UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAIBA
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA A DISTÂNCIA

José Alberto Da Silva Nascimento

Princípio das Gavetas e Aplicações

João Pessoa – PB
2018

José Alberto Da Silva Nascimento

Princípio das Gavetas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do curso de Licenciatura em Matemática a Distância da Universidade Federal da Paraíba como requisito para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Adriano Alves de Medeiros.

João Pessoa – PB

2018

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

N244p Nascimento, Jose Alberto da Silva.
Principio das gavetas e aplicações / Jose Alberto da Silva Nascimento. - João Pessoa, 2018.
27f.

Orientação: Adriano Alves Medeiros.
Monografia (Graduação) - UFPB/CCEN.

1. Principio das Gavetas. I. Medeiros, Adriano Alves. II. Título.

UFPB/CCEN

Princípio das Gavetas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática a Distância da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Adriano Alves de Medeiros

Aprovado em: 04 / 12 / 2018

COMISSÃO EXAMINADORA

Adriano Alves de Medeiros

Prof. Dr. Adriano Alves de Medeiros

Márcio Silva Santos

Prof. Dr. Márcio Silva Santos

Allan George de C. Freitas

Prof. Dr. Allan George de Carvalho Freitas

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus pais, com quem compartilhei momentos de alegria, tristeza e ansiedade. A todos os professores e tutores, especialmente ao tutor Francisco José Cardoso de Oliveira que durante muito tempo me mostrou o quanto estudar é bom.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por ter me concedido saúde, força e disposição para fazer a universidade e o trabalho de final de curso.

Agradeço ao professor Adriano, responsável pela orientação de desse trabalho.

Agradeço a Universidade Federal da Paraíba, por me proporcionar um ambiente de estudos criativo e amigável. Sou grato a cada membro do corpo docente, à administração e a direção dessa instituição de ensino.

EPÍGRAFE

Que todos os nossos esforços estejam sempre focados no desafio à impossibilidade. Todas as grandes conquistas humanas vieram daquilo que parecia impossível (Charles Chaplin).

RESUMO

O princípio das gavetas do matemático alemão Dirichlet conhecido também como o princípio da casa dos pombos pode ser apresentado como um resultado matemático e como um método de uma prova. Quando utilizado como resultado matemático, o princípio das gavetas é bastante simples e intuitivo, parecendo que esse princípio tem pouca aplicabilidade na resolução de problemas matemáticos. Porém, quando utilizado como método de uma prova, ele se torna uma importante ferramenta na resolução de vários problemas na matemática, contudo é o que veremos nesse trabalho. O Princípio das Gavetas de Dirichlet recebeu este nome depois que o matemático usou frequentemente este princípio em seu trabalho, no século XIX.

Palavra-chave: casa dos pombos; função; Análise de dados; contagem e conjuntos.

ABSTRACT

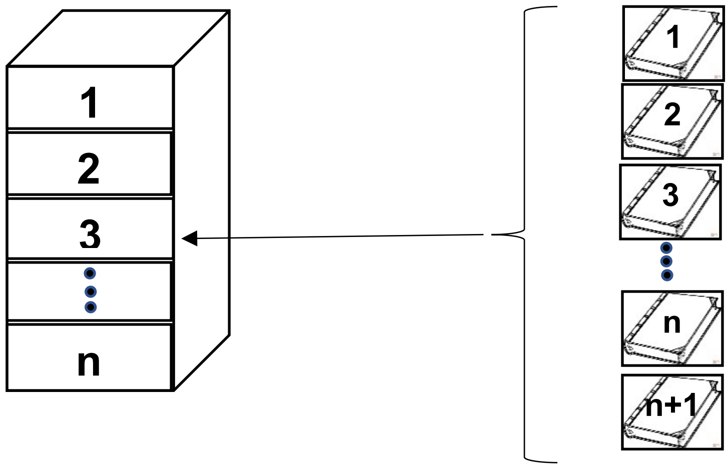
The drawers principle of the German mathematician Dirichlet also known as the Pigeons House Principle can be presented as a mathematical result and as a method of a proof. When used as a mathematical result, the principle of the drawers is quite simple and intuitive seeming that this principle has little applicability in solving problems in mathematics. However, when used as a test method, it becomes an important tool in solving various problems in mathematics, but this is what we will see in this work. The Dirichlet Drawer Principle was named after the mathematician often used this principle in his work in the nineteenth century.

Keyword: house of pigeons, induction, counting and sets.

Sumário

1 – APRESENTAÇÃO DO TEMA

O Princípio das Gavetas de Dirichlet mostra que, se n + 1 objetos são colocados em n gavetas ao menos uma das gavetas vai conter dois objetos.



Em 1834 o Matemático Alemão Gustav de Dirichlet (1805-1859), utilizou publicamente o princípio das gavetas pela primeira vez.

Em diversas situações formais pode ser utilizado, muitas das vezes, para resolver problemas sem recorrer a fórmulas matemáticas ou técnicas complicadas, sendo muito útil para resolver problemas matemáticos que, à primeira vista, não são imediatos, mas, admite consequências surpreendentes, conforme mostram os exemplos apresentados nesse trabalho. Também conhecido como princípio da casa dos pombos ou princípio de Dirichlet este princípio matematicamente baseia-se na afirmação de que se temos que n + 1 pombos para serem colocados em n casas, então pelo menos uma casa deverá conter dois ou mais pombos. Se dermos seis bolinhas de gude para cinco meninos o que vai acontecer? Mesmo que não se queira, um dos meninos vai ganhar mais de uma bolinha. Mas o que isso tem a ver com Matemática? Matematicamente isto equivale a dizer que se o número de elementos de um conjunto finito A for maior que um outro número de elementos de um conjunto finito B, então uma função de A em B não pode ser injetiva. A sua aplicação exige identificar, na situação dada, quem faz o papel dos pombos e o papel das casas. As demonstrações e aplicações do princípio de Dirichlet parecem ser muito simples, mas também bastante interessante, que podem ser apresentadas de maneira acessível e cativante aos estudantes.

2 - JUSTIFICATIVA

O princípio de Dirichlet conhecido também como princípio das gavetas ou casa dos pombos, sendo um princípio que embora pareça difícil na verdade, até que esse princípio não é tão complicado. As questões que o abordam é que nem sempre são fáceis, mas sendo apresentadas de maneira simples e cativante torna-se bastante interessante para as pessoas. Deve-se ressaltar que nesse princípio as situações de resoluções de problemas do cotidiano são solucionadas sem precisar de recorrer muitas das vezes a decoração de fórmulas, como por exemplo: Se dermos seis barras de chocolates a cinco crianças uma delas vai ter de receber duas a mais que as outras. Então na verdade o princípio possibilita o estímulo gradual do raciocínio em diferentes situações problemas do cotidiano, sem o compromisso de utilização de fórmulas, promove o pensar, de forma criativa e crítica, num ambiente lúdico. Porém, se o ensino e a aprendizagem forem trabalhados sem a devida análise e exploração dos problemas, e se os estudantes não forem habituados e estimulados a pensar e refletir em cada situação, pode-se ocorrer o risco de que eles criem a impressão que a análise do princípio de Dirichlet seja um conteúdo de difícil compreensão.

3 - MEMORIAL ACADÊMICO

3.1 Trajetória no Ensino de Graduação

Ao iniciar o curso em Licenciatura na Universidade Federal da Paraíba Virtual fiquei muito entusiasmado por estar cursando um curso na Universidade Federal da Paraíba. Embora no início tenha sido algo mágico na minha vida ao passar dos dias letivos comecei a sentir dificuldades por não está habituado com o sistema de ensino a distância e também por tido passado muito tempo sem estudar cheguei a ter dois períodos trancados totalmente. Mas através da vontade que eu tinha de concluir um curso em uma instituição federal de grande prestígio como é a Universidade Federal da Paraíba e pelos incentivos de meu tutor presencial do polo aos poucos fui enfrentando as dificuldades e obtendo sucessos na minha jornada no curso, pois o ambiente virtual principalmente para um curso na área de exatas exige muita dedicação e atenção do alunado. Embora tido demorado a me habituar com esse sistema de ensino até mesmo pela necessidade de não ter tempo para um curso presencial posso considerar que foi até mais rico pra me do que um curso presencial, pois esse sistema estimula o alunado a ser um pesquisador, a ter responsabilidade em seus horários de estudos e até mesmo a ser o próprio professor de se mesmo, aprende muito com esse sistema de ensino, isso contribuiu muito para a vida pessoal e acadêmica. Os estágios supervisionados me propiciaram novamente a vivência em sala de aula nas escolas, algo que me entusiasmou ainda mais na minha trajetória como futuro docente, pois é maravilhoso está em comunicação com várias pessoas de pensamentos diversos é uma experiência constante e bastante gratificante.

3.2 Experiência como docente

Comecei a lecionar no ano de 2016 ainda cursando o curso de Licenciatura em Matemática, como era algo novo em minha carreira profissional como docente sente dificuldades nos deveres de um docente em sala de aula, pois ainda estava em fase de aprendizado e de experiência na profissão. Ao passar dos dias fui me habituando em sala de aula, buscando informações sobre metodologias de ensino, pois a dificuldade fui muito grande no feedback em relação a conteúdos com os alunos. Mas comecei a dialogar com os alunos a melhor maneira de eles entenderem os conteúdos aplicados já que eu estava começando na carreira como docente. Então seria a partir desses momentos de vivência em sala de aula a oportunidade para adquirir experiência para que nos anos futuros não tivesse tanta dificuldade nos deveres como docente. Visto que no ano seguinte do ano de 2017 a experiência que eu tive no ano anterior me ajudou muito no diálogo como os alunos na aplicação dos conteúdos, mas experiência não se adquire de imediato. Então esse ano de 2017 me enriqueceu mais ainda e hoje em dia eu me sinto mais preparado para a sala de aula, na preparação dos conteúdos na vivência com os alunos procuro sempre conversar com eles, pois essas experiências de convivências com eles só fazem me enriquecer tanto profissionalmente como pessoalmente. É algo único, pois são várias os conflitos que essas pessoas passam todos os dias em suas vidas, então isso contribui muito para qualquer ser humano e eu só tenho a agradecer, pois todos os dias estou aprendendo sempre e todos anos estou vivenciando novas experiências com novas pessoas.

3 – OBJETIVOS

3.1 Objetivos Gerais

Demonstrar através de exemplos lógicos o princípio das gavetas e que esse princípio é utilizado nas diversas situações de lógica do cotidiano tanto sem a utilização de fórmulas expressas quanto na sua utilização em diversos problemas. Comparando o princípio das gavetas em situações sem a utilização de fórmulas em questões de lógicas do dia-a-dia de forma clara e simples para que possam entender com clareza esse princípio e de como é bastante lógico e intuitivo. Embora tenha questões que aparentam ser de difíceis soluções o intuito é demonstrar que se trabalhado de forma lúdica e simples para que se venha obter um entendimento satisfatório e cativante. Mostrando também que a fundamentação desse princípio pode ser trabalhada nas mais diversas aplicações Matemática como em função, contagem, conjuntos e etc. com questões do dia-a-dia. Ao ser trabalhado em sala de aula paralelo com questões que não precisam de fórmulas e com fórmulas na aplicação das questões o discente vai perceber que embora precise formular para responder questões ele vai conseguir responde-las só em ler as questões. Então o intuito nesse trabalho é mostrar que o princípio das gavetas pode ser aplicado de maneira simples com ou sem formulas expressas e que as pessoas em seu dia-a-dia podem estar executando-o facilmente de forma lúdica e cativante.

3.2 Objetivo Específico

a) Enunciar e provar o princípio da casa dos pombos de Dirichlet, na forma original e suas generalizações.

b) Utilizar o princípio da casa dos pombos no estudo de funções injetivas, na resolução de problemas de contagem.

4 – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O trabalho apresentado é um estudo para a realização de uma pesquisa da ligação que há entre o princípio das gavetas ou casa dos pombos que é conhecido também como princípio de Dirichlet com alguns conteúdos da Matemática.

Portanto, é importante ressaltar, que a pesquisa é em relação da fundamentação do teorema do princípio das gavetas com questões lógicas do dia-a-dia que envolve conteúdos matemáticos. E os conteúdos abordados respectivamente, dentro dessa pesquisa são: Princípio da Casa dos pombos, Função e Conjuntos

4.1 Princípio da Casa dos pombos

Sendo simples e intuitivo esse princípio trata de números positivos e inteiros. Realmente à primeira vista pode parecer que a sua aplicabilidade aparenta uma pegadinha.

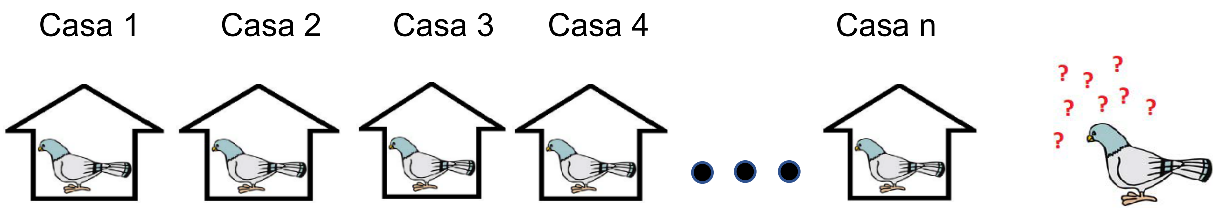
Esse princípio pode ser apresentado em sua forma simples de duas maneiras:

Princípio das Casas dos Pombos: se tivermos n + 1 pombos para serem colocados em n casas, então pelo menos uma casa deverá conter dois ou mais pombos.

Princípio das Gavetas de Dirichlet: se tivermos n + 1 objetos para serem colocados em n gavetas, então pelo menos uma gaveta deverá conter dois ou mais objetos.

Nesse princípio podemos usar qualquer uma das formas, pois elas duas são equivalentes. Vamos então distribuir os n + 1 pombos nas n casas que temos à disposição.

Colocando mais de um pombo em uma das casas, o princípio estaria cumprido, vamos tentar colocar exatamente um pombo em uma das n casas. Colocando exatamente um pombo em cada casa sobrará apenas um pombo que deverá ser colocado em uma das n casas. Assim sendo já que todas as casas estão ocupadas uma das n casas ficará com dois pombos.



Então os dados que podemos coletar a resolução de problemas são eles:

- Identificar quais são os pombos e quais são as casas;
- Distribuir os pombos nas casas;
- Determinar a relação existente entre ambos: pombos e casas.

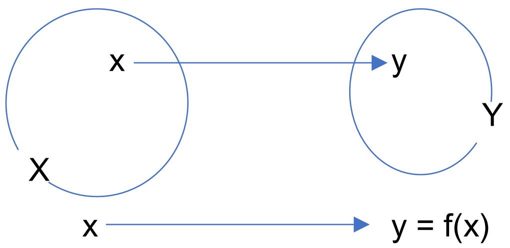
4.2 Função e Conjunto

O conceito de função e de conjunto aparecem de forma intuitiva, desde a antiguidade. A palavra função, no sentido que usamos hoje em dia, aparece pela primeira vez em correspondências entre dois grandes matemáticos: o suíço Jean Bernoulli e o alemão Gottfried Leibniz. Leibniz dizia, falando de um problema de geometria, que certos elementos devem ter alguma função. Mas em uma carta de Bernoulli para Leibniz no ano de 1698, aparece a frase: "...função é uma quantidade que de alguma maneira é formada por quantidades indeterminadas e quantidades constantes".

No século XIX, o matemático alemão johann Peter Gustav Legeune Dirichlet escreveu uma primeira definição de função muito semelhante àquela que usamos atualmente. "Uma variável y se diz função de uma variável x se, para todo valor atribuído a x, corresponde, por alguma lei ou regra, um único valor y. Nesse caso, x denomina-se variável independente, e y, variável dependente".

No fim do século XIX, com a disseminação da linguem dos conjuntos, tornou-se possível a definição formal do conceito de função por meio de conjuntos.

"Dados os conjuntos X e Y, uma função f: X → Y (lê-se: uma função de X em Y) é uma regra que determina como associar a cada elemento de x Є X um único y = f(x) Є Y"



Nessa situação de conceito de função em que cada elemento do conjunto X está relacionado com um único elemento do conjunto Y o conceito do princípio das gavetas se aplicaria, pois se o conjunto X tem mais elementos do o conjunto Y, obrigatoriamente f deverá associar dois elementos de X a um mesmo elemento de Y.

5 – METODOLOGIA

O objetivo do trabalho é demonstrar a relação do conteúdo princípio das gavetas com questões lógicas e intuitiva do dia-a-dia e com outros conteúdos da Matemática através de demonstrações e exercícios.

Também será possível analisar que de início o princípio das gavetas pode não a ver nenhum sentido lógico, mas tem tudo a ver com a percepção lógica de questões do dia-a-dia sem recorrer a fórmulas complexas.

A partir de análises estudadas serão abordados problemas a partir do raciocínio.

O trabalho inclui leitura de resoluções de exercícios e a seleção de atividades propostas com aplicações interessantes para despertar o interesse ao tema com o intuitivo de mostrar que o conteúdo pode ser absorvido de maneira simples e objetiva.

Utilizar na resolução de problemas através dos dados das questões a estratégia de identificar, distribuir e determinar a relação entre os respectivos elementos de cada questão.

6 – RESULTADOS E DISCUSSÃO

Suponhamos que um grupo de 11 pombos voe para dentro de 10 casas para se empoleirarem. Sendo que há 11 pombos para 10 casas, ou seja, pelo menos uma dessas 10 casas deverá ter no mínimo dois pombos. Esse processo a sua funcionalidade pode ser verificado com o seguinte argumento. Se para cada casa tiver no máximo um pombo, ou seja, então no máximo 10 pombos estarão acomodados restando um pombo. Esta foi a razão pelo qual esse princípio de contagem matemática, recebeu o nome de "princípio da casa dos pombos". Trabalhando com aplicações que evidenciam esta abordagem como um método de contagem importante na matemática, que ultrapassa este senso comum entre pombos e casas vamos mostrar a sua veracidade em algumas demonstrações.

6.1 Princípio das Gavetas de Dirichlet

Teorema 6.1 (O Princípio das Gavetas de Dirichlet) Seja n um número inteiro positivo. Se n + 1 ou mais pombos quaisquer são colocados dentro de n caixas, então há uma caixa que terá dois ou mais pombos.

Demonstração. Vamos demonstrar o princípio da casa dos pombos usando uma demonstração por absurdo. Suponha que nenhuma das n caixas tenha mais de um recipiente. Então, a contagem de no máximo um recipiente em cada uma das n caixas, fornece um total de no máximo n recipientes, o que é uma contradição, por que há pelo menos n + 1 recipientes.

Na matemática o princípio da casa dos pombos pode ser utilizado para demonstrar resultados puramente matemáticos, como o seguinte. Se o número de elementos de um conjunto finito A é maior que o número de elementos de outro conjunto finito B, então uma função de A em B não pode ser injetiva, como observamos no corolário a seguir.

Corolário. Uma função f de um conjunto n + 1 ou mais elementos para um conjunto com n elementos não é injetiva.

Demonstração. Suponhamos que para cada elemento B, no contradomínio de f temos uma caixa que contém todos os elementos A do domínio de f, tal que f(A) = B. como o domínio contém n + 1 ou mais elementos e o contradomínio contém apenas n elementos, o princípio da casa dos pombos nos diz que uma das caixas contém dois ou mais elementos do domínio. Significa que f não pode ser uma função injetora.

Exemplo 6.1 Quantas pessoas deve haver em uma sala de aula para podermos afirmar que pelo menos dois estudantes tenham a mesma nota em uma determinada avaliação, se a nota é graduada em um número inteiro de 0 a 10?

Solução: De 0 a 10 existem 11 números possíveis. O princípio de Dirichlet mostra que entre 12 estudantes há pelo menos dois com a mesma nota.

Justificativa: para este problema temos:

- **Casas:** notas (11);
- **Pombos:** pessoas (12);
- **Relação:** associamos cada pessoa a sua determinada nota.

Pelo princípio da casa dos pombos, como temos 11 casas e 12 pombos, uma das casas receberá, pelo menos, 2 pombos, o que afirma dizer que deverá haver pelo menos dois objetos na mesma caixa quando existirem mais objetos que caixa.

Exemplo 6.2 Se temos que colocar cinco cadernos em quatro gavetas com quantos cadernos ao menos uma gaveta vai ficar?

Solução: vamos tentar colocar um caderno em cada gaveta:

- O primeiro será colocado na primeira gaveta;
- O segundo caderno será colocado na segunda gaveta;
- O terceiro caderno será colocado na terceira gaveta;
- Quarto livro será colocado na quarta gaveta;
- Para o quinto livro não teremos gaveta vazia para colocá-lo.

Então uma das gavetas vai ficar com 2 cadernos.

Justificativa: para este problema temos:

- **Casas:** gavetas (4);
- **Pombos:** cadernos (5);
- **Relação:** associamos cada caderno a uma gaveta.

Pelo princípio da casa dos pombos, como temos 4 casas e 5 pombos, uma das casas receberá pelo menos, 2 pombos, ou seja, uma das gavetas terá dois cadernos.

Exemplo 6.3 Qual o número mínimo de crianças que devemos reunir para que tenhamos certeza de que duas entre elas fazem aniversário no mesmo mês?

Resposta: O número mínimo de crianças é 13.

Justificativa: Para este problema temos:

- **Casas:** meses do ano (12);
- **Pombos:** crianças (13);
- **Relação:** associamos cada criança ao seu mês de nascimento.

Pelo princípio da casa dos pombos, como temos 12 casas e 13 pombos, uma das casas receberá, pelo menos, 2 pombos, ou seja, um dos meses terá como aniversariante duas crianças.

Exemplo 6.4 Uma caixa contém 5 tipos de lápis de pintar (azuis, verdes, amarelos, roxos, vermelhos). Qual o número mínimo de lápis que devemos retirar da caixa para garantirmos que temos dois lápis da mesma cor?

Solução: Devemos retirar 6 lápis.

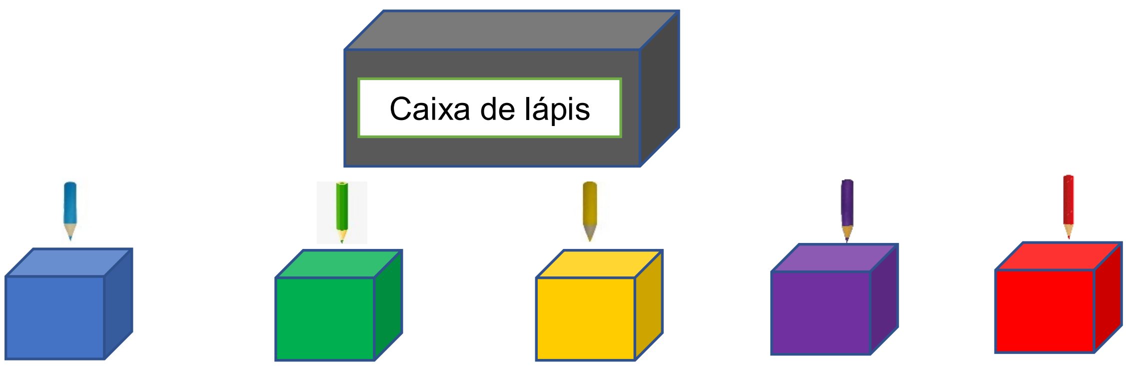
Justificativa: Para este problema escolhemos:

- **Casas:** uma caixa azul, uma caixa verde, uma caixa amarela, uma caixa roxo e uma caixa vermelha (5);
- **Pombos:** lápis (6);
- **Relação:** associamos a cada lápis a sua cor.

Pelo princípio da casa dos pombos, como temos 5 casas e 6 pombos, uma das casas receberá, pelo menos, 2 pombos, ou seja, uma das caixas conterá, pelo menos dois lápis. Dessa forma, pelo menos dois lápis retirados têm a mesma cor.

Vamos explicitar o raciocínio garantido pelo princípio:

Ao retirarmos cinco lápis da caixa, a pior hipótese é que cada um seja de uma cor.



Distribuindo, então cada lápis em sua respectiva caixa, com a retirada do sexto lápis, este poderá ser qualquer cor. Assim precisamos retirar, no mínimo, 6 lápis para garantirmos que tenhamos dois lápis de mesma cor.

Exemplo 6.5 Quantas pessoas precisa haver em um cinema para ter certeza de que pelo menos duas delas fazem aniversário no mesmo dia?

Resposta: Precisa haver 367 pessoas

Justificativa: Para este problema temos:

- **Casas:** dias do ano (366);
- **Pombos:** pessoas (367);
- **Relação:** associamos cada pessoa ao seu dia de nascimento.

Pelo princípio da casa dos pombos, como temos 366 casas e 367 pombos, uma das casas receberá, pelo menos, 2 pombos, ou seja, um dos dias terá como aniversariante duas pessoas.

Exemplo 6.6 Quantas pessoas precisam estar no mesmo avião para garantir que pelo menos duas dessas pessoas tenham o sobrenome iniciado pela mesma letra?

Solução: Como no alfabeto existem 26 letras(gavetas). Se tiverem 27 pessoas(objetos), então serão 27 sobrenomes que devem ser distribuídos nas 26 gavetas, garantindo assim, pelo princípio que pelo menos uma das letras terá dois sobrenomes.

6.2 A Generalização do Princípio

O princípio das gavetas afirma que deverá haver pelo menos dois objetos na mesma gaveta quando existirem mais objetos que gavetas. Desta forma, o princípio de Dirichlet, pode ser generalizado pelo teorema a seguir, onde utilizaremos a seguinte notação: $[x]$ o único inteiro tal que $[x] \leq x < [x] + 1$, ou seja, é a parte inteira de x.

Teorema 6.2 (Primeira Generalização do Princípio de Dirichlet) Se colocarmos n objetos em k gavetas, então ao menos uma das gavetas conterá, no mínimo, $\left[\frac{n-1}{k}\right]$ + 1 objetos.

Demonstração: Seja x_j o número de objetos colocados na gaveta j = 1, 2, ..., k. Então, o número médio x, de objetos por gaveta é x = $\frac{x_{1+}\ x_2+\cdots+x_k}{k} = \frac{n}{k}$.

Assim, existe algum elemento $x_j \geq x$, ou seja, maior ou igual a $\frac{n}{k}$.

Se $\frac{n}{k}$ não é natural, então, como x_j é natural, ele deve ser maior ou igual a $[\frac{n}{k}] + 1$. Em particular, $x_j \geq [\frac{n-1}{k}] + 1$

Se $\frac{n}{k}$ é natural, então, $[\frac{n-1}{k}] = \frac{n}{k} - 1$, isto é: $\frac{n}{k} = [\frac{n-1}{k}] + 1$ e o resultado segue.

Exemplo: 6.7 Entre 400 pessoas quantas pelo menos nasceram no mesmo mês?

Solução:

$[\frac{400-1}{12}] + 1 = [\frac{399}{12}] + 1 = 34$.

Assim, podemos afirmar que pelo menos 34 pessoas nasceram no mesmo mês.

Exemplo 6.8 Mostre que em qualquer grupo de 30 pessoas, pelo menos 5 nasceram no mesmo dia da semana.

Solução: De fato, se tomarmos n = 30 e k = 7(dias da semana). Logo, como $[\frac{30-1}{7}] + 1 = [\frac{29}{7}] + 1 = 4 + 1 = 5$

Exemplo 6.9 Quantas pessoas tem o mesmo signo, em um grupo de 50 pessoas?

Solução: Notemos que, colocando cada pessoa (objeto) na gaveta do seu signo, temos n = 50 e k = 12(signos), segue que $[\frac{50-1}{12}] + 1 = [\frac{49}{12}] = 4 + 1 = 5$

Logo, pelo menos 5 pessoas tem o mesmo signo.

Exemplo 6.10 No aniversário de Pedro foram convidados 49 amigos para sua festa. Podemos afirmar que em sua festa existiam pelo menos:

a) 5 pessoas que fazem aniversário no mesmo mês?

Solução: Verdadeira.

O ano tem 12 meses e podemos considerar cada mês como uma gaveta. Sendo k = 12, pelo princípio das gavetas, temos: $[\frac{49-1}{12}] + 1 = [\frac{48}{12}] = 4 + 1 = 5$

b) 8 pessoas que nasceram no mesmo ano?

Solução: falsa.

49 não é suficientemente grande para podermos assegurar a afirmação, diante do número de anos que os convidados podem ter nascido.

c) 6 pessoas que nasceram no mesmo dia da semana?

Solução: Verdadeira.

A semana tem 7 dias (domingo, segunda, terça, quarta, quinta, sexta e sábado), assim, a afirmação é verdadeira pois: $[\frac{49-1}{7}] + 1 = [\frac{48}{7}] = 6 + 1 = 7$

d) 2 pessoas que nasceram no mesmo de fevereiro?

Solução: Falsa.

Pelo item (a) podemos garantir que pelo menos um mês em que pelo menos 5 pessoas nasceram, mas o princípio das gavetas, não assegura qual é o mês.

O teorema 6.3 também pode ser enunciado da seguinte forma.

Teorema 6.3 (Segunda Generalização do Princípio das Gavetas) se n gavetas são ocupadas por pelo menos nk + 1 objetos, então pelo menos uma gaveta deverá conter pelo menos k + 1objetos.

Exemplo 6.11 Numa festa de aniversário com 49 crianças, podemos dizer que pelo menos 5 delas nasceram no mesmo mês?

Solução: De fato, como são 12 meses, 12 x 4 + 1 = 49 o resultado segue do teorema 6.3, com n = 12 e k = 4. Logo temos que pelo menos 4 + 1 = 5 crianças nasceram no mesmo mês.

Exemplo 6.12 Um carteiro deseja entregar cartas em um prédio com 15 apartamentos. Quantas cartas ele terá que entregar para garantirmos que pelo menos um apartamento receberá mais de 5 cartas?

Solução: Se considerarmos os apartamentos como gavetas, e as cartas como os objetos, pela generalização do princípio das gavetas, 15 x 5 + 1 = 75 cartas. Garantimos que um apartamento receberá 6 cartas.

Exemplo 6.13 Se uma urna contém 5 bolas vermelhas, 8 bolas verdes, 9 bolas azuis, 6 bolas brancas e 7 bolas amarelas. Qual o menor número de bolas que devemos retirar (sem olhar) para ter certeza de ter tirado pelo menos 4 de uma mesma cor?

Solução: Consideramos como gavetas as 4 cores diferentes, portanto, tomando k = 3 e n = 5, temos 5 x 3 + 1 = 16. Portanto, se retiramos 16 bolas da urna, pelo menos quatro delas tem a mesma cor.

6.3 Exercícios Resolvidos

Os seguintes exercícios, por serem simples e de fácil compreensão podem servir para introduzir e apresentar o Princípio das Gavetas. Muitos problemas atraentes da matemática podem ser resolvidos sem recorrer a fórmulas ou a técnicas complicadas. Estaremos apresentando sugestões de soluções, para os exercícios propostos, utilizando o Princípio das Gavetas.

Exercício 6.3.1 Em uma festa de aniversário com mais de 12 crianças, mostrar pelo menos que existem duas nascidas no mesmo mês e que também pelo menos existem duas nascidas no mesmo dia da semana.

Solução: Como temos mais crianças (objetos) do que meses (gavetas), pelo menos em um “mês”, deverá conter ao menos duas “crianças”. Já na segunda parte, sendo o número de crianças maior do que 7, necessariamente duas ou mais terão nascido no mesmo dia da semana.

Exercício 6.3.2 Sabendo que existem n pessoas em um apartamento, qual o número mínimo de pessoas para garantir que 2 nasceram no mesmo mês?

Solução: Pelo princípio das gavetas: (12 x 1) + 1 = 13 pessoas. Pois são 12 meses no ano (gavetas) e com 13 pessoas (objetos) pelo menos duas fazem aniversário no mesmo mês.

Exercício 6.3.3 Para termos certeza que um mesmo número será sorteado 2 vezes em determinado jogo de dado, quantas jogadas teremos que fazer para ter certeza que um mesmo número será sorteado 2 vezes?

Solução: Na primeira jogada podemos obter 6 números diferentes. Bem como em jogadas seguintes, com certeza, teremos 6 possibilidades diferentes. Então, com 7 jogadas, garantiremos 2 resultados iguais. Pelo princípio: (6 x 1) +1 = 7 jogadas.

Exercício 6.3.4 Estão guardadas em uma gaveta várias meias masculinas, todas misturadas, nas seguintes quantidades e cores: 8 meias pretas, 12 meias brancas, 6 meias cinzas, 4 meias marrons e 2 meias azuis marinho. Ocorreu uma falta de energia elétrica e uma pessoa precisa retirar a quantidade mínima de meias dessa gaveta, na escuridão, para que possa garantir que duas delas, pelo menos, sejam da mesma cor. Qual o número de meias que essa pessoa deve retirar?

Solução: São 5 cores, logo basta tirarmos 6 meias. (1 x 5) + 1 = 6

Exercício 6.3.5 Em uma urna, há 20 esferas: 5 pretas, 6 vermelhas, 7 verdes e outras 2 cujas cores podem ser pretas ou verdes. Não é possível saber a cor das esferas sem que elas sejam retiradas. Também não é possível distingui-las a não ser pela cor. Serão retiradas simultaneamente N esferas dessa urna.

Qual o menor valor de N para que se possa garantir que, entre as esferas retiradas, haverá 2 da mesma cor?

Solução: Retirando 3 esferas, como são 3 cores teremos uma de cada cor, a próxima será de uma das cores já retiradas assim 4 esferas são suficientes. (1 x 3) + 1 = 4

Qual o menor valor de N para que se possa garantir que, entre as esferas retiradas, haverá 2 com cores diferentes?

Solução: Retirando as 7 esferas verdes, ainda restam 2 que também podem ser verdes, a próxima esfera retirada terá uma cor diferente. Logo são necessárias 10 esferas. (1 x 9) + 1 = 10

Exercício 6.3.6 Um torneio de futsal passará a ser disputado anualmente por oito equipes. O troféu será de posse transitória, isto é, o campeão de um ano fica com o troféu até a próxima edição do torneio, quando passa para o novo campeão. Uma equipe só ficará definitivamente com o troféu quando vencer 3 edições consecutivas do torneio ou nove edições do total, o que acontecer primeiro. Quando isso ocorrer, um novo troféu será confeccionado. Os números mínimo e máximo de edições que deverão ocorrer até que uma equipe fique com a posse definitiva do troféu valem, respectivamente.

Solução: O número mínimo é dado quando uma das equipes vence as 3 primeiras edições consecutivamente. O número máximo é dado quando cada equipe vencer 8 edições não consecutivas e alguma das equipes vencer mais uma edição totalizando 65 edições. (8 x 8) + 1 = 65

Exercício 6.3.7 Mostrar que qualquer subconjunto S de {1, 2, 3, 4, ..., 14} contendo 9 elementos possui dois subconjuntos cuja soma dos elementos é a mesma.

Solução: Um subconjunto com 9 elementos terá soma no máximo igual a 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 90. Concluímos que os possíveis valores para a soma dos elementos de um subconjunto de um conjunto contendo 9 dos elementos de {1, 2, 3, 4, ..., 12} vão de 1 a 90, ou seja, temos 90 valores possíveis. Mas um conjunto com 9 elementos possui $2^9 - 1$ subconjuntos não-vazios. Logo, como $2^9 - 1 > 90$, pelo menos dois deles terão a mesma soma para os seus elementos.

7 – REFERÊNCIAS BIBIOGRÁFICAS

http://clubes.obmep.org.br/blog/texto_002-principio-das-casas-dos-pombos/

Contato matemática, 1º ano / Joamir Roberto de Souza, Jaqueline da Silva Ribeiro Garcia. – 1. Ed. – São Paulo: FTD, 2016.

https://sabermatematica.com.br/principio-da-casa-dos-pombos-ou-das-gavetas.html

https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/tede/9346/2/arquivototal.pdf