PENGARUH BESAR VARIANS MASUKAN DAN DERAU KELUARAN PADA TAPIS KALMAN

Oleh :

Adhi Susanto, M.Sc., Ph.D. *)

Intisari

*Teknik tapis yang dikembangkan oleh Kalman memberikan penyelesaian yang lebih umum untuk masalah perancangan estimator keadaan **(state)** suatu sistem linear. Sistem linear yang ditinjau dapat berubah dengan waktu **(time varying)** dan berpeubah-jamak **(multi-variable)**. Pada masukan dan keluaran dapat pula terdapat derau acak **(random noise)** untuk lebih mendekati keadaan sistem-sistem nyata.*

*Besar derau masukan maupun keluaran yang diwakili oleh varians-variansnya, berpengaruh terhadap kerja tapis Kalman yang diterapkan. Suatu model sistem tetap dan berpeubah-keadaan dua diambil untuk simulasi penerapan tapis Kalman. Perilaku tapis ini diamati untuk berbagai nilai varians derau normal pada masukan dan keluaran. Unjuk-kerja **(performance)** tapis ditinjau dari segi kecepatan dan kecermatan estimasi yang dihasilkan. Perkembangan besar "Kalman gain", dan peubah-peubah lain, dengan naiknya nomer iterasi diperlihatkan secara grafis.*

Derau masukan berpengaruh positif terhadap unjuk-kerja tapis Kalman, sedang sebaliknya derau keluaran menyulitkan tugas tapis Kalman dalam mengestimasi peubah keadaan sistem.

Pendahuluan

Tapis Kalman mempunyai fungsi memisahkan isyarat yang dicari dari isyarat lain yang mencampurinya, yang masing-masing bersifat acak. Watak (keacakan) kedua isyarat tersebut tidak perlu diketahui sebelum tapis bekerja, karena tapis ini justru mempunyai keistimewaan : menggali watak isyarat yang diperlukan sambil melaksanakan penapisan. Dengan demikian tapis Kalman akan selalu bekerja optimum, dalam arti ralat keluaran terhadap isyarat yang dicari selalu minimum, meskipun keadaan kerja berubah-ubah, dari segi statistika isyarat maupun watak sistemnya.

Untuk memberikan gambaran tentang penerapannya, diambil suatu sistem umum berikut ini, dengan pemantauan peubah keadaan sistem sebagai permasalahannya.

Secara umum, suatu sistem diskret linear berpeubah-jamak diungkap dengan persamaan keadaan sebagai berikut :

$$x(k+1) = \emptyset(k)x(k) + \Gamma(k)u(k) + \Gamma_1(k)w(k)$$

$$y(k) = H(k)x(k) + v(k)$$

dengan

$\emptyset(k)$	: $n \times n$	(matriks watak sistem pokok)
$\Gamma(k)$	: $n \times p$	(matriks pengaruh masukan)
$H(k)$	: $p \times n$	(matriks hubungan sistem dengan keluaran)
$\Gamma_1(k)$	: $n \times r$	(matriks pengaruh derau masukan)
$w(k)$	: $r \times 1$	(vektor derau masukan)
$v(k)$	: $p \times 1$	(vektor derau keluaran)

Watak-watak derau :

$$E\{w(k)\} = E\{v(k)\} = 0 \qquad \text{(rerata nol)}$$

$$\left.\begin{aligned} E\{w(i)w^T(j)\} &= R_w\,\delta_{ij} \\ E\{v(i)v^T(j)\} &= R_v\,\delta_{ij} \end{aligned}\right\} \quad \text{takgayut statistis}$$

R_w dan R_v adalah matriks-matriks kovarians derau yang simetris semi-definit positif, dan

$$\left.\begin{aligned} E\{w(i)v^T(j)\} &= 0 \\ E\{x(i)v^T(j)\} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{tak ada korelasi}$$

---

*)Dosen Tetap Jurusan Teknik Elektro FT-UGM.

Estimasi Peubah Keadaan

Dengan masukan u(k) yang diberikan dan keluaran y(k) yang dapat diamati/diukur, estimasi peubah-keadaan x(k) secara optimal berdasarkan MSE (ralat kuadrat rerata) minimum, diperoleh dengan prosedur tapis Kalman berikut ini.

Langkah 1 : Peningkatan waktu dari t_{k-1} ke t_k

$$\bar{x}(k) = \varnothing(k-1)\,\hat{x}(k-1) + \Gamma(k-1)\,u(k-1)$$
$$M(k) = \varnothing(k-1)\,p(k-1)\,\varnothing^T(k-1) + \Gamma_1(k-1)\,R_w(k-1)\,\Gamma_1^T(k-1)$$

Langkah 2 : Peningkatan pengukuran pada saat t_k

$$L(k) = M(k)H^T(k)\,[H(k)\,M(k)H^T(k) + r_v(k)]^{-1}$$
$$\bar{x}(k) = \bar{x}(k) + L(k)\,[y(k) - H(k)\,\bar{x}(k)]$$
$$P(k) = [I - L(k)\,H(k)]\,M(k)$$

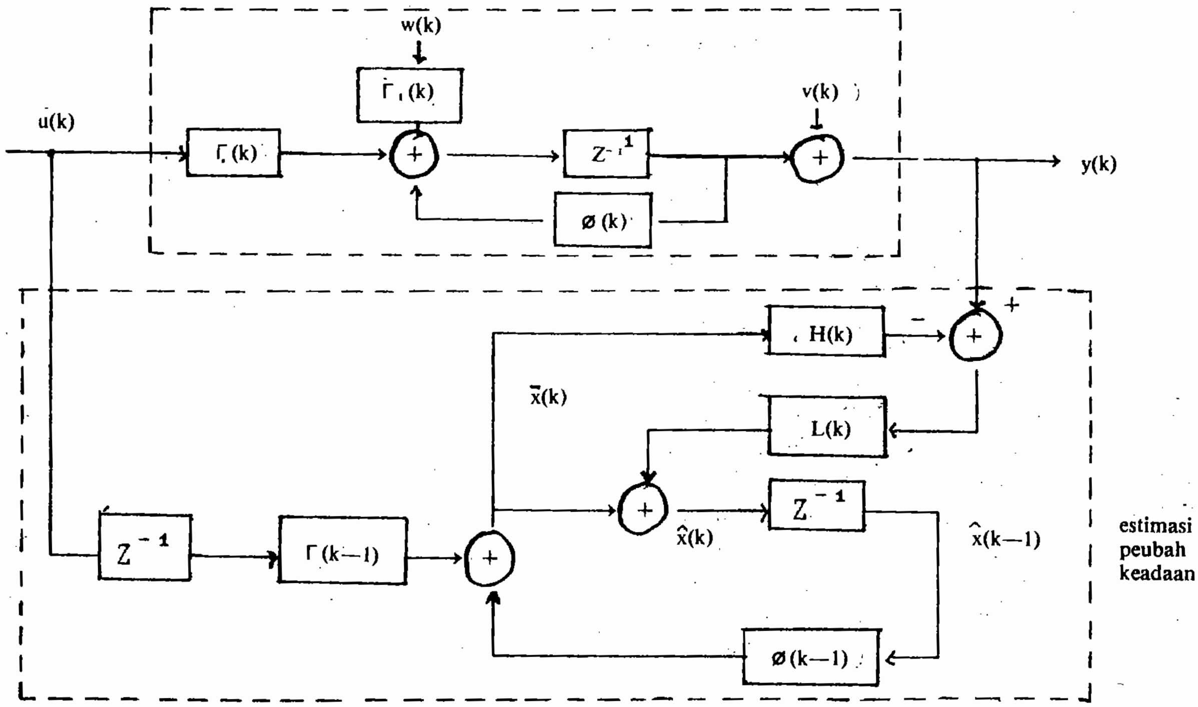
Langkah 3 : k = k + 1 (kenaikan indeks waktu) dan kembali ke langkah 1.

Dalam prosedur di atas :

$$M(k) = E\{(\bar{x} - \hat{x})(\bar{x} - \hat{x})^T\}$$
$$P(k) = E\{(\bar{x} - \hat{x})(\bar{x} - \hat{x})^T\}$$

yang merupakan matriks-matriks simetris definit positif dan berubah dengan waktu. Dengan demikian $M^{-1}(k)$ dan $P^{-1}(k)$ bisa didapat. Tapis Kalman ini diperlihatkan oleh diagram kotak berikut ini.

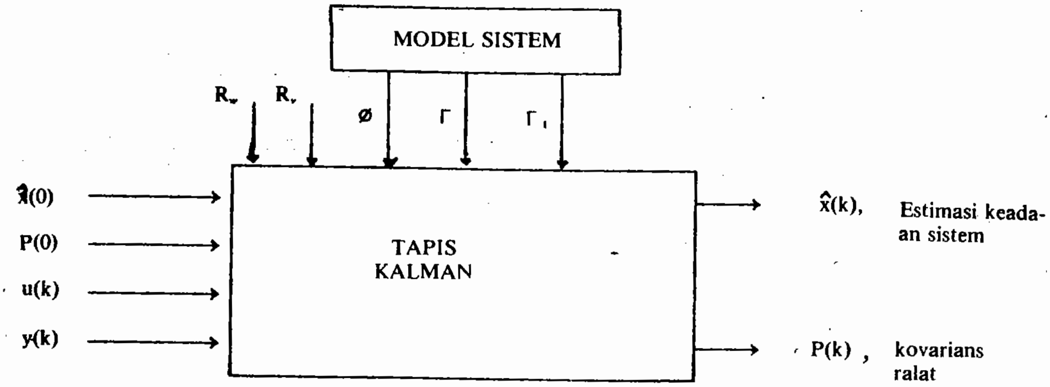
SISTEM DISKRET LINEAR



Jadi, prosedur tapis Kalman memerlukan pengetahuan mengenai :

1) sistemnya, yang diwakili oleh $\emptyset$ (k), Γ(k), dan Γ_1(k)
2) besar deraunya, yang diwakili oleh R_w (k) dan R_v (k)
3) masukan u(k) dan keluaran y(k), dan
4) nilai-nilai awal x(O) dan P(O).

Persyaratan prosedur ini ditunjukkan dengan gambar berikut ini.

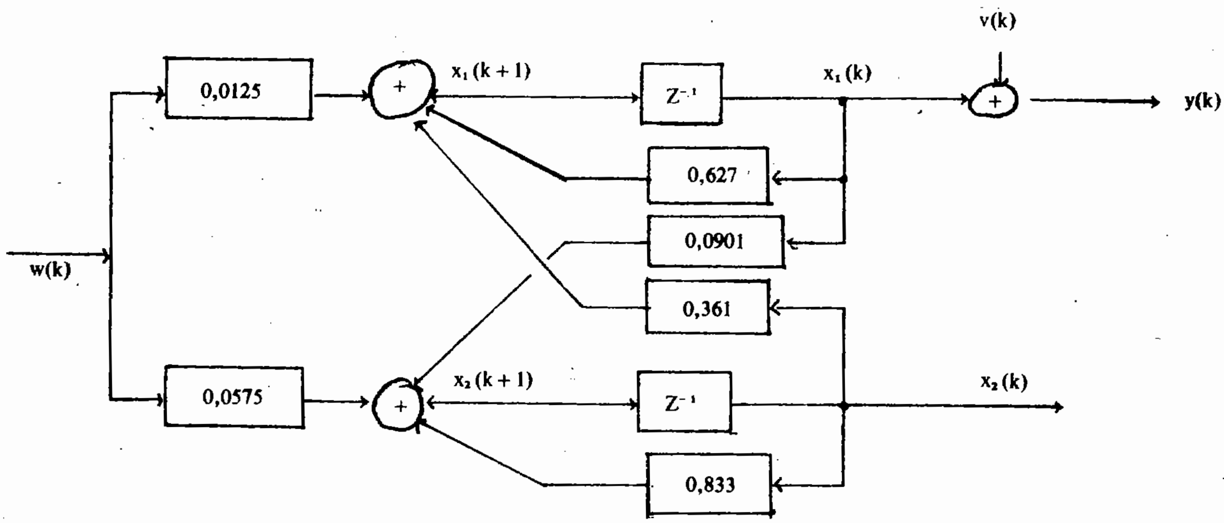


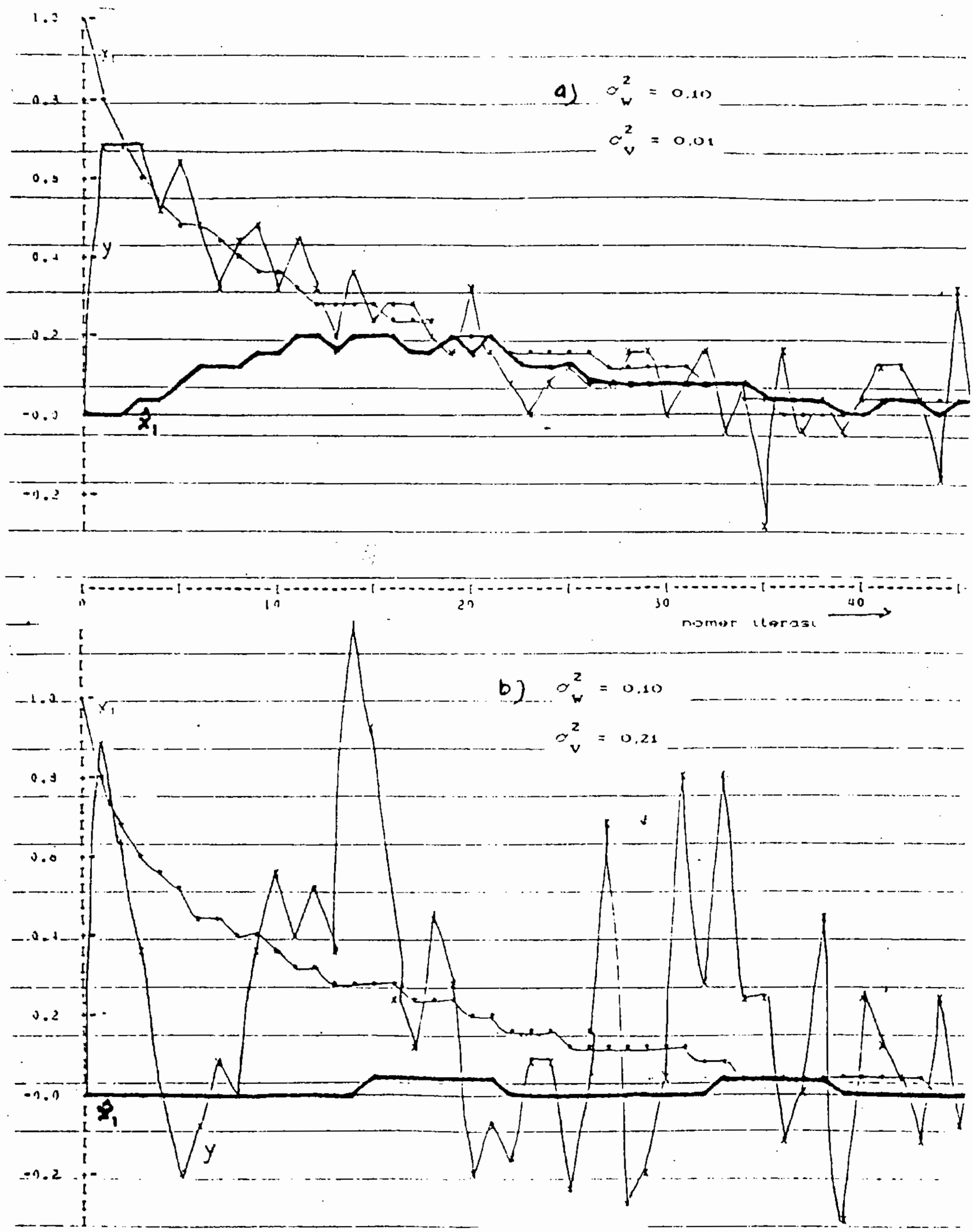
Simulasi

Diambil suatu sistem dinamis, tanpa masukan u(k).

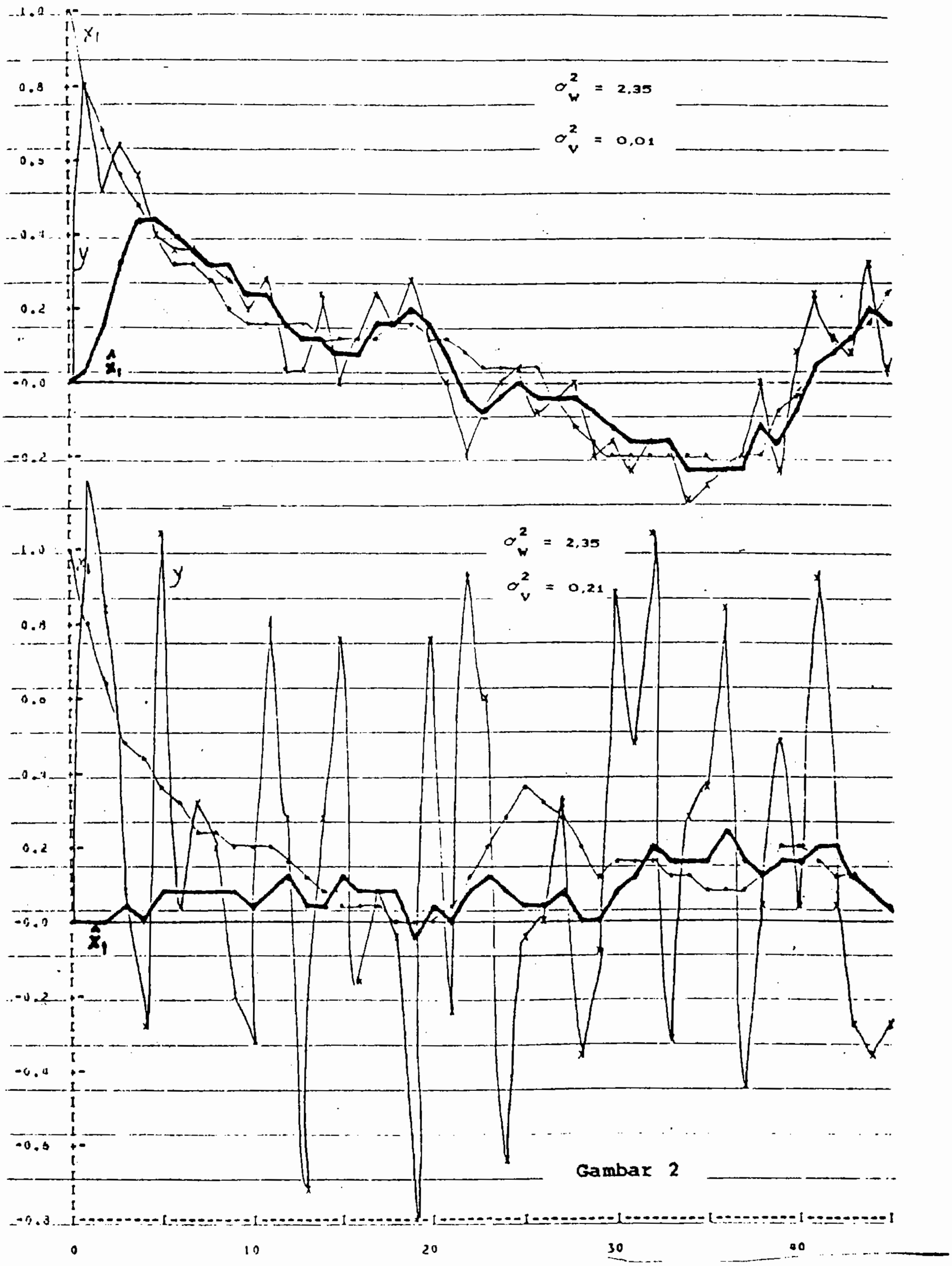
$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}627 & 0{,}361 \\ 0{,}0901 & 0{,}833 \end{bmatrix}}_{\emptyset} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}0125 \\ 0{,}0575 \end{bmatrix}}_{T_1} w(k)$$

$$y(k) = \underbrace{[1 \quad 0]}_{H} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + v(k)$$



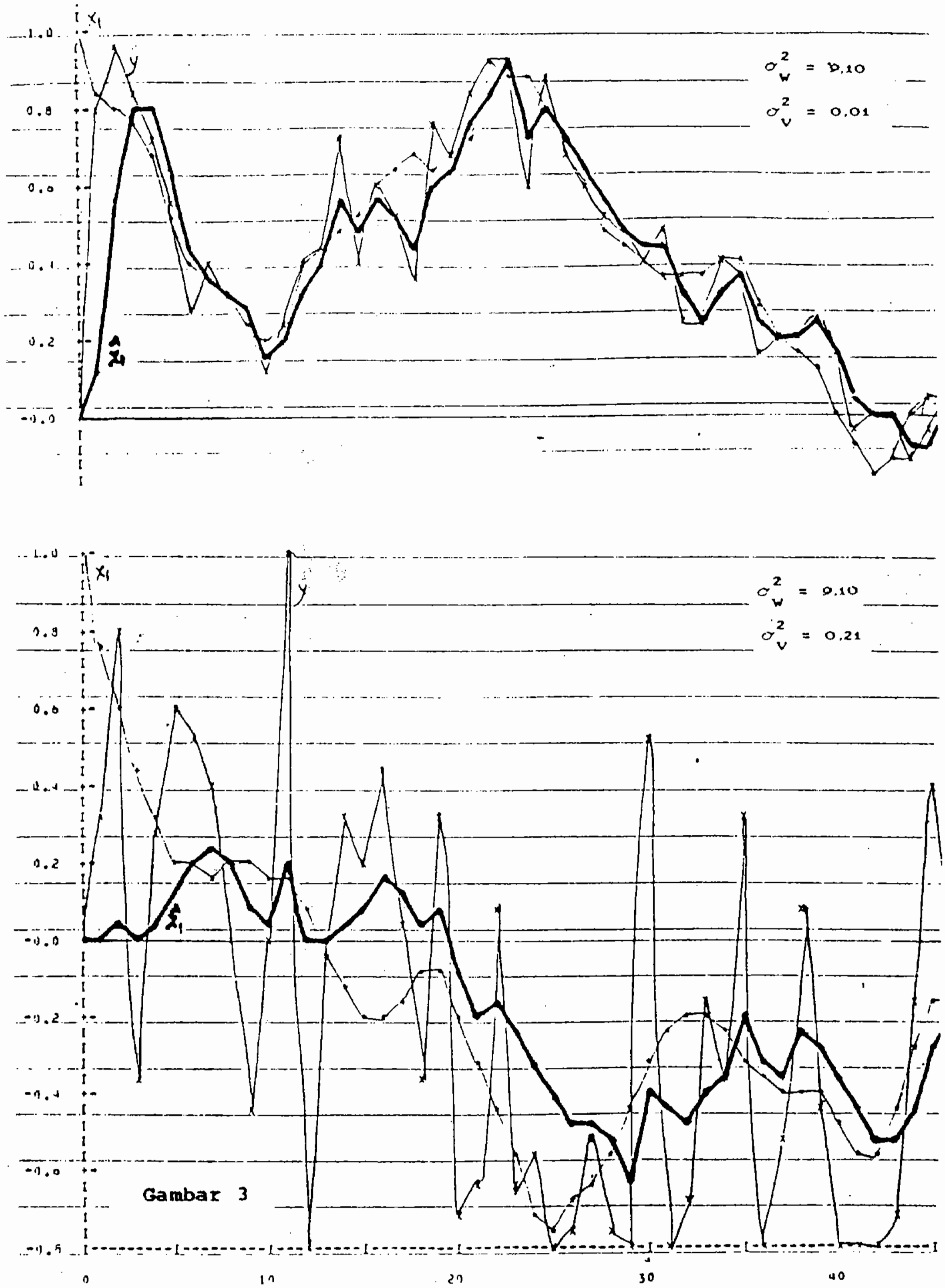

a) σ_w^2 = 0,10
σ_v^2 = 0,01
y
$\hat{x}_1$
0 10 20 30 40
nomor iterasi
b) σ_w^2 = 0,10
σ_v^2 = 0,21
y
$\hat{x}_1$

Gambar 1

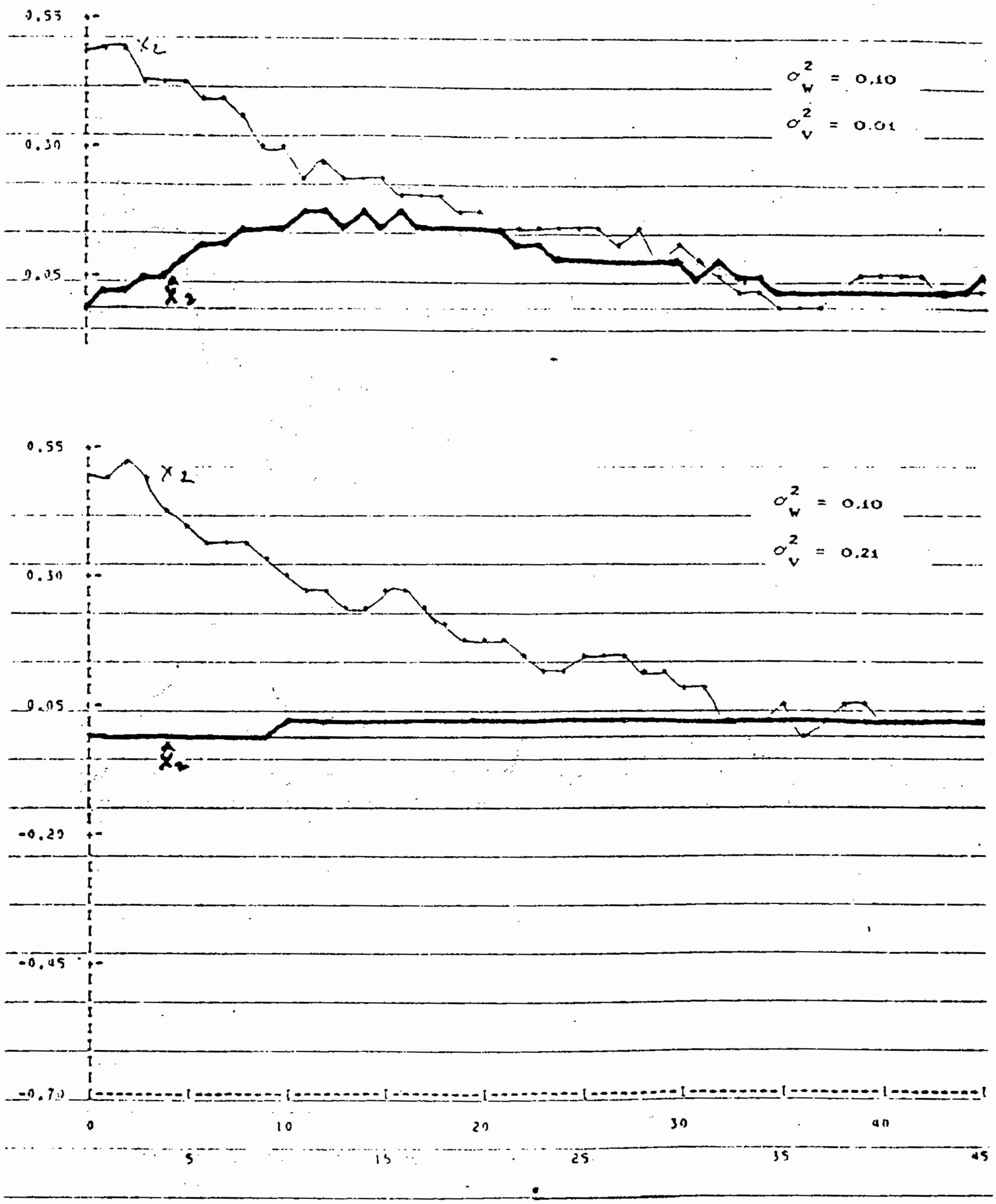


σ_w^2 = 2,35
σ_v^2 = 0,01
σ_w^2 = 2,35
σ_v^2 = 0,21
x_1
y
$\hat{x}_1$
0
10
20
30
40

Gambar 2

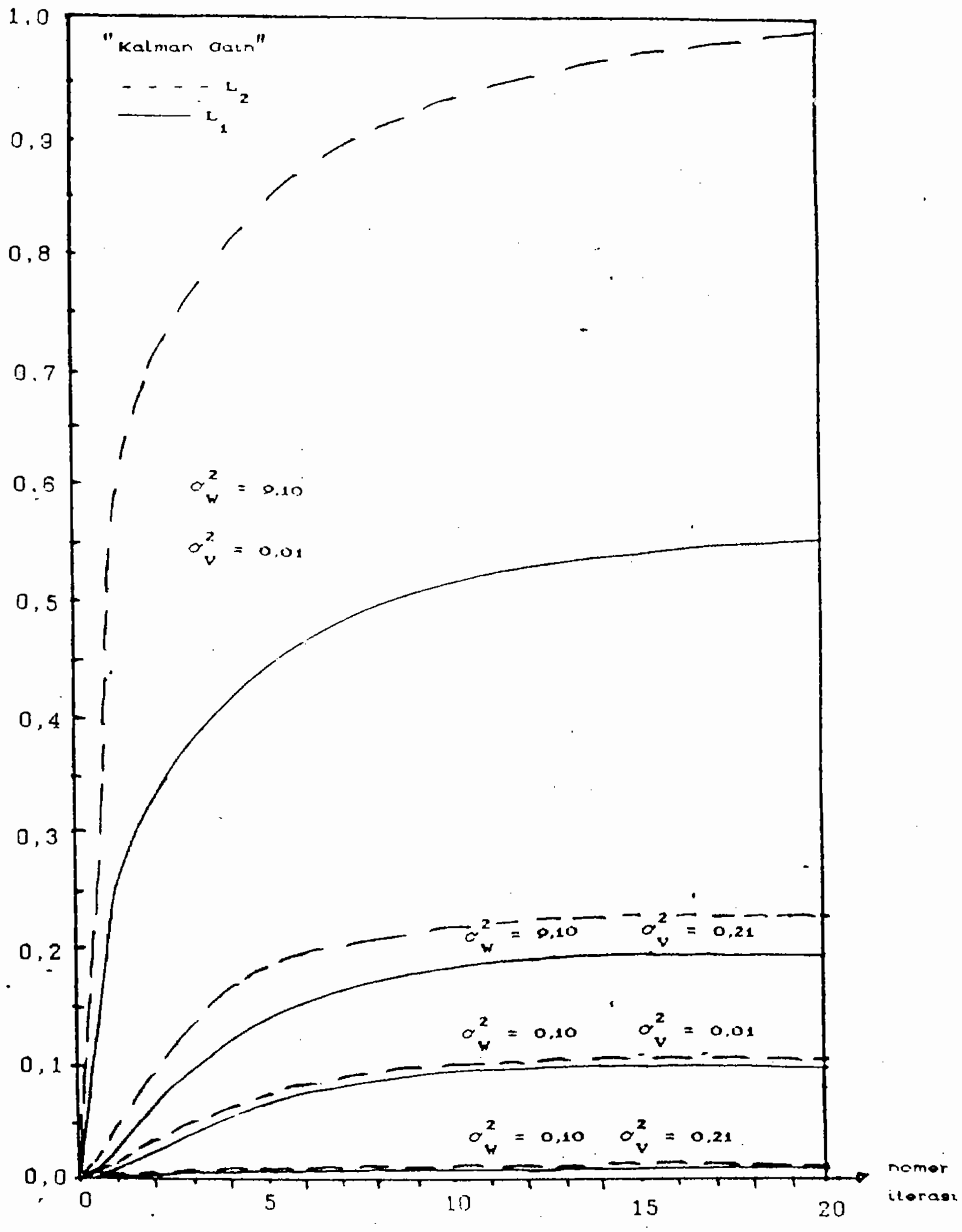


Gambar 3



0.55
0.30
0.05
x_2
$\hat{x}_2$
σ_w^2 = 0.10
σ_v^2 = 0.01
0.55
0.30
0.05
-0.20
-0.45
-0.70
x_2
$\hat{x}_2$
σ_w^2 = 0.10
σ_v^2 = 0.21
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45

Gambar 4


1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,0
"Kalman Gain"
L_2
L_1
$\sigma_w^2 = 0{,}10$
$\sigma_v^2 = 0{,}01$
$\sigma_w^2 = 0{,}10$ $\sigma_v^2 = 0{,}21$
$\sigma_w^2 = 0{,}10$ $\sigma_v^2 = 0{,}01$
$\sigma_w^2 = 0{,}10$ $\sigma_v^2 = 0{,}21$
0
5
10
15
20
nomer iterasi

Gambar 7