PENYELESAIAN ANALITIK PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL SIMULTAN LINIER DARI PROSES TRANSPORT SUATU ZAT YANG MENGALAMI REAKSI BERTINGKAT ORDER SATU PADA MEDIUM TERBUKA DENGAN SUMBER TITIK SEKETIKA (*INSTANTANEOUS POINT SOURCE*)

Andang Widi Harto[1)]

ABSTRACT

Transport process of a substance that undergoes sequential first order reaction in open medium occurs in engineering and environmental analysis. In environmental analysis, this problem occurs in the problem of transport of chemicals and radioactive contaminans which undergo reaction process that produces other substances that still have contamination hazard properties. These substances disperse to the environtment with their own transport properties. Thus the overall contamination analysis must deal with simultaneous partial linier differential equation of each substances. Numerical solution of this problem suffers the limitation of computer memory and the difficulty of boundary condition formulation because of the fact that environmental medium must be treat as an open medium. Analytical solution can be obtained with succesive general Fourier and Laplace tranform. The solution is still in integral forms and must be solved by numerical integration. However numerical integration does not need very large computer memory space compared with direct numerical solutions. The method has been succesfully demonstrated to calculate concentration of radioactive contaminan and its daughter that undergo sequential decay process in a river stream as time and position function.

PENDAHULUAN

Proses transport suatu zat yang mengalami reaksi bertingkat banyak dijumpai dalam persoalan teknik dan analisis lingkungan. Zat induk maupun zat-zat hasil reaksi mengalami proses transport dengan parameter transport masing-masing pada medium yang ditempatinya. Dalam analisis lingkungan, proses ini terjadi pada transport suatu kontaminan yang mengalami reaksi menjadi zat lain yang masih bersifat kontaminan sehingga proses transport yang dialami zat hasil reaksi juga harus diperhitungkan. Formulasi proses transport untuk seluruh spesies yang terlibat, yaitu zat induk maupun zat-zat hasil reaksi dalam medium yang mereka tempati akan menghasilkan persamaan diferensial parsial linier simultan.

Karena medium lingkungan, yaitu tanah, air ataupun udara pada umumnya merupakan medium terbuka, yaitu medium tanpa batas yang jelas, maka maka pada tulisan ini akan dibahas proses tersebut pada medium terbuka. Tulisan ini akan menjelaskan bagaimana mendapatkan penyelesaian analitis untuk proses transport secara umum dan contoh aplikasinya untuk kasus tertentu yaitu proses transport zat radioaktif satu dimensi dalam suatu aliran sungai.

PENURUNAN PERSAMAAN MATEMATIS SECARA UMUM

Pada tulisan ini, akan dibahas penyelesaian analitis dari proses transport zat yang mengalami reaksi bertingkat order satu. Proses reaksi bertingkat dari suatu zat A_1 dapat dituliskan sebagai berikut :

$$A_1 \xrightarrow{\lambda_1} A_2 \xrightarrow{\lambda_2} A_3 \xrightarrow{\lambda_3} \ldots \xrightarrow{\lambda_{i-1}} A_i \xrightarrow{\lambda_i} \ldots \xrightarrow{\lambda_{N-1}} A_N \qquad (1)$$

λ_1, λ_2 sampai λ_{N-1} adalah konstanta kecepatan reaksi (untuk zat radioaktif adalah konstanta peluruhan) dari zat A_1, A_2 sampai A_{N-1}.

Pada tulisan ini, akan dilakukan penyelesaian analitik untuk medium terbuka yaitu medium yang terentang dari $-\infty$ sampai $+\infty$. Pada medium tersebut dilepaskan zat A_1 (zat induk) pada M posisi pelepasan masing-masing berkekuatan $Q_1(m,r,t)$ untuk $m = 1, 2, \ldots, M$. Zat-zat hasil reaksi terdapat hanya sebagai hasil peluruhan bertingkat zat A_1 (zat induk) tersebut. Sementara itu pada saat $t = 0$ (kondisi awal), pada medium belum terdapat zat-zat hasil reaksi.

Masing-masing spesies zat mengalami proses transport difusif maupun konvektif bulk pada medium berdasarkan sifat transport masing-masing (Thibodeaux,1979). Dengan demikian persamaan diferensial parsial untuk konsentrasi dari masing-masing komponen yaitu C_i ($i = 1,2,\ldots,N$) adalah :

[1)] Ir. Andang Widi Harto, M. T., Staf Pengajar Jurusan Teknik Nuklir, Fakultas Teknik UGM

$$
\begin{aligned}
&D_1\nabla^2 C_1-\vec{v}.\nabla C_1-\lambda_1 C_1+\sum_{m=1}^{M} Q_1(m,\vec{r},t) = \frac{\partial C_1}{\partial t}\\
&D_2\nabla^2 C_2-\vec{v}.\nabla C_2-\lambda_2 C_2+\lambda_1 C_1=\frac{\partial C_2}{\partial t}\\
&\qquad\vdots\\
&D_i\nabla^2 C_i-\vec{v}.\nabla C_i-\lambda_i C_i+\lambda_{i-1} C_{i-1}=\frac{\partial C_i}{\partial t}\\
&\qquad\vdots\\
&D_N\nabla^2 C_N-\vec{v}.\nabla C_N+\lambda_{N-1} C_{N-1}=\frac{\partial C_N}{\partial t}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

$$-\infty \le \vec{r} \le +\infty \quad \text{dan pada saat t} = 0 \quad C_i = 0 \quad \text{untuk semua i}$$

Dalam hal ini D_I adalah angka difusi (dispersi) masing-masing zat pada medium dan v adalah kecepatan gerak medium. Sementara itu t menyatakan waktu sedangkan ∇ adalah operator diferensial order satu terhadap ruang.

Jika didefinisikan operator H_i adalah $H_i = D_i\nabla^2 - v.\nabla$ untuk semua i, maka persamaan di atas dapat ditulis dalam notasi matrik sebagai berikut :

$$
\begin{bmatrix}
H_1-\lambda_1 & & & & \\
\lambda_1 & H_2-\lambda_2 & & & \\
 & \vdots & \vdots & & \\
 & & \lambda_{i-1} & H_i-\lambda_i & \\
 & & & \vdots & \vdots \\
 & & & \lambda_{N-1} & H_N
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_i \\ \vdots \\ C_N \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} \sum_{m=1}^{M} Q_1(m,\vec{r},t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \partial C_1/\partial t \\ \partial C_2/\partial t \\ \vdots \\ \partial C_i/\partial t \\ \vdots \\ \partial C_N/\partial t \end{bmatrix}
\tag{3}
$$

$$-\infty \le \vec{r} \le +\infty \quad \text{dan pada saat t} = 0 \quad C_i = 0 \quad \text{untuk semua i}$$

CARA PENYELESAIAN ANALITIK PERSAMAAN UMUM UNTUK SUMBER TITIK SEKETIKA (*INSTANTANEOUS POINT SOURCE*)

Penyelesaian numerik dari persamaan diferensial parsial simultan di atas tentu saja akan memerlukan sangat banyak memori komputer terutama jika melibatkan banyak tingkat reaksi. Disamping itu penyelesaian numerik mempunyai kesulitan dalam penentuan syarat batas untuk medium terbuka. Pada penyelesaian analitis, karena hubungan variabel gayut terhadap variabel bebas dapat ditentukan secara langsung, maka tidak diperlukan banyak memori komputer. Permasalahan syarat batas juga tidak menjadi masalah dalam penyelesaian analitis.

Penyelesaian analitis dapat dilakukan pertama kali dengan transformasi integral (transformasi Fourier umum) (Churcill, 1978) sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
C_i(\vec{r},t) &= \iiint K_i(\beta_{r1},\beta_{r2},\beta_{r3},t)\,\psi(\beta_{r1},\beta_{r2},\beta_{r3},\vec{z})\,d\beta_{r1}\,d\beta_{r2}\,d\beta_{r3}\\
Q_i(\vec{r},t) &= \iiint F_i(\beta_{r1},\beta_{r2},\beta_{r3},t)\,\psi(\beta_{r1},\beta_{r2},\beta_{r3},\vec{z})\,d\beta_{r1}\,d\beta_{r2}\,d\beta_{r3}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

integrasi terhadap β_{r1}, β_{r2} dan β_{r3} masing-masing dilakukan dari 0 sampai ∞

β_{r1}, β_{r2} dan β_{r3} masing-masing adalah nilai pribadi (*eigen value*) dari fungsi pribadi (*eigen function*) ψ untuk komponen arah $r1$, $r2$, $r3$ dari vektor posisi r. Sedangkan vektor posisi z masing-masing komponen β_{r1}, β_{r2} dan β_{r3} masing-masing adalah nilai pribadi (*eigen value*) dari fungsi pribadi (*eigen function*) ψ untuk komponen arah $r1$, $r2$, $r3$ dari vektor posisi r. Sedangkan vektor posisi z masing-masing komponen arahnya adalah $z1 = r1 - (v1)(t)$, $z2 = r2 - (v2)(t)$ dan $z3 = r2 - (v3)(t)$. Dalam hal ini $v1$, $v2$ dan $v3$ masing-masing adalah komponen vektor kecepatan pada arah $r1$, $r2$ dan $r3$. Fungsi pribadi ψ memenuhi persamaan diferensial homogen :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z1^2}+\frac{\partial^2}{\partial z2^2}+\frac{\partial^2}{\partial z3^2}\right)\psi + \left(\beta_{r1}^2+\beta_{r2}^2+\beta_{r3}^2\right)\psi = 0 \tag{5}$$

Sementara itu F_1 adalah :

$$F_1(\beta_{r1},\beta_{r2},\beta_{r3},t) = \frac{\iiint_R Q_1(m,\vec{r},t)\,\psi(\beta_{r1},\beta_{r2},\beta_{r3},\vec{r}')\,dr1'\,dr2'\,dr3'}{N^2(\beta_{r1})N^2(\beta_{r2})N^2(\beta_{r3})} \tag{6}$$

Sedangkan untuk medium terbuka maka (Spiegel,1985):

$$N^2(\beta_{r1}) = N^2(\beta_{r2}) = N^2(\beta_{r3}) = \pi \tag{7}$$

Jika komponen D_i untuk masing-masing komponen arah r1, r2 dan r3 masing-masing adalah : $D_{i,r1}$, $D_{i,r2}$ dan $D_{i,r3}$ maka operator H_i sekarang dapat ditulis menjadi :

$$H_i = -M_i = -\left(D_{i,r1}\beta_{r1}^2 + D_{i,r2}\beta_{r2}^2 + D_{i,r3}\beta_{r3}^2\right) \tag{8}$$

Jika transformasi integral ini diterapkan pada persamaan diferensial parsial simultan (persamaan (3)), maka persamaan tersebut dapat direduksi menjadi persamaan diferensial biasa dengan variabel bebas hanya t (waktu) sebagai berikut :

$$
\begin{bmatrix}
-M_1-\lambda_1 & & & & \\
\lambda_1 & -M_2-\lambda_2 & & & \\
 & \vdots & \vdots & & \\
 & & \lambda_{i-1} & -M_i-\lambda_i & \\
 & & & \vdots & \vdots \\
 & & & \lambda_{N-1} & -M_N
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \vdots \\ K_i \\ \vdots \\ K_N \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} dK_1/dt \\ dK_2/dt \\ \vdots \\ dK_i/dt \\ \vdots \\ dK_N/dt \end{bmatrix}
\tag{9}
$$

untuk masing - masing β_{r1}, β_{r2} dan β_{r3} dari 0 sampai ∞

Selanjutnya dilakukan transformasi Laplace (Spiegell, 1985), pada persamaan (9) dan menghasilkan:

$$\begin{bmatrix} -M_1-\lambda_1-s & & & & \\ \lambda_1 & -M_2-\lambda_2-s & & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & \lambda_{i-1} & -M_i-\lambda_i-s & \\ & & \vdots & \vdots & \\ & & & \lambda_{N-1} & -M_N-s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L\{K_1\} \\ L\{K_2\} \\ \vdots \\ L\{K_i\} \\ \vdots \\ L\{K_N\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L\{F_1\} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

untuk masing-masing β_{n1}, β_{n2} dan β_{n3} dari 0 sampai ∞

dengan menginvers transformasi Laplace, didapatkan penyelesaian berturutan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} K_1 &= F_1 * \exp\left(-(\lambda_1 + M_1)t\right), \cdots \\ K_i &= \lambda_{i-1} K_{i-1} * \exp\left(-(\lambda_i + M_i)t\right), \cdots \\ K_N &= \lambda_{N-1} K_{N-1} * \exp\left(-(\lambda_N + M_N)t\right) \end{aligned} \quad (11)$$

Jika semua pelepasan sumber adalah sumber seketika (*instantaneous source*), yaitu pelepasan terjadi sesaat pada waktu $ts(m)$, maka dengan menggunakan F_1 dari persamaan 6, konvolusi berturutan pada persamaan (11) untuk M sumber seketika dapat diselesaikan dengan hasil :

$$K_1 = \sum_{m=1}^{M} \left\{ \left(\frac{\iiint Q_1(m,\vec{r}\,')\psi(\beta_{n1},\beta_{n2},\beta_{n3},\vec{r}\,')\,dr1'\,dr2'\,dr3'}{N^2(\beta_{n1})N^2(\beta_{n2})N^2(\beta_{n3})} \right) \exp\left(-(\lambda_1+M_1)(t-ts(m))\right) \right\}$$

$$K_i = \prod_{j=1}^{i-1}\lambda_j \sum_{m=1}^{M} \left\{ \left(\frac{\iiint Q_1(m,\vec{r}\,')\psi(\beta_{n1},\beta_{n2},\beta_{n3},\vec{r}\,')\,dr1'\,dr2'\,dr3'}{N^2(\beta_{n1})N^2(\beta_{n2})N^2(\beta_{n3})} \right) \sum_{j=1}^{i} \left(\frac{\exp\left(-(\lambda_j+M_j)(t-ts(m))\right)}{\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{i}\left((\lambda_k+M_k)-(\lambda_j+M_j)\right)} \right) \right\} \quad (12)$$

Dengan mensubstitusikan K_i ke persamaan (4) maka diperoleh penyelesaian lengkap :

$$C_1(\vec{r},t) = \iiint \sum_{m=1}^{M} \left\{ \left(\frac{\iiint Q_1(m,\vec{r}\,')\psi(\beta_{n1},\beta_{n2},\beta_{n3},\vec{r}\,')\psi(\beta_{n1},\beta_{n2},\beta_{n3},\vec{z})\,dr1'\,dr2'\,dr3'}{N^2(\beta_{n1})N^2(\beta_{n2})N^2(\beta_{n3})} \right) \exp\left(-(\lambda_1+M_1)(t-ts(m))\right) \right\} d\beta_{n1}\,d\beta_{n2}\,d\beta_{n3}$$

$$C_i(\vec{r},t) = \iiint \prod_{j=1}^{i-1}\lambda_j \sum_{m=1}^{M} \left\{ \left(\frac{\iiint Q_1(m,\vec{r}\,')\psi(\beta_{n1},\beta_{n2},\beta_{n3},\vec{r}\,')\psi(\beta_{n1},\beta_{n2},\beta_{n3},\vec{z})\,dr1'\,dr2'\,dr3'}{N^2(\beta_{n1})N^2(\beta_{n2})N^2(\beta_{n3})} \right) \sum_{j=1}^{i} \left(\frac{\exp\left(-(\lambda_j+M_j)(t-ts(m))\right)}{\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{i}\left((\lambda_k+M_k)-(\lambda_j+M_j)\right)} \right) \right\} d\beta_{n1}\,d\beta_{n2}\,d\beta_{n3} \quad (13)$$

integrasi terhadap β_{n1}, β_{n2} dan β_{n3} masing-masing dilakukan dari 0 sampai ∞

Jika semua sumber adalah sumber titik seketika (*instantaneous point source*) yang masing-masing berada pada posisi $rs(m)$ dan memancarkan zat A_1 berkekuatan $Q_1(m)$ pada saat $ts(m)$, maka persamaan (13) dapat disederhanakan menjadi :

$$C_1(\vec{r},t) = \iiint \sum_{m=1}^{M} \left\{ \left(\frac{Q_1(m)\psi(\beta_{n1},\beta_{n2},\beta_{n3},\vec{rs})\psi(\beta_{n1},\beta_{n2},\beta_{n3},\vec{z})}{N^2(\beta_{n1})N^2(\beta_{n2})N^2(\beta_{n3})} \right) \exp\left(-(\lambda_1+M_1)(t-ts(m))\right) \right\} d\beta_{n1}\,d\beta_{n2}\,d\beta_{n3}$$

$$C_i(\vec{r},t) = \iiint \prod_{j=1}^{i-1}\lambda_j \sum_{m=1}^{M} \left\{ \left(\frac{Q_1(m)\psi(\beta_{n1},\beta_{n2},\beta_{n3},\vec{rs})\psi(\beta_{n1},\beta_{n2},\beta_{n3},\vec{z})}{N^2(\beta_{n1})N^2(\beta_{n2})N^2(\beta_{n3})} \right) \sum_{j=1}^{i} \left(\frac{\exp\left(-(\lambda_j+M_j)(t-ts(m))\right)}{\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{i}\left((\lambda_k+M_k)-(\lambda_j+M_j)\right)} \right) \right\} d\beta_{n1}\,d\beta_{n2}\,d\beta_{n3} \quad (14)$$

integrasi terhadap β_{n1}, β_{n2} dan β_{n3} masing-masing dilakukan dari 0 sampai ∞

CONTOH KASUS

Contoh kasus yang akan dibahas pada tulisan ini adalah distribusi zat radioaktif dan anak-anak luruhnya setelah terlepas ke suatu aliran sungai. Zat radioaktif dan anak-anak luruhnya dianggap hanya mengalami distribusi satu dimensi yaitu sepanjang arah aliran sungai. Pada sungai tersebut terdapat dua sumber pelepasan titik seketika masing masing pada posisi 2 dan 6 satuan jarak dari suatu referensi ke arah aliran sungai yang masing masing melepaskan sumber radioaktif berkekuatan 20 satuan pada saat $ts = 0$. Kecepatan aliran sungai adalah satu satuan kecepatan ($v = 1$). Zat radioaktif tersebut meluruh sampai delapan tingkat. Konstanta peluruhan dan koefisien dispersi total (gabungan koefisien dispersi molekular dan turbulen) untuk zat radioaktif induk (berindeks 1) maupun masing-masing anak luruhnya (berindeks 2 sampai 9) dapat dilihat pada tabel 1.

Untuk bentuk geometri sepanjang aliran sungai, maka fungsi-fungsi pribadi (*eigen function*) adalah berupa fungsi cosinus sehingga, persamaan (14) dapat ditulis menjadi :

$$C_1(\vec{r},t) = \int_0^\infty \sum_{m=1}^{M} \left\{ \left(\frac{Q_1(m)\,Cos\left(\beta(x-xs-vt)\right)}{\pi} \right) \exp\left(-(\lambda_1+D_1\beta^2)(t-ts(m))\right) \right\} d\beta$$

$$C_i(\vec{r},t) = \int_0^\infty \prod_{j=1}^{i-1}\lambda_j \sum_{m=1}^{M} \left\{ \left(\frac{Q_1(m)\,Cos\left(\beta(x-xs-vt)\right)}{\pi} \right) \sum_{j=1}^{i} \left(\frac{\exp\left(-(\lambda_j+D_j\beta^2)(t-ts(m))\right)}{\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{i}\left((\lambda_k+D_k\beta^2)-(\lambda_j+D_j\beta^2)\right)} \right) \right\} d\beta \quad (15)$$

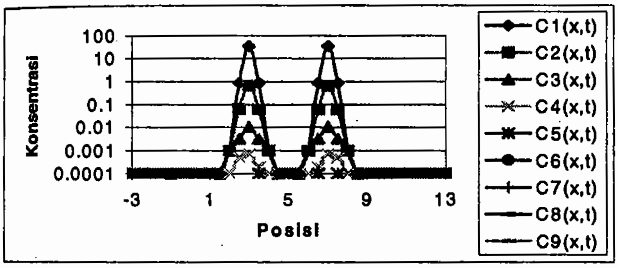
Tabel 1. Konstanta peluruhan dan koefisien difusi zat radioaktif dan anak-anak luruhnya

Komponen	A_1 (zat induk)	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
λ (1/waktu)	0,100	0,150	0,200	0,250	0,300	0,350	0,400	0,450	0,000
D (jarak²/waktu)	0,022	0,021	0,013	0,031	0,020	0,025	0,022	0,011	0,017

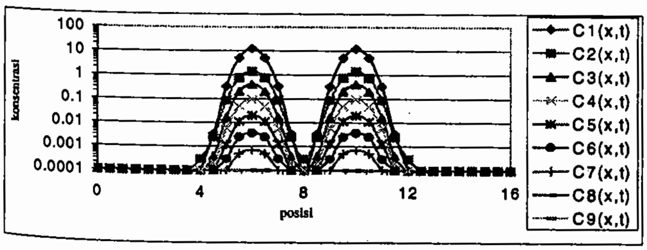
Persamaan yang menyatakan C_1 yaitu konsentrasi zat radioaktif induk dapat disederhanakan menjadi :

$$C_1(\vec{r},t)=\sum_{m=0}^{M}\frac{Q_1(m)}{\sqrt{4\pi D_1(t-ts)}}\exp\left(-\lambda_1(t-ts(m))-\frac{(x-xs-v\,t)^2}{4D_1(t-ts)}\right) \quad (16)$$

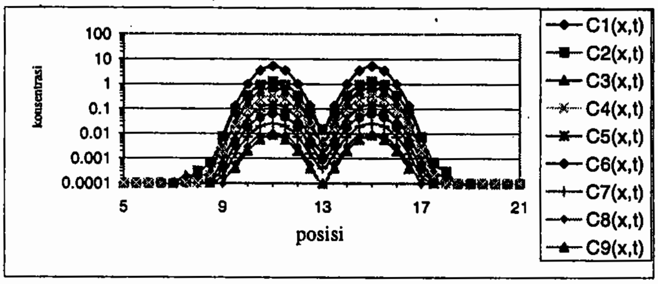
Dengan demikian konsentrasi zat radioaktif induk dapat diperoleh secara langsung dengan persamaan (16) sementara konsentrasi anak-anak luruhnya dihitung dengan persamaan (15). Integrasi untuk menghitung konsentrasi anak-anak luruh dilakukan secara numerik dengan metoda Simpson dari $\beta = 0$ hingga suatu nilai yang cukup besar untuk menghasilkan ketelitian perhitungan yang diinginkan. Integrasi ini walaupun harus dilakukan dengan komputer, akan tetapi tidak memerlukan banyak memori komputer sebagaimana jika dilakukan penyelesaian numerik secara langsung. Hasil perhitungan konsentrasi fungsi posisi pada berbagai nilai waktu dapat dilihat pada Gambar 1 sampai dengan Gambar 9.



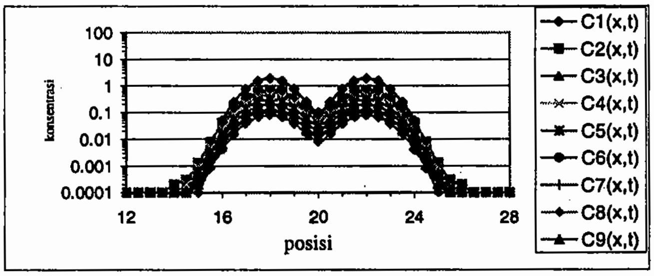
Gambar 1. Distribusi konsentrasi zat radioaktif dan anak-anak luruhnya setelah 1 (satu) satuan waktu.



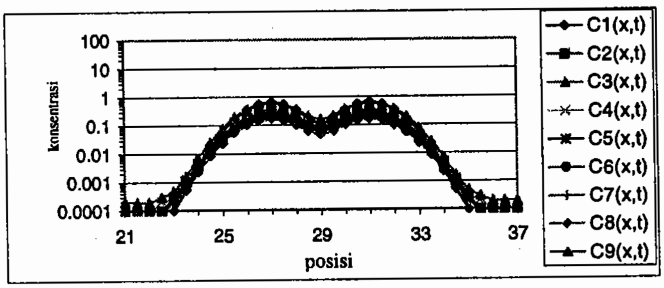
Gambar 2. Distribusi konsentrasi zat radioaktif dan anak-anak luruhnya setelah 4 (empat) satuan waktu.



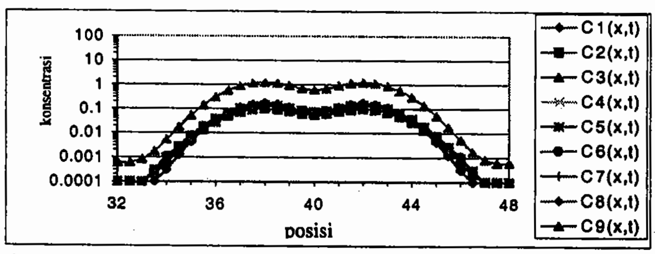
Gambar 3. Distribusi konsentrasi zat radioaktif dan anak-anak luruhnya setelah 9 (sembilan) satuan waktu..



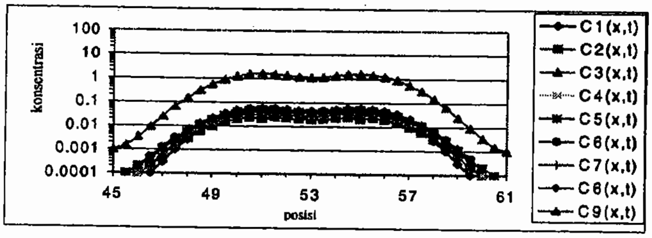
Gambar 4. Distribusi konsentrasi zat radioaktif dan anak-anak luruhnya setelah 16 (enam belas) satuan waktu.



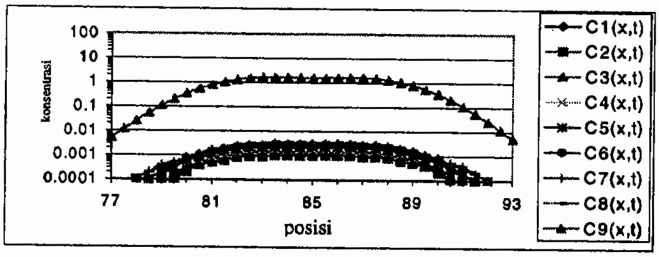
Gambar 5. Distribusi konsentrasi zat radioaktif dan anak-anak luruhnya setelah 25 (dua puluh lima) satuan waktu.



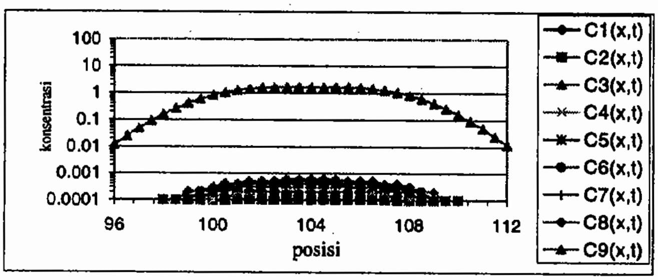
Gambar 6. Distribusi konsentrasi zat radioaktif dan anak-anak luruhnya setelah 36 (tiga puluh enam) satuan waktu.



Gambar 7. Distribusi konsentrasi zat radioaktif dan anak-anak luruhnya setelah 49 (empat puluh sembilan) satuan waktu.



Gambar 8. Distribusi konsentrasi zat radioaktif dan anak-anak luruhnya setelah 81 (delapan puluh satu) satuan waktu.



Gambar 9. Distribusi konsentrasi zat radioaktif dan anak-anak luruhnya setelah 100 (seratus) satuan waktu.

PEMBAHASAN

Dari Gambar 1 sampai dengan Gambar 9, dapat dilakukan pembahasan sebagai berikut :

Posisi puncak konsentrasi pada masing-masing zat tergeser sejauh (v)(t) untuk masing-masing nilai waktu. Hal ini wajar sebab pergeseran tersebut adalah akibat dari gerakan medium.

Puncak konsentrasi zat induk akan semakin menurun dan melebar. Penurunan ini sebagai akibat dispersi dan peluruhan zat tersebut sedangkan pelebaran puncak adalah akibat dispersi.

Untuk zat-zat antara (berindeks 2 sampai 8), puncak konsentrasi mengalami pelebaran akibat dispersi dan sementara itu nilai konsentrasi puncaknya mula-mula mengalami kenaikan kemudian mengalami penurunan. Kenaikan ini terjadi pada saat laju produksi masing-masing zat tersebut lebih tinggi dari pada laju peluruhannya. Dapat dilihat juga bahwa waktu untuk mencapai nilai maksimum puncak bergeser secara berturutan untuk masing-masing zat antara.

Untuk zat hasil akhir (berindeks 9), nilai konsentrasi mengalami kenaikan relatif cepat dan terus menerus dibandingkan dengan zat antara. Hal ini wajar sebab zat tersebut mengalami pertambahan terus-menerus akibat peluruhan zat sebelumnya serta tidak mengalami peluruhan. Ketika pada akhirnya konsentrasi puncak zat tersebut mengalami penurunan, hal ini hanya disebabkan oleh proses dispersi yang dialami oleh zat tersebut pada medium.

Hasil perhitungan tersebut adalah merupakan hasil yang logis karena baik zat induk maupun anak-anak luruhnya (zat antara) mengalami proses penyebaran dan peluruhan, dengan demikian metoda perhitungan ini dapat dikatakan berhasil.

KESIMPULAN

Persamaan diferensial parsial linier simultan dari suatu zat yang mengalami reaksi bertingkan serta mengalami proses transport pada suatu medium terbuka dapat diselesaikan secara analitik dengan metoda transformasi integral (transformasi Fourier umum) diikuti dengan transformasi Laplace. Dari perhitungan terhadap contoh kasus yaitu pelepasan zat radioaktif dalam aliran sungai, metoda ini menghasilkan hasil perhitungan yang logis yang menggambarkan distribusi konsentrasi zat-zat radioaktif beserta anak-anak luruhnya sebagai fungsi posisi dan waktu.

DAFTAR PUSTAKA

Churchill, R. V. and Brown, J. W., 1978, *Fourier Series and Boundary Value Problem*, Mc. Graw Hill Kogakusha, Ltd., Tokyo.

Spiegel, M. R.., Silaban P. dan Wospakrik, H. J., 1985, *Transformasi Laplace*, Erlangga, Jakarta Pusat.

Thibodeaux, L. J., 1979, *Environtmental Movements of Chemicals in Air, Water, and Soil*, John Wiley & Sons, New York.

Daftar arti lambang

A : spesies zat radioaktif
C : konsentrasi zat radioaktif
D : koefisien difusi zat radioaktif pada medium
F : koefisien kuat sumber dalam transformasi integral
H : operator $(H = D\nabla^2 - v.\nabla)$
K : koefisien konsentrasi dalam transformasi integral
L : operator transformasi Laplace
M : nilai skalar dari operator H setelah dilakukan transformasi integral
M : jumlah pelepasan sumber
m : urutan pelepasan sumber
N : normal dalam transformasi integral
N : jumlah tingkatan peluruhan zat radioaktif ditambah 1
Q : kuat sumber saat pelepasan
r : vektor posisi
rs : vektor posisi pelepasan sumber
$r1$: komponen vektor posisi pada arah pertama
$r2$: komponen vektor posisi pada arah kedua
$r3$: komponen vektor posisi pada arah ketiga
t : waktu
ts : waktu pelepasan sumber seketika
v : kecepatan gerakan medium
$v1$: komponen kecepatan posisi pada arah pertama
$v2$: komponen kecepatan posisi pada arah kedua
$v3$: komponen kecepatan posisi pada arah ketiga
x : posisi sepanjang aliran sungai
xs : posisi pelepasan sumber sepanjang aliran sungai
z : vektor posisi termodifikasi $(z = r - v\,t)$
$z1$: vektor posisi termodifikasi untuk arah pertama $(z1 = r1 - v1\,t)$
$z2$: vektor posisi termodifikasi untuk arah kedua $(z2 = r2 - v2\,t)$
$z3$: vektor posisi termodifikasi untuk arah ketiga $(z3 = r3 - v3\,t)$
β : nilai pribadi (*eigen value*)
∇ : operator diferensial dalam ruang
ψ : fungsi pribadi (*eigen function*)
λ : konstanta peluruhan

Daftar arti indeks

i,j,k : urutan zat radioaktif