energy transport are derived to describe vapor-dominated hydrothermal systems. This description begins with the conservation equations for mass, momentum, and energy in porous media. These equations are combined with appropriate assumptions and simplifications to yield two nonlinear partial differential equations in pressure and enthalpy.

Keywords: *mathematical model, fluid flow, energy transport, vapor-dominated hydrothermal systems.*

I. PENDAHULUAN

Energi geotermal merupakan salah satu sumber energi alternatif yang ramah lingkungan. Hal ini merangsang banyak penelitian dalam beberapa bidang terkait, antara lain: eksplorasi dan identifikasi sumber geotermal, teknologi pengambilan energi dari berbagai macam sumber geotermal, karakterisasi sumber geotermal, dan perilaku sistem geotermal. Pemodelan sistem geotermal adalah salah satu cara untuk menggambarkan perilaku sistem itu.

Suatu sistem fisis di alam dapat digambarkan dengan model. Sistem fisis itu dapat digambarkan secara matematis atau secara numeris. Dalam model matematis sistem fisis digambarkan dengan persamaan matematis yang sesuai. Pada umumnya suatu sistem fisis dinyatakan dalam sistem persamaan diferensial parsial yang menghubungkan sejumlah variabel terkait yang berubah terhadap ruang dan waktu. Nilai batas dan nilai awal juga dibutuhkan untuk menggambarkan sistem fisis yang nyata.

Sistem persamaan diferensial parsial, yang menggambarkan suatu sistem fisis, tidak selalu mudah diselesaikan secara analitis. Oleh karena itu sistem fisis sering diselesaikan secara numeris, yang disebut model numeris. Model matematis berhubungan dengan variabel kontinu, sedangkan model numeris berhubungan dengan variabel diskret. Model numeris bisa dilakukan dengan diskretisasi persamaan diferensial parsial tersebut.

Dalam makalah ini hanya akan dibahas model matematis tentang salah satu sistem geotermal, yaitu sistem hidrotermal dominasi-uap. Sistem ini akan digambarkan secara matematis yang rasional tentang aliran fluida (air dan uap air) dan pengangkutan energi panas dalam media berpori. Persamaan diferensial parsial yang menggambarkan sistem itu diturunkan dengan asumsi dan penyederhanaan yang sesuai.

II. KAJIAN PUSTAKA

Istilah 'sistem geotermal' mula-mula digunakan untuk menggambarkan air yang sedang berkonveksi secara alami dalam kerak bumi bagian atas, yang merupakan ruang terkurung tempat perpindahan panas dari sumber panas ke penampung panas (Hochstein, 1990). Kemudian istilah ini diperluas dengan memasukkan sembarang sumber panas dari dalam bumi yang diambil secara ekonomis.

Volume batuan yang merupakan tempat panas diambil disebut 'tandon (atau reservoir) geotermal', yang berisi fluida panas berupa air, uap air, dan gas. Tandon geotermal biasanya dikelilingi oleh batuan yang lebih dingin. Air bisa bergerak dari batuan luar yang lebih dingin menuju tandon itu; proses ini dikenal sebagai pengisian. Pengisian bisa terjadi secara alami maupun secara buatan dengan injeksi air dingin. Dalam tandon itu fluida panas bergerak karena pengaruh gaya apung ke arah daerah pelepasan. Fluida panas ini bisa dimanfaatkan sebagai sumber energi. Seluruh volume batuan tempat fluida bergerak ke dalam maupun ke luar tandon, termasuk sumber panas dan pelepasan alami membentuk sistem geotermal.

Berdasarkan karakteristik geologis dan mekanisme perpindahan panas ke permukaan bumi, sistem geotermal dapat diklasifikasikan (Rybach dan Muffler, 1981) sebagai berikut:

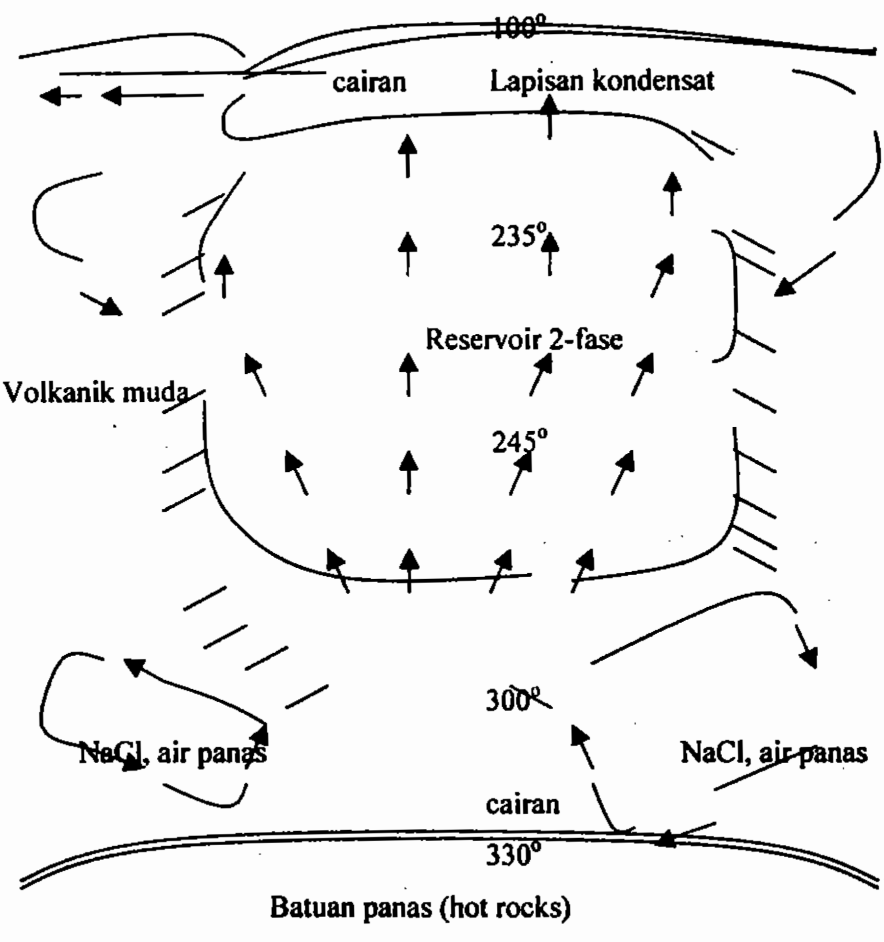
1) Sistem geotermal konvektif.
   a) Sistem hidrotermal dalam lingkungan porositas/permeabilitas tinggi yang dikaitkan dengan intrusi silikaan muda yang dangkal.
   b) Sistem sirkulasi dalam lingkungan permeabilitas porositas-retakan rendah, di daerah aliran panas regional yang tinggi sampai normal.
2) Sistem geotermal konduktif.
   a) Akuifer entalpi/temperatur rendah dalam runtunan sedimen dengan permeabilitas/ porositas tinggi (termasuk zona 'geopressured') di daerah aliran panas yang sedikit terangkat.

b) Batuan Kering Panas (Hot Dry Rock, disingkat HDR) dalam lingkungan permeabilitas rendah/temperatur tinggi.

Pembagian kelompok sistem geotermal tersebut sebenarnya tidak terlalu kaku. Dalam sistem geotermal konvektif juga terjadi proses konduktif meskipun tidak dominan. Dalam sistem hidrotermal, panas dari sumber (misalnya badan magmatik) dipindahkan ke media berpori dan ke fluida dalam media berpori ini dengan proses konvektif dan konduktif. Dalam sistem 'geopressured', fluida terperangkap dalam akumulasi geosinklin tempat fluida itu mengalami tekanan sangat kuat dan temperatur tinggi. Dalam sistem batuan kering panas, batuan beku berpermeabilitas rendah dipanaskan oleh sumber yang serupa dengan sumber yang berkaitan dengan sistem hidrotermal. Sistem ini secara alami tidak tergantung pada fluida.

Sistem hidrotermal dapat diklasifikasikan lebih lanjut menjadi sistem dominansi-cairan dan sistem dominasi-uap (Faust and Mercer, 1979; Verma, 1997). Fluida kerja utama dalam sistem hidrotermal adalah air. Sistem geotermal dominasi-cairan antara lain terdapat di Wairakei (Selandia Baru), G. Salak (Jawa Barat), dan Dieng (Jawa Tengah). Sistem hidrotermal dominasi-uap antara lain terdapat di The Geyser (Amerika Serikat), Larderello (Italia), Matsukawa (Jepang), Kamojang dan Darajat (Jawa Barat).

Dalam makalah ini akan dibahas tentang sistem hidrotermal, khususnya sistem hidrotermal dominasi-uap. Sistem ini dapat dimodelkan sebagai struktur dalam suatu media batuan berpori yang jenuh dengan air dan uap. Model ini terdiri dari suatu lapisan kondensat dekat permukaan yang terletak di atas suatu daerah aliran dua fase yang berlawanan. Uap mengalir ke atas, sedangkan air mengalir ke bawah. Fluida yang aktif bergerak adalah uap. Sistem tersebut mempunyai lapisan kondensat yang tebalnya beberapa ratus meter dengan permeabilitas rendah. Sistem dua fase dominasi-uap ini mempunyai temperatur sekitar 513 K (Straus dan Schubert, 1987). Daerah uap dapat terbentuk dan berkembang dalam akuifer geotermal asalkan mengandung struktur batuan tudung yang cukup rapat. Permukaan batas batuan tudung dan akuifer tersebut seharusnya cukup dalam, dan aliran fluida ke atas mempunyai entalpi yang cukup besar (Young, 1996). Gambar 1 menunjukkan salah satu model konseptual tentang sistem hidrotermal dominasi-uap.



Gambar 1. Model konseptual sistem hidrotermal dominasi-uap (Hochstein, 1990)

Dalam batuan sistem hidrotermal yang jenuh dengan air dan uap, bagian pori-pori batuan terisi dengan masing-masing fase itu. Bagian ruang pori yang terisi air adalah S_w dan sisanya $S_s = 1 - S_w$ ditempati oleh uap air. Bagian S_w dan bagian S_s ini secara berturut-turut disebut penjenuhan air dan penjenuhan uap air. Oleh karena itu, satuan volume tandon berisi massa air sebesar $\phi S_w \rho_w$ dan massa uap sebesar $\phi S_s \rho_s$ dalam ruang pori-porinya, yang menghasilkan massa fluida total per satuan volume sebesar $\phi(S_w\rho_w + S_s\rho_s)$. Dalam hal ini ϕ adalah porositas batuan dan ρ adalah kerapatan atau massa jenis, sedangkan indeks w dan s secara berturut-turut menunjukkan fase air dan fase uap. Baik fase air maupun fase uap dapat bergerak bebas dalam medium itu. Jika rapat fluks massa air dan uap secara berturut-turut adalah $\mathbf{u}_w$ $(=\rho_w\mathbf{v}_w)$ dan $\mathbf{u}_s(=\rho_w\mathbf{v}_w)$, maka hukum kekekalan massa untuk air dan uap dapat dinyatakan sebagai (Faust and Mercer, 1979):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\phi\left(\rho_w S_w + \rho_s S_s\right)\right] + \nabla\cdot\left(\rho_w \mathbf{v}_w + \rho_s \mathbf{v}_s\right) - q_m = 0 \tag{1}$$

dengan $q_m(= q_w + q_s)$ adalah laju massa yang hilang (atau yang diperoleh) pada sumber/penampung, $\mathbf{v}_w$ dan $\mathbf{v}_s$ adalah kecepatan rata-rata untuk masing-masing fase, sedangkan ∇ adalah operator del.

Energi fluida dalam tandon tersebut adalah energi fase air ditambah energi fase uap, dan perpindahan energi konvektif yang merupakan jumlah perpindahan energi oleh fase air dan fase uap. Jadi, hukum kekekalan energi dapat diungkapkan sebagai berikut (Grant dkk., 1982):

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left[(1-\phi)\rho_r U_r + \phi\left(\rho_w S_w U_w + \rho_s S_s U_s\right)\right]\\ &+\nabla\cdot\left[\rho_w \mathbf{v}_w H_w + \rho_s \mathbf{v}_s H_s + K\nabla T\right] - q_H = 0\end{aligned} \tag{2}$$

dengan U adalah energi internal, H adalah entalpi spesifik, K adalah konduktivitas panas, T adalah temperatur. Indeks r pada ρ dan U menunjukkan matrik batuan. Suku $q_H = q_w H_w + q_s H_s$ adalah laju energi panas yang hilang (atau diperoleh) pada sumber/penampung. Suku $K\nabla T$ adalah rapat fluks konduktif, dengan K adalah konduktivitas batuan basah.

Kecepatan aliran fluida dalam media berpori dapat dinyatakan dengan persamaan Darcy sebagai berikut (Allen dkk., 1988):

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_w &= -\frac{kk_{rw}}{\mu_w}\left(\nabla p_w - \rho_w g\nabla D\right)\\ \mathbf{v}_s &= -\frac{kk_{rs}}{\mu_s}\left(\nabla p_s - \rho_s g\nabla D\right)\end{aligned} \tag{3}$$

dengan k adalah tensor permeabilitas, k_{rw} adalah permeabilitas relatif air, k_{rs} adalah permeabilitas relatif uap, g adalah percepatan gravitasi, dan D adalah kedalaman.

III. PEMBAHASAN

Model matematis sistem hidrotermal dominasi-uap yang menggambarkan aliran tiga-dimensi fluida (air dan uap) dan pengangkutan energi dalam media berpori dapat dikembangkan menjadi dasar solusi numeris. Pengembangan persamaan matematis ini berdasarkan asumsi sebagai berikut:

1. Fluida kerja dalam sistem itu adalah air yang bisa terdiri dari fase cair dan fase uap.
2. Keseimbangan panas terjadi antara air, uap, dan batuan.
3. Tekanan kapiler dapat diabaikan. Jika tekanan air adalah p_w, tekanan uap adalah p_s, maka tekanan kapiler dapat dinyatakan sebagai $p_c = p_s - p_w$.
4. Permeabilitas relatif merupakan fungsi penjenuhan (atau saturasi) air.
5. Viskositas merupakan fungsi temperatur.
6. Porositas batuan merupakan fungsi linear tekanan dan kerapatan batuan merupakan fungsi linear temperatur.

Model matematis sistem hidrotermal dominasi-uap dapat diturunkan berdasarkan persamaaan (1) - (3). Persamaan (3) dimasukkan ke dalam persamaan (1), sehingga diperoleh persamaan berikut:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left[\phi(\rho_w S_w + \rho_s S_s)\right] - \nabla\cdot\left[\frac{kk_{rw}\rho_w}{\mu_w}(\nabla p - \rho_w g\nabla D)\right]\\ &-\nabla\cdot\left[\frac{kk_{rs}\rho_s}{\mu_s}(\nabla p - \rho_s g\nabla D)\right] - q_m = 0\end{aligned} \tag{4}$$

Dengan jalan yang sama, persamaan (3) dimasukkan ke dalam persamaan (2) serta melakukan ekspansi turunan temperatur terhadap tekanan dan entalpi, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left[(1-\phi)\rho_r U_r+\phi(\rho_w S_w U_w+\rho_s S_s U_s)\right]\\&-\nabla\cdot\left[\frac{kk_{rw}\rho_w H_w}{\mu_w}(\nabla p-\rho_w g\nabla D)\right]-\nabla\cdot\left[\frac{kk_{rs}\rho_s H_s}{\mu_s}(\nabla p-\rho_s g\nabla D)\right]\\&-\nabla\cdot\left[K\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H\nabla p+K\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_p\nabla H\right]-q_H=0\end{aligned}\tag{5}$$

Dua persamaan tiga-dimensi tersebut menggambarkan aliran panas dua-fase dalam sistem air-uap-batuan. Sesungguhnya persamaan itu juga menggambarkan aliran panas dalam sistem air-batuan atau sistem uap-batuan dengan sedikit perubahan. Jika salah satu fase (air atau uap) tidak ada, maka penjenuhan fase itu dianggap nol dan penjenuhan fase yang ada dalam sistem itu adalah 1.

Jika sistem koordinat kartesius dipilih sejajar dengan arah utama tensor permeabilitas **k** dan koordinat x dan y dipilih horisontal, maka persamaan (4) dapat dituliskan kembali dalam bentuk berikut:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left[\phi(\rho_w S_w+\rho_s S_s)\right]\\&-\nabla\cdot\left(\frac{k_x k_{rw}\rho_w}{\mu_w}\frac{\partial p}{\partial x}\hat{x}+\frac{k_y k_{rw}\rho_w}{\mu_w}\frac{\partial p}{\partial y}\hat{y}+\frac{k_z k_{rw}\rho_w}{\mu_w}\frac{\partial p}{\partial z}\hat{z}-\frac{k_z k_{rw}\rho_w^2 g}{\mu_w}\hat{z}\right)\\&-\nabla\cdot\left(\frac{k_x k_{rs}\rho_s}{\mu_s}\frac{\partial p}{\partial x}\hat{x}+\frac{k_y k_{rs}\rho_s}{\mu_s}\frac{\partial p}{\partial y}\hat{y}+\frac{k_z k_{rs}\rho_s}{\mu_s}\frac{\partial p}{\partial z}\hat{z}-\frac{k_z k_{rs}\rho_s^2 g}{\mu_s}\hat{z}\right)-q_m=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left[\phi(\rho_w S_w+\rho_s S_s)\right]\\&-\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k_x k_{rw}\rho_w}{\mu_w}+\frac{k_x k_{rs}\rho_s}{\mu_s}\right)\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k_y k_{rw}\rho_w}{\mu_w}+\frac{k_y k_{rs}\rho_s}{\mu_s}\right)\frac{\partial p}{\partial y}\right.\\&\left.+\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\frac{k_z k_{rw}\rho_w}{\mu_w}+\frac{k_z k_{rs}\rho_s}{\mu_s}\right)\frac{\partial p}{\partial z}-\left(\frac{k_z k_{rw}\rho_w^2 g}{\mu_w}+\frac{k_z k_{rs}\rho_s^2 g}{\mu_s}\right)\right]\right\}-q_m=0\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\omega_x\frac{\partial p}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\omega_y\frac{\partial p}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\omega_z\frac{\partial p}{\partial z}-\omega_{gz}\right)-q_m=0\tag{6}$$

dengan

$$\rho = (\rho_w S_w + \rho_s S_s)$$

$$\omega_x = \left(\frac{k_x k_{rw} \rho_w}{\mu_w} + \frac{k_x k_{rs} \rho_s}{\mu_s}\right)$$

$$\omega_y = \left(\frac{k_y k_{rw} \rho_w}{\mu_w} + \frac{k_y k_{rs} \rho_s}{\mu_s}\right)$$

$$\omega_z = \left(\frac{k_z k_{rw} \rho_w}{\mu_w} + \frac{k_z k_{rs} \rho_s}{\mu_s}\right)$$

$$\omega_{gz} = \left(\frac{k_z k_{rw} \rho_w^2 g}{\mu_w} + \frac{k_z k_{rs} \rho_s^2 g}{\mu_s}\right)$$

Dengan jalan yang sama, persamaan (5) dapat dituliskan kembali dalam bentuk:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}[(1-\phi)\rho_r U_r + \phi(\rho_w S_w U_w + \rho_s S_s U_s)] \\
&-\nabla\cdot\left(\frac{k_x k_{rw}\rho_w H_w}{\mu_w}\frac{\partial p}{\partial x}\hat{x} + \frac{k_y k_{rw}\rho_w H_w}{\mu_w}\frac{\partial p}{\partial y}\hat{y} + \frac{k_z k_{rw}\rho_w H_w}{\mu_w}\frac{\partial p}{\partial z}\hat{z} - \frac{k_z k_{rw}\rho_w^2 g H_w}{\mu_w}\hat{z}\right) \\
&-\nabla\cdot\left(\frac{k_x k_{rs}\rho_s H_s}{\mu_s}\frac{\partial p}{\partial x}\hat{x} + \frac{k_y k_{rs}\rho_s H_s}{\mu_s}\frac{\partial p}{\partial y}\hat{y} + \frac{k_z k_{rs}\rho_s H_s}{\mu_s}\frac{\partial p}{\partial z}\hat{z} - \frac{k_z k_{rs}\rho_s^2 g H_s}{\mu_s}\hat{z}\right) \\
&-\nabla\cdot\left[K\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H\left(\frac{\partial p}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{z}\right) + K\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_p\left(\frac{\partial H}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial H}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial H}{\partial z}\hat{z}\right)\right] - q_H = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}[(1-\phi)\rho_r U_r + \phi(\rho_w S_w U_w + \rho_s S_s U_s)] \\
&-\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k_x k_{rw}\rho_w H_w}{\mu_w} + \frac{k_x k_{rs}\rho_s H_s}{\mu_s}\right)\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k_y k_{rw}\rho_w H_w}{\mu_w} + \frac{k_y k_{rs}\rho_s H_s}{\mu_s}\right)\frac{\partial p}{\partial y}\right. \\
&\left.+\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\frac{k_z k_{rw}\rho_w H_w}{\mu_w} + \frac{k_z k_{rs}\rho_s H_s}{\mu_s}\right)\frac{\partial p}{\partial z} - \left(\frac{k_z k_{rw}\rho_w^2 g H_w}{\mu_w} + \frac{k_z k_{rs}\rho_s^2 g H_s}{\mu_s}\right)\right]\right\} \\
&-\left[\frac{\partial}{\partial x}K\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}K\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}K\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H\frac{\partial p}{\partial z}\right. \\
&\left.+\frac{\partial}{\partial x}K\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_p\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}K\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_p\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}K\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_p\frac{\partial H}{\partial z}\right] - q_H = 0
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[(1-\phi)\rho_r U_r + \phi(\rho_w S_w U_w + \rho_s S_s U_s)\right]$$
$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[(\omega_{Hx}+\omega_{cp})\frac{\partial p}{\partial x}\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[(\omega_{Hy}+\omega_{cp})\frac{\partial p}{\partial y}\right]-\frac{\partial}{\partial z}\left[(\omega_{Hz}+\omega_{cp})\frac{\partial p}{\partial y}-\omega_{Hgz}\right] \quad (7)$$
$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\omega_{cH}\frac{\partial H}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\omega_{cH}\frac{\partial H}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\omega_{cH}\frac{\partial H}{\partial z}\right)-q_H=0$$

dengan

$$\omega_{Hx}=\left(\frac{k_x k_{rw}\rho_w H_w}{\mu_w}+\frac{k_x k_{rs}\rho_s H_s}{\mu_s}\right)$$

$$\omega_{Hy}=\left(\frac{k_y k_{rw}\rho_w H_w}{\mu_w}+\frac{k_y k_{rs}\rho H_{ss}}{\mu_s}\right)$$

$$\omega_{Hz}=\left(\frac{k_z k_{rw}\rho_w H_w}{\mu_w}+\frac{k_z k_{rs}\rho H_{ss}}{\mu_s}\right)$$

$$\omega_{Hgz}=\left(\frac{k_z k_{rw}\rho_w^2 g H_w}{\mu_w}+\frac{k_z k_{rs}\rho_s^2 g H_s}{\mu_s}\right)$$

$$\omega_{cp}=K\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H$$

$$\omega_{cH}=K\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_p$$

Persamaan (4) dan (5) atau persamaan (6) dan (7) adalah pasangan persamaan diferensial parsial orde-dua taklinear. Syarat batas perlu ditetapkan untuk menyelesaikan persamaan itu, yaitu syarat batas yang berkaitan dengan tekanan dan syarat batas yang berkaitan dengan entalpi. Syarat batas yang paling umum adalah penentuan fluks. Untuk syarat batas tanpa-aliran, fluks seringkali ditetapkan sama dengan nol. Untuk penentuan flluks massa persamaan berikut harus dipenuhi

$$q_{mb}=-\left(\frac{kk_{rw}\rho_w}{\mu_w}+\frac{kk_{rs}\rho_s}{\mu_s}\right)\frac{\partial(p-\rho g D)}{\partial n} \quad (8)$$

dengan q_{mb} adalah fluks massa yang ditetapkan pada batas dan $\partial/\partial n$ adalah turunan tegak lurus permukaan ke arah luar. Jika fluks massa ditetapkan, maka fluks energi konvektif juga harus ditetapkan menurut persamaan berikut

$$q_{Hb} = q_{wb} H_{wb} + q_{sb} H_{sb} \tag{9}$$

dengan H_{wb} dan H_{sb} adalah entalpi air jenuh dan entalpi uap jenuh pada batas yang tergantung pada tekanan, sedangkan q_{wb} dan q_{sb} adalah fluks air dan fluks uap fraksional pada batas itu. Fluks energi total q_{tHb} terdiri dari dua bagian, yaitu fluks energi panas konvektif q_{Hb} dan fluks energi panas konduktif q_{Hbb} pada batas tersebut dan dinyatakan sebagai berikut

$$q_{tHB} = q_{Hb} + q_{Hbb} \tag{10}$$

Fluks energi panas konduktif q_{Hbb} pada batas ditentukan menurut persamaan

$$q_{Hbb} = -K \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{batas} \tag{11}$$

Karena persamaan multifase sistem hidrotermal, persamaan (4) dan (5) atau persamaan (6) dan (7), merupakan persamaan taklinear dalam tiga-dimensi yang rumit, maka solusi analitis persamaan itu sukar diselesaikan secara analitis. Namun demikian model itu dapat didekati dengan model luasan atau kuasi-tiga-dimensi, yang dilakukan dengan integrasi parsial dalam arah vertikal. Alternatif lain adalah dengan solusi numerik terhadap sistem persamaan diferensial tersebut.

IV. KESIMPULAN

Sistem hidrotermal dominasi-uap dapat dimodelkan secara matematis dengan menggambarkan persamaan aliran fluida (air dan uap air) dan pengangkutan energi melalui medium berpori. Penggambaran ini dimulai dari persamaan kekekalan massa, momentum, dan energi dalam media berpori. Tiga persamaan ini digabungkan dengan asumsi dan penyederhanaan tertentu, sehingga menghasilkan dua persamaan diferensial taklinear dalam tekanan fluida dan entalpi. Persamaan diferensial ini, yang disertai dengan syarat batas dan syarat awal yang sesuai, menggambarkan model matematis tiga-dimensi tentang aliran fluida dan pengangkutan energi dalam sistem hidrotermal dominasi-uap.

DAFTAR PUSTAKA

Allen III, M.B., Behie, G.A. and Trangenstein, J.A., 1988, *Multiphase Flow in Porous Media.* New York: Springer-Verlag, 3-49, 250-251.

Faust, C.R., Mercer, J.W., 1979, Geothermal Reservoir Simulation: 1. Mathematical Models for Liquid- and Vapor-Dominated Hydrothermal Systems. *Water Resources Research,* Vol. 15, No. 1, 31-34.

Grant, M.A., Donaldson, I.G. and Bixley, P.F., 1982, *Geothermal Reservoir Engineering.* New York: Academic Press., 312-322.

Hochstein, M.P., 1990, Classification and Assessment of Geothemal Resources, *Small Geothermal Resources, A Guide to Development and Utilization.* Rome: International Institute for Geothermal Research, 31-58.

Rybach, L., Muffler, L.J.P., 1981, *Geothermal System: Principles and Case Histories,* New York: John Wiley & Sons., 1-32.

Schubert, G.,.Straus, J.M., 1980, Gravitational Stability of Water over Steam in Vapor-Dominated Geothermal Systems, *J. Geophys. Res.* Vol. 85, No. B11, 6505-6512.

Straus, J.M., Schubert, G., 1981, One-Dimensional Model of Vapor-Dominated Geothermal Systems, *Journal of Geohhysical Research,* Vol. 86, No. B11., 9433-9438.

Verma, M.P., 1997, Thermodynamic Classification of Geothermal Systems, *Proceedings of the 22th Workshop on Geothermal Reservoir Engineering.* California: Stanford University., 411-416.

Young, R.M., 1996, A Basic Model for Vapor-Dominated Geothermal Reserviors, *Proceedings* of *the 18th New Zealand Geothermal Workshop.* New Zealand: The University of Auckland, 301-304.