

MEKANIKA ALIRAN AIR TANAH PADA AKIFER KARST : MELALUI SALURAN FRAKTAL

Sari B. Kusumayudha *), M.T. Zen **), Sudarto Notosiswoyo ***) dan Rudy Sayoga Gautama ***)

ABSTRACT

In mathematical modeling of groundwater flow mechanics through conduit system, generally the cross sectional area of the conduit is assumed as a circular disk. In the matter of fact, the real cross sectional area of a karst conduit is non-circular, even tend to be irregular. This irregularity causes the karst conduit difficult to be defined as euclidean geometry, but more appropriately presupposed as fractal geometry. Therefore, dealing with groundwater in karstic aquifer, some flow mechanics equations such as Bernoulli equation, need to be reviewed. This paper tries to develop some existing flow mechanics equations to make those acomodatable for fractal geometry. It is expected that the more acurate results will be acquired.

PENDAHULUAN

Aplikasi geometri fraktal di dalam media berpori telah acapkali dibahas para ahli hidrogeologi, namun penerapan di bidang hidrogeologi karst belum banyak dikaji. Hidrogeologi karst pada umumnya dicirikan oleh jaringan porositas sekunder dan sistem pengeringan bawah permukaan melalui sungai-sungai bawah tanah, yang bentuknya tidak beraturan. Irregularitas ini menyebabkan hukum Darcy tidak valid diterapkan. Di lain pihak, persamaan Bernoulli yang mengatur mekanika aliran air melalui suatu saluran, menyederhanakan bentuk penampang saluran sebagai lingkaran. Padahal, saluran-saluran yang berkembang pada akifer karst biasanya berbentuk rumit.

Konsep fraktal menjanjikan suatu kemudahan untuk menguraikan benang kusut yang berkaitan dengan kerumitan. Sehubungan dengan hal tersebut, maka tulisan ini berdasarkan kajian pustaka mencoba mengembangkan persamaan-persamaan yang mengontrol mekanika aliran alirtanah di dalam akifer karst, didasarkan atas pendekatan fraktal

TINJAUAN KONSEP FRAKTAL

Fraktal berasal dari kata fractus yang berarti pecah, adalah suatu bangun benda yang mempunyai dimensi fraktal lebih besar dari dimensi topologinya (Mandelbrot, 1982). Benda ini dibentuk oleh bagian-bagian dari bangun tersebut, dengan cara sama, secara

iterasi, atau dengan cara saling berangkai (Peitgen, et al, 1992). Karakteristik bentuk benda fraktal tidak dapat didiskripsi sebagai bangun euklidean. Sebagaimana diketahui, bangun euklidean adalah bentuk geometri yang mempunyai dimensi berupa bilangan bulat (integer). Sebagai contoh: titik, garis, persegi, dan kubus, masing-masing mempunyai dimensi nol, satu, dua serta tiga. Dimensi fraktal berupa bilangan tidak bulat (non integer), misalnya 0.97, 1,34, 2,85, dsb.

Di dalam fraktal, bagian dari suatu benda, merupakan bentuk sederhana dari keseluruhannya (the part is reminiscent of the whole). Sifat-sifat penting geometri fraktal, adalah keserupaan-diri (self-similarity), kesaling-bergabungan-diri (self-affinity), dan ketidak-seragaman dalam skala atau scale-invariant. Sifat self-similar menunjukkan bahwa suatu obyek fractal disusun oleh bagian-bagian yang serupa satu sama lain. Self-affine artinya obyek fraktal disusun oleh bagian-bagian yang saling berangkai satu sama lain. Sedangkan scale invariant berarti bahwa fraktal tidak mempunyai skala panjang sepesifik. Karena memiliki sifat-sifat tersebut di atas, maka konsep fraktal mampu menguraikan bangun suatu benda alam yang rumit, menjadi elemen-elemen yang primitif (Peitgen, et al, 1992).

Benda fraktal alami jarang yang benar-benar mempunyai sifat serupa diri (self-similar), pada umumnya hanya mempunyai sifat self-similar secara statistik, oleh karena itu disebut statistical self-similar fractal atau statistical self-affine fractal. Contoh obyek

*) Ir. Sari Bahagiarti Kusumayudha, Dosen Jurusan Teknik Geologi UPN "Veteran Yogyakarta, sedang menempuh program doktor di ITB

**) Prof. M. T. Zen, Gurubesar Program Studi Teknik Geofisika ITB

***) Dr. Ir. Sudarto Notosiswoyo, MEng dan Dr. Ir. Rudy Sayoga Gautama, Dosen Program Studi Rekayasa Pertambangan ITB

fraktal demikian adalah fBm (fractional Brownian motion), yang menyatakan jejak gerakan suatu partikel di dalam zat cair, dan berupa kurva berperilaku fraktal. FGn (fractional Gaussian noise) merupakan contoh statistical fractal yang lain. Kalau kurva fBm bersifat areal, maka kurva fGn bersifat spasial (Sahimi & Yortsos, 1990).

Penentuan dimensi fraktal sangat penting dalam pemecahan permasalahan-permasalahan kuantifikasi praktis, karena dimensi fraktal seringkali berkaitan dengan mula-jadi atau proses alam yang berlangsung padanya (Korvin, 1992). Karena fraktal pada umumnya berbentuk irregular, maka derajat irregularitasnya dapat dikuantifikasikan menggunakan harga dimensinya (Sukmono, 1996).

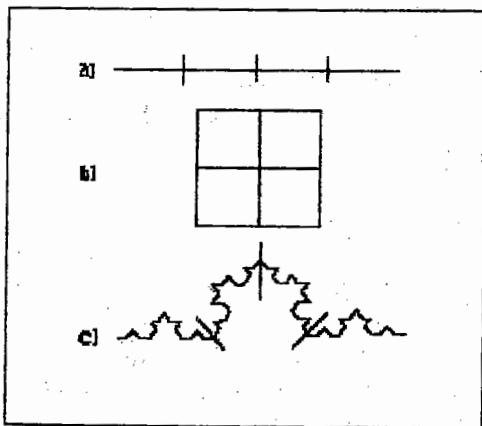
Dimensi Similarity

Dimensi similarity adalah dimensi fraktal yang diperoleh dari metoda penghitungan similarity. Metoda ini hanya dapat diterapkan untuk obyek fraktal yang benar-benar memiliki sifat serupa diri (exact self-similar atau simple self-similar fractal), misalnya Koch curve, seperti terlihat pada Gambar 1.

Untuk menghitung dimensi similarity digunakan persamaan :

$$D = -\frac{\log N}{\log r} \quad (2.1.)$$

- D = dimensi fraktal,
- N = jumlah segmen yang sama, dan
- r = faktor skala segmen terhadap panjang total obyek fraktal.



Gambar 1. Contoh penentuan dimensi similarity (Sahimi & Yortsos, 1990):
 (a) garis = 1, (b) bujur-sangkar = 2,
 (c) Koch curve = 1,2618

Dimensi Boks

Dimensi boks merupakan dimensi fraktal yang didapat dari metoda box counting. Cara ini dapat diterapkan untuk benda-benda yang oleh Sahimi & Yortsos (1990) digolongkan statistical self-similar atau statistical self-affine fractal. Metoda box counting dilakukan dengan membuat grid bersisi tertentu (r) pada obyek fraktal (Gambar 2) Selanjutnya dimensi fraktal (D) ditentukan dengan persamaan :

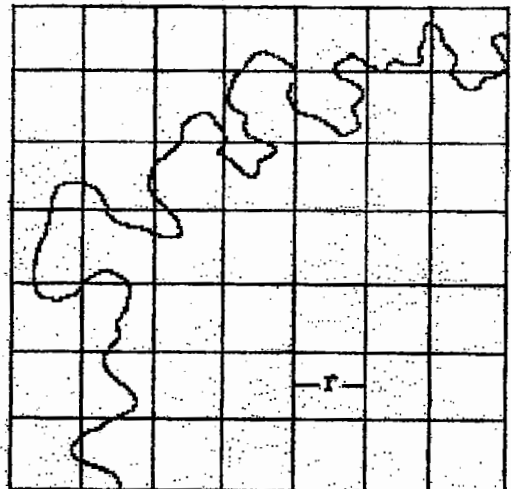
$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log Nr(F)}{-\log r} \quad (2.2)$$

(Nr(F) adalah jumlah kotak berisi r yang memotong himpunan fraktal (F)

Penghitungan Nr(F) dilakukan berulang kali dengan mengubah-ubah harga r hingga sekecil mungkin (mendekati 0), sehingga variasi harga Nr(F) terhadap r dapat diplotkan ke dalam grafik log-log. Dimensinya adalah kemiringan hasil plot tsb. (Gambar 3.)

Jika F suatu obyek fraktal yang berbentuk kurva, dan Pn adalah panjang sikuen poligonal berjumlah n dari F, maka panjang kurva fraktal L(F) tersebut adalah (Tricot, 1995) :

$$L(F) = \lim_{n \rightarrow 0} L(Pn) \quad (2.3)$$

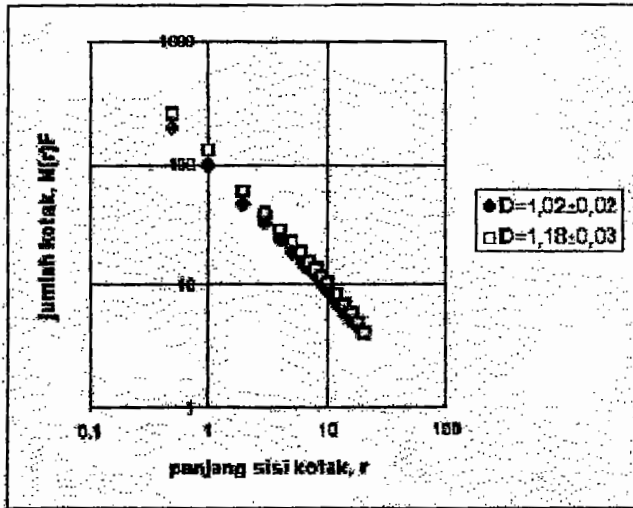


Gambar 2. Metoda box counting untuk menentukan D sebuah segmen aliran Kali Oyo di Pegunungan Selatan DIY

Panjang kurva fraktal dihitung menggunakan metoda box counting, dengan panjang sisi kotak = r, dan

$Nr(F)$ adalah jumlah kotak yang melingkupi F , didapatkan :

$$L(F) = \lim_{r \rightarrow 0} Nr(F) \quad (2.4)$$



Gambar 3. Contoh hasil plot $Nr(F)$ vs r pada grafik log-log hasil box counting

HIDROGEOLOGI KARST

Karst adalah suatu bentang alam yang dicirikan oleh terdapatnya cekungan (closed depressions) dengan berbagai ukuran dan susunan, pengasatan (drainage) permukaan yang terganggu, serta gua-gua dan sistem pengasatan bawah tanah (Bambang Prastistho, 1995). Sedangkan menurut Esteban (1996) karst adalah suatu sistem yang merupakan kesatuan pengeringan alamiah air meteorik dalam sistem terbuka, yang berinteraksi dengan formasi batuan. Tata-lingkung karst pada umumnya kompleks dengan kondisi hidrogeologi dan geomorfologi yang khas.

Terbentuknya sistem karst memerlukan suatu jaringan permeabilitas awal (hydrogeological previousness). Jaringan permeabilitas awal yang terdiri dari porositas massa dasar, bidang-bidang perlapisan, dan retakan-retakan, tidak terbentuk selama proses karstifikasi, melainkan hanya ditingkat-kembangkan oleh korosi dan erosi mekanik, atau dihapus-lenyapkan oleh sementasi dan sedimentasi. Dua faktor yang paling berpengaruh dalam perkembangan karst adalah : a) kuantitas dan kualitas (pH, temperatur, dll) air meteorik yang tersedia untuk melakukan korosi maupun erosi, serta b) hydraulic head serta landaian hidrolika antara daerah resapan dan daerah luhan air meteorik tersebut (Esteban, 1996).

Secara garis besar dikenal ada dua macam aliran airtanah pada sistem karst, yaitu aliran rembesan (diffuse flow) dan aliran saluran (conduit flow). Aliran rembesan terjadi pada media poris granuler, dan media retakan-rapat yang renggangannya berukuran milimeter atau lebih kecil. Sedangkan aliran saluran terjadi melalui pembuluh-pembuluh yang saling berintegrasi dengan ukuran diameter mulai dari sentimeter hingga meter (Mahler & Bennet, 1991).

FRAKTAL DAN HIDROGEOLOGI KARST

Di dalam sistem hidrogeologi karst, jaringan porositas dan permeabilitas dibangun oleh hasil pelarutan batugamping yang bentuknya tidak beraturan. Bentuk tidak beraturan ini dapat dimodelkan sebagai geometri fraktal. Seringkali jaringan ini didukung pula oleh kekar-kekar yang juga berperilaku fraktal. Oleh karena itu penentuan distribusi porositas dan permeabilitas, penghitungan mekanika aliran, dan estimasi potensi airtanah di daerah karst semestinya memperhatikan kehadiran fraktal di dalam sistem tersebut. Salah satu cara untuk mengakomodasi fraktal ialah dengan memasukkan dimensi fraktal di dalam persamaan-persamaan yang telah ada. Fraktal dapat juga diterapkan untuk membantu memetakan penyebaran suatu akuifer di permukaan, dengan cara menganalisis dan menentukan harga dimensi fraktal topografi di tempat tersebut. Karena dimensi fraktal yang sama mencerminkan proses yang sama (Korvin, 1992), maka tempat-tempat yang memiliki dimensi fraktal topografi sama, diinterpretasikan disusun oleh akuifer yang sama pula. Dimensi fraktal pola aliran sungai bawah tanah di daerah karst (Lihat Gambar 2), mencerminkan sifat fisik batuan karbonat yang dilalui oleh saluran tersebut. Demikian pula dimensi fraktal pola aliran sungai di permukaan. (Kusumayudha, dkk, 1997).

Persamaan mekanika aliran melalui suatu saluran yang dikemukakan oleh Bernoulli, menganggap penampang saluran sebagai lingkaran. Padahal di alam, penampang saluran karst lebih tepat diasumsikan sebagai fraktal. Oleh karena itu persamaan tersebut perlu dikembangkan agar akomodatif terhadap geometri fraktal, sehingga hasil perhitungannya diharapkan akan dapat lebih akurat, karena persamaan-persamaan tersebut telah dikembangkan untuk lebih mendekati geometri yang sesungguhnya.

MEKANIKA ALIRAN

Aliran Pada Saluran Tertutup

Aliran airtanah yang terjadi di dalam suatu pipa alamiah, menggunakan gaya gravitasi bumi sebagai sumber energi. Pada aliran yang tunak dan tanpa gesekan di dalam sistem tertutup, energi total akan sama dengan jumlah energi kinetik dan energi potensial dari sistem tersebut. Hal ini diatur oleh persamaan Bernoulli (Fetter, 1994), sebagai berikut :

$$gz + \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \text{constant} \quad (5.1)$$

Energi potensial dihasilkan dari elevasi, z , dan dari tekanan yang bekerja pada sistem tersebut, P . Di dalam hidrogeologi, energi potensial dinyatakan sebagai *hydraulic head*, h . Energi kinetik pada sistem ini terkandung di dalam gerakan air, sebagaimana tercermin pada kecepatannya, v . Apabila dibagi percepatan gravitasi, g , persamaan Bernoulli di atas, menjadi :

$$h + \frac{P}{\rho \cdot g} + \frac{v^2}{2g} = h\tau \quad (5.2)$$

dimana jumlah *head* elevasi, *head* tekanan, dan *head* kecepatan sama dengan *head* total, $h\tau$, pada tersebut.

Aliran pada saluran karts bukannya tanpa gesekan (*frictionless*). Hubungan antara besarnya head gesekan (*friction head*), h_f , yang merupakan energi yang hilang dari gesekan antara air dan dinding saluran, tercermin di dalam persamaan keseimbangan energi antara *inlet* dan *out let* saluran, sebagai bentuk lain persamaan Bernoulli:

$$h\tau = \frac{P_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2g} + h_1 = \frac{P_2}{\rho \cdot g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_2 + h_f \quad (5.3)$$

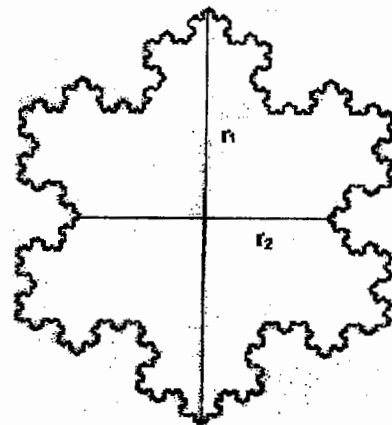
Pada aliran air tanah di dalam saluran karts yang tertutup, bekerja dua macam gaya, yaitu *internal force* yang berasosiasi dengan momentum massa air yang bergerak, dan gaya kekentalan (*viscous forces*) yang terjadi karena lapisan-lapisan fluida saling tergelincir (*sliding*) satu sama lain (White, 1988). Hubungan penting di antara gaya-gaya inertial dan viscous tersebut dinyatakan sebagai rasio antara keduanya, yaitu suatu bilangan tanpa satuan, yang disebut bilangan Reynolds (Reynolds number), NR (Fetter, 1994) :

$$\frac{F_i}{F_v} = \frac{\rho \cdot v^2 / R}{\eta \cdot v / R^2} = \frac{\eta \cdot v R}{\eta} = N_R \quad (5.4)$$

Dua rezim aliran dinyatakan sama, apabila keduanya mempunyai bilangan Reynolds yang sama, tanpa memperhitungkan harga-harga parameter lainnya (White, 1988). R adalah jari-jari hidrolis (*hydraulic radius*).

Persamaan di atas sebenarnya untuk saluran berpenampang lingkaran, dimana R merupakan garis tengah saluran, $R = 2r$. Untuk saluran fraktal, semestinya persamaan di atas dikembangkan lagi, sebagai berikut: Keliling lingkaran mempunyai dimensi = 2. Jari-jari berdimensi 1, atau 1/2 dari dimensi keliling. Besar jari-jari suatu lingkaran maupun obyek fraktal dipengaruhi oleh dimensi kelilingnya. Pada lingkaran, $R = 2r1/2 \times 2$ atau $R = 2r1$. Jadi, pada saluran fraktal, untuk mendapatkan harga R didekati dengan persamaan:

$$R = (r_1 + r_2)^{1/2D} \quad (5.5)$$



Gambar 4. Model fraktal penampang saluran karst : "Koch island"

$D = 2,2618595$ (Sahimi & Yortsos, 1990)

D merupakan dimensi fraktal kurva keliling penampang saluran, sedangkan $r1$ dan $r2$ masing-masing adalah jari-jari terpanjang dan terpendek (Gambar 4). Sehingga persamaan (5.4) berkembang menjadi :

$$\frac{F_i}{F_v} = \frac{\rho \cdot v^2 / (r_1 + r_2)^{1/2D}}{\eta \cdot v / (r_1 + r_2)^D} = \frac{\rho \cdot v (r_1 + r_2)^{1/2D}}{\eta} = N_R \quad (5.6)$$

Perilaku suatu aliran tergantung pada densitas ρ , dan viskositas, η fluida, dimana keduanya adalah fungsi dari temperatur (Tabel 1.)

Tabel 1. Sifat-sifat Fisik Air (White, 1988)

Temperatur (°C)	Kekentalan (poise)	Densitas (g.Ml ⁻¹)
0,0	0,01787	0,99987
5,0	0,01519	0,99999
10,0	0,01307	0,99973
15,0	0,01139	0,99913
20,0	0,01002	0,99823
25,0	0,008904	0,99707
30,0	0,007975	0,99567
35,9	0,007194	0,99406
40,0	0,006529	0,99224

Rezim aliran air yang bergerak perlahan melalui suatu pipa berpermukaan halus, adalah laminar. Apabila kecepatan gerak bertambah, maka garis-garis aliran menjadi tidak stabil. Ketidakteraturan (irregularity) dinding pipa menyebabkan gangguan yang semakin lama semakin meluas. Melalui suatu fasa transisi, bila kecepatan terus meningkat, maka rezim aliran akan berubah dari laminar menjadi turbulen (White, 1988). Di dalam pipa yang halus, perubahan sifat aliran terjadi pada bilangan Reynolds, $N_r = 2100$. Di dalam gua, terowongan sungai bawah tanah, dsb., turbulen terjadi mulai dari N_r yang lebih rendah (White, 1988).

Kuantitas yang perlu diperhatikan dalam mekanika ini, adalah kecepatan aliran dan head loss sepanjang saluran. Untuk aliran laminar, menurut White (1988) head loss yang terjadi pada saluran lingkaran (circular conduit) adalah sebagai berikut :

$$h_f = \frac{8\eta \cdot vL}{\rho \cdot gr^2} \quad (5.7)$$

sedangkan untuk saluran fraktal, persamaan di atas dapat dikembangkan menjadi :

$$h_f = \frac{8\eta \cdot vL}{\rho \cdot g \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^D} \quad (5.8)$$

Sehingga total luahan melalui suatu saluran fraktal didasari atas persamaan Hagen-Poiseuille :

$$Q = \frac{\pi \cdot \rho \cdot g \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^{2D}}{8\eta} \frac{dh}{dl} \quad (5.9)$$

Persamaan head loss dalam media poris secara sederhana masih berada di bawah kendali hukum Darcy. Sedangkan perhitungan untuk aliran fluida yang turbulen pada umumnya mencoba menggunakan berbagai pendekatan empiris, dimulai dari modifikasi dan pengembangan persamaan Darcy-Weisbach :

$$h_f = \frac{fLv^2}{4g \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^{1/2D}} \quad (5.10)$$

Kecepatan aliran turbulen bervariasi terhadap akar kuadrat dari gradien hidrolika. Angka tersebut adalah f , yaitu faktor gesekan (*friction factor*) yang tak berdimensi. Pada rezim aliran laminar, faktor gesekan berbanding terbalik dengan bilangan Reynolds (White, 1988):

$$f = \frac{64}{N_r} \quad (5.11)$$

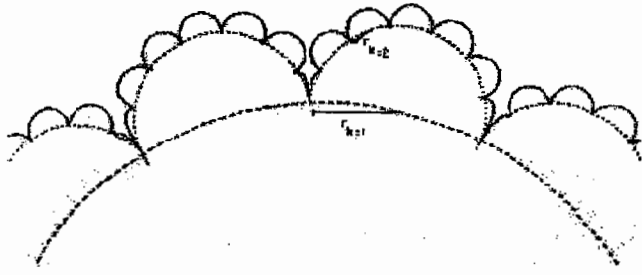
Untuk aliran turbulen di atas permukaan halus, faktor gesekan juga ditentukan oleh bilangan Reynolds, melalui persamaan Prandl-von Karman :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log(N_r \sqrt{f}) - 0,8 \quad (5.12)$$

Untuk aliran turbulen melalui permukaan kasar, faktor gesekan ditentukan oleh kekasaran permukaan tersebut :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{2r}{r} + 1,14 \quad (5.13)$$

dimana e adalah relief ketidakberaturan permukaan. Untuk saluran fraktal, maka harga e ditentukan oleh dimensi fraktal permukaannya, DS (Gambar 5). Oleh karenanya, rumus (4.13) yang telah dikembangkan oleh White (1988) untuk mendeskripsi faktor gesekan dari permukaan halus ke kasar ini, dapat disempurnakan lagi menjadi:



Gambar 5. Model fraktal permukaan dinding saluran karst : "pigeon hole"
 $D = 1,262$ (Korvin, 1992)

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1,14 - 2 \log \left[\frac{D_s}{(r_1 + r_2)^{1/2D}} + \frac{935}{N_R \sqrt{f}} \right] \quad (5.14)$$

Kecepatan aliran adalah maksimum di bagian tengah, dan berkurang hingga mencapai nol pada lapisan aliran yang bersentuhan dengan dinding saluran. Pada aliran laminer, profil kecepatan aliran berbentuk parabola.

Ketebalan lapisan tipis laminer ini, d , didapatkan dari persamaan tanpa dimensi (White, 1988, dikembangkan):

$$\frac{\delta}{(r_1 + r_2)^{1/2D}} = \frac{32,8}{N_R \sqrt{f}} \quad (4.15)$$

yang memperlihatkan bahwa ketebalan film tersebut berkurang dengan bertambahnya bilangan Reynolds. Hasil percobaan menunjukkan bahwa perubahan sifat dari halus ke kasar terjadi pada $e/d = 1/4$. Apabila kekasaran permukaan kurang dari $1/4$ dari ketebalan lapisan laminer, maka saluran tersebut bersifat sebagai pipa yang halus. Apabila $e/d > 6$, lapisan laminer berurair, dan pipa tersebut menunjukkan sifat sebagaimana saluran yang benar-benar kasar. Dalam keadaan demikian faktor gesekan tidak lagi merupakan fungsi dari bilangan Reynolds (White, 1988).

Kekasaran dinding saluran pada batuan karbonat menurut White (1988), adalah $e = 1$ mm. Angka ini akan mendekati benar apabila kekasaran tersebut terbentuk oleh butiran pasir atau oolit yang

menyembul keluar pada relief dinding saluran tersebut.

CATATAN KESIMPULAN

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa keberadaan fraktal di alam seharusnya tidak diabaikan begitu saja, demikian pula dengan kehadirannya di dalam jaringan permeabilitas sistem hidrogeologi karst. Karenanya, untuk mendapatkan hasil yang lebih akurat, maka persamaan-persamaan mekanika aliran airtanah di daerah karst perlu diperbaiki.

Persamaan-persamaan: 1) mekanika aliran (Bernoulli), 2) total luahan (Hagen-Poiseuille), dan 3) faktor gesekan (White, 1988) airtanah melalui suatu saluran fraktal, diusulkan untuk dapat diperbaiki masing-masing sebagai berikut:

$$1) \frac{F_1}{F_v} = \frac{\rho v^2 / (r_1 + r_2)^{1/2D}}{\eta v / (r_1 + r_2)^D} = \frac{\rho v (r_1 + r_2)^{1/2D}}{\eta} = N_R$$

$$2) Q = \frac{\pi \cdot \rho \cdot g \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right)^{2D}}{8\eta} \frac{dh}{dl}$$

$$3) \frac{1}{\sqrt{f}} = 1,14 - 2 \log \left[\frac{D_s}{(r_1 + r_2)^{1/2D}} + \frac{935}{N_R \sqrt{f}} \right]$$

Telaahan di atas merupakan pengembangan dari metoda yang telah ada, dan tetap terbuka untuk penyempurnaan selanjutnya. Hasilnya diharapkan dapat membuka ide-ide dan cakrawala baru dalam studi atau penelitian hidrogeologi demi kemajuan bidang ilmu ini di masa-masa mendatang.

BIBLIOGRAFI

- Adler, P.M., 1996, Transport in Fractal Porous Media, Journal of Hydrology 187, hal 195-213
- Bambang Prastistho, 1995, Permasalahan Manajemen Air : Suatu Kasus di Kabupaten Gunungkidul, Sumbangan Pikiran dari Sebuah Kampus, Pusat Penerbitan & Percetakan UPN "Veteran" Yogyakarta, hal 31-48.
- Bunde, A. & Havlin, S., 1994, Fractals in Science, Springer Verlag, 298 hal.
- Esteban, M., 1996, Karst System from Prospect to Reservoir, Carbonates International Ltd., 168 hal.

- Fetter, C.W., 1994, Applied Hydrogeology, Macmillan Publishing Company, 691 hal.
- Korvin, G., 1992, Fractal Models in the Earth Science, Elsevier Publishers, 396 hal
- Mahler, B. & Bennett, P., 1991, The Interaction of Flow Mechanics and Aqueous Chemistry in Texas Hill Country Grotto, Proc. Third Conference on Hydrogeology, Ecology, Monitoring, and Management of Groundwater in Karst Terranes, NGWA, hal 405-414
- Mandelbrot, 1982, The Fractal of Nature, Springer-Verlag, 406 hal.
- Miller, D.S., 1990, Internal Flow Systems, 2nd. ed., BHRA (Information Services), 396 hal.
- Peitgen, H.O., Jurgens, & Saupe, D., 1992, Fractals for the Classroom, Part One : Introduction to Fractals and Chaos, National Council of Teachers of Mathematics, Springer Verlag, 450 hal.
- Sahimi, M. & Yortsos, Y.C., 1990, Applications of Fractal Geometry to Porous Media : A Review, SPE 20476
- Sukmono, S., 1996, Analisa Fraktal Kegempaan Sesar Aktif Sumatra, Proc. PIT HAGI XX
- Tricot, C., 1995, Curves and Fractal Dimension, Springer-Verlag, 323 hal.
- White, W.B., 1988, Geomorphology and Hydrology of Karst Terranes, Oxford University Press, New York, 464 hal.