

MODEL MATEMATIK GELOMBANG PANJANG DUA DIMENSI

Oleh :

Dr. Ir. Budi Wignyosukarto, Dip. HE*)

Intisari

Pemakaian komputer dalam bidang hidraulika sudah sangat maju terutama dalam hal simulasi fenomena aliran dan angkutan sedimen. Simulasi tersebut dimungkinkan karena semua persamaan diferensial parsial dapat diselesaikan secara numerik dengan cepat oleh komputer. Salah satu problema aliran yang dikemukakan adalah proses simulasi gerakan arus dua dimensi yang diakibatkan oleh pengaruh gelombang panjang misal pasang surut.

Beberapa cara penyelesaian numerik telah dikenal salah satunya adalah metoda deferensi hingga yang didalamnya masih terdapat beberapa cara pendekatan hitungan deferensinya. Untuk model aliran dua dimensi tersebut ada yang memakai cara 'Alternating Direction Implisit Method (ADI)', ada yang memakai metoda pemisahan elemen, sehingga penyelesaian numeris setiap elemen persamaan aliran dilakukan secara terpisah (Method of Separation). Cara penyelesaian tersebut masing-masing mempunyai kelemahan, ADI dibatasi oleh 'Courant Number' yang kecil, sebagai pembatas stabilitas penyelesaian numeriknya, tetapi ADI lebih mudah diselesaikan secara numeris daripada metoda kedua.

Pendahuluan

Simulasi arus dua dimensi sering dibutuhkan guna mengetahui pola gerakan air di dalam suatu daerah tertentu, misal pola arus dalam petak tambak, pola arus di pantai atau teluk. Dengan mengetahui pola arus seseorang dapat menghitung dispersi temperatur, dispersi salinitas, proses angkutan sedimen di muara sungai, karena arus adalah salah satu elemen yang menyebabkan terjadinya konveksi di dalam proses dispersi.

Persamaan aliran yang dipakai adalah persamaan aliran tidak permanen dua dimensi yang diturunkan dari persamaan Navier Stokes. Persamaan tersebut berupa persamaan diferensial parsial gelombang panjang yang dapat diselesaikan dengan berbagai metoda numerik, misal metoda karakteristik, metoda deferensi hingga maupun metoda elemen hingga. Metoda numerik yang dipakai untuk menyelesaikan persamaan tersebut dan yang dipandang paling mudah algoritmanya adalah metoda deferensi hingga. Beberapa metoda deferensi hingga yang dikenal adalah metoda ADI (Lendertsee, 1967) dan 'Method

of Separation' (Benque, 1982). Metoda kedua tersebut mencoba memperbaiki metoda ADI yang tidak dapat mempresentasikan fenomena alam yang benar untuk langkah waktu yang besar (pada angka Courant lebih besar daripada 5 — 10), tetapi dengan metoda ADI penggunaan inversi matrik dapat dikurangi.

Metoda separasi membagi hitungan numerik menjadi tiga tahap yang sesuai dengan fenomena fisik aliran. Langkah pertama adalah menyelesaikan proses adveksi dengan metoda karakteristik, langkah kedua menyelesaikan proses difusi dengan metoda beda hingga implisit dan langkah ketiga menyelesaikan proses propagasi dengan metoda beda hingga implisit. Metoda separasi ini dicoba oleh Wignyosukarto dkk (1987), dan mempunyai kendala dalam waktu penyelesaian algoritma yang lebih lama.

Untuk maksud pengembangan model yang 'fully coupled' dengan proses dispersi temperatur, maka dipakai metoda ADI. Pemakaian metoda separasi dirasa kurang menguntungkan karena hitungan dispersi temperatur yang memakai persamaan difusi parabolik biasanya sangat sensitif pada selang waktu yang dipakai dalam hitungan dan untuk menjamin hasil yang benar hitungan persamaan parabolik tersebut membutuhkan waktu hitungan dalam siklus

*) Staf Pengajar Jurusan Teknik Sipil FT — UGM.

yang lebih lama daripada hitungan aliran (Wignjosukarto 1985).

Persamaan Aliran

Persamaan dasar yang menyatakan gerakan gelombang panjang adalah (Lamb, 1932) sebagai berikut.

Persamaan dinamik

$$\frac{\delta U}{\delta t} + U \frac{\delta U}{\delta x} + V \frac{\delta U}{\delta y} + W \frac{\delta U}{\delta z} + \frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta x} = X$$

$$\frac{\delta V}{\delta t} + U \frac{\delta V}{\delta x} + V \frac{\delta V}{\delta y} + W \frac{\delta V}{\delta z} + \frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta y} = Y$$

$$\frac{\delta W}{\delta t} + U \frac{\delta W}{\delta x} + V \frac{\delta W}{\delta y} + W \frac{\delta W}{\delta z} + \frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta z} = Z$$

Persamaan kontinuitas

$$\frac{\delta U}{\delta x} + \frac{\delta V}{\delta y} + \frac{\delta W}{\delta z} = 0$$

dengan :

- x : arah aliran longitudinal,
- y : arah aliran transversal,
- z : arah aliran vertikal,
- U, V, W : komponen kecepatan arah x, y, z,
- ρ : rapat massa,
- P : tekanan
- X, Y, Z : gaya luar yang bekerja pada arah x, y, z.

Pada teori klasik tentang gelombang panjang maka percepatan arah vertikal dapat diabaikan karena percepatan tersebut sangat lebih kecil daripada percepatan gravitasi. Demikian pula kecepatan arah vertikal W dapat diabaikan, sehingga semua variabel W pada persamaan tersebut di atas dapat dihilangkan. Apabila h adalah jarak bidang referensi ke dasar dan k adalah jarak muka air dari bidang referensi, maka dapat didefinisikan suatu kecepatan rerata U dan V dengan

$$U = \frac{1}{h+k} \int_{-h}^k u \, dz$$

$$V = \frac{1}{h+k} \int_{-h}^k v \, dz$$

dan tekanan yang diperhitungkan adalah tekanan hidrostatika

$$p(z) = g(k-z) + p_0$$

p_0 = tekanan atmosfer.

sedangkan gaya luar yang bekerja adalah gaya luar akibat gaya Coriollis (tergantung latitude) dan gaya yang diakibatkan oleh adanya gerakan pasang surut.

$$X = fV + A^{(x)}$$

$$Y = -fU + A^{(y)}$$

dengan f = parameter Coriollis,
 $A^{(x)}, A^{(y)}$ = gaya akibat pasang surut, biasanya dapat diabaikan (Welander, 1961).

Mengingat beberapa parameter tersebut di atas dan dengan memasukkan tegangan geser dasar maka persamaan gelombang panjang tersebut dapat ditulis kembali sebagai berikut.

Persamaan dinamik

$$\frac{\delta U}{\delta t} + U \frac{\delta U}{\delta x} + V \frac{\delta U}{\delta y} - fV + g \frac{\delta k}{\delta x} + g \frac{U(U^2+V^2)^{1/2}}{C^2(h+k)} = F^{(x)}$$

$$\frac{\delta V}{\delta t} + U \frac{\delta V}{\delta x} + V \frac{\delta V}{\delta y} + fU + g \frac{\delta k}{\delta x} + g \frac{V(U^2+V^2)^{1/2}}{C^2(h+k)} = F^{(y)}$$

Persamaan kontinuitas

$$\frac{\delta k}{\delta t} + \frac{\delta ((h+k)U)}{\delta x} + \frac{\delta ((h+k)V)}{\delta y} = 0$$

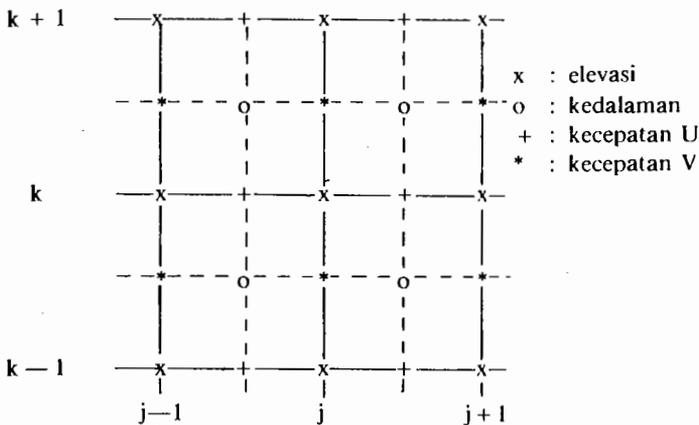
dengan

$$C = \text{kekasaran Chezy.}$$

Penyelesaian Numerik

Persamaan diferensial gelombang panjang tersebut diselesaikan dengan metoda beda hingga secara implisit dengan skema 'space staggered' yang dipakai pertama kali oleh Platsman (1959), di mana variabel elevasi muka air (k) dihitung pada harga integer selang jarak x dan y, sedang kecepatan U dan V

dihitung pada harga setengah jarak x dan y (lihat gambar 1).



Gambar 1. Skema 'space staggered'

Demikian pula pada selang waktu hitungan dilakukan dua kali hitungan. Pada selang waktu n hingga selang waktu $n + \frac{1}{2}$ dihitung k , U dan V dengan cara implisit untuk k dan U serta eksplisit untuk V , sedang pada selang waktu $n + \frac{1}{2}$ hingga $n + 1$ dihitung k , U dan V dengan cara implisit k dan V serta eksplisit untuk U .

Kondisi Batas dan Stabilitas Hitungan

Batas yang dikenal dalam hitungan adalah batas terbuka yang berhubungan dengan muka air di luar model dan batas tertutup yang berupa pantai atau tepi saluran. Pada batas tertutup dibuat suatu anggapan bahwa kecepatan tegak lurus pada batas adalah nol, kedalaman air tidak nol atau negatif (karena surutnya air). Pada batas terbuka maka dibutuhkan data elevasi muka air sebagai fungsi waktu. Mengingat kedua batasan tersebut maka dalam hitungan perlu diperhatikan bahwa batas model adalah disuatu tempat di mana kedalaman air tidak pernah nol atau negatif.

Sesuai dengan analisis yang pernah dilakukan maka angka Courant (Cr) yang besarnya ditentukan oleh kecepatan arus, selang waktu dan selang jarak, metoda ADI ini akan tidak stabil atau menghasilkan hasil hitungan yang beresilasi apabila Cr lebih besar dari 5, dengan

$$Cr = t \sqrt{g(h+k)} \sqrt{(1/x^2 + 1/y^2)}$$

Eksperimen Hitungan

Pada tulisan ini dicoba dibuat suatu eksperimen hitungan pada suatu kolam tambak dan saluran yang mempunyai penghalang/krib keduanya mempunyai tampang arah transversal berbentuk persegi. Pada hitungan tersebut dipakai selang jarak yang seragam arah x dan y sebesar 50 meter, selang waktu 5 det dan kemiringan dasar kearah y sebesar 0,0002.

Hasil hitungan selama 20 kali selang waktu memberikan pola arus seperti terlihat pada gambar 2 (kolam tambak) dan gambar 3 (saluran). Plotting hasil hitungan tersebut dilakukan dengan PLOTDOK-01 (Legono, 1990) yang dapat menggambar pola arus baik di layar maupun di plotter.

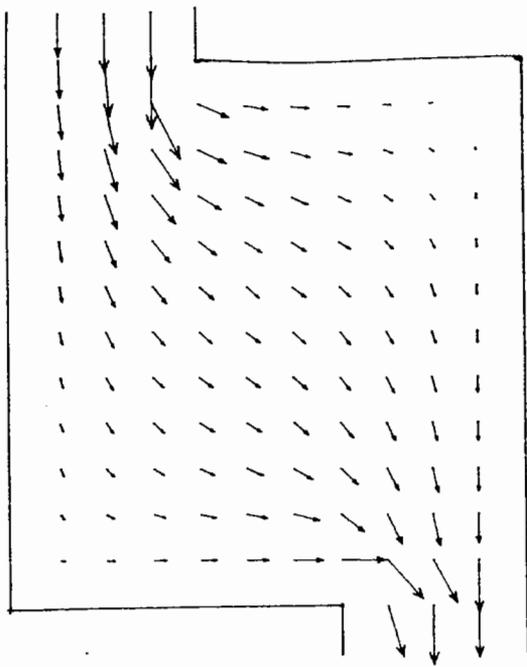
Terlihat bahwa pada batas tertutup sisi kanan tidak terdapat komponen arus tegak lurus pada dinding. Anggapan ini yang mungkin memberikan kurang-cermatan hasil hitungan di batas tertutup. Kekurangan tersebut terlihat pada gambar 2 pada kolam tambak yang mempunyai pintu masuk dan keluar di tengah, kurang-simetrisan kecepatan di batas kiri dan kanan memperlihatkan bahwa pengaruh hitungan pada batas kanan perlu di perbaiki. Hal ini dapat dikurangi dengan proses kalibrasi, yaitu memberikan harga kekasaran Chezy yang berbeda pada sisi tersebut.

Daftar Pustaka

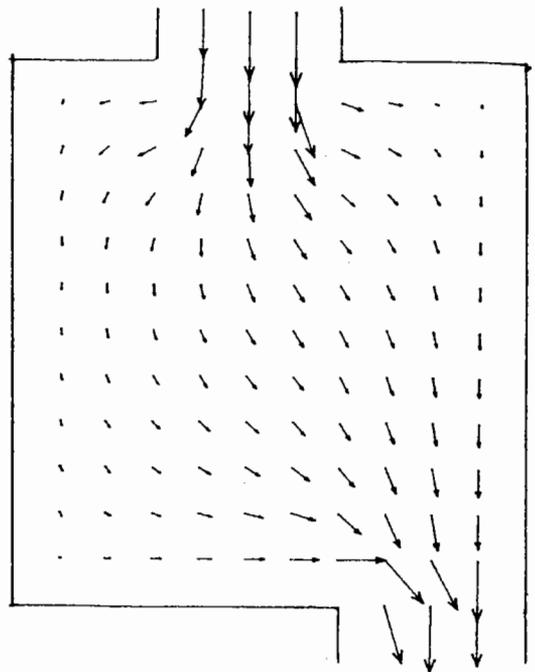
- Benque, JP., Cunge, JA., Feullet, J., Hauguel, A., Holly, FM., 1982 "New Method for Tidal Current Computation", ASCE Vol. 1 No. WW3, Proceeding paper 17290.
- Lamb, H. 1932, 'Hydrodynamics', Cambridge University Press.
- Leenderstse, JJ., 1967, 'Aspect of a Computational Model for Long-Period Water Wave Propagation', Rand Corporation Memorandum, RM-5294-PR, California.
- Legono, D., 1990, PLOTDOK-01 User Manual, Laboratorium Hidraulika Terapan FT-UGM, Yogyakarta.
- Paltzman, GW., 1959, 'A Numerical Computation of The Surge of 26 June 1954 on Lake Michigan', Geophysics, Vol. 6, No. 3-4.

Wignyosukarto, BS., 1985, '*Etude de la Dilution de Produits de lessivage du Sol d'Un Reseau d'Irigation Soumis a la Maree*', Thesis Docteur d'Ingenieur, INPG, Grenoble, France.

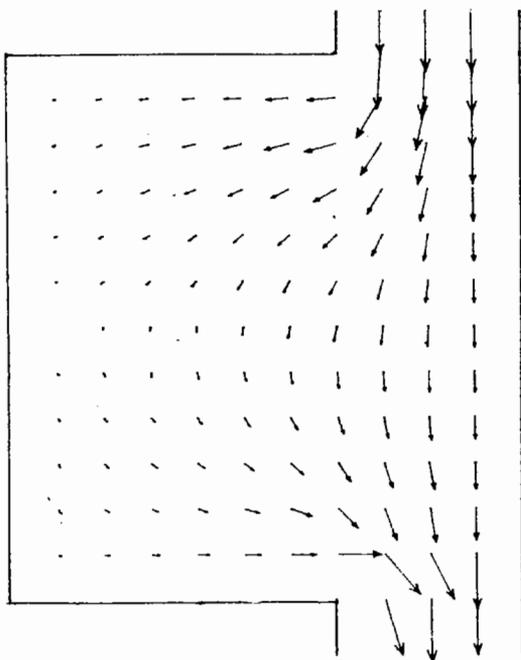
Wignyosukarto, BS., Trihono Kadri, 1987, '*Model Matematik Perambatan Gelombang Panjang dan Arus Pantai*', PAU Ilmu Teknik UGM, Yogyakarta.



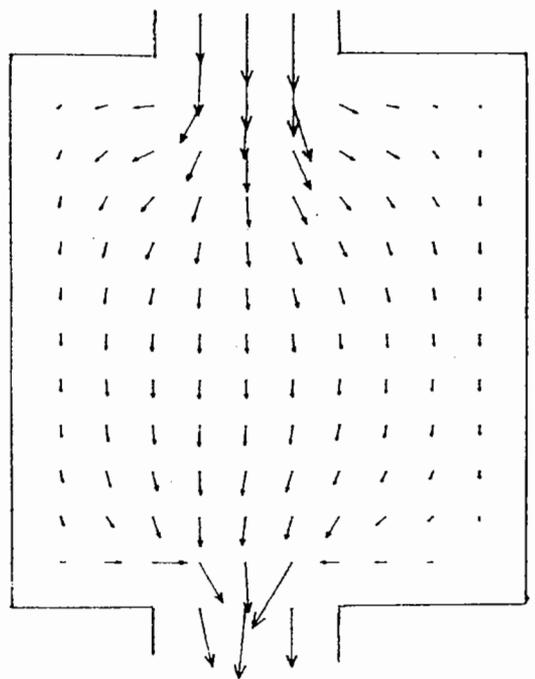
(a)



(b)

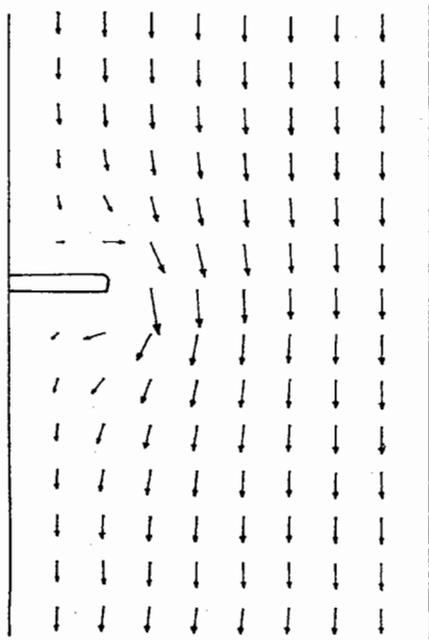


(c)

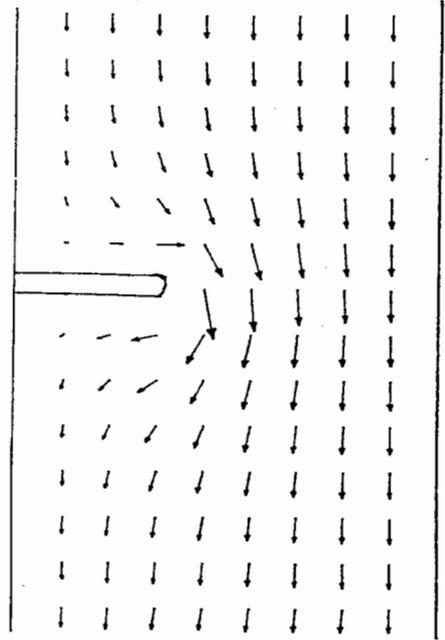


(d)

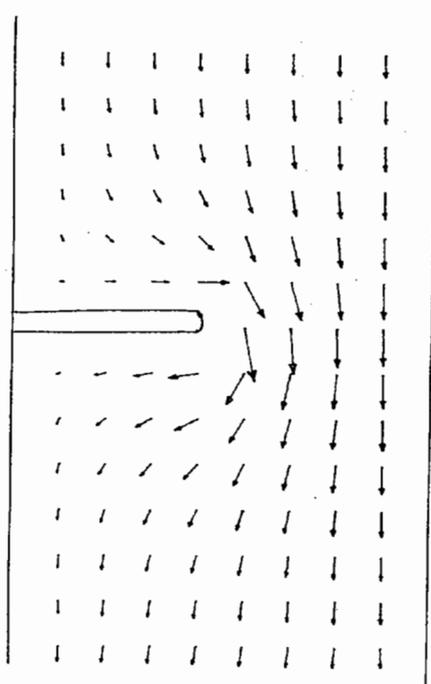
Gambar 2. Pola arus pada berbagai posisi inlet dan outlet tambak
100 cm/det



(a)



(b)



(c)

Gambar 3. Pola arus pada berbagai panjang krib di saluran.
100 cm/det.