

ANALISIS *BUCKLING* PADA STRUKTUR DENGAN *FINITE ELEMENT METHOD*

Oleh :

Ir. Bambang Suhendro, M.Sc., Ph.D.*)

Intisari

Dalam paper ini, beban kritis struktur akibat *elastic buckling* dianalisis dengan *Finite Element Method*. Elemen *beam-column* diturunkan berdasarkan polinomial linier untuk *longitudinal displacement*, dan polinomial berderajat tiga untuk *transverse displacement*. Nonlinearity timbul karena *the second order term* dalam persamaan *strain-displacement* tidak diabaikan, sehingga nantinya persamaan kesetimbangan struktur dapat ditulis berdasarkan *the deflected geometry*.

Matriks kekakuan elemen yang diperoleh terdiri dari bagian yang linier, $[k_0]$, dan bagian yang nonlinier, $[n1]$ dan $[n2]$. Matriks $[n1]$ dan $[n2]$ berturut-turut adalah fungsi linier dan kuadrat dari *displacements*. Persamaan kesetimbangan *incremental* dari struktur, yang dalam hal ini nonlinier, diperoleh dari variasi kedua terhadap energi potensial struktur.

Dengan memakai prinsip bahwa vektor beban *incremental* menjadi nol pada saat terjadi *buckling*, maka persoalan analisis beban kritis struktur akibat *elastic buckling* dapat diformulasikan sebagai persoalan *eigenvalue*. Untuk solusi *quadratic eigenvalue* dipakai *the determinant search method*, sedangkan untuk solusi *linear eigenvalue* dipakai *the inverse vector iteration technique*.

Dari contoh-contoh numerik dapat disimpulkan bahwa beban kritis yang diperoleh dengan prosedur ini cukup akurat untuk keadaan dimana *prebuckling displacement* dari struktur yang ditinjau cukup kecil. Untuk kondisi yang sangat umum, beban kritis tersebut dapat diperoleh dari kurva beban-lendutan yang merupakan solusi dari *nonlinear equilibrium equations*.

Pendahuluan

Analisis struktur yang telah banyak dipelajari biasanya terbatas pada kondisi linier, dimana (a) geometri dari struktur sebelum dan sesudah pembebanan dianggap sama (*small deformation*), dan (b) modulus elastik E dari bahan dianggap konstan selama pembebanan.

Secara matematis, analisis dengan anggapan-anggapan tersebut menghasilkan satu sistem persamaan linier simultan $(K)(U) = (P)$ dimana (K) , (U) , dan (P) berturut-turut adalah matrix kekakuan struktur, vektor *displacement*, dan vektor gaya luar pada sistem koordinat global. Secara fisis, *displacement* dan tegangan yang terjadi pada struktur adalah proporsional secara linier terhadap bebannya.

Kondisi yang linier tersebut di atas cukup teliti dipakai pada keadaan dimana pembebanan pada struktur adalah sedemikian sehingga *displacement* yang terjadi relatif kecil, dan tegangan yang timbul masih berada pada batas-batas elastik bahannya.

Bila *displacement* yang terjadi pada struktur tidak kecil lagi, maka persamaan kesetimbangan struktur harus ditulis berdasarkan *deflected geometry*, yang tentunya belum diketahui. Dengan kata lain, persamaan kesetimbangan struktur adalah fungsi dari *displacement*, sehingga masalahnya menjadi nonlinier. Kondisi ini disebut *geometric non-linearity*^(3,4).

Bila modulus elastik E dari bahan struktur tidak konstan (hubungan antara δ & ϵ tidak linier), maka kondisi inipun akan menyebabkan persamaan kesetimbangan struktur menjadi nonlinier. Keadaan ini disebut *material nonlinearity*^(3,5).

*) Staf Pengajar Jurusan Teknik Sipil FT—UGM, Yogyakarta.

Pada keadaan yang sesungguhnya, kedua sumber *nonlinearity* tersebut terjadi secara simultan. Meskipun demikian pada banyak hal yang terjadi dalam praktek, hanya salah satu sumber *nonlinearity* tersebut yang lebih dominan dari yang lain sehingga untuk menyederhanakan persoalan kita tidak perlu melibatkan keduanya dalam satu analisis.

Dalam paper ini akan dibahas pengaruh dari *geometric nonlinearity* saja dalam analisis struktur yang nantinya bisa diaplikasikan pada masalah penentuan beban kritis akibat *elastic buckling* pada struktur.

Nonlinear Finite Element untuk Beam-Column

Dalam teori elastisitas ⁽¹⁾ telah dipelajari bahwa regangan normal ϵ yang terjadi pada suatu titik yang berjarak η dari garis netral pada suatu elemen *beam-column* (Gambar 1) dinyatakan dalam persamaan berikut :

$$\epsilon(x, \eta) = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \eta \frac{d^2v}{dx^2} \quad (1)$$

dimana u = lendutan pada arah sumbu-x, dan v = lendutan pada arah sumbu-y. Sumbu x dan y adalah sistem koordinat lokal dari elemen (Gambar 1). *Geometric nonlinearity* timbul akibat adanya $[\frac{1}{2} (dv/dx)^2]$ dalam persamaan tersebut. Pada analisis linier yang telah biasa dilakukan, pengaruh $[\frac{1}{2} (dv/dx)^2]$ diabaikan, sehingga masalahnya menjadi jauh lebih mudah.

Dalam model ini, *assumed displacement field* yang dipakai adalah sebagai berikut :

$$u = a_1 + a_2 x \quad (2a)$$

$$v = a_3 + a_4 x + a_5 x^2 + a_6 x^3 \quad (2b)$$

Dengan memakai kondisi batas pada titik nodal 1 dan 2 dari elemen, yaitu :

pada $x = 0$: $u = u_1$, $v = v_1$, dan $dv/dx = \theta_1$

pada $x = L$: $u = u_2$, $v = v_2$, dan $dv/dx = \theta_2$

diperoleh :

$$u = u_1 + \frac{(u_2 - u_1)x}{L} \quad (3a)$$

$$v = v_1 + \theta_1 x + \frac{(-2\theta_1 - \theta_2 + 3\theta_0)x^2}{L} + \frac{(\theta_1 + \theta_2 - 2\theta_0)x^3}{L} \quad (3b)$$

dimana $\theta_0 = (v_2 - v_1)/L$.

Strain energy dari elemen, U^* , dapat diperoleh dengan formula sebagai berikut :

$$U^* = \int_V \frac{1}{2} (E \epsilon^2) dV = E/2 \int_x \int_A \epsilon^2 dA dx \quad (4)$$

Dengan memasukkan persamaan (1) ke dalam persamaan (4) diperoleh :

$$u^* = u_2^* + u_3^* + u_4^* \quad (5)$$

dimana

$$U_2^* = E/2 \int_x \int_A (u_x + \eta v_{xx})^2 dA dx \quad (6a)$$

$$U_3^* = E/2 \int_x \int_A (u_x + \eta v_{xx}) (v_x)^2 dA dx \quad (6b)$$

$$U_4^* = E/8 \int_x \int_A (v_x)^4 dA dx \quad (6c)$$

U_2^* , U_3^* , dan U_4^* berturut-turut adalah *quadratic part*, *cubic part* dan *quartic part* dari *strain energy* U^* . Pada persamaan-persamaan di atas, *subscript* dipakai untuk menunjukkan differensiasi (yaitu $u_x = du/dx$, $v_x = dv/dx$, dan $v_{xx} = d^2v/dx^2$).

Dengan memasukkan persamaan (3a) dan (3b) ke dalam persamaan (6a), (6b) dan (6c), maka U_2^* , U_3^* , dan U_4^* menjadi fungsi dari *displacement variables* pada titik nodal 1 dan 2 dari elemen (yaitu u_1 , v_1 , θ_1 , u_2 , v_2 dan θ_2). Secara kolektif, *displacement variables* dari elemen tersebut diberi notasi sebagai vektor kolom $\{q\}$:

$$\{q\}^T = [u_1 \ v_1 \ \theta_1 \ u_2 \ v_2 \ \theta_2] \quad (7)$$

Dari uraian di atas, U_2^* , U_3^* , dan U_4^* berturut-turut sekarang menjadi fungsi *quadratic*, *cubic* dan *quartic* dari q_i .

Menurut Mallett & Marcal ⁽²⁾, *Tangent Stiffness Matrix* dari elemen, $[k_T^*]$, dapat diperoleh dengan :

$$[k_T^*] = [k_T^*]_{ij} = \left[\frac{\partial^2 U^*}{\partial q_i \partial q_j} \right]$$

$$= [k_0^*] + [n_1^*] + [n_2^*] \quad (8)$$

dimana

$$[k_0^*] = \left[\frac{\partial^2 U_2^*}{\partial q_i \partial q_j} \right] \quad (9a)$$

$$[n_1^*] = \left[\frac{\partial^2 U_3^*}{\partial q_i \partial q_j} \right] \quad (9b)$$

$$[n_2^*] = \left[\frac{\partial^2 U_4^*}{\partial q_i \partial q_j} \right] \quad (9c)$$

$[k_0^*]$ adalah *linear stiffness matrix* yang telah biasa dipakai dalam analisis linier; $[n_1^*]$ adalah *first order incremental stiffness matrix* (fungsi linier dari displacement); dan $[n_2^*]$ adalah *second order incremental stiffness matrix* (fungsi kwadrat dari displacement). Koefisien-koefisien dari ketiga matrix tersebut dapat dilihat pada lampiran.

Nonlinear Equilibrium Equations dari Struktur

Berdasarkan *stiffness matrix* dari elemen yang telah diuraikan sebelumnya, *stiffness matrix* dari struktur $[K_0]$, $[N_1]$, dan $[N_2]$ dapat diperoleh dengan menggabungkannya menurut prosedur yang biasa dipakai dalam finite element⁽³⁾. Selanjutnya, *Potential Energy* dari struktur dapat ditulis sebagai berikut⁽²⁾ :

$$\phi = \{Q\} \left[\frac{1}{2} [K_0] + \frac{1}{6} [N_1] + \frac{1}{12} [N_2] \right] \{Q\} - \{Q\} \{P\} \quad (10)$$

The first variation dari *potential energy* menghasilkan persamaan kesetimbangan yang nonlinier :

$$\left[[K_0] + \frac{1}{2} [N_1] + \frac{1}{3} [N_2] \right] \{Q\} = \{P\} \quad (11)$$

Selanjutnya, the second variation dari *potential energy* menghasilkan the nonlinear incremental equilibrium equations :

$$\left[[K_0] + [N_1] + [N_2] \right]_{\{Q\}} \{\Delta Q\} = \{\Delta P\} \quad (12)$$

dimana $\{Q\} =$ the reference equilibrium position.

Formulasi Buckling Problem Menjadi Eigenvalue Problem

Kurva OAB pada Gambar 2 menunjukkan respon lendutan nonlinier tipikal dari suatu struktur yang

dapat diperoleh dari solusi persamaan kesetimbangan nonlinier, yaitu persamaan (11). Kurva tersebut dikenal dengan the *fundamental path*. Titik puncak dari kurva tersebut (A), yang menunjukkan beban maksimum, disebut the *limit point*. Garis OC adalah respon lendutan dari struktur yang sama, bila pengaruh *geometric nonlinearity* diabaikan (analisis linier).

Dasar untuk menetapkan beban kritik dari suatu struktur adalah menjadi nol-nya vektor $\{\Delta P\}$ dalam the nonlinear incremental equilibrium equations (persamaan (12)). Kondisi ini menghasilkan persamaan :

$$\left[[K_0] + [N_1] + [N_2] \right]_{\{Q\}} \{\Delta Q\} = \{0\} \quad (13)$$

Persamaan (13) tersebut dapat ditulis untuk semua titik pada the *fundamental path*. Untuk setiap vektor beban $\{P\}$ dan vektor displacement $\{Q\}$ pada the *fundamental path* yang diberikan sebagai referensi, bila suatu penyelesaian yang nontrivial $\{\Delta Q\}$ dapat diperoleh dari persamaan (13), maka beban $\{P\}$ tersebut adalah the *exact buckling load*⁽⁴⁾.

Solusi eksak dari persamaan (13) amat rumit. Solusi pendekatan dari *buckling load* bisa diperoleh dari persamaan (13) dengan menganggap bahwa displacement dari struktur bertambah secara linier dengan bertambahnya beban sampai terjadinya *buckling*⁽⁵⁾. Berdasar asumsi tersebut, vektor beban $\{P\}$ dapat diekspresikan sebagai : $\{P\} = p \{P_0\}$, dimana $p =$ parameter skalar, dan $\{P_0\} =$ vektor beban referensi.

Selanjutnya, persamaan (13) dapat ditulis sebagai :

$$\left[[K_0] + p_{cr} [N_1] + p_{cr}^2 [N_2] \right]_{\{Q_0\}} \{\Delta Q\} = 0 \quad (14)$$

dimana $p_{cr} =$ harga p pada saat terjadinya *buckling*. Perlu dicatat bahwa pada persamaan (14) tersebut, the incremental stiffness matrices $[N_1]$ dan $[N_2]$ dievaluasi pada $\{Q\} = \{Q_0\} = [K_0]^{-1} \{P_0\}$. Persamaan (14) tersebut adalah *quadratic eigenvalue problem* untuk memperoleh solusi pendekatan dari *buckling load* dan *buckling mode* yang sesuai.

Bila dapat pula dianggap bahwa pada saat terjadinya *buckling*, displacement nya cukup kecil, maka matrix $[N_2]$ yang merupakan fungsi kuadrat dari displacement tersebut dapat diabaikan. Dengan demikian, persamaan (14) dapat disederhanakan lagi menjadi *linear eigenvalue problem* :

$$\left[[K_0] + p_{cr} [N_1] \right]_{\{Q_0\}} \{\Delta Q\} = 0 \quad (15)$$

Untuk memperoleh solusi dari persamaan (14), yaitu *quadratic eigenvalue problem*, metoda yang dipakai adalah *the determinant search method*^(5,6). Untuk *linear eigenvalue problem* (persamaan (15)) dipakai *the inverse vector iteration technique*^(5,6).

Bila harga P_{cr} dari persamaan (14) atau persamaan (15) telah diperoleh, maka vektor beban kritik yang dicari adalah $P_{cr} \{P_0\}$. Harga P_{cr} yang dipakai adalah yang terkecil.

Numerical Results

Berdasar analisis yang telah diuraikan sebelumnya, sebuah program komputer telah disusun untuk menyelesaikan persamaan (14) maupun (15), dan hasil dari beberapa contoh numerik akan dibahas.

Contoh pertama adalah portal dengan bentuk, ukuran dan beban seperti pada Gambar 3. Solusi *quadratic eigenvalue problem* memberikan harga *buckling load* $P_{cr, quadratic} = 4764$ kips; sedangkan solusi *linear eigenvalue problem* memberikan harga $P_{cr, linear} = 4759$ kips. Harga-harga tersebut cukup dekat dengan *limit load* yang diperoleh dengan menyelesaikan *the nonlinear incremental equilibrium equations* (akan dibahas pada kesempatan lain), seperti yang dinyatakan oleh kurva beban-lendutan, yaitu sebesar $P_{cr} = \pm 4750$ kips.

Contoh kedua adalah portal dua bentang seperti terlihat pada Gambar 4. Pada contoh ini, $P_{cr, quadratic} = 4939$ kips, $P_{cr, linear} = 4940$ kips. Harga-harga tersebut juga cukup dekat dengan *limit load* dari kurva beban-lendutan, yaitu $P_{cr} = \pm 4900$ kips.

Contoh ketiga adalah kolom dengan kedua ujungnya didukung oleh sendi (lihat Gambar 5). Dengan membagi kolom tersebut menjadi 6 elemen, harga-harga yang diperoleh adalah $P_{cr, quadratic} = P_{cr, linear} = 6376$ kips dan harga tersebut sama pula dengan hasil berdasar rumus tekuk Euler sebesar $P_{cr} = (\pi^2 E I) / L^2 = 6376$ kips.

Pembahasan dan Kesimpulan

Seperti telah diuraikan di muka, penentuan *buckling load* sebagai *quadratic* atau *linear eigenvalue problem* merupakan metoda pendekatan secara numerik. Dari ketiga contoh yang diberikan, hasilnya memberikan gambaran bahwa metoda ini cukup akurat untuk menentukan *buckling load* dari suatu struktur. Metoda ini boleh dikata adalah

merupakan *short cut procedure* yang tentu saja jauh lebih sederhana daripada kita menyelesaikan *the nonlinear incremental equilibrium equations* untuk memperoleh respon lengkap berupa kurva beban-lendutan.

Pengaruh dari *quadratic* dan *linear eigenvalue problem* pada contoh-contoh di atas tidak terlihat karena contoh-contoh tersebut seperti dapat dilihat pada kurva beban-lendutannya, mengalami *pre-buckling displacement* yang cukup kecil. Kondisi tersebut sesuai dengan anggapan yang dipakai, sehingga matrix $[N_2]$ yang merupakan fungsi kuadrat dari displacement tidak berpengaruh banyak pada hasil solusinya.

Meskipun demikian, metoda eigenvalue ini tidak bisa dipakai untuk kondisi struktur yang sangat umum, di mana *pre-buckling displacement*-nya mungkin cukup besar dan nonlinear sehingga anggapan yang dipakai di muka (bawa displacement dari struktur bertambah secara linier dengan bertambahnya beban sampai *buckling* terjadi) tidak terpenuhi lagi.

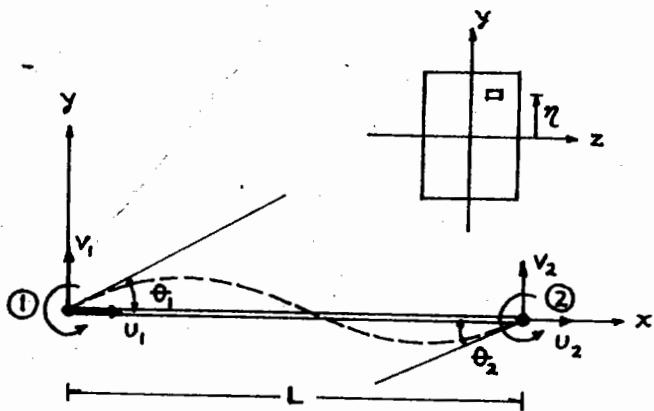
Untuk mengatasi hal ini, satu-satunya jalan adalah dengan menyelesaikan *the nonlinear equilibrium equations* dan menggambarkan kurva beban-lendutan nya, dan dari kurva inilah *limit load* dapat ditetapkan secara akurat. Prosedur ini, yang tentunya relatif lebih rumit, akan dibahas pada kesempatan lain.

Daftar Pustaka

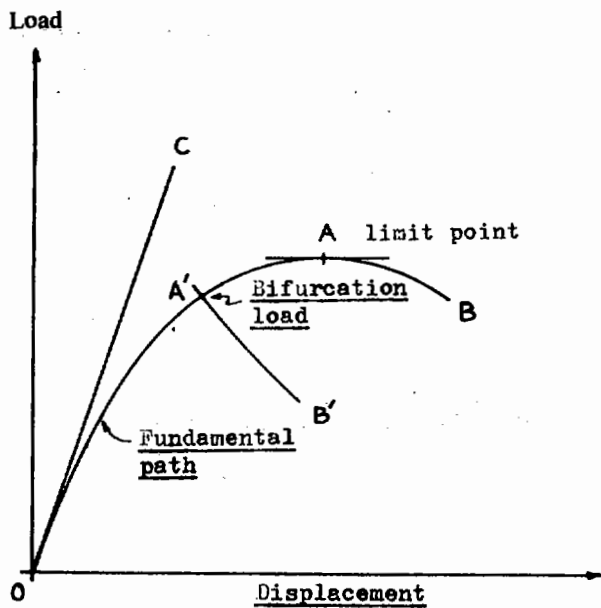
- Oden, J.T., Ripperger, E.A., *Mechanics of Elastic Structures*, 2nd edition, McGraw Hill Book Co., New York, 1981.
- Mallett, R.H., Marcal, P.V., *Finite Element Analysis of Nonlinear Structures*, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 94, No. ST 9 September, 1968.
- Cook, R.D., *Concepts And Applications of Finite Element Analysis*, 2nd edition, John Wiley & Sons, New York, 1981.
- Wen, R. K., Lange, J., *Curved Beam Element for Arch Buckling Analysis*, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 107, No. ST11 November, 1981

Wen, R. K., Rahimzadeh, J., *Nonlinear Elastic Frame Analysis by Finite Element*, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 109, No. 8, August, 1983.

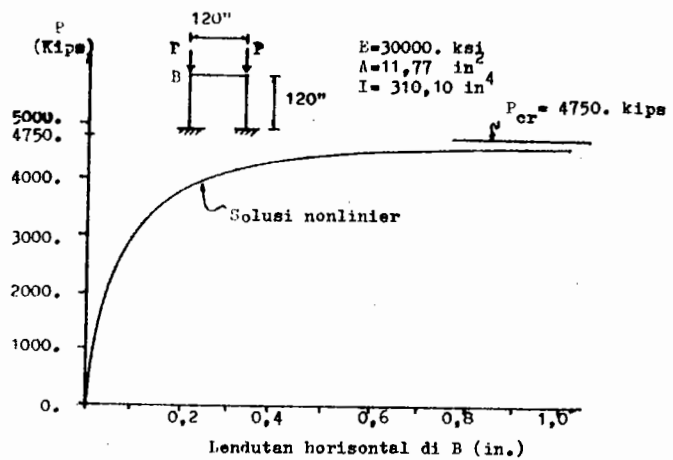
Bathe, K. J., Wilson, E. L., *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice Hall Inc., New Jersey, 1976.



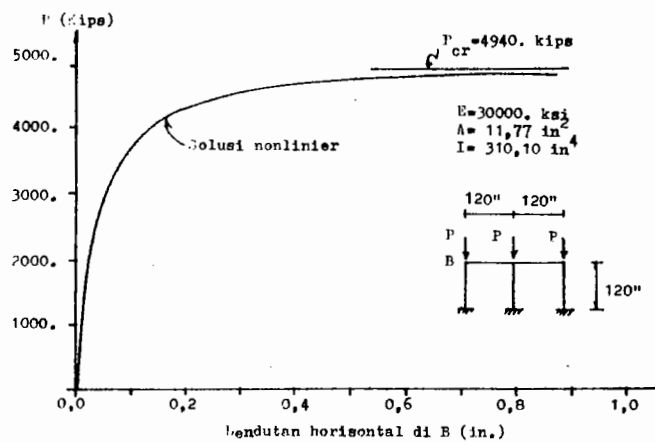
Gambar 1. Element beam-column



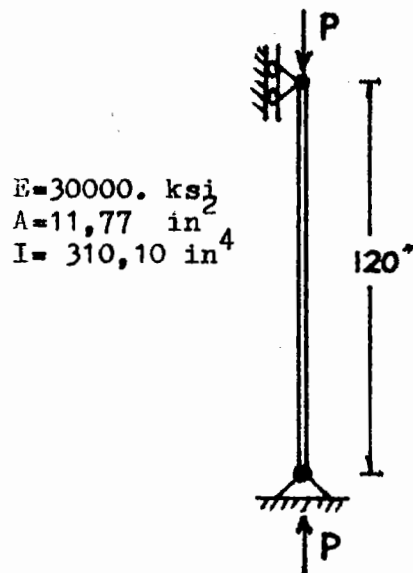
Gambar 2. Nonlinier load-displacement relation



Gambar 3. Contoh numerik 1



Gambar 4. Contoh numerik 2



Gambar 5. Contoh numerik 3

Lampiran

Koefisien Matriks $[k_o]$

$$k(1,1) = k(4,4) = \frac{EA}{L}$$

$$k(1,4) = -k(1,1)$$

$$k(2,2) = k(5,5) = \frac{12EI_n}{L^3}$$

$$k(2,5) = -k(2,2)$$

$$k(2,6) = k(2,3) = \frac{6EI_n}{L^2}$$

$$k(3,5) = k(5,6) = -k(2,3)$$

$$k(6,6) = k(3,3) = \frac{4EI_n}{L}$$

$$k(3,6) = 2EI_n/L$$

Koefisien Matriks $[n_1]$

$$n_1(5,5) = n_1(2,2) = 6(u_2 - u_1) \frac{EA}{5L^2}$$

$$n_1(2,5) = -n_1(2,2)$$

$$n_1(2,3) = n_1(2,6) = (u_2 - u_1) \frac{EA}{10L}$$

$$n_1(3,5) = n_1(5,6) = -n_1(2,3)$$

$$n_1(3,3) = n_1(6,6) = 2(u_2 - u_1) \frac{EA}{15}$$

$$n_1(3,6) = -(u_2 - u_1) \frac{EA}{30}$$

$$n_1(4,5) = n_1(1,2) = \left[-\frac{\theta_1 + \theta_2}{10} + \frac{6(v_2 - v_1)}{5L} \right] \frac{EA}{L}$$

$$n_1(2,4) = n_1(1,5) = -n_1(1,2)$$

$$n_1(1,3) = \left[\theta_2 - 4\theta_1 + 3\left(\frac{v_2 - v_1}{L}\right) \right] \frac{EA}{30}$$

$$n_1(1,6) = \left[\theta_1 - 4\theta_2 + 3\left(\frac{v_2 - v_1}{L}\right) \right] \frac{EA}{30}$$

$$n_1(4,6) = -n_1(1,6)$$

$$n_1(3,4) = -n_1(1,3)$$

Koefisien Matriks $[n_2]$

$$n_2(3,3) = [12L\theta_1^2 + L\theta_2^2 - 3L\theta_1\theta_2 + \frac{18}{L}(v_2 - v_1)^2 + 3(v_2 - v_1)(\theta_1 - \theta_2)] \frac{EA}{140}$$

$$n_2(2,3) = [-3\theta_1^2 + 3\theta_2^2 + 6\theta_1\theta_2 + \frac{108}{L^2}(v_2 - v_1)^2 - \frac{72}{L}\theta_1(v_2 - v_1)] \frac{EA}{280}$$

$$n_2(3,5) = -n_2(2,3)$$

$$n_2(3,6) = [-3L\theta_1^2 - 3L\theta_2^2 + 4L\theta_1\theta_2 - 6(v_2 - v_1)(\theta_1 + \theta_2)] \frac{EA}{280}$$

$$n_2(6,6) = [L\theta_1^2 + 12L\theta_2^2 - 3L\theta_1\theta_2 + \frac{18}{L}(v_2 - v_1)^2 + 3(v_2 - v_1)(\theta_1 - \theta_2)] \frac{EA}{140}$$

$$n_2(2,6) = [3\theta_1^2 - 3\theta_2^2 + 6\theta_1\theta_2 + \frac{108}{L^2}(v_2 - v_1)^2 - \frac{72}{L}\theta_1(v_2 - v_1)] \frac{EA}{280}$$

$$n_2(5,6) = -n_2(2,6)$$

$$n_2(5,5) = n_2(2,2) = \left[\frac{18}{L}\theta_1^2 + \frac{18}{L}\theta_2^2 + \frac{432}{L^2}(v_2 - v_1)^2 - \frac{108}{L^2}(v_2 - v_1)(\theta_1 + \theta_2) \right] \frac{EA}{140}$$

$$n_2(2,5) = -n_2(2,2)$$