

"SKEMA IMPLISIT UNTUK PENYELESAIAN PROPAGASI GELOMBANG ALIRAN TERBUKA SATU DIMENSI"

Oleh :

Ir. Adam Pamudji Rahardjo^{*)}

INTISARI

Keadaan pengaliran tidak permanen ("unsteady") dapat ditulis dalam suatu persamaan diferensial parsial. Penyelesaian persamaan tersebut dapat diselesaikan dengan salah satu metode numerik yaitu metode diferensi berhingga dengan skema implisit yang cukup sederhana (Abbott-Ionescu, 1976). Dengan skema yang stabil ini hitungan pengaliran berubah, pada sungai dapat dikerjakan dengan cukup teliti.

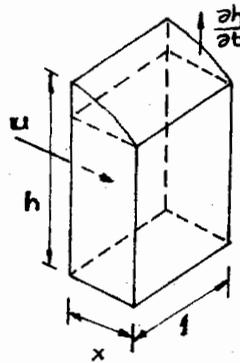
Gelombang aliran terbuka yang dimaksud di sini adalah perambatan perubahan kondisi aliran pada saluran terbuka. Masalah ini dapat dijumpai pada penelusuran banjir pada sungai ataupun fluktuasi muka air sungai oleh pengaruh pasang-surut muka air laut. Beberapa metode yang ada untuk menyelesaikan permasalahan aliran tidak permanen adalah metoda karakteristik, metoda deferensi berhingga, metoda unsur berhingga, dan metoda lain yang lebih canggih (Abbott, 1980, Cunge, 1980, Pinder, 1982, dan lain-lain). Sedangkan untuk penyelesaian yang dibatasi dalam tinjauan satu dimensi metode pertama dan kedua sudah cukup memuaskan. Dalam kedua metode ini penyelesaian dilakukan secara numerik yang dapat dikelompokkan dalam hitungan dengan skema eksplisit dan hitungan dengan skema implisit.

Hitungan dengan skema eksplisit menjumpai lebih banyak persyaratan untuk menjaga kestabilan numerik proses hitungan. Sedangkan hitungan dengan skema implisit pada banyak kasus bersifat "unconditionally stable". Berikut ini adalah tinjauan mengenai penyelesaian persamaan propagasi gelombang aliran dengan skema implisit tersebut di atas dengan batasan dasar aliran hampir datar.

PROPAGASI GELOMBANG PANJANG ALIRAN AIR

Aliran gelombang hampir datar satu dimensi mengikuti hukum konservasi massa dan momen-

tum. Apabila kita tinjau satu pias aliran maka hukum konservasi massa adalah :



$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (uh)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

dengan h : jeluk aliran (m),
u : kecepatan rerata (m/dt),
t : waktu (dt)
x : jarak longitudinal (m).

Gambar 1. Pias aliran

Sedangkan hukum kekekalan momentum yang berlaku pada pias adalah sebagai berikut :

$$h \frac{\partial (uh)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u^2 h + \frac{gh^2}{2}) = 0 \quad (2)$$

dengan g : percepatan gravitasi (m/dt²).

Persamaan tersebut dapat diubah dalam bentuk persamaan gelombang "quasi-linier" di bawah ini. (Abbott, 1977).

$$h \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial h}{\partial t} - (u^2 - gh) \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

$$g \frac{\partial h}{\partial t} - u \frac{\partial u}{\partial t} - (u^2 - gh) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

^{*)}Anggota Staf Pengajar T. Sipil FT-UGM.

SKEMA IMPLISIT

Dalam metode deferensi berhingga persamaan diferensial di atas dapat didekati dengan pendekatan numerik. Dikenal adanya pendekatan

diferensi maju, pendekatan diferensi mundur, dan pendekatan diferensi tengah. Numerisasi persamaan (3) dan (4) dengan pendekatan diferensi tengah menghasilkan skema berikut :

$$h \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right) - \frac{u}{2} \left[\frac{(h_{j+1}^{n+1} - h_{j+1}^n)}{\Delta t} + \frac{(h_{j-1}^{n+1} - h_{j-1}^n)}{\Delta t} \right] - \frac{(u^2 - gh)}{2} \left[\frac{(h_{j+1}^{n+1} + h_{j+1}^n)}{2\Delta x} + \frac{(h_{j+1}^n + h_{j-1}^n)}{2\Delta x} \right] = 0 \quad (5)$$

$$g \left(\frac{h_j^{n+1} - h_j^n}{\Delta t} \right) - \frac{u}{2} \left[\frac{(u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n)}{\Delta t} + \frac{(u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^n)}{\Delta t} \right] - \frac{(u^2 - gh)}{2} \left[\frac{(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1})}{2\Delta x} + \frac{(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)}{2\Delta x} \right] = 0 \quad (6)$$

$$\left[-\frac{u}{2\Delta t} - \frac{(u^2 - gh)}{4\Delta x} \right] h_{j+1}^{n+1} + \left[\frac{h}{\Delta t} \right] u_j^{n+1} + \left[-\frac{u}{2\Delta t} + \frac{(u^2 - gh)}{4\Delta x} \right] h_{j-1}^{n+1} = \quad (7)$$

$$\left[-\frac{u}{2\Delta t} + \frac{(u^2 - gh)}{4\Delta x} \right] h_{j+1}^n + \left[\frac{h}{\Delta t} \right] u_{j+1}^n + \left[-\frac{u}{2\Delta t} - \frac{(u^2 - gh)}{4\Delta x} \right] h_{j-1}^n$$

$$\left[-\frac{u}{2\Delta t} - \frac{(u^2 - gh)}{4\Delta x} \right] u_{j+1}^{n+1} + \left[\frac{g}{\Delta t} \right] h_j^{n+1} + \left[-\frac{u}{2\Delta t} + \frac{(u^2 - gh)}{4\Delta x} \right] u_{j-1}^{n+1} = \quad (8)$$

$$\left[-\frac{u}{2\Delta t} + \frac{(u^2 - gh)}{4\Delta x} \right] u_{j+1}^n + \left[\frac{g}{\Delta t} \right] h_j^n + \left[-\frac{u}{2\Delta t} - \frac{(u^2 - gh)}{4\Delta x} \right] u_{j-1}^n$$

Koefisien dari suku-suku persamaan (7) dan (8) dapat diberikan simbol yang lebih ringkas. Demikian pula ruas kanan kedua persamaan tersebut yang merupakan keadaan pada "time level" yang mendahului "time level" ruas kiri dapat disimbolkan dengan satu koefisien. Kedua persamaan tersebut dalam bentuk yang ringkas adalah :

$$A_j h_{j+1}^{n+1} + B_j u_j^{n+1} + C_j h_{j-1}^{n+1} = D_j \quad (9)$$

$$A_j' u_{j+1}^{n+1} + B_j' h_j^{n+1} + C_j' u_{j-1}^{n+1} = D_j' \quad (10)$$

Selanjutnya dengan membuat variabel tambahan E, F, E', dan F' yang memenuhi hubungan :

$$h_{j+1}^{n+1} = E_j U_j^{n+1} + F_j \quad (11)$$

$$U_{j+1}^{n+1} = E'_j h_{j+1}^{n+1} + F'_j \quad (12)$$

diperoleh persamaan :

$$A_j E_j U_j^{n+1} + B_j U_j^{n+1} + C_j h_{j+1}^{n+1} = D_j - A_j F_j \quad (13)$$

atau

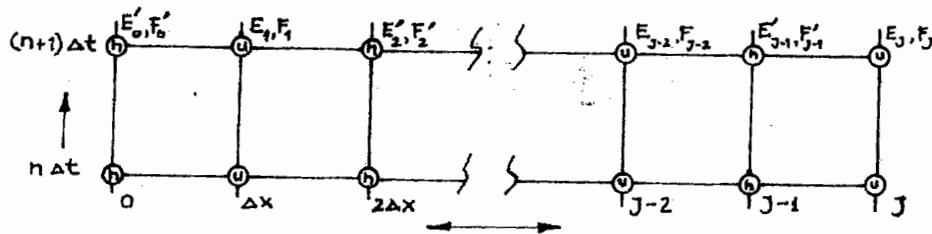
$$U_j^{n+1} = \frac{-C_j}{A_j E_j + B_j} h_{j+1}^{n+1} + \frac{D_j - A_j F_j}{A_j E_j + B_j} \quad (14)$$

Jika kita perhatikan lebih lanjut persamaan (11) dan (13) terlihat hubungan :

$$E'_{j-1} = \frac{-C_j}{A_j E_j + B_j}, \text{ dan } F'_{j-1} = \frac{D_j - A_j F_j}{A_j E_j + B_j} \quad (15)$$

Demikian juga persamaan (12) dan (14) menghasilkan :

$$E_{j-1} = \frac{-C_j}{A_j E'_j + B'_j}, \text{ dan } F_{j-1} = \frac{D'_j - A'_j F'_j}{A_j E'_j + B'_j} \quad (16)$$



Gambar 2. Skema implisit Abbott-Ionescu.

Sebagai contoh, jika pada titik ("node") batas kanan $j = J$ diketahui kecepatan reratanya, u_j^{n+1} , maka dari persamaan (12) diperoleh :

$$E'_{j-1} = 0 \text{ dan } F'_{j-1} = u_j^{n+1}$$

ALGORITMA

Terlihat bahwa persamaan diferensial implisit (3) dan (4) dengan bantuan variabel-variabel tambahan, pendekatan numeriknya dapat diselesaikan. Persamaan eksplisit untuk variabel-variabel tambahan (15) dan (16) diselesaikan pada tiap titik pada jaring-jaring ("grid") diferensi, "time level" demi "time level", dimulai dari kondisi awal. Pada skema ini nilai u dan h untuk menghitung variabel A , B , C , dan D dimulai

dengan $u = u_j^n$ dan $h = h_j^n$. Sedangkan dalam tiap "time level" hitungan dapat dimulai baik dari kondisi batas kiri ataupun kanan. Nilai-nilai h dan u dihitung dengan melakukan sapuan kedua ("double sweep") dari variabel tambahan yang telah diperoleh dengan persamaan (11) atau (12) pada "time level" yang sama. Pada sapuan kedua ini hitungan pada "time level" yang sama dapat dilakukan dengan mengambil :

$$u = \frac{(u_j^{n+1} + u_j^n)}{2}, \quad h = \frac{(h_j^{n+1} + h_j^n)}{2}$$

Untuk hitungan yang teliti dapat dilakukan iterasi berikutnya masih pada "time level" yang sama.

Skema algoritma tersebut lebih jelasnya terlihat pada Gambar 2 di bawah ini. (Abbott-Ionescu, 1967).

Dari keadaan awal ini dengan persamaan (16) dapat dicari E_{j-2} dan F_{j-2} . Selanjutnya dengan persamaan (15) dapat dicari harga E'_{j-3} dan F'_{j-3} .

Sedangkan jika pada batas kanan yang diketahui adalah h_j^{n+1} , maka keadaan awal diperoleh dari persamaan (11) yaitu :

$$E_{j-1} = 0 \text{ dan } F_{j-1} = h_0^{n+1}.$$

Selanjutnya dicari E'_{j-2} dan F'_{j-2} dan seterusnya sampai mencapai keadaan batas kiri yaitu E_0 dan F_0 atau E'_0 dan F'_0 tergantung jaring-jaring diferensi yang dibuat. Karena ada keterikatan keadaan batas yang diketahui, maka pembuatan jaring-jaring diferensi ini harus disesuaikan sehingga jika h_0^{n+1} yang diketahui maka pada titik 0 tersebut harus diperoleh E'_0 dan F'_0 dan sebaliknya jika u_0^{n+1} yang diketahui.

Dapat disimpulkan bahwa jika pada keadaan batas yang diketahui sama-sama h atau u maka jumlah pias jarak (Δx) adalah genap, sebaliknya jika tidak sama maka jumlah pias jarak adalah ganjil.

KESIMPULAN

Melihat persamaan (11) dan (12), skema jaring-jaring diferensi dan struktur data pada keadaan batas maka skema beserta algoritma di atas dipakai pada pengaliran subkritik. Untuk aliran superkritik diperlukan struktur data kondisi batas yang berbeda.

Metode hitungan di atas cukup praktis dan mempunyai kestabilan numerik yang cukup untuk menghitung permasalahan perambatan gelombang

aliran di sungai dengan pemakaian struktur data yang sesuai. Tentunya dalam aplikasi pada kondisi alam masih diperlukan anggapan-anggapan dan penyederhanaan yang memerlukan perlakuan tertentu untuk mendapatkan hasil hitungan yang memuaskan.

PENUTUP

Semoga tulisan yang sederhana ini bermanfaat bagi para pembaca khususnya yang berkecimpung di bidang hidraulik sehingga dapat mengembangkan lebih lanjut demi kemajuan ilmu pengetahuan dalam pembangunan bangsa dan negara kita.

Penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada bapak-bapak yang membimbing kami selama penulisan naskah ini baik materi maupun cara penulisan.

DAFTAR PUSTAKA

1. Abbott, M. B., 1977, "Numerical Method", IIHE, Delft.
2. Abbott, M. B., 1980, "Computational Hydraulics", Pitman Publishing Limited, London.
3. Cunge, J. A., 1980, "Practical Aspect of Computational River Hydraulics", Pitman Publishing Limited, London.