FINITE ELEMENT MODEL
UNTUK ANALISIS STRUKTUR LENGKUNG TIGA DIMENSI

oleh
Bambang Suhendro *)

INTISARI

Pada penelitian ini **finite element model** *untuk analisis struktur lengkung tiga dimensi telah dikembangkan berdasarkan polinomial berderajad tiga untuk* **displacement function** *nya dan polinomial berderajad dua untuk geometri lengkungannya (geometri lengkungan boleh sembarang). Sistem koordinat yang dipakai untuk menjabarkan matrix kekakuan elemen lengkung adalah sistem koordinat kurvilinier. Matrix kekakuan elemen yang diperoleh berorde 16 x 16 , dengan* **nodal degrees of freedom** *terdiri dari bagian yang* **essential** *(12 buah) dan bagian yang* **nonessential** *(4 buah). Karena kompleksnya fungsi-fungsi yang diintegralkan untuk memperoleh matrix kekakuan elemen, integrasi numeris dengan metode* **Gauss quadrature** *terpaksa ditempuh. Selanjutnya derajad kebebasan yang nonessential dikondensasikan sehingga menghasilkan matrix kekakuan berorde 12 x 12, dengan semua derajad kebebasan berupa* **essential degrees of freedom.**

Dari contoh-contoh numeris (yang telah mencakup berbagai kondisi batas, geometri lengkungan, dan pembebanan), terbukti bahwa **finite element model** *usulan untuk struktur lengkung ini sangat akurat, dan konvergensi ke hasil eksaknya juga cepat. Dapat disimpulkan pula bahwa sebagai pedoman praktis dalam menggunakan* **finite element model** *usulan ini untuk analisis, cukup diperlukan 4 elemen untuk struktur pelengkung simetris dan 8 elemen untuk struktur pelengkung yang tak simetris (yang geometri lengkungannya sembarang).*

PENGANTAR

Struktur balok lengkung (curved beam) banyak dipakai dalam bidang teknik sipil (seperti pada jembatan bentang panjang, jalan layang yang melengkung, hanggar pesawat terbang, stadion olah raga, dan sebagainya) maupun dalam bidang-bidang teknik mesin (seperti komponen utama rangka pesawat terbang, rangka kapal, rangka mobil, dan sebagainya).

---

*) Ir. Bambang Suhendro M.Sc., Ph.D., adalah Dosen Jurusan Teknik Sipil, Fakultas Teknik, UGM, Yogyakarta

Karena bentuk geometrinya yang relatif lebih komplex, analisis struktur lengkung (ataupun struktur-struktur yang mempunyai komponen balok lengkung di dalam sistemnya) juga melibatkan persamaan-persamaan yang lebih komplex sehingga solusinya pun akan lebih rumit (dibanding analisis struktur yang hanya melibatkan balok-balok lurus). Tingkat komplexitas akan meningkat dengan makin tidak simpelnya bentuk geometri lengkungan, dan lebih-lebih lagi bila diinginkan analisis 3-dimensi.

Dalam praktek, untuk menghindari komplexitas tersebut, biasanya struktur-struktur lengkung (dalam batas-batas tertentu) cukup dianalisis sebagai struktur yang terbentuk dari balok-balok lurus yang banyak sekali. Semakin banyak jumlah elemen balok lurus yang dipakai untuk menggantikan struktur lengkung tersebut, akan semakin baik hasilnya. Namun demikian, karena diskontinuitas <u>slope</u> pada titik-titik nodal mengakibatkan diskonti nuitas gaya aksialnya maka pengaruh terhadap batangnyapun menjadi berbeda. Pendekatan ini tentu saja memberikan hasil yang kurang akurat dan secara ilmiah kurang memuas kan.

Analisis struktur lengkung-dua-jepit yang berdiri sendiri (<u>self standing fixed arch structure</u>) sebagai sistem 2-dimensi dapat didekati secara analitis dengan <u>elastic center method</u> ataupun <u>column analogy method</u> (Wang, C.K., 1953). Untuk kondisi khusus yang lain, misalnya pelengkung dua sendi, prinsip-prinsip hukum Castigliano juga bisa dipakai untuk memperoleh solusinya.

Solusi yang lebih umum secara analitis, yaitu dengan mengembangkan persamaan diferensial balok lengkung dan menyelesaikan nya sesuai dengan kondisi-kondisi batasnya, telah pula dibahas oleh Oden & Ripperger (1980).

Metode-metode tersebut di atas hanya bisa dipakai untuk analisis struktur-struktur lengkung yang berdiri sendiri (<u>self standing arches</u>), ataupun pada masalah-masalah yang , dengan berbagai argumentasi, dapat diidealisasikan menjadi struktur lengkung yang berdiri sendiri. Dengan demikian aplikasi metode-metode tersebut dalam praktekpun terbatas sekali.

Agar solusinya dapat dilakukan secara lebih sistematis (sehingga dapat diprogramkan pada komputer) dan bisa juga dipakai untuk analisis balok lengkung yang digabung dengan balok-balok lurus lainnya menjadi suatu sistem struktur, maka metode matrix kekakuan telah pula dikembangkan (Weaver & Gere, 1980). Dalam hal ini matrix kekakuan elemen lengkung diturunkan berdasarkan "physical arguments". Geometri lengkungan yang telah dikembangkan matrix kekakuan (<u>stiffness matrix</u>) nya adalah lengkung lingkaran
dan aplikasinya terbatas pada masalah dua dimensi.

Sebagai pengembangan dari metode matrix kekakuan tersebut di atas, agar dapat menurunkan matrix kekakuan suatu elemen (baik satu, dua ataupun tiga dimensi) yang lebih komplex, maka prinsip-prinsip metode elemen hingga (<u>finite element method</u>) telah pula dikembangkan

(Cook, 1981; Weaver & Johnston, 1984).

Berdasarkan metode elemen hingga, model matematis elemen lengkung telah dikembangkan oleh Dawe (1974), Ashwell (1976), Belytschko & Glaum (1979), Stolarski & Belytschko (1982), dan Calhoun & DaDeppo (1983).

Dawe (1974) mengusulkan penggunaan polinomial berorde lebih tinggi (higher order polinomial) sebagai shape function untuk elemen balok lengkung. Disimpulkan bahwa penggunaan polinomial berorde empat (quintic) akan memberikan hasil yang jauh lebih teliti dibandingkan dengan menggunakan polinomial berorde tiga (cubic).

Ashwell (1976) melakukan studi tentang elemen lingkaran dengan shape function yang diperoleh dari indepen dent polynomial untuk regangan. Dibuktikan bahwa elemen tersebut lebih baik dari yang terdahulu.

Belytschko & Glaum (1979) mengusulkan formulasi corotational dengan orde lebih tinggi, sedangkan Stolarski & Belytschko (1979) menemukan suatu fenomena bahwa elemen lengkung mempunyai tendensi terlalu kaku kecuali polinomial yang dipakai untuk inplane displacement field berorde lebih tinggi. Fenomena tersebut dikenal dengan istilah membrane locking. Dikemukakan pula bahwa pengaruh membrane locking dapat dieliminir dengan reduced integration method dimana dalam melakukan integrasi nu-meris hanya memakai satu atau dua titik Gauss.

Calhoun & DaDeppo (1983) memformulasikan masalah sebagai sistem rate equations dan mengintegralkannya dengan metode Runge-Kutta untuk memperoleh respon lendutan.

Model-model yang telah diusulkan tersebut semuanya terbatas pada analisis 2-dimensi dan untuk bentuk-bentuk lengkungan yang sederhana (lingkaran & parabola).

Untuk analisis 3-dimensi, Wen & Lange (1981) telah mengusulkan finite element model yang dapat pula dipakai untuk analisis buckling struktur-struktur lengkung. Meskipun demikian, dalam model matematis ini , data masukan yang diperlukan untuk mendifinisikan geometri lengkungan secara numeris masih dirasa terlalu rumit sehingga kurang convenient bagi para praktisi.

Pada penelitian ini, finite element model usulan Wen & Lange (1981) disempurnakan dan strategi langkah hitung an dimodifikasi sedemikian sehingga finite element model yang baru menjadi lebih akurat dan data masukannya menjadi lebih simpel.

Hubungan antara regangan dan displacement

Ditinjau suatu elemen balok lengkung seperti terlihat pada Gambar 1. Suatu sistem koordinat kurvilinier (curvilinear coordinate system) dengan sumbu-sumbu x, y, dan z yang bersifat right-handed, didifinisikan sebagai sistem koordinat-lokal elemen tersebut. Lengkungan berada dalam bidang x-z namun deformasi yang boleh terjadi adalah tiga-dimensi. Komponen displacement pada arah x (radial), y, (out of plane), dan z (tangensial) berturut turut diberi notasi u , v dan w . Rotasi terhadap sumbu z diberi notasi B . Sumbu sentroid batang melengkung pada bidang x-z dengan jari-jari kelengkungan R yang besarnya boleh bervariasi. Tampang lintang elemen diambil konstan dan mempunyai dua sumbu simetri.

Dengan asumsi bahwa sebelum dan sesudah terjadi deformasi lentur tampang lintangnya tetap rata, maka ekspresi besarnya regangan longitudinal di suatu titik (ζ, H) pada suatu tampang lintang berjarak s (diukur sepanjang sumbu sentroid batang) dari pusat sistem koordinat-lokal dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\varepsilon = \varepsilon_z \,\Big|\, S, \zeta, \eta \; - \left(\frac{dw}{ds} - \frac{u}{R} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{du}{ds} + \frac{w}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{ds}\right) + \eta \left(\frac{\beta}{R} - \frac{d^2 v}{ds^2}\right) - \zeta \left[\frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{dw}{ds} \; \frac{1}{R} + w \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{R}\right) \right] \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Pada persamaan di atas, term pertama merupakan regangan aksial linier, dan term kedua dan ketiga berturut-turut merupakan regangan aksial nonlinier pada sumbu sentroid. Term ke empat dan kelima merupakan regangan akibat pengaruh lenturan.

Energi regangan (strain energy)

Energi regangan elemen yang diakibatkan oleh regangan longitudinal dan regangan geser dapat ditulis sebagai berikut

$$U = \int_L \int_A \frac{E\,\varepsilon^2}{2}\, dA\, ds + \int_L \frac{G\,K_t}{2} \left(\beta_s + \frac{1}{R} v_s\right)^2 ds \quad \ldots\ldots (2)$$

Pada persamaan di atas, A = luas tampang elemen, L = panjang elemen , E = modulus elastisitas bahan , G = modulus geser bahan, dan K_t =

torsional *constant* dari tampang lintang elemen. Pada persamaan tersebut, untuk meringkas cara penulisan, notasi B_s dimaksudkan sebagai dB/ds dan v_s sebagai dv/ds . Notasi serupa akan dipakai pula pada persamaan-persamaan berikutnya.

Geometri elemen lengkung

Sistem koordinat Cartesian dengan sumbu-sumbu X, Y, dan Z (Gambar 2) didifinisikan sebagai sistem koordinat-global struktur.στρυκBerdasarkan koordinat-global tersebut, titik nodal A (pusat sistem koordinat-lokal) dan B berturut-turut mempunyai koordinat (X_A,Y_A) dan (X_B,Y_B). Posisi relatif titik nodal B terhadap A dapat dinyatakan sebagai (lihat Gambar 2) $X_L = (X_B-X_A)$ dan $Y_L = (Y_B-Y_A)$. Pusat sistem koordinat-lokal adalah di titik nodal A dan sumbu z lokal pada titik tersebut membuat sudut Φ_A (dalam radian) terhadap sumbu X global.

Koordinat lokal titik nodal B (x_B,z_B) dapat dituliskan sebagai berikut

$$x_B = - X_L \sin \Phi_A + Y_L \cos \Phi_A \qquad (3\text{-a})$$

$$z_B = X_L \cos \Phi_A + Y_L \sin \Phi_A \qquad (3\text{-b})$$

Bila sudut antara garis singgung di A dan garis singgung di suatu titik S (pada sumbu sentroid) diberi notasi, maka harga tersebut akan bervariasi dari 0 di titik A sampai θ di titik B. Jari-jari kelengkungan di titik A dan B berturut-turut adalah R_1 dan R_2.

Pada model usulan ini, geometri lengkungan elemen yang diusulkan oleh Wen & Lange (1983), yang berupa polinomial berderajad empat, disederhanakan menjadi polinomial berderajad dua. Nantinya akan dibuktikan bahwa meskipun disederhanakan (yang berakibat data masukan yang diperlukan menjadi jauh lebih sederhana), namun dengan memperbaiki pula strategi hitungannya, hasil yang diperoleh akan lebih teliti dari yang terdahulu.

Geometri elemen lengkung (dengan bentuk lengkunaan sembarang diekspresikan dalam polinomial berderajad dua sebagai berikut

$$s = b_1 \Phi + b_2 \Phi^2 \qquad (4)$$

dengan b_1 dan b_2 konstanta. Berdasarkan ekspresi tersebut jari-jari kelengkungan R merupakan turunan pertama s terhadap Φ sehingga

$$R = \frac{ds}{d\Phi} = b_1 + 2 b_2 \Phi \quad \phi \qquad (5)$$

Panjang elemen lengkung L dapat dirumuskan sebagai

$$L = b_1 \theta + b_2 \theta^2 \qquad (6)$$

Selanjutnya konstanta b_1 dan b_2 dalam persamaan (4) dapat ditetapkan berdasarkan dua kondisi batas yaitu

$$(1)\ x_B = \int_0^{x_b} dx = \int_0^{x_b} \sin \Phi\, ds = \int_0^{\theta} R \sin \Phi\, d\Phi \quad \ldots\ldots \quad (7\text{-a})$$

$$(2)\ z_b = \int_0^{z_b} dz = \int_0^{z_b} \cos \Phi\, ds = \int_0^{\theta} R \cos \Phi\, d\Phi \quad \ldots\ldots \quad (7\text{-b})$$

Hasil hitungan b_1 dan b_2 diberikan dalam persamaan berikut

$$b_1 = \frac{x_b - 2 b_2 (\sin\theta - \theta\cos\theta)}{(1 - \cos\theta)} \quad \ldots\ldots \quad (8\text{-a})$$

$$b_2 = \frac{z_B (1 - \cos\theta) - x_B \sin\theta)}{2 [(1 \cos\theta)(\theta\sin\theta + \cos\theta - 1).(\sin\theta - \theta\cos\theta)} \qquad (8\text{-b})$$

Dengan demikian geometri _finite element_ untuk lengkungan sembarang , seperti telah dirumuskan pada persamaan (4) dapat didifinisikan secara komplit dengan hanya memberikan data masukan berupa koordinat global titik A (X_A, Y_A), titik B (X_B, Y_B), dan sudut θ.

Displacement functions

Seperti terlihat pada persamaan (1), komponen _displacement_ yang dilibatkan dalam analisis balok lengkung tiga dimensi adalah u, v, w, dan B.

Untuk menjabarkan matrix kekakuan elemen lengkung, _displacement functions_ yang dipakai untuk mengekspresikan u, v, w, dan B adalah polinomial berderajad tiga sebagai berikut :

$$u = A_1 + A_2\,\Phi + A_3\,\Phi^2 + A_4\,\Phi^3$$

$$v = A_5 + A_6\,\Phi + A_7\,\Phi^2 + A_8\,\Phi^3$$

$$w = A_9 + A_{10}\Phi + A_{11}\Phi^2 + A_{12}\Phi^3 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

$$B = A_{13} + A_{14}\Phi + A_{15}\Phi^2 + A_{16}\Phi^3$$

Sebagaimana terlihat pada Gambar 2, sudut Φ mempunyai korelasi dengan panjang lengkungan s sesuai persamaan (4). Untuk mempermudah penyelesaian masalah, variabel independen Φ pada persamaan (9) dinormalisasikan dengan mendifinisikan suatu variabel independen baru $\gamma = \Phi/\theta$. Persamaan (9) dapat ditulis kembali menjadi sebagai berikut :

$$u = \lambda_1 + \lambda_2\,\gamma + \gamma_3\,\gamma^2 + \lambda_4\,\gamma^3$$

$$v = \lambda_5 + \lambda_6\,\gamma + \lambda_7\,\gamma^2 + \lambda_8\,\gamma^3$$

$$w = \lambda_9 + \lambda_{10}\gamma + \lambda_{11}\gamma^2 + \lambda_{12}\gamma^3 \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

$$B = \lambda_{12} + \lambda_{14}\gamma + \lambda_{15}\gamma^2 + \lambda_{16}\gamma^3$$

Element strain energy

Ekspresi regangan longitudinal yang telah dituliskan pada persamaan (1), dengan mengabaikan pengaruh regangan aksial nonlinier (term kedua dan ketiga, yang dikenal dengan <u>the second order terms</u>) dapat ditulis kembali sebagai fungsi sebagai berikut

$$\varepsilon = \left(\frac{w_\gamma}{R\,\theta} - \frac{u}{R}\right) + \eta\left(\frac{\beta}{R} - \frac{v_{\gamma\gamma}}{R^2\theta^2} - v_\gamma\,\gamma_{ss}\right. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

$$\zeta\left(\frac{u_{\gamma\gamma}}{R^2\theta^2} + u_\gamma\,\gamma_{ss} + \frac{w_\gamma}{R^2\,\theta} + \frac{w}{R}\,\gamma_{s\gamma}\right)$$

dengan

$$\gamma_2 = \frac{1}{R\,\theta} \quad ; \quad \gamma_{ss} = \frac{-1}{R^3\,\theta^3}\,R_\gamma \quad ; \quad \gamma_{s\gamma} = R\,\theta\,\gamma_{ss}$$

Selanjutnya dengan persamaan (2) dan (11) , strain energy elemen lengkung dapat ditulis sebagai berikut

$$U = \frac{E}{2} \int_0^1 \left[\frac{A}{R\theta} (w_\gamma - \theta u)^2 + I\zeta \frac{\theta}{R^3} \left(R \beta - \frac{v_{\gamma\gamma}}{\theta^2} - \right.\right. \qquad (12)$$

$$\left.\left. v_\gamma \gamma_{ss} R^2 \right)^2 + \frac{I_\eta}{R^3\theta^3} (u_{\gamma\gamma} + u_\gamma \gamma_{ss} R^2 \theta^2 + w \gamma_{s\gamma} R \theta^2)^2 \right] d\gamma$$

$$+ \frac{G K_t}{2} \int_0^1 \frac{1}{3} (R \beta_\gamma + v_\gamma)^2 \quad d\gamma$$

dengan $I_\zeta = \int_A H^2 dA$, dan $I_\eta = \int_A \zeta^2 dA$ berturut-turut adalah momen inersia tampang lintang batang terhadap sumbu ζ dan η.

Matrix kekakuan elemen lengkung

Seperti telah diuraikan sebelumnya, displacement functions yang dipakai pada model ini adalah polinomial berderajad tiga dalam fungsi γ , seperti pada persamaan (10). Dengan melakukan substitusi persamaan (10) ke persamaan (12), maka strain energy elemen lengkung U menjadi fungsi dari koefisien λ_i (i = 1, 2, 3, ..., 16). Selanjutnya dengan menggunakan kondisi-kondisi batas pada titik-titik nodal elemen, koefisien λ_i tersebut dapat digantikan oleh derajad kebebasan pada titik-titik nodal (nodal degrees of freedom).

Pada penelitian ini derajad kebebasan pada titik-titik nodal terdiri dari dua macam yaitu : (1) derajad kebebasan esensial (essential degrees of freedom) yang berupa u_A, u_B (radial displacement di titik nodal A dan B); v_A, v_B (transverse displacement di titik nodal A dan B); w_A , w_B (longitudinal displacement di titik nodal A dan B); B_A , B_B (twist terhadap sumbu longitudinal); θ_{yA} = $(du/ds + w/R)_A$, θ_{yB} = $(du/ds + w/R)_B$ (rotasi terhadap sumbu y di A dan B); θ_{xA} = $(-dv/ds)_B$, θ_{xB} = $(-dv/ds)_B$ (rotasi terhadap sumbu x); dan (2) derajad kebebasan nonesensial (nonessential degrees of freedom) yang berupa $(dw/ds)_A$, $(dw/ds)_B$, $(dB/ds)_A$, dan $(dB/ds)_B$. Derajad kebebasan tersebut secara kolektif dapat dinyatakan sebagai vektor { **q** } :

$$\{ q \}^T = \Big\{ u_A , v_A , w_A , B_A , \theta_{YA} , \theta_{XA}, \left(\frac{dw}{ds}\right)_A, \left(\frac{d\beta}{ds}\right)_A,$$

$$u_B , v_B , w_B , B_B , \theta_{YB} , \theta_{XB} , \left(\frac{dw}{ds}\right)_B , \left(\frac{d\beta}{ds}\right)_B \Big\} \quad .... (13)$$

Selanjutnya strain energy elemen lengkung dapat ditulis secara kompak sebagai

$$U = \int_0^1 f (\{q\}) \, d\gamma \qquad .... \qquad (14)$$

dengan f adalah fungsi kuadratis dari q .

Berdasarkan formulasi energi potensial yang umum dipakai, stiffness matrix elemen lengkung [k] dapat diperoleh dari

$$[k] = [k_{ij}] = \left[\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \, \partial q_j} \right] = \left[\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \, \partial q_j} d\gamma \right] \qquad (15)$$

Integrasi di atas cukup rumit dan terlalu panjang untuk dituliskan di sini. Karena fungsi-fungsi yang diintegralkan rumit, maka integrasi dilakukan secara numeris dengan metode Gauss quadrature. Hasil akhir yang diperoleh adalah entries dari matrix kekakuan elemen [k], berorde 16 x 16.

Selanjutnya, untuk menyederhanakan masalah, derajad kebebasan nonesensial, yaitu $(dw/ds)_A$, $(dw/ds)_B$, $(dB/ds)_A$ dan $(dB/ds)_B$ dikondensasikan sehingga diperoleh matrix kekakuan elemen lengkung yang berorde 12 x 12.

Persamaan keseimbangan struktur

Berdasarkan matrix kekakuan elemen [k] yang telah dibahas sebelumnya , matrix kekakuan struktur [K] dapat diperoleh dengan menggabungkan (assembling) matrix kekakuan seluruh elemen lengkung yang membentuk struktur tersebut. Selanjutnya persamaan keseimbangan struktur dapat dituliskan dalam bentuk

$$[K] \{ D \} = \{ P \} \qquad (16)$$

dengan [K] = matrix kekakuan struktur , {D} = vektor displacement titik nodal struktur, dan {P} = vektor beban struktur. Denga memasukkan kondisi-kondisi batas struktur, baik yang berupa nodal displacements maupun nodal forces berturut-turut ke vektor {D} dan vektor {P} , kemudian melakukan partisi matrix berdasarkan displacement yang tidak diketahui dan displacement yang diketahui, maka vektor displacement yang tidak diketahui dapat dihitung dengan metode eliminasi Gauss (atau semacamnya). Selanjutnya reaksi dukungan dan gaya-gaya dalam dapat dihitung berdasarkan displacement yang telah diperoleh dari langkah sebelumnya.

Berdasarkan finite element model usulan tersebut dan strategi penyelesaian yang diuraikan sebelumnya, sebuah program komputer (CURVE.FOR) telah pula dibuat dalam rangka penelitian ini dan dipakai untuk menganalisis beberapa struktur lengkung.

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Untuk memberikan gambaran tentang akurasi dan keuntungan-keuntungan lain yang dapat diperoleh dengan menggunakan finite element model usulan ini, berikut ini disajikan beberapa contoh numeris analisis struktur lengkung yang telah mewakili berbagai macam kondisi batas, geometri lengkungan, dan pembebanan. Contoh-contoh tersebut telah diselesaikan dengan metode-metode lain dan diambilkan dari referensi yang ada di daftar pustaka.

Struktur pelengkung setengah lingkaran dengan beban terpusat

Struktur pelengkung berbentuk setengah lingkaran dengan jari-jari 48 inchi (122 cm) dan didukung jepit sempurna pada kedua tumpuannya (Gambar 3). Tampang lintang pelengkung berbentuk empat persegi panjang dengan ukuran 1/4 inchi (0,635 cm) x 3/4 inchi (1,905 cm). E = 10^7 psi (703701,41 kg/cm^2). Pada puncak pelengkung terdapat beban terpusat P = 1 lbs (0,454 kg) ke bawah.

Karena struktur dan pembebanannya simetris maka analisis cukup dilakukan terhadap setengah bagian saja, dengan catatan kondisi batas di sumbu simetris harus disesuaikan.

Analisis dilakukan dengan menggunakan 2, 3, 4, dan 5 elemen. Akurasi elemen lengkung usulan ini dapat ditunjukkan dengan membandingkan displacement vertikal di puncak pelengkung dengan solusi eksak yang ada di literatur. Perbedaan (dalam persen) antara kedua hasil tersebut (yang disebut error) disajikan dalam grafik pada Gambar 4.

Dari grafik tersebut tampak bahwa konvergensi hasil hitungan ke solusi eksaknya sangat baik sekali. Dengan hanya menggunakan 4 elemen saja solusi eksaknya telah dapat diperoleh (error yang terjadi hanya 0,06%).

Struktur pelengkung parabola dengan beban terpusat

Struktur pelengkung berbentuk parabola dengan bentang 48 inch (122 cm) dan tinggi pelengkung 9,6 inchi (24,4 cm). Pelengkun didukung sendi sempurna pada kedua tumpuannya (Gambar 5). Tampan lintang pelengkung berbentuk empat persegi panjang dengan ukuran 3/ inchi (0,95 cm) x 4 inchi (10,2 cm). E = 29 x 10^6 psi (2,04 x 10 kg/cm^2). Pada puncak pelengkung terdapat beban terpusat P = 20 lb (9,08 kg) arah ke bawah.

Analisis dilakukan dengan menggunakan 2, 3, 4, 5, dan 6 eleme (untuk setengah bagian) . Akurasi elemen lengkung usulan ini dapa ditunjukkan dengan membandingkan <u>displacement</u> vertikal di punca pelengkung dengan solusi eksak yang ada di literatur. Perbedaan antar kedua hasil tersebut disajikan dalam grafik (Gb.6). Dari grafi tersebut tampak bahwa konvergensi hasil hitungan ke solusi eksakny sangat baik sekali. Dengan hanya menggunakan 5 elemen saja solus eksaknya telah dapat diperoleh (<u>error</u> yang terjadi hanya 0,03%). Bil digunakan 4 elemen <u>error</u> yang terjadi juga sudah amat kecil, yait 0.10%.

Struktur pelengkung setengah lingkaran dengan beban terpusat latera (analisis 3 dimensi)

Struktur pelengkung berbentuk setengah lingkaran dengan jari-jar 48 inchi (122 cm) dan didukung jepit sempurna pada kedua tumpuanny (Gambar 7). Tampang lintang pelengkung berbentuk empat persegi panjar dengan ukuran 1/4 inchi (0,635 cm) x 3/4 inchi (1,905 cm). E = 10^7ps (703701,41 kg/cm^2). Pada puncak pelengkung terdapat beban terpusat P 1 lbs (0,454 kg) arah lateral (tegak lurus bidang pelengkung).

Analisis dilakukan dengan menggunakan 2, 3, 4, 5, dan 6 eleme (untuk setengah bagian). Akurasi elemen lengkung usulan ini dapa ditunjukkan dengan membandingkan <u>displacement</u> vertikal di punca pelengkung dengan solusi eksak yang ada di literatur. Perbedaan antar keduanya disajikan dalam grafik pada Gambar 8.

Dari grafik tersebut tampak bahwa konvergensi hasil hitungan k solusi eksaknya sangat baik sekali. Dengan hanya menggunakan 6 eleme saja solusi eksaknya telah dapat diperoleh (<u>error</u> yang terjadi hany 0,04%). Bila digunakan 4 elemen <u>error</u> yang terjadi juga sudah ama kecil, yaitu 0.17%.

Struktur pelengkung segmen lingkaran dengan beban terpusat vertika dan horisontal

Struktur pelengkung berbentuk segmen lingkaran dengan jari-jar 200 cm, sudut buka 60^o (0,26178 radian), dan didukung jepit sempurn pada kedua tumpuannya (Gambar 9). Tampang lintang pelengkung berbentu empat persegi panjang dengan luas tampang 4 cm^2 dan momen inersi tampang 1.33 cm^4. Modulus elastis bahan $E = 10^6$ kg/cm^2. Pada puncak pelengkung terdapat beban terpusat P_v = 200 kg arah vertikal ke bawah dan P_h = 160 kg arahhorisontal.

Karena pembebanannya tidak simetris (meskipun strukturnya simetris) maka analisis dilakukan terhadap seluruh struktur. Analisis dilakukan dengan menggunakan 4, 6, 8, dan 10 elemen. Akurasi elemen lengkung usulan ini dapat ditunjukkan dengan membandingkan <u>displacement</u> vertikal di puncak pelengkung dengan solusi eksak yang ada di literatur. Perbedaan antara kedua hasil tersebut disajikan dalam grafik (Gambar 10).

Dari grafik tersebut tampak bahwa konvergensi hasil hitungan ke solusi eksaknya sangat baik sekali. Dengan hanya menggunakan 10 elemen saja solusi eksaknya telah dapat diperoleh (<u>error</u> yang terjadi hanya 0,03%). Bila digunakan 8 elemen, <u>error</u> yang terjadi juga sudah amat kecil, yaitu 0.17%.

Struktur pelengkung tak teratur dengan beban terpusat

Struktur pelengkung terdiri dari dua segmen lingkaran dengan jari-jari segmen lingkaran pertama 200 cm, sudut buka 30^o (0,13089 radian), dan jari-jari segmen lingkaran kedua 100 cm, sudut buka 30^o (0,13089 radian) dan didukung jepit sempurna pada kedua tumpuannya (Gambar 11). Tampang lintang pelengkung berbentuk empat persegi panjang dengan luas tampang 4 cm^2 dan momen inersia tampang 1.33 cm^4. $E = 10^6$ kg/cm^2. Pada puncak pelengkung terdapat beban terpusat P = 200 kg arah vertikal ke bawah. Karena struktur maupun pembebanannya tidak simetris maka analisis dilakukan terhadap seluruh bagian struktur.

Analisis dilakukan dengan menggunakan 4, 6, 8, dan 10 elemen. Akurasi elemen lengkung usulan ini dapat ditunjukkan dengan membandingkan <u>displacement</u> vertikal di puncak pelengkung dengan solusi eksak yang ada di literatur. Perbedaan antara kedua hasil tersebut disajikan dalam grafik pada Gambar 12.

Dari grafik tersebut tampak bahwa konvergensi hasil hitungan ke solusi eksaknya sangat baik sekali. Dengan hanya menggunakan 10 elemen saja solusi eksaknya telah dapat diperoleh (<u>error</u> yang terjadi hanya 0,02%). Bila digunakan 8 elemen, <u>error</u> yang terjadi juga sudah amat kecil, yaitu 0.05%.

KESIMPULAN

Pada penelitian ini <u>finite element model</u> untuk analisis struktur lengkung tiga dimensi telah dikembangkan berdasarkan polinomial berderajat tiga untuk <u>displacement function</u> nya dan polinomial berderajat dua untuk geometri lengkungannya (geometri lengkungan boleh sembarang). Sistem koordinat yang dipakai untuk menjabarkan matrix kekakuan elemen lengkung adalah sistem koordinat kurvilinier. Matrix kekakuan elemen yang diperoleh berorde 16 x 16 , dengan nodal degrees of freedom terdiri dari bagian yang essential (12 buah) dan bagian yang nonessential (4 buah). Selanjutnya derajad kebebasan yang nonessential dikondensasikan sehingga menghasilkan matrix kekakuan berorde 12x12 , dan semua derajad kebebasan berupa essential degrees of freedom.

Dari contoh-contoh numeris yang telah diuraikan sebelumnya (yang telah mencakup berbagai kondisi batas, geometri lengkungan, dan pembebanan), terbukti bahwa finite element model usulan untuk struktur lengkung ini sangat akurat, dan konvergensi ke hasil eksaknya juga cepat. Dapat disimpulkan pula bahwa sebagai pedoman praktis dalam menggunakan finite element model usulan ini untuk analisis, cukup diperlukan 4 elemen untuk struktur pelengkung simetris dan 8 elemen untuk struktur pelengkung yang tak simetris (yang geometri lengkungannya sembarang).

Pengaruh diskontinuitas gaya aksial di titik-titik nodal, yang ditemukan pada analisis struktur lengkung dengan pendekatan balok-balok lurus, tidak dijumpai disini, sehingga hasil analisis nyapun jelas jauh lebih teliti dan secara ilmiah lebih memuaskan.

Mengingat elemen lengkung usulan usulan ini hanya melibatkan derajad kebebasan titik nodal yang essential maka elemen lengkung tersebut bila diperlukan dapat digabungkan dengan elemen balok lurus maupun elemen truss sehingga analisis struktur tiga dimensi yang lebih kompleks, yang terbentuk oleh kombinasi elemen-elemen balok lengkung, balok lurus dan truss (seperti jembatan lengkung, hanggar pesawat, rangka pesawat, rangka kapal, dan semacamnya) dapat dilakukan secara lebih akurat, dengan demikian pemakaian bahan akan lebih efisien.

Disamping itu penemuan inipun akan merangsang para teknisi untuk tidak segan-segan memakai elemen lengkung pada sistem struktur-struktur yang lain yang memerlukannya, sehingga akan merangsang pula pengembangan kreativitas mereka..

Ditinjau dari segi data masukan yang harus diberikan untuk mendifinisikan geometri lengkungan, finite element model usulan ini hanya memerlukan data berupa : koordinat titik nodal dan slope pada titik nodal tersebut. Dengan demikian, data masukan yang diperlukan amat sederhana sehingga dari segi praktis juga sangat memuaskan.

DAFTAR PUSTAKA

Ashwell , D.G. , 1976 , "Strain Elements , With Applications to Arches , Rings , and Cylindrical Shells" , Finite Elements For Thin Shell and Curved Members (Edited by D.G. Ashwell and R.H. Gallagher), John Wiley & Sons.

Belytschko, T., Glaum, L.W., 1979, "Applications of Higher Order Corotational Stretch Theories to Nonlinear Finite Element Analysis", Computers and Structures, Vol.10, pp.175-182.

Calhound, P.R., DaDeppo, D.A., 1983, "Nonlinear Finite Element Analysis of Clamped Arches", Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol.109, No.3, pp.599-612.

Cook, R.D., 1981, "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", John Wiley and Sons.

Dawe, D.J., 1974, "Curved Finite Elements For The Analysis Of Shallow And Deep Circular Arches", Computers and Structures Vol.4, pp.559-580.

Oden, J.T., Ripperger, R.P., 1980, "Mechanics of Elastic Structures", Prentice Hall Inc.

Stolarski, H., Belytschko, T., 1982, "Membrane Locking and Reduced Integration For Curved Elements", Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol.49, pp.172-176.

Weaver, W., Johnston, P.R., 1984, "Finite Elements For Structural Analysis", Prentice Hall Inc.

Wen, R.K., Lange, J.G., 1981, "Curved Beam Element For Arch Buckling Analysis", Journal of Structural Division, ASCE, Vol. 107, No.ST11, pp.2053-2069.