

PERHITUNGAN TRILATERASI DENGAN METODE KONDISI

Oleh :

*Ir. Hadiman, M.Sc. *)*

Intisari

Untuk keperluan pembuatan peta ataupun penentuan posisi di muka bumi, diperlukan titik kontrol. Yaitu titik-titik yang diketahui koordinatnya terhadap suatu sistem referensi tertentu. Salah satu cara penentuan posisi dapat dilakukan dengan metode trilaterasi, yaitu membentuk jaringan segitiga dan diukur semua sisinya.

Pada jaring segitiga yang tidak sederhana, akan dijumpai pengukuran lebih dari yang diperlukan, sehingga hasil pengukuran tidak memenuhi kondisi geometris jaringan segitiga. Agar kondisi geometris terpenuhi perlu diberikan koreksi terhadap semua hasil ukuran sisinya, dan karena kesalahan yang timbul pada pengukuran adalah kesalahan random yang berdistribusi normal, maka penyelesaian dengan prinsip kuadrat terkecil adalah penyelesaian yang terbaik.

Penyelesaian dengan metode kondisi di samping penyelesaiannya menggunakan prinsip kuadrat terkecil juga mempunyai keuntungan mudah perhitungannya. Untuk trilaterasi yang tidak terlalu kompleks dapat diselesaikan oleh orang yang tidak menguasai teori kuadrat terkecil dan dengan peralatan kalkulator berprogram.

pendahuluan

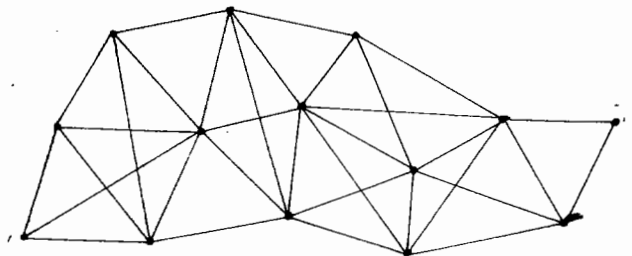
Sampai saat ini, pekerjaan penentuan posisi dengan cara terestris dengan pembentukan jaringan segitiga, masih bisa dianggap sebagai cara yang baik. Khususnya untuk daerah yang cukup luas, berbukit ataupun terbuka. Pada bentuk jaringan segitiga, kesalahan yang disebabkan oleh bentuk geometris jaringan dapat buat sekecil mungkin.

Dari sejak awal abad kedua puluh pengukuran dengan jaringan segitiga sudah cukup populer. Untuk penentuan posisi masing-masing titik segitiga dilakukan pengukuran sudut-sudut segitiga, sehingga penentuan dengan cara ini disebut metode triangulasi.

Sejak tahun lima puluhan, ketika mulai digunakan alat ukur jarak elektronis, penentuan posisi dengan metode trilaterasi mulai dikembangkan. Metode ini mirip sama dengan metode triangulasi tetapi besaran yang diukur adalah panjang sisi-sisi segitiganya. Di tahun delapan puluhan ini, dengan makin mudah mendapatkan dan mengoperasikan alat ukur jarak elektro-

nis maka metode trilaterasi semakin banyak diminati.

Seperti halnya triangulasi, trilaterasi juga dimaksudkan untuk penentuan posisi titik-titik di permukaan bumi, yaitu koordinat X dan Y pada suatu referensi tertentu. Untuk penentuan ini, masing-masing titik yang berdekatan dihubungkan dan diukur jaraknya sehingga membentuk jaringan segitiga. Dengan diketahui panjang sisi-sisi segitiga, maka posisi titik satu dengan lainnya dapat diketahui.



Gambar 1. Bentuk jaringan trilaterasi

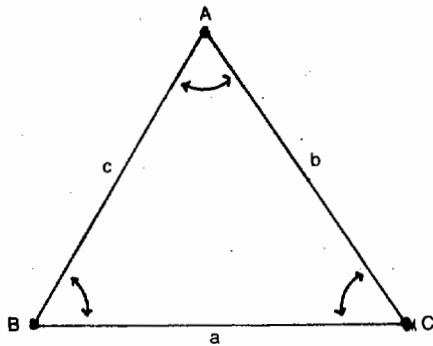
*) Staf Pengajar Jurusan Teknik Geodesi FT UGM.

Gambar 1 adalah bentuk jaringan trilaterasi yang cukup kompleks. Titik-titik segitiga adalah merupakan titik-titik yang akan ditentukan posisinya dan sisi sisi segitiga merupakan sisi trilaterasi yang harus diukur jaraknya.

Untuk menyelesaikan trilaterasi dengan menggunakan metode kondisi, ada tiga tahapan pekerjaan yang harus dikerjakan. Yang pertama adalah menghitung sudut-sudut segitiga dengan menggunakan rumus cosinus. Selanjutnya adalah mencari nilai koreksi terhadap hasil ukuran sisi segitiga. Dan terakhir adalah penentuan koordinat titik titik segitiga dengan data panjang sisi yang sudah dikoreksi.

Perhitungan Sudut Segitiga

Dari data hasil ukuran sisi trilaterasi, selanjutnya dengan menggunakan rumus cosinus sebuah segitiga, nilai sudut segitiga dapat diperoleh :



Gambar 2. Sisi dan sudut segitiga

Dari gambar 2, panjang sisi segitiga masing-masing a, b, dan c, dan besar sudut segitiga adalah A, B, dan C. Selanjutnya sudut A dapat diperoleh dengan rumus 1, yaitu :

$$\cos(A) = (b^2 + c^2 - a^2) / 2bc \quad (1)$$

Pada kenyataannya, nilai ukuran sisi a, b, dan c masing-masing mengandung kesalahan sebesar va, vb, dan vc, sehingga hasil hitungan sudut A juga akan mengandung kesalahan sebesar dA.

Dengan memperhatikan nilai kesalahan sisi segitiga dan pengaruhnya sebesar dA pada sudut A, maka persamaan 1 dapat ditulis menjadi persamaan 2, yaitu :

$$\cos(A + dA) = ((b + vb)^2 + (c + vc)^2 - (a + va)^2) / (2(b + vb)(c + vc)) \quad (2)$$

Dengan menggunakan deret Taylor sampai dengan turunan pertama, dan dengan memperhatikan persamaan (1), maka nilai dA pada persamaan (2) dapat dirumuskan dengan :

$$dA = \frac{\partial A}{\partial a} va + \frac{\partial A}{\partial b} vb + \frac{\partial A}{\partial c} vc$$

atau

$$dA = \partial a va + \partial b vb + \partial c vc \quad (3)$$

Koefisien dari va, vb, dan vc masing-masing adalah :

$$\partial a = \frac{a}{bc \sin A \text{ Arc } 1''}$$

$$\partial b = - \frac{a \cos C}{bc \sin A \text{ Arc } 1''}$$

$$\partial c = - \frac{a \cos B}{bc \sin A \text{ Arc } 1''}$$

Dengan cara yang sama dapat diperoleh juga kesalahan sudut B (dB) dan kesalahan sudut C (dC).

Penentuan Koreksi Hasil Ukuran

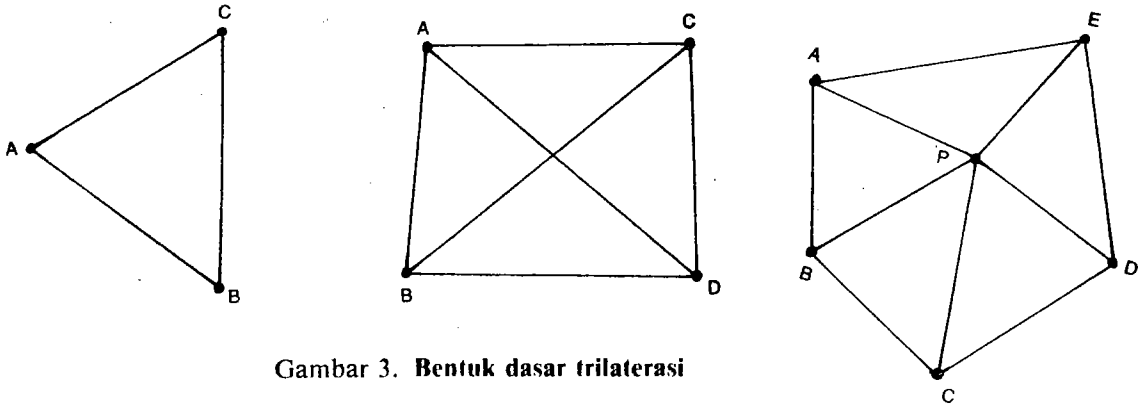
Sebelum menghitung koreksi jarak hasil ukuran, terlebih dahulu harus ditentukan kondisi geometris dari jaringan trilaterasi yang harus dipenuhi.

Pada jaringan trilaterasi yang, bentuk jaringan segitiganya dapat dikelompokkan dan dipisahkan menjadi tiga bentuk jaringan dasar, yaitu :

- Bentuk sebuah segitiga, bentuk ini hanya merupakan sebuah segitiga yang terbentuk dari tiga titik.
- Bentuk quadrilateral, bentuk ini merupakan pembentukan empat buah segitiga yang terbentuk dari empat buah titik.
- Bentuk dengan titik pusat, bentuk ini merupakan pembentukan sejumlah n segitiga yang terbentuk dari n + 1 titik dan salah satu titiknya berada di pusat.

Gambar 3 menunjukkan bentuk dasar jaringan trilaterasi yaitu masing-masing bentuk dasar segitiga (a), Quadrilateral (b) dan bentuk titik pusat (c).

Pada bentuk dasar segitiga (a), jumlah sudut A, B, dan C yang didapat dari hasil hitungan atas dasar pengukuran sisi segitiga sudah tepat sebesar 180 derajat, sehingga tidak perlu diberikan kondisi geometris.



Gambar 3. Bentuk dasar trilaterasi

Sedangkan pada bentuk quadrilateral (b), kondisi geometris masih harus disyaratkan untuk masing-masing tiga sudut yang terletak pada satu titik. Sehingga kondisi geometris yang disyaratkan adalah :

$$\begin{aligned} \text{Sudut ABC} + \text{Sudut CBD} - \text{Sudut ABD} &= 0 \quad (4) \\ \text{Sudut BAD} + \text{Sudut CAD} - \text{Sudut BAC} &= 0 \\ \text{Sudut ACB} + \text{Sudut BCD} - \text{Sudut ACD} &= 0 \\ \text{Sudut ADB} + \text{Sudut ADC} - \text{Sudut BDC} &= 0 \end{aligned}$$

Dengan pembuktian secara matematika, dapat diuktikan bahwa apabila salah satu syarat dari keempat syarat tersebut sudah terpenuhi, maka ketiga syarat yang lain akan terpenuhi juga. Sehingga pada pelaksanaan hitungan koreksi pengukuran jarak cukup diberikan pada salah satu kondisi saja.

Apabila digunakan persamaan kondisi yang pertama, maka hasil hitungan ketiga sudut tersebut nilainya tidak akan memenuhi persamaan (4). Sisa nilai ini akan sebesar w , yaitu :

$$w = d_{ABC} + d_{CBD} - d_{ABD} \quad (5)$$

d_{ABC} , d_{CBD} dan d_{ABD} masing-masing adalah kesalahan sudut yang dipengaruhi oleh kesalahan sisi segitiga seperti pada persamaan (3).

Dari persamaan (5) yang dieliminir dengan persamaan (3) akan didapat sebuah persamaan linear baru yang merupakan fungsi dari koreksi semua pengukuran sisi. Persamaan baru tersebut, dalam bentuk matriks, adalah persamaan (6).

$$B V + W = 0 \quad (6)$$

Matriks B adalah matriks koefisien pada persamaan (3), matriks V adalah matriks parameter pada persamaan (3) dan matriks w adalah matriks yang dibentuk dari persamaan (5).

Pada bentuk dasar dengan sudut pusat, kondisi geometris yang harus dipenuhi hanya satu, yaitu jumlah sudut pusat harus tepat 360 derajat. Sehingga, dari gambar 3c, kondisi yang harus dipenuhi adalah :

$$\begin{aligned} \text{Sudut APB} + \text{Sudut BPC} + \text{Sudut CPD} + \\ \text{Sudut DPE} + \text{Sudut EPA} - 320 &= 0 \quad (7) \end{aligned}$$

Seperti pada bentuk quadrilateral, maka dengan persamaan kondisi tersebut, juga dapat dibentuk sebuah persamaan linear yang merupakan fungsi dari koreksi pengukuran sisi-sisinya. Notasi fungsi ini dalam bentuk matriks sama seperti persamaan (6).

Dari persamaan (6), dengan menggunakan hitungan kuadrat terkecil, yaitu jumlah kuadrat masing-masing koreksi minimum, dapat dihitung masing-masing nilai koreksinya. Rumus yang digunakan untuk hitungan tersebut menggunakan persamaan (8).

$$V = B^T K \quad (8)$$

dalam hal ini matriks kolom K adalah,

$$K = - (B B^T)^{-1} W \quad (9)$$

Pelaksanaan Hitungan

Pelaksanaan hitungan untuk menyelesaikan permasalahan ini dicoba pada suatu jaringan trilaterasi dengan tiga buah bentuk dasar, yaitu dua buah bentuk dasar sudut pusat dan sebuah quadrilateral. Tiga buah bentuk dasar ini terangkai pada sebuah jaringan trilaterasi.

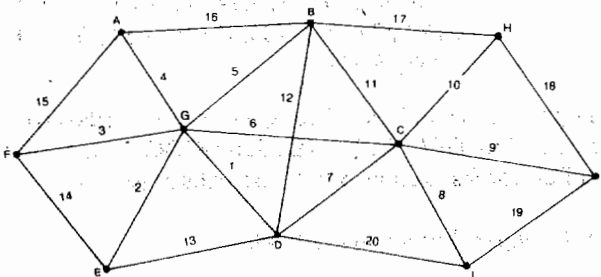
Bentuk jaringan yang digunakan pada perhitungan ini seperti pada gambar (4).

Data hasil ukuran dengan alat EDM.

Sisi	Panjang (m)	Sisi	Panjang (m)
1	941.54	11	1030.88
2	1084.87	12	1792.25
3	796.90	13	1003.77
4	764.12	14	801.77
5	1216.32	15	1035.19
6	1075.22	16	1050.61
7	994.62	17	852.90
8	907.33	18	1036.43
9	1028.12	19	954.12
10	908.76	20	965.57

Tahapan hitungannya, pertama dihitung semua nilai sudut yang terbentuk oleh trilaterasi dan yang nantinya akan digunakan untuk hitungan menggunakan persamaan (1).

Selanjutnya menentukan persamaan kondisi yang harus dibuat dan harus dipenuhi jaringan trilaterasi tersebut. Jumlah persamaan kondisi yang harus ditentukan sejumlah bentuk dasar trilaterasi (baik quadrilateral maupun sudut pusat).



Gambar 4. Bentuk jaringan yang digunakan

Dari persamaan kondisi tersebut akan didapat persamaan (6), yaitu persamaan $BV + W = 0$, sehingga selanjutnya dengan persamaan (8) bisa didapat nilai koreksi masing-masing sisi.

Setelah nilai koreksi sisi diketahui, dikoreksikan ke masing-masing sisi. Selanjutnya dengan menggunakan nilai panjang sisi terkoreksi, dapat ditentukan koordinat masing-masing titik trilaterasi (dengan menggunakan rumus-rumus geometri).

Hasil Hitungan dan Pembahasan

Seperti pada pelaksanaan hitungan, pada hasil hitungan juga akan didapat tiga macam hasil, yaitu trilaterasi bentuk sudut pusat G. ABCDEF, trilaterasi bentuk quadrilateral BCDG, dan trilaterasi seperti pada gambar (4) yang diselesaikan secara serempak.

Untuk perhitungan koordinat akhir, salah satu titik trilaterasi harus diketahui koordinatnya, dan salah satu sisi diketahui asimutnya. Pada permasalahan ini yang diketahui koordinatnya adalah titik D dan sisi DC diketahui asimutnya, yaitu :

$$\begin{aligned} \text{absis D} &= 5000.00 \text{ m.} \\ \text{ordinat D} &= 5000.00 \text{ m.} \\ \text{asimut DC} &= 45 \text{ derajat.} \end{aligned}$$

Penyelesaian dan urutan hitungan untuk masing-masing bentuk trilaterasi adalah :

a. Penyelesaian Trilaterasi Dengan Sudut Pusat G (G. ABCDEF)

Hasil hitungan sudut-sudut pusat (dalam derajat)

$$\begin{aligned} \text{sudut DGE} &= 58,87832 \\ \text{sudut EGF} &= 47,45426 \\ \text{sudut FGA} &= 83,05254 \\ \text{sudut AGB} &= 58,92213 \\ \text{sudut BGC} &= 53,03572 \\ \text{sudut CGD} &= 58,65220 \end{aligned}$$

Kesalahan penutup sudut pusat, yang merupakan jumlah dari sudut sudut tersebut (W) = -17,39 detik. Hasil hitungan besarnya kesalahan sudut untuk masing-masing sudut yang merupakan fungsi kesalahan jarak :

$$\begin{aligned} dDGE &= -89,83 v_1 - 141,11 v_2 + 236,77 v_{13} \\ dEGF &= -176,83 v_2 - 20,51 v_3 + 259,65 v_{14} \\ dFGA &= -240,39 v_3 - 227,86 v_4 + 353,25 v_{15} \\ dAGB &= -35,31 v_4 - 212,97 v_5 + 272,24 v_{16} \\ dBGC &= -112,47 v_5 - 67,87 v_6 + 203,49 v_{11} \\ DCGD &= -139,66 v_6 - 91,18 v_7 + 237,29 v_7 \end{aligned}$$

Sehingga persamaan koreksi yang linear adalah :

$$\begin{aligned} -17,39 \text{ Dt.} &= -181,01 v_1 - 317,94 v_2 - 260,90 v_3 \\ &- 263,17 v_4 + -325,44 v_5 - 207,53 v_6 \\ &+ 237,29 v_7 + 203,49 v_{11} + \\ &+ 236,77 v_{13} - 259,65 v_{14} + 353,25 \\ &v_{15} + 272,24 v_{16} \end{aligned}$$

Hasil hitungan koreksi dan nilai terkoreksi adalah :

Sisi	Koreksi (mm)	Nilai Terkoreksi (m)
1	-3,7	941,5363
2	-6,6	1084,8634
3	-5,4	796,8946
4	-5,5	764,1145
5	-6,8	1216,3132
6	-4,3	1075,2157
7	4,9	994,6249
11	4,2	1030,8842
13	4,9	1003,7749
14	5,4	801,7754
15	7,3	1035,1973
16	5,7	1050,6157

Hasil hitungan koordinat titik trilaterasi adalah :

Titik	Absis (m)	Ordinat (m)
A	4469,083	6614,962
B	5514,752	6716,800
C	5703,306	5703,306
D	5000,000	5000,000
E	3996,226	4998,138
F	3848,736	5786,226
G	4641,165	5870,476

b. Penyelesaian Trilaterasi Quadrilateral BCDG

Hasil hitungan tiga sudut pada titik G (dalam derajat)

- Sudut BGC = 53,03572
- Sudut CGD = 58,65220
- Sudut BGD = 112,68249

Sehingga kesalahan penutup sudutnya, sudut BGC + CGD - BGD, (nilai W) adalah = 19,55 detik.

Nilai masing kesalahan sudut adalah :

$$dBGC = -112,47 v5 - 67,87 v6 + 203,49 v11$$

$$dCGD = -139,66 v6 - 91,18 v1 + 237,29 v7$$

$$dBGD = 303,18 v5 + 269,60 v1 - 347,38 v12$$

Sehingga persamaan koreksi yang linear adalah :

$$19,55 \text{ Dt.} = 178,42 v1 + 190,71 v5 - 207,53 v6 + 237,29 v7 + 203,49 v11 - 347,38 v12$$

Hasil hitungan koreksi dan panjang sisi terkoreksi untuk keenam sisi trilaterasi adalah :

Sisi	Koreksi (mm)	Panjang Terkoreksi (m)
1	-10,6	941,5294
5	-11,3	1216,3087
6	12,3	1075,2323
7	-14,1	994,6059
11	-12,1	1030,8679
12	20,6	1792,2706

Hasil hitungan koordinat trilaterasi

Titik	Absis (m)	Ordinat (m)
B	5514,725	6716,767
C	5703,293	5703,293
D	5000,000	5000,000
G	4641,134	5870,454

c. Penyelesaian Rangkaian Trilaterasi Secara Serempak

Persamaan koreksi yang linear untuk trilaterasi dengan sudut pusat C (C.BHIJD) adalah :

$$16,42 \text{ Dt.} = -529,49 v7 - 207,06 v8 - 299,48 v9 - 189,30 v10 - 519,99 v11 + 437,25 v12 + 239,27 v17 + 253,81 v18 + 246,97 v19 + 252,79 v20$$

Dari tiga persamaan koreksi yang harus dibuat (dari trilaterasi G.ABCDEF, C.BHIJD, dan BCDG), dapat dicari nilai koreksi kedua puluh sisi trilaterasi.

Hasil hitungan koreksinya adalah :

Sisi	Koreksi (mm)	Sisi	Koreksi (mm)
1	-24,0	11	4,9
2	-4,2	12	19,5
3	-3,4	13	3,1
4	-3,5	14	3,4
5	-27,4	15	4,6
6	22,5	16	3,6
7	-1,0	17	-12,4
8	10,7	18	-13,1
9	15,5	19	-12,8
10	9,8	20	-13,1

Hasil hitungan koordinat titik trilaterasi

Titik	Absis (m)	Ordinat (m)
A	4469,009	6614,922
B	5514,673	6716,782
C	5703,302	5703,302
D	5000,000	5000,000
E	3996,223	4998,073
F	3848,703	5786,158
G	4641,130	5870,443
H	6301,430	6387,478
I	6693,971	5428,275
J	5950,515	4830,282

Dari ketiga macam hasil hitungan koordinat trilaterasi tersebut, untuk titik yang sama dimungkinkan nilai koordinatnya berbeda. Hal ini disebabkan karena pada proses hitungan sudut pusat maupun quadrilateral tidak memperhatikan data yang lain dari data trilaterasi tersebut.

Pada pekerjaan trilaterasi yang tidak menuntut ketelitian tinggi, hitungan sudut-sudut segitiga untuk men-

dapatkan nilai sinus dan cosinus pada persamaan (3) dapat diganti dengan pengukuran sudut secara grafis. Dengan pengukuran sudut segitiga, dapat diperoleh nilai sudut sampai fraksi 10 menit, sehingga pengaruhnya kecil pada proses hitungan berikutnya.

Perhitungan dengan menggunakan formulir-formulir yang dibuat secara sistimatis dan disesuaikan dengan alat hitung yang akan digunakan maupun operator yang menghitung akan lebih memudahkan dalam proses hitungannya.

Daftar Pustaka

- Davis, Foot dan Kelly, 1981, *Surveying*, Mc. Graw Hill Book Company, New York.
- Mereza, D.F., 1983, *Trilateration adjustment using unit correction derived from least square*, *Surveying and Mapping* volume 43 No. 3, ACSM, Virginia.
- Mikhail, E.M. dan Gordon Gracia, 1981, *Analysis and Adjustment of survey Measurements*, Van Nostrand Reinhold Company New York.

HITUNGAN KOORDINAT (X, Y, Z) POLIGON TERTUTUP CARA BOWDITCH PADA LEMBAR KERJA LOTUS 123

Oleh :

*Ir. Prijono Nugroho Dm., MSPh. *)*

Intisari

Proses hitungan merupakan rangkaian dari tahap pengolahan data pada pekerjaan geodesi (pemetaan). Proses tersebut diharapkan mempunyai kriteria teliti, cepat, dan mudah, baik dalam pemasukan data, hitungan, perbaikan data, maupun pencetakan hasilnya.

Paket program Lotus 123 memberikan kemudahan-kemudahan yang diperlukan oleh suatu proses hitungan. Paket ini dapat digunakan untuk pemasukan data, hitungan, dan perbaikan data sekaligus dalam satu lembar kerja, dengan bentuk format yang dapat disesuaikan. Demikian juga jika dikehendaki, pencetakan hasilnya dapat diperoleh dari lembar kerja tersebut.

Dalam tulisan ini disajikan cara pemakaian lembar kerja Lotus 123 untuk hitungan koordinat poligon tertutup cara Bowditch.

*) Staf Pengajar Jurusan Teknik Geodesi FT-UGM.