IDEAL-p KIRI UTAMA DALAM SEMIRING INVERSIVE REGULAR-p

The Principal Left p-Ideals in an Inversive p-Regular Semirings

Dian Winda Setyawati[1] dan Sri Wahyuni[2]

Program Studi Matematika
Program Pascasarjana Universitas Gadjah Mada

ABSTRACT

An inversive semiring S is called p-regular if for each $a \in S$, there exists some $b \in S$ such that $a + aba = 2a$. Ideal I in an inversive semiring S is called p-ideal if for some $x \in S$, $x + a = 2x$ for some $a \in I$ then $x \in I$. In this paper we discuss characterizations of the principal left p-ideal in an inversive semiring S.

Keyword : *Inversive semiring, p-regular semiring, p-ideal*

PENGANTAR

Semiring (S , + , •) adalah himpunan S bersama - sama dengan dua operasi biner sebut operasi penjumlahan $+ : S \times S \to S$ dan operasi pergandaan $\bullet : S \times S \to S$ sedemikian hingga (S , +) semigrup komutatif, (S , •) semigrup dan S bersifat distributif pergandaan terhadap penjumlahan yaitu untuk setiap $x, y, z \in S$ berlaku $x (y + z) = x y + x z$ dan $(x + y) z = x z + y z$. Semiring S disebut *inversive* jika untuk setiap $a \in S$ terdapat dengan tunggal $a' \in S$ sedemikian hingga $a + a' + a = a$ dan $a' + a + a' = a'$. Menurut Karvallas (1972), pada semiring *inversive* S berlaku $(a b)' = a' b = a b'$, $(a')' = a$ dan $(a + b)' = a' + b'$ untuk semua $a, b \in S$. Mukhopadhyay dan Ghosh (1999) mendefinisikan bentuk ideal dan regular baru pada semiring yaitu ideal-p dan regular-p. Ideal I dari semiring S disebut ideal-p jika terdapat $x \in S$ dan $n \in N$ yang memenuhi $n x + a = (n + 1) x$ untuk suatu $a \in I$ maka $x \in I$. Semiring S

[1] Fakultas MIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya
[2] Fakultas MIPA Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta

disebut regular-p jika untuk setiap $a \in S$ terdapat suatu $b \in S$ sedemikian hingga $n a + a b a = (n+1) a$ untuk suatu $n \in N$. Dengan menggunakan sifat *inversive*, jika semiring S *inversive* maka Ideal I disebut ideal-p jika terdapat $x \in S$ yang memenuhi $x + a = 2x$ untuk suatu $a \in I$ maka $x \in I$. Semiring *inversive* S disebut regular-p jika untuk setiap $a \in S$ terdapat suatu $b \in S$ sedemikian hingga $a + a b a = 2a$. Selanjutnya, Mukhopadhyay *et al.* (2002) mendapatkan karakterisasi ideal-p kiri utama pada semiring regular-p. Dalam tulisan ini akan dibahas lebih lanjut jika semiring *inversive*. Jadi masalah yang akan dibicarakan adalah karakterisasi ideal-p kiri utama pada semiring inversive regular-p.

CARA PENELITIAN

Penelitian ini merupakan studi literatur, sehingga langkah - langkah yang dilakukan adalah dengan mempelajari beberapa jurnal yang berkaitan dengan penelitian. Kemudian menuangkan dalam tulisan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dibahas karakterisasi ideal-p kiri utama pada semiring *inversive* regular-p. Sebelumnya akan diberikan definisi dan teorema
yang menunjukkan bentuk himpunan ideal-p kiri utama pada semiring.

Definisi 3.1

Misalkan S semiring dan P subsemiring dari S. Penutup (closure) P dinotasikan dengan $\overset{\frown}{P}$ *didefinisikan sebagai himpunan*

$$\overset{\frown}{P} = \{ x \in S / n x + a = (n+1) x \text{ untuk suatu } n \in N \text{ dan } a \in P \}$$

dengan N adalah himpunan bilangan asli.

Teorema 3.2

Jika S semiring maka untuk setiap $a \in S$, *himpunan* $\overset{\frown}{Sa}$ *merupakan ideal-p kiri.*

Bukti :

Ambil sebarang $x, y \in \overset{\frown}{Sa}$ artinya terdapat $n, m \in N$ dan $s, t \in S$ sedemikian hingga $n x + s a = (n+1) x$ dan $m y + t a = (m+1) y$. Ambil $k = \text{maks}(n, m)$ diperoleh

(i)
$$\begin{aligned} k(x+y) + (s+t)a &= (k-n)x + (nx + sa) + (k-m)y + (my + ta) \\ &= (k-n)x + (n+1)x + (k-m)y + (m+1)y \\ &= (k+1)(x+y) \end{aligned}$$

(ii) ambil sebarang $s^* \in S$ diperoleh

$$\begin{aligned} n(s^*x) + (s^*s)a &= s^*(nx) + s^*(sa) = s^*(nx + sa) \\ &= s^*(n+1)x . \end{aligned}$$

Jadi $x + y, s^*x \in \overset{\frown}{Sa}$.

Hal ini menunjukkan himpunan $\overset{\frown}{Sa}$ merupakan ideal kiri dari S.

Sekarang tinggal ditunjukkan himpunan $\overset{\frown}{Sa}$ adalah ideal-p. Ambil sebarang $u \in S$ yang memenuhi

$$n u + z = (n+1) u \text{ dan } z \in \overset{\frown}{Sa} \tag{3.1}$$

untuk suatu $n \in N$ akan ditunjukkan $u \in \overset{\frown}{Sa}$. Karena $z \in \overset{\frown}{Sa}$ maka

$$m z + s a = (m+1) z \text{ untuk suatu } m \in N \text{ dan } s \in S \tag{3.2}$$

Dari 3.1 dan 3.2 dengan mengambil $p > m + mn + n, p \in N$ diperoleh

$$\begin{aligned} p u + s a &= (p - m(n+1)) u + m(n+1) u + s a \\ &= (p - mn - m) u + m(nu + z) + s a \\ &= (p - m) u + (m+1) z \\ &= (p - m - n(m+1)) u + (m+1)(nu + z) \\ &= (p - m - n(m+1)) u + (m+1)(n+1) u \\ &= (p+1) u \end{aligned}$$

Jadi $u \in \overset{\frown}{Sa}$. Terbukti himpunan $\overset{\frown}{Sa}$ merupakan ideal-p kiri. □

Dari Proposisi 3.2, pada semiring S, untuk setiap $a \in S$, himpunan $\widehat{Sa}$ merupakan ideal-p kiri yang dibangun oleh elemen a di S Himpunan $\widehat{Sa}$ ini disebut ideal-p kiri utama pada semiring S.

Definisi 3.3

Elemen e pada semiring S disebut idempoten-p jika

$$n e + e^2 = (n+1) e \text{ untuk suatu } n \in N$$

dengan N adalah himpunan bilangan asli. Khususnya, jika semiring S inversive maka elemen e disebut idempoten-p jika $e + e^2 = 2e$

Teorema 3.4

Misalkan S semiring dengan elemen satuan 1_s. Jika S regular-p maka untuk $a \in S$, $\widehat{Sa} = \widehat{Se}$ dengan e elemen idempoten-p di S.

Bukti :

Diketahui S semiring dengan elemen 1_s adalah regular-p artinya untuk sebarang $a \in S$ terdapat $b \in S$ dan $n \in N$ sehingga $n a + a b a = (n + 1) a$ maka $n b a + b a b a = (n+1) b a$. Misal $e = b a$ diperoleh $n e + e^2 = (n+1) e$.
Hal ini menunjukkan $e = b a$ merupakan elemen idempoten-p. Sekarang akan

ditunjukkan $\widehat{Se} \subseteq \widehat{Sa}$ dan $\widehat{Sa} \subseteq \widehat{Se}$. Ambil sebarang $p \in \widehat{Se}$ maka terdapat $r_1 \in S$ dan $m \in N$ sehingga $m p + r_1 e = (m+1) p$. Misal $r_2 = r_1 b \in S$ maka $m p + r_2 a = (m+1) p$. Hal ini menunjukkan

$p \in \widehat{Sa}$. Oleh karena itu $\widehat{Se} \subseteq \widehat{Sa}$ (3.3)

Sekarang ambil sebarang $t \in \widehat{Sa}$ artinya terdapat $r \in S$ dan $k \in N$ sehingga

$$k t + r a = (k+1) t. \tag{3.4}$$

Karena $e = b a$ dan $n a + a b a = (n+1) a$ diperoleh $n a + a e = (n+1) a$. Dengan kata lain

$$n r a + r a e = (n+1) r a. \tag{3.5}$$

Sedangkan dari 3.4 diperoleh

$$(n r a + r a e) + n k t = n (k+1) t + r a e$$

Dengan 3.5 diperoleh

$$(n+1) r a + n k t = n (k+1) t + r a e$$

ditambah $(n+1) k t$ dan misal $s = r a \in S$ diperoleh

$$(n+1)(r a + k t) + n k t = s e + (2 n k + n + k) t$$

Dengan 3.4 diperoleh

$$(2 n k + n + k + 1) t = s e + (2 n k + n + k) t$$

Misal $q = 2 n k + n + k \in N$ diperoleh $q t + s e = (q+1) t$ Hal ini menunjukkan $t \in \widehat{Se}$. Oleh karena itu $\widehat{Sa} \subseteq \widehat{Se}$ (3.6)

Dari 3.3 dan 3.6 terbukti $\widehat{Sa} = \widehat{Se}$ □

Misalkan $E^+(S)$ adalah himpunan semua elemen idempoten terhadap penjumlahan pada semiring S. Teorema, Lemma dan Proposisi berikut ini menggunakan semiring S inversive dengan elemen satuan 1_s dimana E^+ (S) mempunyai sifat untuk setiap $a \in S$ dan $e \in E^+$ (S) berlaku $a + a e = a$ dan $e^2 = e$. Selanjutnya semiring ini dilambangkan dengan R. Teorema berikut ini akan menjadikan Teorema 3.4 menjadi perlu dan cukup untuk klas dari semiring menjadi regular-p.

Teorema 3.5

Jika untuk setiap $a \in R$ terdapat suatu elemen idempoten-p $e \in R$ yang memenuhi $\widehat{Ra} = \widehat{Re}$ maka R regular-p.

Bukti :

Ambil sebarang $a \in R$ maka menurut yang diketahui terdapat suatu e elemen idempoten-p di R yang memenuhi $\widehat{Ra} = \widehat{Re}$.

Karena $a = 1_s a \in \widehat{Ra}$ maka $a \in \widehat{Re}$ artinya terdapat suatu $r \in R$ yang memenuhi $a + r e = 2 a$ (3.7)

Akibatnya

$$2ae + 2a + a' = r(e^2 + e) + ae + a + a'$$

Karena R inversive dan e elemen idempoten-p maka

$$2ae + a = 2(re + a) + ae + 2a'$$

Dengan 3.7 diperoleh

$$2ae + a = (4a + 2a') + ae$$

Karena R inversive maka $4a + 2a' = 2a$ diperoleh

$$2ae + a = 2a + ae \tag{3.8}$$

Karena $e = 1_s e \in \widehat{Re}$ dan $\widehat{Ra} = \widehat{Re}$ maka $e \in \widehat{Ra}$ artinya terdapat b $\in$ R sehingga $e + ba = 2e$ akibatnya

$$a + ae + aba = a + 2ae$$

Menurut 3.8 diperoleh

$$a + ae + aba + ae' = 2a + ae + ae'$$

$$(a + a(e + e')) + aba = a + (a + a(e + e'))$$

Karena $e + e' \in E^+(R)$ maka $a + a(e + e') = a$ sehingga diperoleh $a + aba = 2a$

Terbukti R adalah regular-p. □

Dari Teorema 3.4 dan Teorema 3.5 didapatkan Akibat 3.6 berikut ini

Akibat 3.6

R regular-p jika dan hanya jika setiap ideal-p kiri utama dari R dibangun oleh suatu elemen idempoten-p dari R

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa jumlah dari sebarang dua ideal-p kiri utama dari R juga merupakan ideal-p kiri utama dari R apabila R regular-p.

Teorema 3.7

Jika R regular-p maka jumlah dari sebarang dua ideal-p kiri utama dari R juga merupakan ideal-p kiri utama dari R.

Bukti :

Kita anggap $\widehat{Ra} + \widehat{Rb}$. Dengan Teorema 3.4 $\widehat{Ra} = \widehat{Re}$ untuk suatu idempoten-p $e \in R$. Karena e elemen idempoten-p maka $e \in E(R)$ sehingga $e = e^2$.

Langkah 1:

Disini diclaim bahwa $\widehat{Re} + \widehat{Rb} = \widehat{Re} + \widehat{Rc}$ untuk $c = b(1_R + e')$

Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut : Karena $e + e' \in E^+(R)$ maka $b + b(e + e') = b$ sehingga untuk sebarang $x, y \in R$ berlaku

$$\begin{aligned} xe + yb &= xe + y(b + b(e + e')) \\ &= (x + yb)e + y(b(1_R + e')) \\ &= (x + yb)e + yc \end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan $Re + Rb \subseteq Re + Rc$. Sekarang, ambil sebarang

$x \in \widehat{Re} + \widehat{Rb}$ maka $x = y + z$ untuk suatu $y \in \widehat{Re}$ dan $z \in \widehat{Rb}$ artinya $y + r_1 e = 2y$ dan $z + r_2 b = 2z$ untuk suatu $r_1, r_2 \in R$. Akibatnya $x + r_1 e + r_2 b = 2x$. Karena $Re + Rb \subseteq Re + Rc$ maka $r_1 e + r_2 b = r_3 e + r_4 c$ untuk suatu $r_3, r_4 \in R$ sehingga $x + r_3 e + r_4 c = 2x$ Hal ini

menunjukkan $x \in \widehat{Re + Rc} \subseteq \widehat{\widehat{Re} + \widehat{Rc}} = \widehat{Re} + \widehat{Rc}$. Oleh karena

itu $\widehat{Re} + \widehat{Rb} \subseteq \widehat{Re} + \widehat{Rc}$. Kebalikannya, untuk sebarang $x, y \in R$

$$\begin{aligned} xe + yc &= xe + y(b(1_R + e')) \\ &= xe + yb + yb(1_R e)' \\ &= xe + yb + yb1_R'e \\ &= (x + yb1_R')e + yb \end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan $Re + Rc \subseteq Re + Rb$. Sejalan dengan

pembuktian diatas $\widehat{Re} + \widehat{Rc} \subseteq \widehat{Re} + \widehat{Rb}$. Oleh karena itu

$\widehat{Re} + \widehat{Rb} = \widehat{Re} + \widehat{Rc}$.

Langkah 2:

Disini diclaim $\overbrace{Rc} = \overbrace{Rg}$ dimana $g = (1_R + e')f$ dengan f elemen idempoten-p yang menyebabkan $\overbrace{Rc} = \overbrace{Rf}$
Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut : Dengan Teorema 3.4 $\overbrace{Rc} = \overbrace{Rf}$ untuk suatu elemen idempoten-p $f \in R$..Karena f idempoten-p maka $f \in E(R)$ sehingga $f = f^2$.

Karena $f = 1f \in \overbrace{Rf} = \overbrace{Rc}$ maka $f + r_1 c = 2f$ (3.9)
untuk suatu $r_1 \in R$ sehingga $fe + r_1 ce = 2fe$. Mengingat $c = b(1_R + e')$ dan $e = e^2$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} fe + r_1 b(1_R + e')e &= 2fe \\ fe + r_1 b(e + e'e) &= 2fe \\ fe + r_1 b(e^2 + e'e) &= 2fe \\ fe + r_1 b(e + e')e &= 2fe \end{aligned}$$

Karena $e + e' \in E^+(R)$ maka $r_1 b(e + e')e \in E^+(R)$ sedangkan $E^+(R)$ ideal-p dan $fe + r_1 b(e + e')e = 2fe$ akibatnya

$$fe \in E^+(R) \tag{3.10}$$

Misal $g = (1_R + e')f$ maka $g \in Rf$ sehingga $Rg \subseteq Rf$ akibatnya

$$\overbrace{Rg} \subseteq \overbrace{Rf} \tag{3.11}$$

dan juga karena $f = f^2$ diperoleh

$$\begin{aligned} g^2 &= (1_R + e')f \ (1_R + e')f \\ &= f^2 + fe'f + e'f^2 + e'fe'f \\ &= f + fe'f + e'f + e'fe'f \end{aligned}$$

Menurut 3.10, $fe \in E^+(R)$ maka $fe = 2fe$ sehingga
$fe'f + fe'f = 2fe'f = 2(fe)'f = (2fe)'f = (fe)'f = fe'f$.
Oleh karena itu $fe'f \in E^+(R)$ akibatnya $f + f(fe'f) = f$. Karena $f = f^2$ maka $f + fe'f = f$ sehingga

$$\begin{aligned} g^2 &= f + fe'f + e'f + e'fe'f \\ &= (f + fe'f) + e'(f + fe'f) \\ &= f + e'f = g \end{aligned}$$

Menurut 3.9, $f + r_1 c = 2f$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} f^2 + r_1 cf &= 2f^2 \\ f + r_1 b(1_R + e')f &= 2f \\ f + r_1 bg &= 2f \end{aligned}$$

sehingga $rf + rr_1 bg = 2rf$ untuk semua $r \in R$. Oleh karena itu $Rf \subseteq \overbrace{Rg}$. Akibatnya $\overbrace{Rf} \subseteq \overbrace{Rg}$ (3.12)

Dari 3.11 dan 3.12 diperoleh $\overbrace{Rc} = \overbrace{Rf} = \overbrace{Rg}$.

Langkah 3 :

Dari langkah 1 dan 2 diperoleh $\overbrace{Ra} + \overbrace{Rb} = \overbrace{Re} + \overbrace{Rg}$. Sekarang tinggal ditunjukkan $\overbrace{Re} + \overbrace{Rg} = \overbrace{R(e+g)}$. Jelas bahwa $R(e+g) \subseteq Re + Rg$ sehingga $\overbrace{R(e+g)} \subseteq \overbrace{Re+Rg} \subseteq \overbrace{\overbrace{Re}+\overbrace{Rg}} = \overbrace{Re} + \overbrace{Rg}$. Tinggal ditunjukkan kebalikannya $eg = e(1_R + e')f = (e + ee')f = (e^2 + ee')f = (e^2 + e'e)f = (e + e')ef \in E^+(R)$ sehingga $e = e + e(eg) = e^2 + eg = e(e + g)$ akibatnya $e \in R(e + g)$. Sedangkan $ge = (1_R + e')fe \in E^+(R)$ sebab $fe \in E^+(R)$ sehingga $g = g + g(ge) = g^2 + ge = g(g + e)$ akibatnya $g \in R(e + g)$. Oleh karena itu $Re \subseteq R(e + g)$ dan $Rg \subseteq R(e + g)$ akibatnya $\overbrace{Re} \subseteq \overbrace{R(e+g)}$ dan $\overbrace{Rg} \subseteq \overbrace{R(e+g)}$ sehingga diperoleh $\overbrace{Re} + \overbrace{Rg} \subseteq \overbrace{R(e+g)}$. Oleh karena itu $\overbrace{Re} + \overbrace{Rg} = \overbrace{R(e+g)}$. Jadi terbukti $\overbrace{Ra} + \overbrace{Rb} = \overbrace{R(e+g)}$ □

Teorema 3.8

Di dalam R berlaku $\overbrace{\langle x_1, x_2 \rangle} = \overbrace{Rx_1} + \overbrace{Rx_2}$ dengan $\overbrace{\langle x_1, x_2 \rangle}$ adalah ideal-p yang dibangun oleh $x_1, x_2 \in R$.

Bukti :

Jelas bahwa $\overparen{\langle x_1, x_2 \rangle} \subseteq \overparen{\overparen{R x_1} + \overparen{R x_2}} = \overparen{R x_1} + \overparen{R x_2}$. Kebalikannya, ambil sebarang $x \in \overparen{R x_1} + \overparen{R x_2}$ maka $x = y + z$ dimana $y \in \overparen{R x_1}$ dan $z \in \overparen{R x_2}$ artinya $y + r_1 x = 2y$ dan $z + r_2 z = 2z$ untuk suatu $r_1, r_2 \in R$ sehingga $x + r_1 x + r_2 z = 2x$

Hal ini menunjukkan $x \in \overparen{\langle x_1, x_2 \rangle}$. Oleh karena itu $\overparen{R x_1} + \overparen{R x_2} \subseteq \overparen{\langle x_1, x_2 \rangle}$. Terbukti $\overparen{\langle x_1, x_2 \rangle} = \overparen{R x_1} + \overparen{R x_2}$ □

Akibat 3.9 berikut ini merupakan hasil langsung dari Teorema 3.7 dan Teorema 3.8.

Akibat 3.9

Jika R regular-p maka ideal-p kiri yang dibangun terbatas dari R merupakan ideal-p kiri utama.

KESIMPULAN

Misalkan R adalah semiring inversive dengan elemen satuan 1_R dimana $E^+(R)$ mempunyai sifat untuk setiap $a \in R$ dan $e \in E^+(R)$ berlaku $a + ae = a$ dan $e^2 = e$. Karakterisasi ideal-p kiri utama pada semiring inversive regular-p adalah sebagai berikut :

1. Jika S semiring maka untuk setiap $a \in S$, himpunan $\overparen{Sa}$ merupakan ideal-p kiri utama
2. Misalkan S semiring dengan elemen satuan 1_S. Jika S regular-p maka untuk $a \in S$, $\overparen{Sa} = \overparen{Se}$ dengan e elemen idempoten-p di S.
3. Jika untuk setiap $a \in R$ terdapat suatu elemen idempoten-p $e \in R$ yang memenuhi $\overparen{Ra} = \overparen{Re}$ maka R regular-p.

Dari sifat 2 dan sifat 3 diperoleh sifat berikut ini

4 R regular-p jika dan hanya jika setiap ideal-p kiri utama dari R dibangun oleh suatu elemen idempoten-p dari R.

5. Jika R regular-p maka ideal-p kiri yang dibangun terbatas dari R merupakan ideal-p kiri utama.

DAFTAR PUSTAKA

Karvallas, Paul H., 1972, " Inversive Semirings ", Communicated by G. B Preston

Mukhopadhyay, P. and Ghosh, S., 1999, " A New Class of Ideals in Semirings ", Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 23 : 253 - 264

Mukhopadhyay, P., Sen, M. K. and Ghosh, S., 2002, " p-Ideals in p-Regular Semirings ",Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 26 : 439 - 452