JURNAL FOURIER | Oktober 2014, Vol. 3, No. 2, 115-129 ISSN 2252-763X

Konsep Dasar Ruang Metrik *Cone*

A. Rifqi Bahtiar, Muchammad Abrori, dan Malahayati

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sunan Kalijaga, Jl. Marsda Adisucipto No. 1 Yogyakarta, Indonesia

Korespondensi; Muchammad Abrori, Email: borymuch@yahoo.com

Abstrak

Ruang metrik merupakan salah satu konsep yang penting dalam ranah analisis fungsional. Dikatakan penting karena konsep ruang metrik banyak dipakai dalam teori-teori matematika yang lain dan sering dipakai juga dalam studi fisika lanjut. Ruang metrik adalah suatu himpunan yang berlaku suatu metrik. Metrik adalah suatu fungsi dengan domain sembarang himpunan yang tak kosong menuju kodomain bilangan real atau fungsi bernilai real dengan definisi urutan dalam bilangan real. Pada tahun 2007 Huang Long Guang dan Zhang Xian menggeneralisasikan konsep ruang metrik menjadi ruang metrik cone. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengkaji konsep dasar ruang metrik cone yang meliputi mengkaji barisan konvergen, barisan cauchy beserta contohnya dan hubungan barisan konvergen dan barisan terbatas dalam ruang metrik cone, mengkaji hubungan ruang metrik dan ruang metrik cone dan mengkaji salah satu teorema titik tetap dalam ruang metrik cone. Penelitian ini dilakukan dengan menggunakan metode studi literatur yaitu dengan membahas dan menjabarkan konsep-konsep yang sudah ada di dalam literatur. Diharapkan dari penelitian ini dapat memberikan gambaran umum tentang konsep dasar ruang metrik cone. Selanjutnya dari penelitian ini dapat dibuktikan bahwa setiap ruang metrik adalah ruang metrik cone dengan ruang Banach dan cone tertentu dan juga dapat dibuktikan bahwa pemetaan kontraktif pada ruang metrik cone dengan cone normal mempunyai titik tetap tunggal.

Kata Kunci: Ruang Metrik; Cone; Ruang Metrik Cone; Teori Titik Tetap

Abstract

The space metric is one of the most important concepts in the realm of functional analysis. It is said to be important because the concept of metric space is widely used in other mathematical theories and is often used also in the study of advanced physics. A metric space is a set that applies a metric. Metric is a function with any non-empty set of domains leading to a codeboded real number or a real-valued function with a sequence definition in a real number. In 2007 Huang Long Guang and Zhang Xian generalized the concept of metric space into a cone metric space. The purpose of this study is to examine the basic concepts of cone metrics space which include studying convergent lines, cauchy sequences and examples and the relationship of convergent lines and limited sequences in the cone metric space, studying the relation of metric space and cone space metrics and studying one of the fixed point theorems in Cone metric space. This research is conducted by using literature study method that is by discussing and describing the concepts that already exist in the literature. It is expected that this research can provide an overview of the basic concept of metric space cone. Furthermore, from this study it can be proved that each metric space is a metric space cone with a certain Banach and cone space and it can also be proved that the contractive mapping in the cone metric space with the normal cone has a single fixed point.

Keywords: Space Metric; Cone; Space Metric Cone; Fixed Point Theory

Pendahuluan

Pada tahun 2007 dalam paper yang berjudul Cone Metric Spaces and Fixed Point Theorems of Contractive Mappings , Huang Long Guang dan Zhang Xian menggeneralisasikan konsep ruang metrik menjadi ruang metrik abstrak atau ruang metrik *cone*. Pada skripsi ini akan diteliti seperti apakah konsep dasar ruang metrik *cone*. Konsep dasar disini yang dimaksud adalah menjelaskan definisi ruang metrik *cone* beserta contohnya, mengkaji barisan konvergen, barisan Cauchy dalam ruang metrik *cone* beserta contohnya dan mencari hubungan barisan konvergen dan barisan terbatas dalam ruang metrik *cone* dan juga mengkaji hubungan ruang metrik dengan ruang metrik *cone* lalu meneliti seperti apakah teorema titik tetap dalam ruang metrik *cone.*

Konsep Dasar Ruang Metrik *Cone*

Pengertian Ruang Metrik *Cone*

Pada subbab ini akan diberikan definisi dan sifat-sifat yang terkait dengan ruang metrik *cone*.

Definisi 2.1.1. (Huang Long Guang dan Zhang Xian., 2007: 1468)

Diberikan ruang banach real E dan himpunan $P \subseteq E$ dengan $P \neq \emptyset$, P disebut *cone* apabila memenuhi:

(i) P himpunan tertutup, dan $P \neq \{0\}$

(ii) Jika $a, b \in \mathbb{R}$ dengan $a, b \geq 0$ dan $x, y \in P$ maka $ax + by \in P$

(iii) Jika $x \in P$ dan $-x \in P$ maka $x = 0$

Selanjutnya dalam tulisan ini E selalu menyatakan ruang Banach real dan P merupakan *cone.*

Contoh 2.1.2

Diberikan himpunan $Q = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$. Himpunan Q adalah *cone.*

(i) Jelas $Q \neq \emptyset$, dan $Q \neq \{0\}$. Sebab

$Q = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$.

Selanjutnya Q tertutup, sebab Q memuat semua titik limitnya.

(ii) Ambil sembarang $a \in \mathbb{R}$ dengan $a \geq 0$, dan $x \in Q$ sehingga $x \geq 0$ jelas bahwa $ax \geq 0$. Jadi dapat disimpulkan $ax \in Q$.

(iii) Ambil sembarang $x \in Q$ dan $-x \in Q$, karena $Q = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$ sehingga hanya $0 \in Q$ yang memenuhi $-x \in Q$ oleh karena itu $-x = 0$ sama artinya dengan $x = 0$.

Berdasarkan (i), (ii), dan (iii) terbukti bahwa himpunan Q adalah *cone.*■

Berikut ini akan diberikan relasi urutan yang berlaku pada ruang Banach.

Definisi 2.1.3 (Huang Long Guang dan Zhang Xian, 2007: 1469)

Untuk sembarang *cone* $P \subseteq E$ berlaku relasi urutan sebagai berikut:

(i) $x \preccurlyeq y$ jika dan hanya jika $y - x \in P$, untuk setiap $x, y \in E$.

(ii) $x \prec y$ jika dan hanya jika $y - x \in P$ tetapi $y \neq x$, untuk setiap $x, y \in E$.

(iii) $x \ll y$ jika dan hanya jika $y - x \in intP$.

Selanjutnya dalam penelitian ini diasumsikan $intP \neq \emptyset$.

Pada subbab ini akan diberikan definisi normal *cone* yang akan selalu dipakai dalam definisi-definisi dan contoh-contoh selanjutnya.

Definisi 2.1.4. (Huang Long Guang dan Zhang Xian, 2007: 1469)

Himpunan P adalah normal *cone* apabila terdapat bilangan $M > 0$ sehingga untuk setiap $x, y \in E$, dengan $0 \preccurlyeq x \preccurlyeq y$ berlaku $\| x \| \leq M \| y \|$.

Selanjutnya bilangan positif M disebut konstanta normal dari P. Berikut diberikan contoh normal *cone.*

Contoh 2.1.5 (Huang Long Guang dan Zhang Xian, 2007: 1469)

Diberikan $J = \{(x, y) \in E | x, y \geq 0\}$. Himpunan J adalah normal *cone* dengan konstanta normal M =1. Terlebih dahulu akan ditunjukan himpunan J adalah *cone.*

(i) Jelas $J \neq \emptyset$, dan $J \neq \{0\}$. Sebab

$J = \{(x, y) \in E : x, y \geq 0\}$

Selanjutnya J tertutup, sebab J memuat semua titik limitnya.

(ii) Ambil sembarang $a, b \in \mathbb{R}$ dengan $a, b \geq 0$, dan $x', y' \in J$ dengan

$x' = (x_1, y_1)$ dan $y' = (x_2, y_2)$ sehingga

$ax' + by' = a(x_1, y_1) + b(x_2, y_2) = (ax_1, ay_1) + (bx_2, by_2)$

$= (ax_1 + bx_2, ay_1 + by_2)$

karena $ax_1 + bx_2 \geq 0$ dan $ay_1 + by_2 \geq 0$ maka $ax' + by' \in J$.

(iii) Ambil sembarang $x' \in P$, dengan $x' = (x_1, y_1)$, dan $-x' \in J$ dengan $-x' = -1(x_1, y_1) = (-x_1, -y_1)$ menurut definisi dari J hanya $(0,0)$ yang memenuhi $-x' = (-x_1, -y_1)$ oleh karena itu $(-x_1, -y_1) = (0,0)$ sama artinya dengan $-x' = 0$ sehingga $x' = 0$.

Berdasarkan (i), (ii), dan (iii) terbukti bahwa J adalah *cone.*

Akan ditunjukkan *cone* J adalah normal.
Ambil sembarang $a, b \in P$, misalkan $a = (a_1, b_1)$ dan $b = (a_2, b_2)$ dengan $a_1, b_1, a_2, b_2 \geq 0$. Selanjutnya untuk $0 \preccurlyeq a \preccurlyeq b$, akan dibuktikan ada $M > 0$ sedemikian sehingga $\| a \| \leq M \| b \|$.
Diberikan norma pada $\mathbb{R}^2 = \| a \| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$.

$0 \preccurlyeq a \preccurlyeq b$ berarti

$$b - a \in J \Leftrightarrow (a_2, b_2) - (a_1, b_1) = (a_2 - a_1, b_2 - b_1) \in J$$

berarti

$$a_2 - a_1 \geq 0 \Leftrightarrow a_2 \geq a_1$$

dan

$$b_2 - b_1 \geq 0 \Leftrightarrow b_2 \geq b_1.$$

Akan ditunjukkan $\| a \| \leq \| b \|$.

$\| a \| = \| (a_1, b_1) \| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ dan $\| b \| = \| (a_2, b_2) \| = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$. karena $a_2 \geq a_1$ dan $b_2 \geq b_1$ sehingga $\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \leq \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$ berarti $\| a \| \leq \| b \|$. Jadi ada $M = 1$ sedemikian sehingga jika $0 \preccurlyeq a \preccurlyeq b$ maka $\| a \| \leq \| b \|$.

Jadi terbukti bahwa himpunan J adalah normal *cone.*■

Berikut ini akan diberikan salah satu sifat dari normal *cone.*

Lemma 2.1.6 (Sh. Rezapour dan R. Hamlbarani, 2008: 720)
Tidak ada normal *cone* yang mempunyai konstanta normal $M < 1$.

Bukti:
Andaikan P normal *cone* dengan konstanta normal $M < 1$. Ambil sembarang $x \in P$ dengan $x \neq \{0\}$ dan sembarang ε dengan $0 < \varepsilon < 1$ sehingga $M < 1 - \varepsilon$. Oleh karena itu jika $(1-\varepsilon)x \preccurlyeq x$ maka $(1-\varepsilon)\|x\| > M\|x\|$. Ini kontradiksi dari definisi normal *cone.* Jadi terbukti tidak ada normal cone yang mempunyai konstanta normal $M < 1$. ■

Berikut ini diberikan definisi ruang metrik *cone* beserta dua contohnya dan topologi pada ruang metrik *cone.* Contoh yang pertama ruangnya adalah bilangan real sedangkan contoh yang kedua ruangnya adalah himpunan barisan.

Definisi 3.1.7 (Huang Long Guang dan Zhang Xian, 2007: 1469)
Diberikan himpunan $X \neq \emptyset$. Pemetaan $d: X \times X \to E$ yang mempunyai sifat:

(i) $0 \preccurlyeq d(x,y)$ untuk setiap $x, y \in X$ dan $d(x,y) = 0$
jika dan hanya jika $x = y$.

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ untuk setiap $x, y \in X$.

(iii) $d(x,y) \preccurlyeq d(x,z) + d(z,y)$ untuk setiap $x, y, z \in X$.

disebut metrik *cone* pada X. Selanjutnya pasangan (X,d) disebut ruang metrik *cone*.

Contoh 3.1.8 (Huang Long Guang dan Zhang Xian, 2007: 1469)
Diberikan $E = \mathbb{R}^2$, $P = \{(x,y) \in E : x, y \geq 0\}$, dan $X = \mathbb{R}$. Didefinisikan $d: X \times X \to E$ dengan $d(x,y) = \{|x-y|, \alpha|x-y|\}$ dengan $\alpha \geq 0$ akan ditunjukan (X,d) adalah ruang metrik *cone*.

Ambil sembarang $x, y, z \in \mathbb{R}$

(i) $d(x,y) = (|x-y|, \alpha|x-y|)$, karena $|x-y| \geq 0$ dan $\alpha|x-y| \geq 0$ sehingga $d(x,y) - 0 \in P$ sama artinya dengan $0 \preccurlyeq d(x,y)$.

$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow (|x-y|, \alpha|x-y|) = 0$$

$\Leftrightarrow |x-y| = 0$

dan

$\alpha|x-y| = 0 \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y.$

(ii)$|x-y| = |-(y-x)| = |-1||y-x| = |y-x|$ selanjutnya

$d(x,y) = (|x-y|, \alpha|x-y|) = (|y-x|, \alpha|y-x|) = d(y,x).$

Jadi terbukti $d(x,y) = d(y,x)$.

(iii) Akan dibuktikan $d(x,y) \preccurlyeq d(x,z) + d(z,y)$, menurut definisi

$d(x,y) = (|x-y|, \alpha|x-y|)$
$d(x,z) = (|x-z|, \alpha|x-z|)$
$d(z,y) = (|z-y|, \alpha|z-y|)$

maka

$d(x,z) + d(z,y) = (|x-z|, \alpha|x-z|) + (|z-y|, \alpha|z-y|)$
$= (|x-z| + |z-y|, \alpha|x-z| + \alpha|z-y|)$
$= [|x-z| + |z-y|, \alpha(|x-z| + |z-y|)].$
$d(x,z) + d(z,y) - d(x,y)$
$= [|x-z| + |z-y|, \alpha(|x-z| + |z-y|)] - (|x-y|, \alpha|x-y|)$
$= [|x-z| + |z-y| - |x-y|, \alpha(|x-z| + |z-y|) - \alpha|x-y|$
$= [|x-z| + |z-y| - |x-y|, \alpha(|x-z| + |z-y|) - |x-y|).$

Akan dibuktikan $(|x-z| + |z-y| - |x-y|) \geq 0$

$|x-y| = |x-z+z-y|$
$= |(x-z) + (z-y)|$
$\leq |x-z| + |z-y|,$

sehingga $|x-z| + |z-y| \geq |x-y|$ jika dan hanya jika $(|x-z| + |z-y| - |x-y|) \geq 0$ sehingga

$\alpha(|x-z| + |z-y|) - |x-y|) \geq 0$

dengan $\alpha \geq 0$ sehingga

$d(x,z) + d(z,y) - d(x,y) \in P.$

Oleh karena itu

$d(x,y) \preccurlyeq d(x,z) + d(z,y)$

Jadi pasangan (X,d) adalah ruang metrik *cone.*

Contoh 3.1.9 (Mehdi Asadi dan Hossein Soleimani, 2011: 4)
Diberikan $q > 0$, dan $E = l^q = \{x_k\} \in S: \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^q < \infty$ dengan *cone*

$P = \{\{x_n\}_{n\geq 1} \in E: x_n \geq 0, \forall n\}$

dan diketahui (X,ρ) adalah ruang metrik. Jika diberikan pemetaan

$d: X \times X \to l^q$

dan selanjutnya didefinisikan

$d(x,y) = \{x_n\}_{n\geq 1}$

dengan

$$x_n = \left(\frac{\rho(x,y)}{2^n}\right)^{\frac{1}{q}}$$

Akan ditunjukan (X,d) ruang metrik *cone.*
Ambil sembarang $x,y,z \in X$

(i) Akan ditunjukan $0 \preccurlyeq d(x,y)$. Didefinisikan: $d(x,y) = \left\{\left(\frac{\rho(x,y)}{2^n}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}_{n\geq 1}$

karena diketahui ruang metrik sehingga $\rho(x,y) \geq 0$ oleh karena itu $\left\{\left(\frac{\rho(x,y)}{2^n}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}_{n\geq 1} \geq 0$ sama artinya dengan $d(x,y) \in P$ sehingga dapat disimpulkan

$0 \preccurlyeq d(x,y)$.

(i) Akan ditunjukan $d(x,y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$

$$d(x,y) = \left\{\left(\frac{\rho(x,y)}{2^n}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}_{n\geq 1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{\rho(x,y)}{2^n}\right)^{\frac{1}{q}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\rho(x,y)}{2^n} = 0$$

$$\Leftrightarrow \rho(x,y) = 0$$

Karena diketahui $\rho(x,y)$ adalah ruang metrik maka untuk $\rho(x,y) = 0$

Berakibat $x = y$, jadi terbukti $d(x,y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$.

(ii) Akan dibuktikan $d(x,y) = d(y,x)$.

$$d(x,y) = \left\{\left(\frac{\rho(x,y)}{2^n}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}_{n\geq 1} = \left\{\left(\frac{\rho(y,x)}{2^n}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}_{n\geq 1}$$

karena $\rho(x,y)$ metrik sehingga terbukti bahwa $d(x,y) = d(y,x)$.

(iii) Akan dibuktikan $d(x,y) \preccurlyeq d(x,z) + d(z,y)$

Didefinisikan:

$$d(x,y) = \left\{\left(\frac{\rho(x,y)}{2^n}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}_{n\geq 1}$$

$$d(x,z) = \left\{\left(\frac{\rho(x,z)}{2^n}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}_{n\geq 1}$$

$$d(z,y) = \left\{\left(\frac{\rho(z,y)}{2^n}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}_{n\geq 1}$$

karena (X,ρ) ruang metrik berakibat $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$, sehingga

$$\left(\frac{\rho(x,y)}{2^n}\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{\rho(x,z)}{2^n}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{\rho(z,y)}{2^n}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left\{\left(\frac{\rho(x,y)}{2^n}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}_{n\geq 1} \leq \left\{\left(\frac{\rho(x,z)}{2^n}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}_{n\geq 1} + \left\{\left(\frac{\rho(z,y)}{2^n}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}_{n\geq 1}$$

$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ sehingga jelas $d(x,z) + d(z,y) - d(x,y) \in P$.

Oleh karena itu $d(x,y) \preccurlyeq d(x,z) + d(z,y)$.

Terlihat dari (i), (ii), (iii) dan (iv) jadi (X,d) ruang metrik *cone*.

Barisan dalam Ruang Metrik *Cone*

Pada bagian ini akan diberikan definisi barisan konvergen beserta contohnya, barisan Cauchy beserta contohnya dan barisan terbatas pada ruang metrik *cone* serta sifat-sifat yang melekat pada barisan konvergen, barisan Cauchy dan barisan terbatas pada ruang metrik *cone.*

Definisi 2.2.1. (Huang Long Guang dan Zhang Xian, 2007: 1469)

Diberikan ruang metrik *cone* (X,d) dengan $x \in X$ dan $\{x_n\} \subset X$. Barisan $\{x_n\}$ dikatakan konvergen ke x apabila untuk setiap $c \in E$, dengan $0 \ll c$. terdapat $n_0 \in N$ sehingga untuk setiap $n > n_0$ berlaku $d(x_n, x) \ll c$.

Dinotasikan dengan $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ atau $x_n \to x$ dengan $n \to \infty$.

Contoh 2.2.2

Diberikan $X = \mathbb{R}, E = \mathbb{R}, P = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$. Pemetaan $d: X \times X \longrightarrow E$

Dengan $d(x, y) = |x - y|$ dan barisan $\{x_n\} \subset X$ dengan $x_n = \frac{1}{n}$ maka $x_n \to 0$ dengan $n \to \infty$.

Ambil sembarang $c \in \mathbb{R}$ dengan $0 \ll c$. Menggunakan sifat Archimides, ada $n_0 \in N$ sedemikian sehingga $\frac{1}{n_0} < c$. Oleh karena itu untuk setiap $n \geq n_0$ diperoleh $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < c$. Konsekuensinya untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku

$$d(x_n, 0) = |x_n - 0| < c \Leftrightarrow \left|\frac{1}{n}\right| < c$$

karena $c \in P$ dan $\frac{1}{n} \in P$ sehingga $c - \frac{1}{n} \in P$. Jadi $\left|\frac{1}{n}\right| \ll c$ yang artinya $d(x_n, 0) \ll c$.

Jadi $x_n \to 0$ dengan $n \to \infty$.

Di bawah ini akan diberikan lagi contoh barisan konvergen dengan barisan yang sama dengan contoh 2.2.2 tetapi dengan ruang Banach, *cone* dan metrik yang didefinisikan pada contoh 2.1.8

Contoh 2.2.3

Diberikan ruang metrik *cone* (X, d) dengan ruang Banach $E = \mathbb{R}^2$, *cone* $P = \{(x, y) \in E: x, y \geq 0\}$, dan $X = \mathbb{R}$ jika didefinisikan pemetaan $d: X \times X \to E$ dengan $d(x, y) = \{|x - y|, \alpha|x - y|\}$ untuk $\alpha \geq 0$, dan diberikan barisan $\{x_n\} \subset X$ dengan $x_n = \frac{1}{n}$. Barisan $\{x_n\}$ konvergen ke 0.

Ambil sembarang $c \in E$ dengan $0 \ll c$. Misalkan $c = (c_1, c_2)$ untuk $c_1, c_2 \geq 0$, berdasarkan hukum Archimides ada $n \in N$ sedemikian sehingga $n > \frac{1}{c_1}$ dan $n > \frac{\alpha}{c_2}$ untuk $\alpha > 0$. Oleh karena itu untuk setiap $n_1 > n$ berakibat $\frac{1}{n_1} < \frac{1}{n} < c_1$ dan $\frac{1}{n_1} < \frac{1}{n} < \frac{c_2}{\alpha}$. Jadi untuk untuk setiap $n_1 > n$

$$c - d(x_n, 0) = (c_1, c_2) - \left(\frac{1}{n}, \alpha\frac{1}{n}\right) = \left(c_1 - \frac{1}{n}, c_2 - \frac{\alpha}{n}\right)$$

karena $c_1 > \frac{1}{n}$ dan $c_2 > \frac{\alpha}{n}$ maka $c_1 - \frac{1}{n} > 0$ dan $c_2 - \frac{\alpha}{n} > 0$ sehingga

$$\left(c_1 - \frac{1}{n}, c_2 - \frac{\alpha}{n}\right) \in intP \Leftrightarrow d(x_n, 0) \ll 0.$$

Jadi barisan $\{x_n\}$ konvergen ke 0.

Berikut ini diberikan lemma 3.2.4 untuk membantu membuktikan lemma 3.2.5

Lemma 2.2.4 (Duran Turkoglu dan Muhib Abuloha, 2010:489)

Diberikan ruang metrik *cone* (X, d), kemudian untuk setiap $c \in E$ dan $0 \ll c$ dengan $\delta > 0$. Jika $\|x\| < \delta$ dengan $x \in E$ maka $c - x \in IntP$.

Bukti:

Ambil sembarang $c \in E$ dengan $0 \ll c$ berarti $c \in IntP$. Oleh karena itu pasti ada $\delta > 0$ sedemikian sehingga $\{x \in E: \|x - c\| < \delta\} \subset IntP$. Selanjutnya $\|x\| = \|(-x)\| = \|(c - x) - c\| < \delta$ oleh karena itu $(c - x) \in IntP$. ■

Lemma 2.2.5 (Huang Long Guang dan Zhang Xian, 2007: 1469)

Diberikan ruang metrik *cone* (X, d), dengan normal *cone* P. Barisan $\{x_n\} \subseteq X$ konvergen ke x jika dan hanya jika $d(x_n, x) \to 0$ dengan $n \to \infty$.

Bukti:

$(\Longrightarrow)$

Diketahui $\{x_n\}$ konvergen ke x. Ambil sembarang $\varepsilon > 0$, pilih $c \in E$ dengan

$0 \ll c$. Berdasarkan hukum Archimides ada $\varepsilon > 0$ sedemikian sehingga $M\|c\| < \varepsilon$. Berdasarkan dari diketahui ada $n_0 \in N$ sehingga untuk setiap $n > n_0$

$$d(x_n,x) \ll c \Leftrightarrow c - d(x_n,x) \in intP \subset P$$
$$\Leftrightarrow c - d(x_n,x) \in P$$
$$\Leftrightarrow d(x_n,x) \preccurlyeq c$$

karena P normal *cone* sehingga untuk $n > n_0$ berakibat

$$\|d(x_n,x)\| \leq M\|c\| < \varepsilon.$$

Itu sama artinya dengan $d(x_n,x) \to 0 \ \ (n \to \infty)$.

$(\Leftarrow)$

Ambil sembarang $\delta > 0$ karena $d(x_n,x) \to 0$ dengan $n \to \infty$ berarti ada $n_0 \in N$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ berakibat $\|d(x_n,x)\| < \delta$. Ambil sembarang $c \in E$ dengan $0 \ll c$ berdasarkan lemma 3.2.4 maka

$$c - d(x_n,x) \in intP.$$

Ini sama dengan $d(x_n,x) \ll c$. Sehingga terbukti bahwa $\{x_n\}$ konvergen ke x.

Jadi terbukti Barisan $\{x_n\} \subseteq X$ konvergen ke x jika dan hanya jika $d(x_n, x) \to 0$ dengan $n \to \infty$. ∎

Selanjutnya diberikan salah satu sifat barisan konvergen dalam ruang metrik *cone.*

Lemma 2.2.6 (Huang Long Guang dan Zhang Xian, 2007: 1470)

Diberikan ruang metrik *cone* (X,d), P adalah normal *cone* dengan konstanta normal M. Diberikan $\{x_n\} \subset X$. Jika $\{x_n\}$ konvergen ke x dan $\{x_n\}$ konvergen ke y, maka $x = y$.

Bukti:

Ambil sembarang $c \in E$ dengan $0 \ll c$. Selanjutnya $\{x_n\}$ konvergen ke x artinya untuk setiap $c \in E$ dengan $0 \ll c$ ada $n_0 \in N$ sehingga untuk setiap $n > n_0$ berlaku

$$d(x_n,x) \ll \frac{c}{2}.$$

Barisan $\{x_n\}$ konvergen ke y artinya untuk setiap $n > n_0$ berlaku

$$d(x_n,y) \ll \frac{c}{2}$$

selanjutnya

$$d(x_n,x) \ll \frac{c}{2} \Leftrightarrow \frac{c}{2} - d(x_n,x) \in intP \subseteq P$$
$$\Leftrightarrow \frac{c}{2} - d(x_n,x) \in P$$
$$\Leftrightarrow d(x_n,x) \preccurlyeq \frac{c}{2}$$

dengan cara yang sama

$$d(x_n,y) \ll \frac{c}{2} \Leftrightarrow \frac{c}{2} - d(x_n,y) \in intP \subseteq P$$
$$\Leftrightarrow \frac{c}{2} - d(x_n,y) \in P$$
$$\Leftrightarrow d(x_n,y) \preccurlyeq \frac{c}{2}$$

karena d metrik *cone*:

$$d(x,y) \preccurlyeq d(x,x_n) + d(x_n,y) = d(x_n,x) + d(x_n,y) \preccurlyeq \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c$$

Jadi $0 \preccurlyeq d(x,y) \preccurlyeq c$ karena P normal *cone* sehingga

$$\|0\| \leq \|d(x,y)\| \leq M\|c\|$$

oleh karena itu untuk sembarang $\|c\| \geq 0$ menyebabkan

$$\|d(x,y)\| = 0 \Leftrightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Jadi $x = y$.

Berdasarkan lemma tersebut menunjukan bahwa setiap barisan konvergen dalam ruang metrik *cone* juga memiliki titik limit tunggal.

Teorema 2.2.7 (H. Kunze, D. La Torre, F. Mendivil dan Vrscay, 2012:3)
Barisan $\{x_n\} \subset X$ konvergen ke $x \in X$ jika dan hanya jika untuk setiap $c \in IntP$ ada $n_0 \in N$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ berakibat

$$d(x_n, x) \preccurlyeq c.$$

Bukti:
($\Longrightarrow$)
Ambil sembarang $c \in IntP$, karena $x_n \to x$ dengan $n \to \infty$ sehingga ada $n_0 \in N$ sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku

$$d(x_n, x) \ll c \Leftrightarrow c - d(x_n, x) \in IntP \subseteq P$$
$$\Leftrightarrow c - d(x_n, x) \in P$$
$$\Leftrightarrow d(x_n, x) \preccurlyeq c.$$

($\Longleftarrow$)
Ambil sembarang $c \in IntP$ sehingga ada $\delta > 0$ yang berakibat $B_\delta(c) \subset P$ dan ambil $c' \in intP$ dengan $c' \in B_\delta(c) \subset P$ sehingga $c - c' \in intP$ yang sama artinya dengan $c' \ll c$, dari diketahui ada $n_0 \in N$ sehingga untuk $n \geq n_0$ berakibat $d(x_n, x) \leq c' \ll c$. Itu sama artinya dengan $d(x_n, x) \ll c$. Sehingga terbukti $x_n \to x$ dengan $n \to \infty$.
Jadi terbukti barisan $\{x_n\} \subset X$ konvergen ke $x \in X$ jika dan hanya jika dengan $c \in P$ ada $n_0 \in N$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ berakibat $d(x_n, x) \preccurlyeq c$. ■

Definisi 2.2.8. (Huang Long Guang dan Zhang Xian, 2007: 1470)
Diberikan ruang metrik *cone* (X, d) dan $\{x_n\} \subset X$. Barisan $\{x_n\}$ disebut barisan Cauchy pada X apabila untuk setiap $c \in E$ dengan $0 \ll c$ ada $n_0 \in N$ sehingga untuk setiap $n, m > n_0$ berlaku $d(x_n, x_m) \ll c$.

Contoh 2.2.10
Diberikan $X = \mathbb{R}, E = \mathbb{R}, P = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$. Pemetaan $d: X \times X \longrightarrow E$ dengan $d(x, y) = |x - y|$ dan barisan $\{x_n\} \subset X$ dengan $x_n = \frac{1}{n}$. Barisan $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy di (X, d).
Ambil sembarang $c \in \mathbb{R}$ dengan $0 \ll c$. Menggunakan hukum Archimides, ada $n_0 \in N$ sehingga $n_0 < \frac{2}{c}$. Oleh karena itu apabila $m, n \geq n_0$ diperoleh
$\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \frac{c}{2}$, dan $\frac{1}{m} < \frac{1}{n_0} < \frac{c}{2}$. Konsekuensinya untuk setiap $m, n \geq n_0$ berlaku

$$d(x_n, x_m) = |x_n - x_m| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c$$

karena $c \in P$ dan juga $\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \in P$ sehingga $c - \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \in P$. Jadi $\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \ll c$ yang sama artinya dengan $d(x_n, x_m) \ll c$. Jadi $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy pada (X, d).

Definisi 2.2.9 (Huang Long Guang dan Zhang Xian, 2007: 1470)
Ruang metrik *cone* (X, d) disebut ruang metrik *cone* lengkap apabila setiap barisan Cauchy pada (X, d) juga merupakan barisan yang konvergen pada (X, d).

Contoh 2.2.10
Diberikan $X = C[a, b], E = \mathbb{R}, P = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$ dan didefinisikan pemetaan $d: C[a, b] \times C[a, b] \to \mathbb{R}$ dengan $d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\}$ akan ditunjukan pasangan $(C[a, b], d)$ adalah ruang metrik *cone* lengkap.

Ambil sembarang barisan Cauchy $\{f_n\} \subset C[a,b]$. Untuk sebarang $c \in E$ dengan $0 \ll c$, maka terdapat $n_0 \in N$ sehingga untuk setiap $m, n \geq n_0$ berlaku $d(f_m, f_n) = \sup\{|f_m(x) - f_n(x)| : x \in [a,b]\} \ll \frac{c}{4}$. Hal ini berarti bahwa untuk setiap $x \in [a,b]$ dan $m, n \geq n_0$ berlaku $|f_m(x) - f_n(x)| \ll \frac{c}{4}$ atau dengan kata lain untuk setiap $x \in [a,b]$ barisan $\{f_n(x)\}$ merupakan barisan Cauchy di dalam $\mathbb{R}$. Oleh karena itu untuk setiap $x \in [a,b]$ barisan $\{f_n(x)\}$ konvergen, katakan konvergen ke suatu bilangan $f(x)$. Jadi $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ itu akan berakibat

$$|f(x) - f_n(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_m(x) - f_n(x)| \ll \frac{c}{4} \tag{1}$$

asalkan $n \geq n_0$. Selanjutnya jelas bahwa f merupakan fungsi bernilai bilangan real yang terdefinisi pada $[a,b]$ dan untuk $n \geq n_0$ berlaku

$$\begin{aligned} d(f, f_n) &= \sup\{|f(x) - f_n(x)| : x \in [a,b]\} \\ &= \sup\{\lim_{m\to\infty} |f_m(x) - f_n(x)| : x \in [a,b]\} \ll \frac{c}{4} \\ &\ll \frac{c}{2} \end{aligned} \tag{2}$$

karena f_{n_0} kontinu pada $[a,b]$ maka f_{n_0} kontinu seragam pada $[a,b]$, artinya ada bilangan $\gamma > 0$ sehingga untuk setiap $x, y \in [a,b]$ dengan $|x - y| < \gamma$ berlaku $\left|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)\right| < \frac{c}{4}$, karena $\frac{c}{4} \in IntP$ dan $\left|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)\right| \in P$ sehingga

$$\left|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)\right| \ll \frac{c}{4} \tag{3}$$

selanjutnya berdasarkan (1), (2), (3) untuk setiap $x, y \in [a,b]$ dengan $|x - y| < \gamma$ diperoleh

$$|f(x) - f(y)| \leq \left|f(x) - f_{n_0}(x)\right| + \left|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)\right| + \left|f_{n_0}(y) - f(y)\right|$$

$$\ll \frac{c}{4} + \frac{c}{2} + \frac{c}{4} = c.$$

Jadi terbukti fungsi f kontinu pada $[a,b]$ atau $f \in C[a,b]$.
Kesimpulanya karena sebarang barisan Cauchy $\{f_n\} \subset C[a,b]$ konvergen ke suatu $f \in C[a,b]$ maka terbukti ruang metrik *cone* $(C[a,b], d)$ lengkap. ■

Lemma 2.2.11 (Huang Long Guang dan Zhang Xian, 2007: 1470)
Diberikan ruang metrik *cone* (X, d) dan $\{x_n\} \subset X$. Jika $\{x_n\}$ konvergen ke x maka $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy.

Bukti:
Ambil sembarang $c \in E$ dengan $0 \ll c$, karena $\{x_n\}$ konvergen ke x maka ada $n_0 \in N$ sedemikian sehingga untuk setiap $m, n > n_0$ berlaku $d(x_n, x) \ll \frac{c}{2}$ dan juga $d(x_m, x) \ll \frac{c}{2}$ karena d metrik *cone*

$$d(x_n, x_m) \preccurlyeq d(x_n, x) + d(x, x_m) = d(x_n, x) + d(x_m, x) \ll \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c.$$

Jadi terbukti $\{x_n\}$ barisan Cauchy. ■

Kebalikan dari teorema 3.2.13 belum tentu berlaku, berikut diberikan contohnya.

Contoh 3.2.12 *(Counter Example)*

Pada contoh 3.2.12 di sini akan mengambil contoh 2.2.15 yang diasumsikan sebagai ruang metrik *cone.* Pada subbab 3.4 akan dibuktikan bahwa setiap ruang metrik adalah ruang metrik *cone.* Diberikan $X = C[0,1], E = \mathbb{R}$ dan $P = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ dengan metrik *cone* $d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$, dengan $f, g \in C[0,1]$ dan diberikan barisan $\{f_n\}_{n\geq 2}$ dengan definisi sebagai berikut:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ n\left(x - \frac{1}{2}\right) + 1, & \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < x \leq \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

Berdasarkan dari definisi $\{f_n\}_{n\geq 2} \subset C[0,1]$

Barisan $\{f_n\}_{n\geq 2}$ mempunyai barisan Cauchy di $C[0,1]$ sebab untuk sembarang $0 \ll c$, berdasarkan hukum Archimides ada $n_0 \in N$ dengan $n_0 > \frac{2}{c}$ untuk setiap $n, m \geq n_0$ (diasumsikan $n > m$) berlaku

$$d(f_m, f_n) = \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|\, dx \leq \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{2}} f_m(x)\, dx + \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} f_n(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = 2\left(\frac{1}{m}\right) \leq 2\left(\frac{1}{n_0}\right) < 2\left(\frac{c}{2}\right) = c$$

karena c, $d(f_m, f_n) > 0$ sehingga $c - d(f_m, f_n) > 0$ itu sama artinya dengan $d(f_m, f_n) \ll c$. Selanjutnya diandaikan barisan $\{f_n\}_{n\geq 2}$ konvergen ke suatu $f \subset C[0,1]$ sehingga untuk $d(f_n, f) \to 0$ $(n \to \infty)$ diperoleh

$$d(f_n, f) = \int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} |f(x)|\, dx + \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} |f_n(x) - f(x)|\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} |1 - f(x)|\, dx = 0$$

jika dan hanya jika $\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|\, dx = 0$ dan $\int_{\frac{1}{2}}^{1} |1 - f(x)|\, dx = 0$. Kontradiksi dengan definisi barisan $\{f_n\}_{n\geq 2}$ sehingga dapat disimpulkan $\{f_n\}_{n\geq 2}$ tidak konvergen ke suatu $f \subset C[0,1]$.

Jadi dapat disimpulkan bahwa tidak setiap barisan Cauchy konvergen.

Telah dibuktikan bahwa setiap barisan konvergen merupakan barisan Cauchy, tetapi sebaliknya belum tentu berlaku. Sama halnya seperti pada ruang metrik apabila pada barisan Cauchy ditambahkan suatu syarat tertentu maka akan diperoleh jaminan kekonvergenan barisan tersebut pada ruang metrik *cone*. Syarat-syarat tertentu yang dimaksud dapat dilihat dalam teorema berikut ini.

Teorema 2.2.13 (S. Jain, S. Jain dan L. Jain, 2010:116)

Diketahui ruang metrik *cone* (X, d) dan $\{x_n\} \subset X$ barisan Cauchy. Jika $\{x_n\}$ memuat suatu barisan bagian yang konvergen maka $\{x_n\}$ konvergen ke titik limit yang sama.

Bukti:
Ambil sembarang $c \in E$ dengan $0 \ll c$ karena $\{x_n\} \subset X$ barisan Cauchy maka ada $n' \in N$ sehingga untuk setiap $m, n > n'$ berlaku $d(x_n, x_m) \ll \frac{c}{2}$.
Selanjutnya diketahui $\{x_n\}$ memuat suatu barisan bagian yang konvergen yang dimisalkan $\{x_{n_k}\}$. Oleh karena itu ada $x \in X$ sehingga untuk sembarang $c \in E$ dengan $0 \ll c$ ada $n_0 \in N$ yang untuk setiap $n_k \geq n_0$ berlaku $d(x_{n_k}, x) \ll \frac{c}{2}$.
Selanjutnya jika diambil bilangan asli $q = \text{maks}\{n_0, n'\}$ maka untuk setiap $n \geq q$ dan $n_k \geq q$ diperoleh

$$d(x_n, x) \preccurlyeq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) \ll \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c.$$

Jadi terbukti bahwa barisan Cauchy $\{x_n\}$ juga konvergen ke titik x. ■

Selanjutnya akan diberikan lagi beberapa sifat dari barisan konvergen dan Cauchy pada ruang metrik *cone*.
Lemma 3.2.14 (Huang Long Guang dan Zhang Xian, 2007: 1470)
Diberikan ruang metrik *cone* (X, d) dan normal *cone* P, dengan konstanta normal M. Diberikan barisan $\{x_n\} \subset X$. Barisan $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy jika dan hanya jika $d(x_n, x_m) \to 0$ $(n, m \to \infty)$.
Bukti:
$(\Longrightarrow)$
Diketahui $\{x_n\}$ barisan Cauchy. Ambil sembarang $\varepsilon > 0$, pilih $c \in E$ dengan
$0 \ll c$. Berdasarkan hukum Archimides ada $\varepsilon > 0$ sedemikian sehingga $M\|c\| < \varepsilon$.
Berdasarkan dari diketahui barisan $\{x_n\}$ Cauchy berarti ada $n_0 \in N$ oleh karena itu untuk setiap $n, m > n_0$ berlaku

$$\begin{aligned}
&d(x_n, x_m) \ll c \Leftrightarrow c - d(x_n, x_m) \in intP \subset P \\
&\Leftrightarrow c - d(x_n, x_m) \in P \\
&\Leftrightarrow d(x_n, x_m) \preccurlyeq c
\end{aligned}$$

karena P normal *cone* jadi ketika $n > n_0$ berakibat $\|d(x_n, x_m)\| \leq M\|c\| < \varepsilon$. Itu sama artinya dengan $d(x_n, x_m) \to 0$ $(n, m \to \infty)$.
$(\Longleftarrow)$
Ambil sembarang $\delta > 0$ karena $d(x_n, x_m) \to 0$ dengan $n, m \to \infty$ berarti ada $n_0 \in N$ sedemikian sehingga untuk setiap $n, m \geq n_0$ berlaku $\|d(x_n, x_m)\| < \delta$. Ambil sembarang $c \in E$ dengan $0 \ll c$. Untuk $n, m \geq n_0$ berdasarkan lemma 3.2.4 diperoleh $c - d(x_n, x_m) \in intP$ yang berarti $d(x_n, x_m) \ll c$. Sehingga terbukti bahwa $\{x_n\}$ barisan Cauchy.
Jadi terbukti barisan $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy jika dan hanya jika $d(x_n, x_m) \to 0$ $(n, m \to \infty)$. ■

Lemma 2.2.15 (Huang Long Guang dan Zhang Xian, 2007: 1471)
Diberikan ruang metrik *cone* (X, d) dan P adalah normal *cone* dengan konstanta normal M. Diberikan $\{x_n\} \subset X$ dan $\{y_n\} \subset X$. Jika $x_n \to x, y_n \to y$ $(n \to \infty)$ maka $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$ $(n \to \infty)$.
Bukti:
Ambil sembarang $\varepsilon > 0$ karena $\{x_n\} \to x$ dan $\{y_n\} \to y$ berarti untuk setiap $c \in E$ dengan $0 \ll c$ ada n_1 sehingga untuk setiap $n > n_1$ berlaku

$$d(x_n, x) \ll c$$

dan ada n_2 sehingga untuk setiap $n > n_2$ berlaku $d(y_n, y) \ll c$. Pilih
n_0= supremum $\{n_1, n_2\}$ sehingga ada $n_0 \in N$ oleh karena itu untuk setiap

$n > n_0$ berlaku $d(x_n,x) \ll c$ dan $d(y_n,y) \ll c$ karena $d(x_n,x), d(y_n,y) \in P$ maka pasti ada $c \in E$ dengan $0 \ll c$ yang berlaku $\|c\| < \frac{\varepsilon}{4K+2}$ karena (X,d) ruang metrik *cone* sehingga:

$$d(x_n,y_n) \preccurlyeq d(x_n,x) + d(x,y)$$
$$d(x_n,y) \preccurlyeq d(x_n,x) + d(x,y)$$
$$d(x_n,y_n) \preccurlyeq d(x_n,y) + d(y,y_n)$$
$$= d(x_n,y) + d(y_n,y)$$
$$\preccurlyeq d(x_n,x) + d(x,y) + d(y_n,y),$$

selanjutnya

$$d(x_n,x) \ll c \Leftrightarrow c - d(x_n,x) \in intP \subseteq P$$
$$\Leftrightarrow c - d(x_n,x) \in P$$
$$\Leftrightarrow d(x_n,x) \preccurlyeq c$$

dan

$$d(y_n,y) \ll c \Leftrightarrow c - d(y_n,y) \in intP \subseteq P$$
$$\Leftrightarrow c - d(y_n,y) \in P$$
$$\Leftrightarrow d(y_n,y) \preccurlyeq c,$$

sehingga

$$d(x_n,y_n) \preccurlyeq d(x_n,x) + d(x,y) + d(y_n,y) \preccurlyeq d(x,y) + 2c \ldots (1)$$

karena (X,d) ruang metrik *cone* :

$$d(x,y) \preccurlyeq d(x,x_n) + d(x_n,y) = d(x,x_n) + d(y,x_n)$$
$$\preccurlyeq d(x,x_n) + d(y,y_n) + d(y_n,x_n)$$
$$= d(x,x_n) + d(y_n,y) + d(x_n,y_n)$$
$$\preccurlyeq d(x_n,y_n) + 2c \ldots (2)$$

Dari (1) dan (2)

$$d(x_n,y_n) \preccurlyeq d(x,y) + 2c \Leftrightarrow -2c + d(x_n,y_n) \preccurlyeq d(x,y)$$
$$d(x,y) \preccurlyeq d(x_n,y_n) + 2c$$

sehingga $-2c + d(x_n,y_n) \preccurlyeq d(x,y) \preccurlyeq d(x_n,y_n) + 2c$ jika dan hanya jika

$$0 \preccurlyeq d(x,y) + 2c - d(x_n,y_n) \preccurlyeq 4c$$

ditambahkan kedua ruas dengan $d(x_n,y_n) - d(x,y)$ maka menjadi

$$d(x_n,y_n) - d(x,y) \preccurlyeq 2c \preccurlyeq 4c + d(x_n,y_n) - d(x,y)$$

karena P normal *cone*

$$\|d(x_n,y_n) - d(x,y)\| \le \|2c\| \le \|4c + d(x_n,y_n) - d(x,y)\|,$$

sehingga jelas bahwa

$$\|d(x_n,y_n) - d(x,y)\| \le \|d(x,y) + 2c - d(x_n,y_n)\| + \|2c\|$$
$$\le 4K\|c\| + 2\|c\| = (4K+2)\|c\| < \varepsilon.$$

Jadi terbukti $d(x_n,y_n) \longrightarrow d(x,y) (n \longrightarrow \infty)$. ■

Selanjutnya akan diberikan definisi barisan terbatas dalam ruang metrik *cone* dan hubungan barisan terbatas dengan barisan konvergen dalam ruang metrik *cone.*

Definisi 3.2.16 (H. Javidzadeh dan M.R Haddadi, 2011:1)

Diberikan ruang metrik *cone* (X,d) dan barisan $\{x_n\} \subset X$, barisan $\{x_n\}$ dikatakan terbatas apabila ada $c \gg 0$, sedemikian sehingga untuk setiap $n \in N$ berlaku

$$d(0,x_n) \ll c.$$

Lemma 2.2.17

Setiap barisan yang konvergen di ruang metrik *cone* adalah terbatas.

Bukti:

Ambil sembarang $c \in E$ dengan $0 \ll c$, karena $\{x_n\}$ konvergen berarti ada $n_0 \in N$ sehingga untuk setiap $n \ge n_0$ berlaku $d(x_n,x) \ll c$, karena (X,d) ruang metrik *cone*:

$$d(0,x_n) = d(x_n,0) \preccurlyeq d(x_n,x) + d(x,0)$$

berarti untuk setiap $n \ge n_0$

$$d(x_n, x) + d(x, 0) \preccurlyeq c + d(x, 0)$$

karena d metrik *cone* sehingga $0 \preccurlyeq d(x, 0)$, sehingga dapat dipilih M, dengan

$$0 \ll M = c + d(x, 0).$$

Jadi terbukti barisan $\{x_n\}$ terbatas. ■

Hubungan Ruang Metrik *Cone* dengan Ruang Metrik.

Pada bagian ini akan dibuktikan bahwa setiap ruang metrik merupakan ruang metrik *cone.*

Teorema 2.3.1 (Huang Long Guang dan Zhang Xian, 2007: 1469)

Ruang metrik *cone* adalah generalisasi dari ruang metrik atau bisa ditulis setiap ruang metrik pasti ruang metrik *cone*.

Bukti:

Ambil sebarang ruang metrik (X, d) karena ruang metrik sehingga untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku sifat-sifat:

1) $d(x, y) \geq 0$
2) $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$
3) $d(x, y) = d(y, x)$
4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Jelas bahwa $\mathbb{R}$ adalah ruang Banach, dan dibentuk *cone* $P = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$ karena $d(x, y) \geq 0$ sehingga $d(x, y) \in P$. Untuk sifat 4, karena $d(x, y)$, $d(x, z)$, $d(z, y) \geq 0$ sehingga $d(x, z) + d(z, y) - d(x, y) \geq 0$ oleh karena itu $d(x, z) + d(z, y) - d(x, y) \in P$. Jadi dapat disimpulkan bahwa (X, d) juga merupakan ruang metrik *cone*. ■

Teorema Titik Tetap dalam Ruang Metrik *Cone*

Pada bagian ini akan dibuktikan salah satu teorema titik tetap dari pemetaan kontraktif di ruang metrik *cone*.

Teorema 2.4.1 (Huang Long Guang dan Zhang Xian, 2007: 1471)

Jika diberikan ruang metrik *cone* lengkap (X, d) dan normal *cone* P dengan konstanta normal M. Diberikan pemetaan $F: X \to X$, dengan F kontraktif yaitu

$$d\big(F(x), F(y)\big) \preccurlyeq Ld(x, y)$$

untuk setiap $x, y \in X$ dengan $L \in [0,1)$ maka F mempunyai sebuah titik tetap tunggal di X.

Bukti:

Pilih $x_0 \in X$, dibentuk

$$x_1 = F(x_0), x_2 = F(x_1) = F(F(x_0) = F^2(x_0), \dots, x_{n+1} = F(x_n)$$
$$= F^{n+1}(x_0), \dots$$

Bisa dibentuk sehingga

$$\begin{aligned}
d(x_{n+1}, x_n) &= d(F(x_n), F(x_{n-1}) \\
&\preccurlyeq Ld(x_n, x_{n-1}) \\
&= Ld\big(F(x_{n-1}), F(x_{n-2})\big) \\
&\preccurlyeq L\big(Ld(x_{n-1}, x_{n-2})\big) \\
&= L^2 d\big(F(x_{n-2}), F(x_{n-3})\big) \\
&\preccurlyeq L\big(L^2 d(x_{n-2}, x_{n-3})\big) \\
&= L^3 d(x_{n-2}, x_{n-3}) \dots \\
&\preccurlyeq L^n d(x_1, x_0)
\end{aligned}$$

karena (X, d) ruang metrik *cone* maka untuk setiap $n \geq m$

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &\preccurlyeq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \cdots + d(x_{m+1}, x_m) \\
&\preccurlyeq L^{n-1} d(x_1, x_0) + L^{n-2} d(x_1, x_0) + \cdots + L^m d(x_1, x_0) \\
&\preccurlyeq (L^{n-1} + L^{n-2} + \cdots + L^m)\, d(x_1, x_0) \preccurlyeq \frac{L^m}{1-L} d(x_1, x_0) \;\; (m \to \infty)
\end{aligned}$$

karena P normal *cone* diperoleh:

$$\|d(x_n, x_m)\| \leq \frac{L^m}{1-L} M\|d(x_1, x_0)\|$$

Untuk $n, m \to \infty$ maka $\|d(x_n, x_m)\| \to 0$. Berarti $\lim_{n,m\to\infty} \|d(x_n, x_m)\| = 0$ jika dan hanya jika $\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$. Menurut lemma 3.2.5 berarti $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy. Selanjutnya karena X lengkap maka pasti ada $x^* \in X$ sedemikian sehingga $x_n \to x^*$ $(n \to \infty)$.

Berdasarkan sifat ruang metrik *cone*

$$d(F(x^*), x^*) \preccurlyeq d(F(x^*), F(x_n)) + d(F(x_n), x^*)$$
$$= d\big(F(x_n), F(x^*)\big) + d(F(x_n), x^*)$$
$$\preccurlyeq Ld(x_n, x^*) + d(x_{n+1}, x^*)$$

Oleh karena P normal *cone* maka diperoleh

$$0 \leq \|d(F(x^*), x^*)\| \leq M\|Ld(x_n, x^*) + d(x_{n+1}, x^*)\|$$
$$\leq M(\|Ld(x_n, x^*)\| + \|d(x_{n+1}, x^*)\|$$

karena $x_n \to x^*$ maka

$$\|d(F(x^*), x^*)\| = 0 \Leftrightarrow d(F(x^*), x^*) = 0$$

sesuai sifat ruang metrik *cone* dapat disimpulkan $F(x^*) = x^*$ jadi x^* merupakan titik tetap F. Akan dibuktikan bahwa x^* tunggal.

Andaikan y^* titik tetap lain dari F maka

$$d(x^*, y^*) = d\big(F(x^*), F(y^*)\big) \preccurlyeq Ld(x^*, y^*)$$

karena $L \in [0,1)$ sehingga hanya $L = 0$ yang memenuhi, berarti

$$\|d(x^*, y^*)\| = 0 \Leftrightarrow d(x^*, y^*) = 0 \Leftrightarrow x^* = y^*.$$

Jadi terbukti, titik tetap F adalah tunggal. ■

Akibat 3.4.2

Diberikan ruang metrik *cone* lengkap (X, d), dan P normal *cone* dengan konstanta normal M. Selanjutnya ambil sembarang $c \in E$ dengan $0 \ll c$ dan $x_0 \in X$, dibentuk $B(x_0, c) = \{x \in X | d(x_0, x) \preccurlyeq c\}$. Jika pemetaan $F: X \longrightarrow X$ bersifat kontraktif yaitu untuk setiap $x, y \in B(x_0, c)$:

$$d\big(F(x), F(y)\big) \preccurlyeq Ld(x, y)$$

dengan $L \in [0,1)$ dan $d(F(x_0), x_0) \preccurlyeq (1-L)c$ maka F mempunyai titik tetap tunggal pada $B(x_0, c)$.

Bukti:

Berdasarkan teorema 3.4.1 berarti hanya perlu dibuktikan bahwa $B(x_0, c)$ lengkap dan $F(x) \in B(x_0, c)$ untuk setiap $x \in B(x_0, c)$. Ambil sembarang barisan Cauchy $\{x_n\}$ pada $B(x_0, c) \subset X$. Sehingga barisan $\{x_n\}$ cauchy pada X.

Oleh karena X lengkap maka ada $x \in X$ sehingga $x_n \to x$ dengan $n \to \infty$. Selanjutnya karena (X, d) ruang metrik *cone* sehingga

$$d(x_0, x) \preccurlyeq d(x_n, x_0) + d(x_n, x) \preccurlyeq c + d(x_n, x)$$

Berdasarkan lemma 3.2.5, jika $x_n \to x$ maka $d(x_n, x) \to 0$ sehingga

$$d(x_0, x) \preccurlyeq c$$

artinya $x \in B(x_0, c)$. Sehingga terbukti $B(x_0, c)$ lengkap.

Selanjutnya untuk setiap $x \in B(x_0, c)$

$$d\big(x_0, F(x)\big) \preccurlyeq d(F(x_0), x_0) + d\big(F(x_0), F(x)\big) \preccurlyeq (1-L)c + Ld(x_0, x)$$
$$\preccurlyeq (1-L)c + Lc = c.$$

Sehingga dapat disimpulkan $F(x) \in B(x_0, c)$.

Oleh karena $B(x_0, c)$ lengkap dan $F(x) \in B(x_0, c)$ untuk setiap $x \in B(x_0, c)$, jadi terbukti F mempunyai titik tetap tunggal pada $B(x_0, c)$. ■

Kesimpulan

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, disimpulkan teorema-teorema pada barisan konvergen dan barisan Cauchy dalam ruang metrik ternyata berlaku juga pada barisan konvergen dan barisan Cauchy dalam ruang metrik *cone.* Selanjutnya disimpulkan juga bahwa ruang metrik *cone* adalah perluasan dari ruang metrik dan pemetaan kontraktif pada ruang metrik *cone* dengan *cone* normal mempunyai titik tetap tunggal

Referensi

[1] **Agariaval**, **Ravi P.**, Maria Mehan., and Donald D Regan. 1986. *Fixed Point Theory and Applications.* United Kingdom: Cambridge University Press.

[2] **Asadi**, **Mehdi** and **Hossein Soleimani**. 2011. *Examples In Cone Metric Spaces: A Survey*. http://arxiv.org/pdf/1102.4675v1.pdf. Diakses pada tanggal 5 Februari 2011 pukul 16.00 WIB.

[3] **Bartle**, **R.G**. 1967. *The Element Real of Analysis*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

[4] **Bartle**, **R.G**. and **Sherbert**, **D.R**. 1982. *Introduction to Real Analysis*. Second Edition. New York: John Wiley & Sons, Inc.

[5] **Darmawijaya**, **Soeparna**. 2006. *Pengantar Analisis Real*. Yogyakarta: Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Gajah Mada.

[6] _________ 2007*. Pengantar Analisis Abstrak.* Yogyakarta: Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Gajah Mada.

[7] **Davies**, **Paul**. 2002. *Membaca Pikiran Tuhan.* Yogyakarta: Pustaka Pelajar.

[8] **Deimling**. 1985. *Nonlinear Functional Analysis*. New York: Springer, Verlag New York. Inc.

[9] **Gordji**, **M. Eshagi**, **M. Ramezani**, **H. Khodaei** dan **H. Baghani**. 2009. *Cone Normed Spaces*. http://arxiv.org/pdf/0912.0960v1.pdf. Diakses pada tanggal 5 Februari 2011 pukul 16.00 WIB.

[10] **Guang**, **Huang Long** and **Zhang Xian**. 2006. *Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings.* J.Math Anal. Appl. 332(2007) 1468-1476.

[11] **Jamil**, **Anas**. 2009. Fungsi Bervariasi Terbatas pada Interval [a,b]. *Skripsi.* Malang: Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim.

[12] **Javidzadeh**, **H.** Dan **M.R Haddadi**. 2011. *Some Fixed Point Theorems for Pointwise Contractions*. http://sid.ir/en/VEWSSID/J_pdf/1011420111007.pdf. Diakses pada tanggal 6 April 2012 pukul 16.30 WIB.

[13] **Khamsi**, **Mohammed A.** 2010. *Remarks On Cone Metric Spaces and Fixed Point Theorems of Contractive Mappings.* http://www.emis.de/journals/HOAFPTA/Volume2010/315398.pdf. Diakses pada tanggal 6 Desember 2011 pukul 20.05 WIB.

[14] **Jain**, **S.**, **S. Jain** dan **L. Jain**. 2010. *Weakly Compatible Maps In Cone Metric Spaces*. http://seminariomatematico.dm.unito.it/ rendiconti/ 68-2/115.pdf

[15] **Kunze**, **H.**, **H.D. La Torre**, **F. Mendivil**, dan **E.R Vrscay**. 2012. *Generalized Fractal Transforms and Self-Similar Objects In Cone Metric Spaces*. http://math.acadiau.ca/mendivil/Papers/ConeMetrics.pdf. Diakses pada tanggal 6 Desember 2011 pukul 20.15 WIB.

[16] **Mardalis**. 1995. *Metode Penelitian Suatu Pendekatan Proposal.* Jakarta: PT Aksara.

[17] **Nurnugroho**, **Burhanuddin Arif**. 2009. Konsep Dasar Ring Bernorma. *Skripsi*. Yogyakarta: Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga.

[18] **Shirali**, **Satish** dan **Harkrishan L. Vasudeva**. 2006. *Metric Spaces.* London: Springer-Verlag.

[19] **Turkoglu**, **Duran** dan **Muhib Abuloha**. 2010. Cone Metric *Spaces and fixed point theorems in diametrically contractivemappings*.http://www.google.co.id/search?q=Cone+Metric+Spaces+and+fixed+point+theorems+in+diametrically+contractive+mappings&ie=utf8&oe=utf8&aq=t&rls=org.mozilla:enGB:official&client=firefox-a. Diakses pada tanggal 3 April 2012 pukul 01.57 WIB.