



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA



Oscilador Harmônico num meio Elástico com uma Deslocação Espiral

Anderson Vinícius Dantas Marques Maia

João Pessoa-PB

2018

Anderson Vinícius Dantas Marques Maia

Oscilador Harmônico num meio Elástico com uma Deslocação Espiral

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Programa de Pós-Graduação em Física do
Departamento de Física da Universidade
Federal da Paraíba como requisito parcial
para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador

Dr. Knut Bakke Filho

PRPG – PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
DF – DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CCEN – CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
UFPB – UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

João Pessoa-PB

2018

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

M217o Maia, Anderson Vinícius Dantas Marques.
Oscilador harmônico num meio elástico com uma
deslocação espiral / Anderson Vinícius Dantas Marques
Maia. - João Pessoa, 2018.
58 f. : il.

Orientação: Knut Bakke Filho.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Física. 2. Deslocação espiral - Defeito topológico.
3. Oscilador harmônico. I. Bakke Filho, Knut. II.
Título.

UFPB/BC

Ata da Sessão Pública da Defesa de
Dissertação de **Mestrado** do aluno **Anderson
Vinícius Dantas Marques Maia**, candidato
ao Título de Mestre em Física na Área de
Concentração Física da Matéria Condensada.

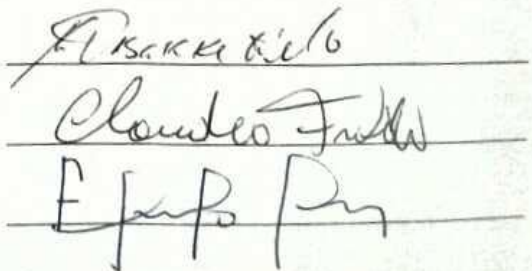
1 Aos vinte e três dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e dezoito, às 10:00, na sala
2 de reuniões do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da
3 Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora
4 constituída para examinar o candidato ao grau de Mestre em Física na área de Física da
5 Matéria Condensada, **Anderson Vinícius Dantas Marques Maia**. A comissão
6 examinadora composta pelos professores doutores: Knut Bakke Filho (DF/UFPB),
7 orientador e presidente da banca examinadora, Cláudio Benedito da Silva Furtado
8 (DF/UFPB) e Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos (UFCG). Dando início aos
9 trabalhos, o Prof. Knut Bakke Filho comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A
10 seguir, passou a palavra o candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição
11 do trabalho de dissertação intitulado "*Oscilador harmônico em um meio elástico com*
12 *uma deslocação em espiral*". Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca
13 Examinadora que emitiu o seguinte parecer: "**aprovado**". Assim sendo, deve a
14 Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Mestre em Física na
15 forma da lei. E para constar, eu, Danilo Wilson Lemos Menezes, lavrei esta ata que vai
16 assinada por mim e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, **23 de**
17 **fevereiro de 2018.**

18

Prof. Dr. Knut Bakke Filho
Orientador - UFPB

Prof. Dr. Cláudio Benedito da Silva Furtado
UFPB

Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos
UFCG



Para meus pais Antonio Marques Maia e Sônia Maria Dantas Marques.

Agradecimentos

Quero agradecer primeiramente ao professor Knut Bakke Filho pela excelente orientação ao decorrer do desenvolvimento dos trabalhos durante o mestrado, onde sempre estive presente para ajudar.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo suporte financeiro.

Ao Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba (DF/UFPB) pela acolhida e suporte para a realização deste trabalho.

Aos membros da banca por terem aceitado participar da avaliação dessa dissertação de mestrado.

Aos meus irmãos, Leonardo Dantas Marques Maia e Marcos Alexandre Dantas Marques, que sempre me apoiaram a ir atrás dos meus sonhos e me ajudaram na construção do meu caráter.

Também aos meus amigos de longas datas que sempre me deram muita força: Clerisson Ramon, Erisvaldo Júnior, Igor Henrique, Pierre Modesto, Roberta Kaiala, Sofia Bezerra e Suzana Rabêlo.

Por final aos amigos do DF e João Pessoa: Anderson, Antônio, Anny, Bugley, Daniela, Fabiano, Gabriela, Helena, Igor, Osmar, Rafael, Ricardo, Telma e Thiago.

*...If your're free you'll never see the walls
If your head is clear you'll never free fall
If you're right you'll never fear the wrong
If your head is high you'll never fear at all...*

Audioslave

RESUMO

O presente trabalho analisa as influências do defeito topológico de deslocação tipo-espiral sobre os níveis de energia para uma partícula quântica sem spin sujeita a um oscilador harmônico bidimensional em um meio elástico. Em seguida considera-se a presença de um potencial que corresponde ao confinamento entre paredes rígidas. Através da geometria diferencial, as informações a respeito do tensor métrico são introduzidas na equação de Schrödinger via o operador de Laplace-Beltrami. Ambos os casos possuem soluções analíticas. Desse modo, é feita a análise sobre atuação da topologia sobre o espectro de energia.

Palavras-chave: Deslocação espiral 1, Defeito topológico linear 2, Oscilador harmônico 3, Soluções analíticas 4.

ABSTRACT

In this work, it is analysed the spectrum of energy of a spinless quantum particle subject to a two-dimensional harmonic oscillator in an elastic medium that possesses a spiral dislocation (a linear topological defect). It is also analysed the effects of this topological defect on the confinement to a hard-wall confining potential. Based on the differential geometry, the information about the topological defect is introduced into the Schrödinger equation via the Laplace-Beltrami operator. Then, it is shown that analytical solutions to the Schrödinger equation can be obtained and discussed the topological effects of the energy levels.

Keywords: Spiral dislocation 1, Linear topological defects 2, Harmonic oscillator 3, Analytical solutions 4.

Lista de figuras

1	Idealização do espaço coordenado local ($\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$) numa base ortonormal geral (dx, dy, dz)(FLANDERS, 1963)	p. 20
2	Ilustração do processo de "cortar e colar"de desclinação tipo-cunha(a) Corte do cilindro em dois planos, (b) rotação da estrutura, (c) adição de material a parte em vazio do objeto (PUNTIGAM; SOLENG, 1997). . . .	p. 29
3	As seis distorções de Volterra. Sendo de (a)-(c) tipo Deslocação. E (d)-(f) tipo Desclinação (PUNTIGAM; SOLENG, 1997).	p. 29
4	Ilustração do processo de desclinações positivas. (a) Um sólido cristalino com forma hexagonal, dividido em regiões de corte pelos planos, (b) o setor destacado é removido com ângulo $\phi/2\pi$, (c) juntando as extremidades, gerando o Defeito Topológico conhecido como desclinação positiva (BAKKE, 2009).	p. 30
5	Ilustração do processo de desclinações negativas. (a) Um sólido cristalino com forma hexagonal, dividido em regiões de corte pelos planos, (b) o setor destacado possui ângulo de $\phi/2\pi$, (c) logo após é inserido um novo material na região que estava delimitada pelos planos (BAKKE, 2009). .	p. 30
6	Corte na secção reta do cilindro (KATANAIEV, 2005).	p. 38
7	Deslocação linear de borda. Com vetor de Burgers perpendicular à linha de deslocamento(KATANAIEV, 2005).	p. 39
8	Seção reta do cilindro com deslocação de borda. C é o contorno de integração para o vetor Burgers \mathbf{b} (KATANAIEV, 2005).	p. 40
9	Cilindro com deslocação de borda e secção reta transformando um círculo em espiral (KATANAIEV, 2005).	p. 44
10	Uma conta carregada em um anel circular por meio do qual passa um longo solenoide (GRIFFITHS, 1994).	p. 52

11	Primeira página de publicação com resumo no <i>Journal Physica B: Condensed Matter</i> (MAIA; BAKKE, 2018).	p. 54
----	---	-------

Lista de abreviaturas e siglas

PRPG – Programa de Pós-Graduação em Física

DF – Departamento de Física

CCEN – Centro de Ciências Exatas e da Natureza

UFPB – Universidade Federal da Paraíba

OHB – Oscilador Harmônico Bidimensional

Lista de símbolos

δ_i^k função delta de Kronecker

Δ o operador de Laplace

ϵ_{ij} tensor de deformação

σ_{ij} tensor de tensão

λ no capítulo 2 definido como os coeficientes de Lamé

μ no capítulo 2 definido como a constante *shear modulus*

K módulo de compressão hidrostática

c_{ijkl} tensor de elasticidade

χ parâmetro relacionado ao defeito topológico tipo deslocação

\hbar constante de Planck sobre 2π

c velocidade da luz $\approx 3 \times 10^8 \frac{[metros]}{[segundo]}$

Sumário

1	Introdução	p. 14
2	Geometria Diferencial	p. 17
2.1	A métrica	p. 17
2.2	O Operador de Laplace-Beltrami	p. 19
2.3	Introdução ao Defeito Topológico	p. 22
2.3.1	Classificação pelo Processo de Volterra	p. 28
2.4	O Oscilador Harmônico Bidimensional	p. 30
2.5	O Oscilador Harmônico na Presença de Deslocação Tipo-Hélice	p. 35
3	Oscilador Harmônico num Meio Elástico com uma Deslocação Espiral	p. 38
3.1	O Defeito de Deslocação Espiral	p. 38
3.1.1	Métrica do Defeito: Deslocação Espiral	p. 40
3.1.2	O Operador de Laplace-Beltrami: Deslocação Espiral	p. 43
3.2	Oscilador Harmônico na Presença de uma Deslocação Espiral	p. 44
3.3	Confinamento por Potencial de Paredes Rígidas	p. 48
4	Considerações finais	p. 50
	Apêndice A – O Efeito Aharonov-Bohm para Estados Ligados	p. 51
	Anexo A – Lista de Publicação	p. 54
	Referências	p. 55

1 Introdução

O protótipo de um sistema que envolva oscilações em qualquer área das ciências naturais é o oscilador harmônico simples. Descreve com boa aproximação de regimes como, acústica de vibrações atômicas (KITTEL, 1953), propriedades térmicas e magnéticas que envolvam libração na orientação dos núcleos (REIF, 1965) e também na eletrodinâmica de sistemas quânticos para ondas eletromagnéticas, entre tantos outros (JACKSON, 1998). Nos primeiros anos da física moderna, o postulado de Planck já previa que a energia de uma partícula executando um movimento oscilatório poderia ter valores de energia discretos¹. Tal modelo é bastante utilizado porque muitos potenciais de funções contínuas da posição que são descritos como harmônico nas proximidades do ponto de equilíbrio (EISBERG; RESNICK, 1923).

Em cristais, os defeitos topológicos estão relacionados com a presença de curvatura e torção, sendo que para o último caso normalmente usado para estudos em semicondutores². Outra linha de pesquisa se faz presente no contexto da relatividade geral, onde trata da topologia do espaço-tempo. Sendo o ponto comum entre estas áreas da física é a descrição destes defeitos pelo processo Volterra³.

Uma contribuição inicial para o desenvolvimento dos trabalhos envolvendo deslocções (um tipo específico de defeito topológico), foi do pesquisador Kohler (KOEHLER, 1941), mais especificamente envolvendo uma nova teoria sobre defeitos, que o mesmo chamou de deformações plásticas. Já para sistemas de grãos de cristais, a participação significativa introdutória de modelos do mesmo tipo de irregularidade, foram abordadas por Read e Shokley (READ; SHOCKLEY, 1950). Enquanto isso, Peach e Koehler iniciaram o tema das forças exercidas sobre as topologias específicas e aos campos de tensão em seu estudo de título: *The Forces Exerted on Dislocations and the Stress Fields Produced by Them* (PEACH; KOEHLER, 1950). A literatura de formas contínuas de estruturas, que se desenvolveu

¹Veja os detalhes desta afirmação na referência (EISBERG; RESNICK, 1923)

²Veja os trabalhos (DEXTER; SEITZ, 1952), (SHOCKLEY, 1953), (FIGIELSKI, 2002) e (JASZEK, 2001)

³Para mais informações (PUNTIGAM; SOLENG, 1997) e (MARQUES; FURTADO; MORAES, 2005)

com os pesquisadores, Nye (NYE, 1953) e Kröner (KRÖNER, 1958). Continuamente, Mura (MURA, 1967) adicionou ainda mais para o assunto em seu artigo sobre teoria contínua da plasticidade e deslocamentos, juntamente com Weng e Phillips (WENG; PHILLIPS, 1976), que dissertaram sobre a cinemática da distribuição contínua.

Em resumo, os grandes representantes desse esforço de desenvolvimento científico abriram portas para os trabalhos de Ortiz, Repetto e Stainer (ORTIZ; REPETTO; STAINIER, 2000), que discutiram estruturas de deslocamento de subgrupos; Regueiro et al. (REGUEIRO; BAMMANN; MARIN, 2002), que introduziu um modelo de plasticidade não-local para explicar os defeitos; Kuhlmann-Wilsdorf (KUHLMANN-WILSDORF, 1989), explorou o tema de irregularidade plástica no contexto de estruturas iguais, mas de baixas energias; novamente Kuhlmann-Wilsdorf (KUHLMANN-WILSDORF, 1999), à sistemas tipo-cristalino; Bammann (BAMMANN, 2001), com análise de padrões de plasticidade cristalina contendo uma escala de comprimento natural; Hahner, Bay e M. Zaiser (HÄHNER; BAY; ZAISER, 1998) deram continuidade as repetições de características de fractal durante a deformação plástica. De acordo com (VALANIS; PANOSKALTSIS, 2005), esta é uma pequena amostra de trabalhos relevantes.

A análise de sistemas quânticos na presença de defeitos topológicos pode produzir algumas alterações. Como exemplo, os efeitos devido à topologia de uma deslocação tipo-hélice sobre o oscilador harmônico bidimensional provocam a quebra de degenerescência nos níveis de energia e gera um efeito análogo ao Aharonov-Bohm (FURTADO; MORAES, 2000).

O objetivo desse trabalho é analisar as possíveis mudanças devido à introdução de defeito topológico de deslocação tipo-esprial na dinâmica quântica de uma partícula sem spin sujeita ao oscilador harmônico bidimensional. Além disso, estender a discussão do sistema ao confinamento de potenciais de paredes rígidas e quais contribuições esses modelos proporcionarão. Em ambos os casos obter soluções de maneira analítica (MAIA; BAKKE, 2018).

O primeiro capítulo da dissertação contém uma revisão para total compreensão do desenvolvimento matemático e teórico do trabalho. A descrição detalhada da geometria diferencial, que envolve conceitos como métrica e o operador de Laplace-Beltrami, que estão contidos no capítulo 2 (*Geometria Diferencial*). O capítulo 3 (*Oscilador Harmônico num Meio Elástico com uma Deslocação Esprial*) soluciona de maneira analítica a equação de Schrödinger para uma partícula quântica sem spin sujeita a um oscilador harmônico bidimensional devido à presença de uma deslocação esperial. Finalizamos esse

capítulo discutindo o confinamento desta partícula quântica em uma barreira com paredes impenetráveis. No capítulo 4 mostraremos nossas considerações finais.

Em todos os capítulos desta dissertação são adotados os sistemas de unidades naturais ($\hbar = c = 1$). O desenvolvimento das seções (2.4 e 2.5) e capítulo 3 são descritos pelas coordenadas cilíndricas.

2 Geometria Diferencial

Este capítulo trata de uma revisão, para introduzir os conceitos básicos e necessários para entendimento do trabalho. Está dividido da seguinte forma: na seção 2.1, que compreende as propriedades do espaço, como a noção de distância e irregularidades; na seção 2.2, que mostra como as operações de diferenciação para qualquer sistema geométrico descrito pelo tensor métrico; consecutivamente, a seção 2.3, apresenta como descrever certos tipos de defeitos topológicos; e na subseção 2.3.1, como funciona o método de "cortar e colar" de Volterra; seção 2.4, analisa a dinâmica quântica de uma partícula neutra oscilando harmonicamente no plano; por final a seção 2.5, desenvolve a dinâmica quântica de um oscilador sujeito a condição de fronteira não-trivial.

2.1 A métrica

Nesta seção de revisão é destacado como é definido as propriedades geométricas do espaço, através do conceito de Métrica.

Supondo o intervalo infinitesimal ds de dois pontos vizinhos do espaço x^i e $x^i + dx^i$ sendo que, para qualquer sistema de coordenadas a distância entre eles permanecerá constante¹. Na forma

$$ds^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j, \quad (2.1)$$

a equação (2.1) é conhecida como elemento de linha e a quantidade $g_{ij}(x)$ que define as propriedade geométricas do espaço, como sendo, as componentes do tensor métrico \mathbf{g} , que possui simetria para os índices (i, j) , logo: $g_{ij} = g_{ji}$, e não-singular se $g = \det(g_{ij}) \neq 0$, portanto a inversa de g_{ij} é g^{ij} ,

¹Adotando a *convenção de Einstein*, os índices que se repetem nas equações representam uma soma sobre os mesmo

$$g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k, \quad (2.2)$$

tal que δ_i^k é função delta de Kronecker (D'INVERNO, 1992).

Alguns exemplos de elementos de linha, são:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (2.3)$$

representa o sistema de coordenadas cartesiano. Para coordenadas esféricas,

$$ds^2 = dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\text{sen}\theta d\phi^2. \quad (2.4)$$

E para coordenadas cilíndricas, que será utilizada nas próximas seções,

$$ds^2 = dr^2 + r^2d\phi^2 + dz^2. \quad (2.5)$$

Como a métrica é definida para um espaço geométrico geral, sendo ele plano relativístico(Minkowski), curvou ou tridimensional. Essas componentes do tensor métrico são dispostas em uma matriz da seguinte maneira:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

que para o sistema de coordenadas cilíndricas,

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

sua inversa

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Esta seção apresenta conceitos mais fundamentais de toda geometria espacial, a métrica. Inicialmente para coordenadas cartesianas, esféricas e cilíndricas, todas dentro do

espaço euclidiano e posteriormente generalizado para um espaço geral a parti da equação (2.1).

2.2 O Operador de Laplace-Beltrami

O operador laplaciano está presente em vários contextos da física, como a condução de calor, propagação de ondas e em grande destaque na eletrodinâmica. Tem esse nome em homenagem ao matemático Pierre Simon Laplace (1749-1827), que desenvolveu trabalhos sobre soluções de equações diferenciais Parciais.

O operador de Laplace é definida no espaço euclidiano usual em coordenadas cartesianas como o divergente do gradiente $\nabla \cdot \nabla \varphi$ aplicado a uma função escalar pontual $\varphi(x, y, z)$ da seguinte maneira

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\hat{x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right), \quad (2.9)$$

segue que,

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \quad (2.10)$$

e pode ser representado como ∇^2 ou Δ (ARFKEN; WEBER, 2005). Para o Laplace-Beltrami, que é uma extensão das funções laplacianas, formulado em uma variedade (do inglês *manifold*) também representado de tal forma ∇^2 ou Δ . Possui definição semelhante, já que o gradiente de uma função f e o divergente de um campo vetorial \mathbf{X} feito no domínio de uma variedade riemanniana. O gradiente, divergente e o Laplace-Beltrami estão descritos abaixo respectivamente

$$(\nabla f)^i = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}, \quad (2.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{X} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^j} (\sqrt{|g|} X^j), \quad (2.12)$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{|g|} g^{ik} \frac{\partial f}{\partial x^i}), \quad (2.13)$$

as componentes representadas pelo g^{ij} são de segunda ordem contravariante associado ao tensor métrico. $\sqrt{|g|}$ é a raiz quadrada do determinante de g_{ij} .

O desenvolvimento a seguir foi retirado do livro *Differential Forms with Applicati-*

ons to the Physical Sciences (FLANDERS, 1963). Uma base ortonormal² (dx, dy, dz) para geometria Euclidiana usual e em cada ponto \vec{P} no \mathbf{R}^3 anexa um quadro de referência local, com os vetores da base unitários e simultaneamente ortogonais representados por $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$, observe a figura (1).

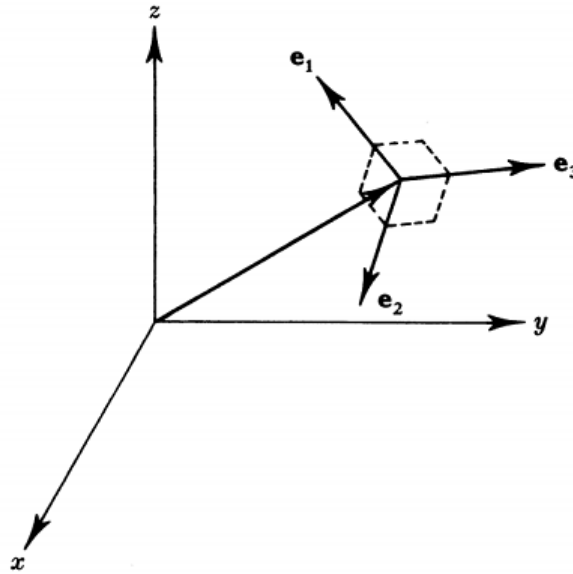


Figura 1: Idealização do espaço coordenado local $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ numa base ortonormal geral (dx, dy, dz) (FLANDERS, 1963)

O ponto \mathbf{P} na base usual

$$d\vec{P} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}, \quad (2.14)$$

também pode ser escrito na base local, como

$$d\vec{P} = \eta_1\hat{e}_1 + \eta_2\hat{e}_2 + \eta_3\hat{e}_3, \quad (2.15)$$

onde os η_i são os um-forma. Para uma função f do \mathbf{R}^3 a representação pode ser,

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)dz. \quad (2.16)$$

Ao aplicar o operador adjunto da derivada d , conhecido como *hodge star* ou em tradução livre "estrela de hodge" à função df ,

$$*df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dydz + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dzdx + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)dxdy. \quad (2.17)$$

²Cujo os vetores são unitários e possuem ângulos retos.

O objeto $*$ é um operador linear que estabelece um mapeamento um-para-um do espaço de vetores k para o espaço de $(n - k)$ -vetores. Sendo k um número inteiro tal que $0 \leq k \leq n$. Diferenciando a relação $*df$,

$$d(*df) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) dx dy dz = (\Delta f) dx dy dz. \quad (2.18)$$

Se o três-forma é conhecido $\eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \eta_3 = dx dy dz$, logo o laplaciano passa a ser também, já que a expressão acima tornou o operador de Laplace multiplicado pelo elemento de volume. Podendo expressar em relação aos termos de η_i ,

$$df = c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2 + c_3 \eta_3, \quad (2.19)$$

então

$$*df = c_1 \eta_2 \eta_3 + c_2 \eta_3 \eta_1 + c_3 \eta_1 \eta_2, \quad (2.20)$$

analogamente ao descrito na representação (dx, dy, dz) , diferenciação torna-se

$$d(*df) = (\Delta f) \eta_1 \eta_2 \eta_3. \quad (2.21)$$

Basta supor o seguinte para encontrar a relação do laplaciano: para x, y e z no domínio de \mathbf{R}^3 , é chamado de sistema de coordenadas ortogonais se os vetores

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial x}, \frac{\partial \vec{P}}{\partial y}, \frac{\partial \vec{P}}{\partial z}, \quad (2.22)$$

são mutuamente perpendiculares. Para funções adequadas α, β e γ os vetores

$$\hat{e}_1 = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \vec{P}}{\partial x}, \hat{e}_2 = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \vec{P}}{\partial y}, \hat{e}_3 = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \vec{P}}{\partial z}, \quad (2.23)$$

então,

$$d\hat{P} = \left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial z} \right) dz, \quad (2.24)$$

e na base \hat{e}_i , representa da seguinte forma

$$d\vec{P} = (\alpha dx) \hat{e}_1 + (\beta dy) \hat{e}_2 + (\gamma dz) \hat{e}_3, \quad (2.25)$$

a conexão é feita pelos termos $\eta_1 = \alpha dx$, $\eta_2 = \beta dy$ e $\eta_3 = \gamma dz$.

Reescrevendo a função df da equação (2.18) na base descrita acima,

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \frac{\eta_1}{\alpha} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \frac{\eta_2}{\beta} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \frac{\eta_3}{\gamma}, \quad (2.26)$$

atuando o operador *hodge star*

$$*df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \frac{\eta_2 \eta_3}{\alpha} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \frac{\eta_3 \eta_1}{\beta} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \frac{\eta_1 \eta_2}{\gamma}, \quad (2.27)$$

comparando com

$$d(*df) = (\Delta f) \eta_1 \eta_2 \eta_3 = \alpha \beta \gamma (\Delta f) dx dy dz, \quad (2.28)$$

para obter Δf

$$\Delta f = \frac{1}{\alpha \beta \gamma} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\beta \gamma}{\alpha} \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\alpha \gamma}{\beta} \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\alpha \beta}{\gamma} \frac{\partial f}{\partial z} \right) \right]. \quad (2.29)$$

A equação (2.29) é a forma geral para o laplaciano no espaço euclidiano.

É preciso definir essas considerações ao caso riemanniano. Seja M uma variedade riemanniano de dimensão d , com componentes do tensor métrico g_{ij} em coordenadas locais (x^1, x^2, \dots, x^d) . Para $f : M \rightarrow R$ ser uma função em M , e \mathbf{X} um campo vetorial. O gradiente é definido como na equação (2.10). Num campo vetorial $\mathbf{Z} = Z^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ o divergente é dado por

$$\nabla \cdot \mathbf{Z} := \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} (\sqrt{g} Z^j). \quad (2.30)$$

O laplaciano-beltrami é definido (veja equação 2.12) (JOST, 2011).

Esta seção demonstra as formas diferenciais em espaços geométricos, tanto para o euclidiano usual quanto para uma variedade riemanniana qualquer.

2.3 Introdução ao Defeito Topológico

Nesta seção de revisão é destacado como é representado os defeitos topológicos através de geometria diferencial.

Por exemplo, alguns materiais consistem de um arranjo periódico de átomos idênticos presentes em pontos de uma rede cúbica simples a uma distância L um do outro. A expressão para localização dos átomos pode ser dada pelo seguinte,

$$\mathbf{x}_n = L(c_1\hat{\mathbf{a}}_1 + c_2\hat{\mathbf{a}}_2 + c_3\hat{\mathbf{a}}_3), \quad (2.31)$$

tal que \hat{a}_i são componentes de uma base ortonormal. Que representa a rede sólida através da métrica Euclidiana $\delta_{ij} = \text{diag}(+++)$. Até então, a descrição representa um material ideal, simétrico e com suas características bem representadas pela geometria usual. Porém, se forças externas são aplicadas sobre a rede, isto irá criar uma deformação na estrutura e conseqüentemente a descrição matemática necessitará de uma mudança. A nova posição dos átomos do ponto \mathbf{x}_n

$$\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}'_n = \mathbf{x}_n + \mathbf{u}_n(x). \quad (2.32)$$

Como a distância de cada átomo é L , considerando os limites em que $L \rightarrow 0$, obtendo uma representação do contínuo, assim, a definição do campo vetorial de deslocamento, $u_i(x)$, como

$$x'_i = x_i + u_i(x). \quad (2.33)$$

A representação da distância infinitesimal entre dois pontos vizinhos da rede, pode ser expressa da forma, $dx'_i = dx_i + du_i$, e substituindo $du_i = \partial_j u_i dx_j$ para chegar na relação³

$$dx'_i = dx_i + \partial_j u_i dx_j. \quad (2.34)$$

O comprimento entre esses dois pontos da rede é escrito como

$$dL'^2 = dx_i'^2 = (dx_i + du_i)^2, \quad (2.35)$$

e para substituição do termo $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_j})$ em dL' , toma finalmente a forma

$$dL' = (dL^2 + 2\epsilon_{ij} dx_i dx_j)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.36)$$

³Observe que a convenção de Einstein propriamente dita, leva em consideração a soma por índices contravariantes com covariantes. Neste caso onde os termos são covariantes é permitido soma, pois, a métrica é unitária e diagonal(métrica euclidiana). Conseqüentemente, utilizando a álgebra de levantamento e abaixamento de índices pelo tensor métrica, não irá causar qualquer alteração na expressão.

com $dL = \sqrt{dx_i^2}$. O tensor representado por ϵ_{ij} é simétrico e chamado de *tensor de deformação*. Para aproximação linear $\partial_j u_i \ll 1$. O tensor tem a forma (KATANAIEV, 2005)

$$\epsilon_{ij} \equiv \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i). \quad (2.37)$$

O tensor de *deformação* como se trata de um tensor simétrico, então possui diagonalização em qualquer ponto. Isto significa que, em qualquer ponto do sólido, uma representação de sistema de eixos coordenados pode ser escrito (LANDAU; LIFSHITZ, 1959).

Se um sólido está em equilíbrio térmico e mecânico, isto significa que se considerar uma porção deste corpo, a resultante das forças atuando sobre ele é zero. Porém, quando ocorre uma deformação no objeto, a distribuição das moléculas tende a se manter no estado original. Estas características são conhecidas como *tensões internas*.

A soma de todas as forças que atuam em cada um dos elementos de volume de um sólido qualquer, pode ser escrito como uma integral de $\int \mathbf{F}dV$, onde \mathbf{F} é a força por unidade de volume e $\mathbf{F}dV$, é a força que atua sobre uma porção de volume dV . Então, qualquer parte do objeto, cada uma das componentes $\int F_i dV$ da resultante de todas as tensões internas podem ser transformadas em uma integral de superfície. Como a integral de volume é em relação a um vetor, e não a um escalar, um vetor deve ser a divergência de um tensor de segunda ordem, ou seja, F_i tem a forma:

$$F_i = \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_j}. \quad (2.38)$$

Pelo teorema de Green a força sobre qualquer volume pode ser expressa como uma integral sobre a superfície que limita o volume:

$$\int F_i dV = \int \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV = \oint \sigma_{ij} df_j, \quad (2.39)$$

onde \mathbf{df} é o vetor dos elementos de superfície, dirigido normal a superfície, e df_i , as componentes.

A integral de superfície (2.39) é a força que atua sobre o volume por essa área, exercida pelas partes do corpo que a cercam. Conseqüentemente, a tensão que o volume produz sobre a superfície é igual e com sentido contrário. Então, as forças exercidas pelas tensões internas sobre a região da casca do corpo é

$$- \oint \sigma_{ij} df_j, \quad (2.40)$$

e o tensor σ_{ij} recebe o nome de *tensor de tensão*.

A energia livre para um corpo isotrópico deformado é dada pelo seguinte

$$F = F_0 + \frac{\lambda}{2} \epsilon_{ii}^2 + \mu \epsilon_{ij}^2, \quad (2.41)$$

as constantes λ e μ são chamados de coeficientes de Lamé e *shear modulus* respectivamente. A mudança do volume é dada pela soma ϵ_{ii} . Caso a soma seja zero, consequentemente o volume não muda durante a deformação e somente uma mudança de forma ocorre. As deformações em que o volume não varia, são chamadas de *deformações de corte*.

O caso contrário é aquele que a deformação produz uma mudança de volume, mas sem alterar a forma do corpo. Cada parte de volume dessa deformação mantém sua estrutura. Está modificação é $\epsilon_{ij} = \text{constante} \times \delta_{ij}$, conhecida como *compressão hidrostática*.

Para determinar o *tensor de tensão*, usa a equação da termodinâmica expressa na forma

$$d\varepsilon = TdS + \sigma_{ij}d\epsilon_{ij}, \quad (2.42)$$

está é a relação fundamental da termodinâmica para corpo deformados. Sendo $d\varepsilon$ taxa infinitesimal de energia interna, TdS variação de calor, T a temperatura e dS o termo de diferenciação da entropia. Mantendo a entropia constante e a temperatura constante respectivamente as expressões para as componentes do tensor de tensão são dadas pelo seguinte:

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \epsilon_{ij}} \right)_S = \left(\frac{\partial e}{\partial \epsilon_{ij}} \right)_T, \quad (2.43)$$

onde e é a energia livre do corpo, naturalmente representada por $e = \varepsilon - TS$. Com ajuda das relações anteriores a diferenciação de e é feita na forma:

$$de = K\epsilon_U d\epsilon_U + 2\mu \left(\epsilon_{ij} - \frac{1}{3}\epsilon_U \delta_{ij} \right) d \left(\epsilon_{ij} - \frac{1}{3}\epsilon_U \delta_{ij} \right). \quad (2.44)$$

μ se chama de *módulo de compressão hidrostática* e está relacionado com os coeficientes de Lamé pela expressão:

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu. \quad (2.45)$$

O *tensor de tensão* resulta em:

$$\sigma_{ij} = K\epsilon_{ll}\delta_{ij} + 2\mu(\epsilon_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\epsilon_{ll}). \quad (2.46)$$

Outra forma útil para energia livre de corpo deformado é relaciona-lo com uma função quadrática do tensor de deformação. De acordo com o teorema de Euler,

$$\epsilon_{ij} \frac{\partial e}{\partial \epsilon_{ij}} = 2e, \quad (2.47)$$

como $\frac{\partial e}{\partial \epsilon_{ij}} = \sigma_{ij}$,

$$e = \frac{\sigma_{ij}\epsilon_{ij}}{2}. \quad (2.48)$$

A forma geral para densidade de energia elástica de um cristal deformado, através da diferença $dL' - dL$ e pelo tensor de deformação, pode ser escrito como:

$$e(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}c_{ijkl}\epsilon_{ij}\epsilon_{kl}, \quad (2.49)$$

onde c_{ijkl} é conhecido como tensor de elasticidade. Como ϵ_{ij} é simétrico, o produto $\epsilon_{ij}\epsilon_{kl}$ não varia quando se troca os índices $i \leftrightarrow j$, $k \leftrightarrow l$, ou o par $i, j \leftrightarrow l, m$. O tensor c_{ijkl} possui as propriedades de simetria:

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{klij}, \quad (2.50)$$

representado no meio isotrópico pela expressão

$$c_{ijkl} = \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}, \quad (2.51)$$

de acordo com (LANDAU; LIFSHITZ, 1959). O tensor de tensão é definido como:

$$\sigma_{ij} \equiv \frac{\delta e}{\delta \epsilon_{ij}} = c_{ijkl}\epsilon_{kl}, \quad (2.52)$$

o elemento e muda, quando há variações no tensor de deformação por incrementos de $\delta\epsilon_{ij}$. Mudando a expressão $e \rightarrow \delta e = c_{ijkl}\epsilon_{kl}\delta\epsilon_{ij}$ (LANDAU; LIFSHITZ, 1959).

Para substituição da expressão (2.51) em (2.52) e obter

$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk}. \quad (2.53)$$

Uma fonte externa que produz uma densidade de força $f_i(\mathbf{x})$ em um sólido ou uma densidade de tensões interna não-elástica distribuída dentro do sólido, como descrito anteriormente, pode ter o trabalho descrito da seguinte forma: Para o caso da parte interna,

$$\omega(\mathbf{x}) = -f_i(\mathbf{x})u_i(\mathbf{x}). \quad (2.54)$$

A força total do sistema é

$$F_T = \int [e(\mathbf{x}) + \omega(\mathbf{x})] d^3x, \quad (2.55)$$

quando a energia total é minimizada em relação a variação $\delta u(\mathbf{x})$ obtém-se o estado de equilíbrio, levando em consideração uma distorção na rede cristalina, isto é,

$$\int [\partial_i(\delta u_j)\sigma_{ij} - f_i\delta u_j] dx^3 = 0. \quad (2.56)$$

O primeiro termo da equação anterior pode ser escrito na forma,

$$\int [\partial_i(\delta u_j)\sigma_{ij} - f_i\delta u_j\partial_i\sigma_{ij}] dx^3 - \int f_i\delta u_j dx^3 = 0. \quad (2.57)$$

O primeiro termo da equação (2.57) é análogo ao da eq.(2.39) com uma diferença da adição da variação $\delta u(\mathbf{x})$. Então basta aplicar o teorema de Green na (2.57),

$$\int \sigma_{ij}\delta u_i dS_i - \int (\partial_i\sigma_{ij} + f_i)\delta u_j dx^3 = 0. \quad (2.58)$$

Só então obter a equação de Euler-Lagrange para a elasticidade linear, já que $\delta u_i \rightarrow 0$ no infinito, podendo ser descartada a integral de superfície. Dessa forma, para um ponto fixo do sólido \mathbf{x} que

$$\partial_i\sigma_{ij}(\mathbf{x}) + f_i(\mathbf{x}) = 0, \quad (2.59)$$

que carrega o sentido físico para as componentes: σ_{i1} , σ_{i2} e σ_{i3} . Sendo σ_{ij} elementos de força por unidade de área, que é aplicada em elementos de superfícies dS_i (KLEINERT; HAGEN., 1989).

O ponto de encontro da geometria riemanniana com a teoria da elasticidade ocorre

quando considerações de transformações infinitesimais que levam um ponto $x^{\mu'}$ para x^{μ} no espaço-tempo

$$x^{\mu'} = x^{\mu} - \xi^{\mu}(x), \quad (2.60)$$

tal que, transformações infinitesimais $\xi^{\mu}(\mathbf{x})$ sejam iguais aos deslocamentos $u_i(x)$ (com o sinal invertido) no respectivo ponto \mathbf{x} . E considerando que $x' = y$ e lembrando da relação $u_i(x) = u_i(y(x))$, a relação para o tensor métrico $g_{ij}(x)$ pode ser escrita como

$$g_{ij}(x) = \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^l}{\partial x^j} \delta_{kl} \approx \delta_{ij} - \partial_i u_j - \partial_j u_i = \delta_{ij} - 2\epsilon_{ij}. \quad (2.61)$$

Com a expressão (2.61) a descrição de deformações em redes cristalinas através do tensor métrico provindo da geometria diferencial é possível. Desenvolvida por Katanaev e Volovich, essa aproximação linear pode simular defeitos correspondendo a uma curvatura singular, torção ou com a ocorrência de ambos (BAKKE, 2009).

2.3.1 Classificação pelo Processo de Volterra

Esta seção introduz a análise do processo de Volterra. As distorções foram introduzidas por Volterra no contexto da teoria da elasticidade e, posteriormente, foram sujeitas a inúmeras investigações em sólidos e cristais na teoria do contínuo. No ano de 1907, Vito Volterra (1860-1940) publicou um grande trabalho sobre deformações elásticas de múltiplas conexões em objetos sólidos tridimensionais (VOLTERRA, 1907). A descrição dos processos é gerada conceitualmente através de "cortar e colar". A classificação dos defeitos estão relacionadas com a simetria de translação da rede cristalina conhecida como *deslocação* para o grupo $\mathbf{T}(\mathbf{3})$ e para simetria de rotação da rede, conhecida como *desclinação* para o respectivo conjunto $\mathbf{SO}(\mathbf{3})$.

Em um cilindro oco feito de material elástico cortado por dois planos que fazem um ângulo $\phi = 0$, isso supondo coordenadas cilíndricas $\{r, \phi, z\}$. Em seguida, separa-se os planos girando-os um contra o outro. Por fim, adiciona um material na região que foi aberta, concluindo o processo de cortar e colar que caracteriza uma desclinação (Veja o processo na figura 2).

O processo de Volterra, produz seis tipos diferentes de objetos, que pertence aos seis graus de liberdade de movimento no \mathbf{R}^3 . Para o grupo de translação conhecido como *deslocações*, de acordo com a figura 3, estão classificados pelos tipos: (a) borda/espiral;

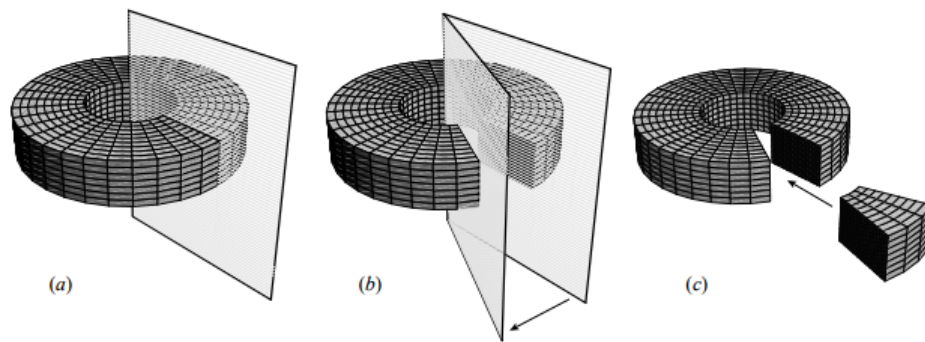


Figura 2: Ilustração do processo de "cortar e colar" de desclinação tipo-cunha (a) Corte do cilindro em dois planos, (b) rotação da estrutura, (c) adição de material a parte em vazio do objeto (PUNTIGAM; SOLENG, 1997).

(b) borda; (c) hélice. O grupo de rotação é composto pelas desclinações (PUNTIGAM; SOLENG, 1997).

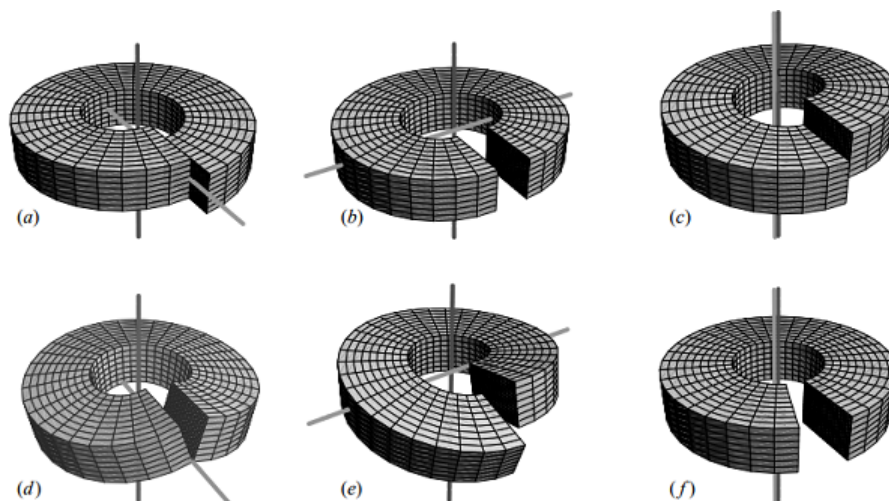


Figura 3: As seis distorções de Volterra. Sendo de (a)-(c) tipo Deslocação. E (d)-(f) tipo Desclinação (PUNTIGAM; SOLENG, 1997).

A **deslocação** em cristais, permite que átomos das duas superfícies do corte possam ser alinhados. Isso só acontece quando uma operação de simetria translacional de rede é satisfeita. Exemplos estão representadas na figura 3 de (a) à (c). Os defeitos de translações perpendiculares a um eixo ao longo das superfícies de corte, são conhecidos como *deslocação tipo-lateral* Figura 3(b). E chamados de *deslocação tipo-hélices* quando os defeitos de translações são paralelas ao eixo definido pelas superfícies de cortes (veja Figura 3c).

Assim como nos casos anteriores, para os defeitos associados a simetria de rotação, há dois grupos de classificações. O grupo das *Desclinações positivas*: Quando efetuado o "corte" de um certo material, e em seguida retira-se uma região e cola as regiões delimi-

tadas pelos planos iniciais. Sendo que a aparição do ângulo no espaço onde havia o pedaço retirado é chamado de **ângulo de déficit**(Veja Figura 4).

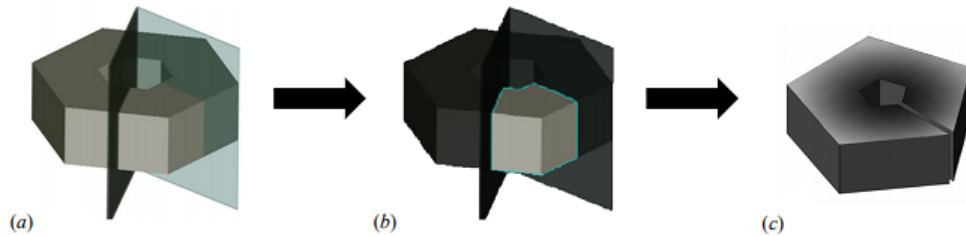


Figura 4: Ilustração do processo de desclinações positivas. (a) Um sólido cristalino com forma hexagonal, dividido em regiões de corte pelos planos, (b) o setor destacado é removido com ângulo $\phi/2\pi$, (c) juntando as extremidades, gerando o Defeito Topológico conhecido como desclinação positiva (BAKKE, 2009).

Analogamente, as *Desclinações negativas* são quando preenche o espaço delimitado pelos planos com outro material (Veja figura 5).

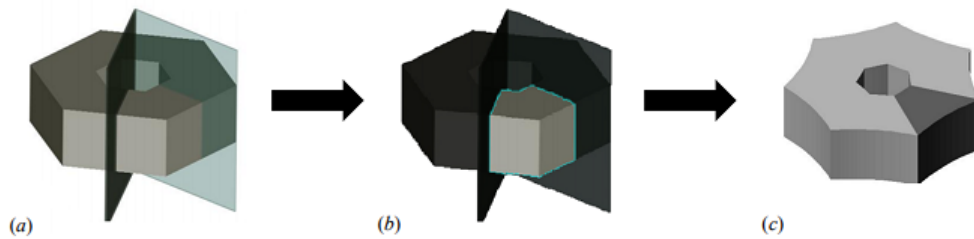


Figura 5: Ilustração do processo de desclinações negativas. (a) Um sólido cristalino com forma hexagonal, dividido em regiões de corte pelos planos, (b) o setor destacado possui ângulo de $\phi/2\pi$, (c) logo após é inserido um novo material na região que estava delimitada pelos planos (BAKKE, 2009).

Nesta seção foi os diferentes tipos de formação de defeitos topológicos feitos pelo processo de cortar e colar de volta.

2.4 O Oscilador Harmônico Bidimensional

Nesta seção de revisão que antecede o tema central da dissertação, obtemos soluções exatas da equação de Schrödinger para um oscilador harmônico bidimensional. O objetivo é investigar a dinâmica quântica de uma única partícula oscilando harmonicamente no plano. Como não há defeito topológico, iremos descrever o espaço euclidiano em coordenadas cilíndricas, conseqüentemente o elemento de linha tem a forma da equação (2.5)

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2, \quad (2.62)$$

tal que, r é a coordenada radial e ϕ angular. Obtido a partir da relação $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ e com os termos não nulos

$$g_{rr} = 1; \quad g_{\phi\phi} = r^2; \quad g_{zz} = 1, \quad (2.63)$$

a matriz g_{ij} representa as componentes do tensor métrico, equação (2.7) e sua inversa a (2.8).

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.64)$$

e obtém-se a matriz inversa através da expressão $g^{ij} g_{ij} = \mathbf{1}_{3 \times 3}$,

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.65)$$

Uma partícula quântica não-relativista incorporada em plano de fundo. Seu comportamento é descrito pela equação de Schrödinger

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m} \Delta \Psi + \frac{mw^2 r^2}{2} \Psi, \quad (2.66)$$

onde m é a massa e considerando o sistema de unidades naturais ($\hbar = c = 1$). O símbolo Δ é o operador de Laplace-Beltrami

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (g^{ij} \sqrt{g} \partial_j), \quad (2.67)$$

que para esse sistema de coordenadas tem a forma,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (2.68)$$

com $g = \det|g_{ij}|$. A equação de Schrödinger com a expressão de Δ para coordenadas cilíndricas é:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right) + \frac{m\omega^2 r^2}{2}\Psi, \quad (2.69)$$

onde $V(r)$ é um potencial de interação cilíndricamente simétrico,

$$V(\rho) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2. \quad (2.70)$$

O hamiltoniano dessa equação não contém explicitamente os termos do tempo t , de ϕ nem de z . Logo, os respectivos operadores de cada componente, que são⁴: \hat{L}_ϕ (componente ϕ do momento angular) e \hat{P}_z (componente z do momento linear). Ambos comutam com o operador hamiltoniano. Isso significa que compartilham o mesmo conjunto de autofunções. Permitindo escrever a solução de tal maneira,

$$\Psi(r, \phi, z, t) = e^{-iEt + il\phi + ikz} f(r), \quad (2.71)$$

onde E a energia do sistema, l o autovalor referente a componente ϕ do momento angular e k a constante referente a componente z do momento linear. Basta calcular as derivadas de $\Psi(r, \phi, z, t)$ e substituir na equação (2.69).

A nova equação diferencial tem a forma,

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df(r)}{dr} - \left(\frac{l^2}{r^2} + A + m^2 \omega^2 r^2 \right) f(r) = 0, \quad (2.72)$$

para $A = k^2 - 2mE$. Agora aplicamos uma mudança de variável $\xi = m\omega r^2$ para deixar a equação adimensional. E chegamos na equação de Schrödinger na forma,

$$\xi \frac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2} + \frac{df(\xi)}{d\xi} - \frac{1}{4} \left(\frac{l^2}{\xi} + \frac{A}{m\omega} + \xi \right) f(\xi) = 0. \quad (2.73)$$

Para resolver a equação (2.73), necessita fazer uma análise assintótica. Para valores grandes de ξ ou seja, $\xi \rightarrow \infty$, então ξ domina completamente o resto das componentes, nesse regime,

$$f''(\xi) \approx \frac{\xi}{4}, \quad (2.74)$$

a qual tem a solução aproximada

⁴Lembrando que para componente t significa que temos soluções estacionárias $\hat{H}\Psi = E\Psi$, pela equação de Schrödinger: $i\hbar\frac{d}{dt}\Psi = E\Psi$.

$$f(\xi) \approx C_1 e^{-\frac{\xi}{2}} + C_2 e^{\frac{\xi}{2}}, \quad (2.75)$$

C_1 e C_2 são constantes. O termo C_2 não é normalizável, porque quando $|\xi| \rightarrow \infty$ o termo $C_2 e^{\frac{\xi}{2}}$ diverge, comprometendo a normalização da função de onda; então, as soluções fisicamente aceitáveis têm a forma assintótica

$$f(\xi) \propto e^{-\frac{\xi}{2}}, \quad (2.76)$$

para valores grandes de ξ . Logo, a nova função solução,

$$f(\xi) = e^{-\frac{\xi}{2}} T(\xi), \quad (2.77)$$

tal que $T(\xi)$ é uma função desconhecida. E calculando as derivadas, de primeira ordem, $f'(\xi) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{\xi}{2}}T(\xi) + e^{-\frac{\xi}{2}}T'(\xi)$, para segunda ordem, $f''(\xi) = \frac{1}{4}e^{-\frac{\xi}{2}}T(\xi) - e^{-\frac{\xi}{2}}T'(\xi) + e^{-\frac{\xi}{2}}T''(\xi)$ e substituir na equação (2.73), obtém-se o seguinte:

$$\xi \frac{d^2 T(\xi)}{d\xi^2} + \left(1 - \xi\right) \frac{dT(\xi)}{d\xi} - \frac{1}{4} \left(2 + \frac{l^2}{\xi} + \frac{A}{mw}\right) T(\xi) = 0. \quad (2.78)$$

Porém, ainda necessita analisar o limite assintótico em que $\xi \rightarrow 0$. Quando ξ tende a valores pequenos, o termo $-\frac{l^2}{4\xi}$ tende a infinito e domina o resto dos termos, nesse novo regime,

$$T''(\xi) \approx \frac{l^2}{4\xi} T(\xi). \quad (2.79)$$

Analogamente ao processo da expressão (2.75), obtemos uma solução na forma,

$$T(\xi) = \xi^{\frac{|l|}{2}} G(\xi), \quad (2.80)$$

sendo $G(\xi)$ uma função arbitrária. Calculando suas derivadas e substituindo na expressão (2.78), a equação diferencial tornasse

$$\xi \frac{d^2 G(\xi)}{d\xi^2} + (|l| + 1 - \xi) \frac{dG(\xi)}{d\xi} - \frac{1}{4} \left(2|l| + 2 + \frac{A}{mw}\right) G(\xi) = 0. \quad (2.81)$$

Satisfeito os limites assintóticos, a equação diferencial (2.81) possui solução, como

$$G(\xi) = {}_1F_1(a; c; \xi), \quad (2.82)$$

por se tratar de uma equação hipergeométrica confluyente. Com os parâmetros $c = |l| + 1$ e $a = \frac{1}{4} \left(2|l| + 2 + \frac{k^2 - 2mE}{mw} \right)$ a solução se torna,

$$G(\xi) = {}_1F_1 \left(\frac{2w(1 + |l|m + k^2 - 2mE)}{4mw}, 1 + |l|, \xi \right). \quad (2.83)$$

O comportamento assintótico de uma função hipergeométrica confluyente para grandes valores de seu argumento é:

$${}_1F_1(a, c; \xi) \approx \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} e^\xi \xi^{a-c} [1 + O(|\xi|^{-1})]. \quad (2.84)$$

Assim, devido ao comportamento divergente da função $G(\xi)$ para grandes valores de seu argumento, as soluções de estados ligados só podem ser obtidas impondo que essa função se torne um polinômio de grau n . Neste caso, a solução radial apresenta um comportamento aceitável no infinito (MEDEIROS; MELLO, 2012). Esta condição é obtida por

$$\frac{1}{4} \left(2|l| + 2 + \frac{k^2 - 2mE}{mw} \right) = -n, \quad (2.85)$$

com n permitido para os valores $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Esta equação fornece a condição de quantização no espectro de energia da partícula:

$$E_{n,l,k} = 2w \left(\frac{1}{2} + \frac{|l|}{2} + n \right) + \frac{k^2}{2m}. \quad (2.86)$$

Cada conjunto de funções de onda com o mesmo valor de n são chamados de níveis de energia do oscilador bidimensional. Para esse sistema de coordenadas, a análise não-relativista foi desenvolvida por (LANDAU; LIFSHITZ, 1965).

Nesta seção foi analisado o comportamento de um oscilador quântico bidimensional na ausência de qualquer deformação. Investigou a dinâmica quântica de uma única partícula com um potencial harmônico. Esses resultados possam ser utilizados como um método de detecção de defeitos cósmicos e também de defeitos nos sólidos caso introduzido em sistemas com irregularidades na geometria (FURTADO; MORAES, 2000).

2.5 O Oscilador Harmônico na Presença de Deslocação Tipo-Hélice

Está é uma revisão referente ao artigo *Harmonic Oscillator Interacting With Conical Singularities* (FURTADO; MORAES, 2000). Na presente seção será feita análise da dinâmica quântica de uma partícula sujeita a um defeito topológico chamado deslocação tipo-hélice. Com solução exata da equação de Schrödinger para o oscilador bidimensional.

O elemento de linha correspondente em coordenadas cilíndricas é dado por:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2 + (dz + \beta d\phi)^2, \quad (2.87)$$

com $r \geq 0$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$, sendo β , o parâmetro relacionado à torção e possui ligação direta com o vetor de burgers.

A torção associada a este defeito corresponde a uma singularidade cônica na origem. O único componente não-zero do tensor neste caso é dado pela torção duas-forma como:

$$T^1 = 2\pi\beta\delta^2(r)dr \wedge d\phi, \quad (2.88)$$

sendo $\delta^2(r)$ é a função delta bidimensional⁵. A geometria do meio, neste caso, é caracterizada por torção não-trivial. Desta forma, o vetor de burgers pode ser visto como um fluxo de torção, dado por:

$$\int_{\Sigma} T^1 = \oint_S e^1 = 2\pi\beta = b. \quad (2.89)$$

Análogo ao feito a partir da equação (2.66). O operador de Laplace-Beltrami toma a forma,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right). \quad (2.90)$$

A equação de Schrödinger para o OH na métrica (2.87) torna-se,

$$-\frac{1}{2m} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] \psi + V(r)\psi = E\psi, \quad (2.91)$$

sendo $V(r)$ o potencial tipo oscilador harmônico. Pela mudança de variável $\sigma = \gamma r^2$,

⁵Assim como $\delta(x - a)$ é diferente de zero para um ponto a na linha, a representação $\delta^2(r)$ é $\neq 0$ para um ponto no plano

com $\gamma = m\omega$ e ω definido como a frequência angular do potencial do oscilador. Assim como na seção anterior onde não era presente explicitamente algumas variáveis na equação diferencial parcial, que nesse caso são: t , ϕ e z . Logo os operadores do momento angular \hat{L}_ϕ e momento linear \hat{P}_z comutam com o hamiltoniano, conseqüentemente compartilham o mesmo conjunto de autofunções. E pelo método de separação de variáveis, e análise dos limites assintóticos⁶ podemos escrever a solução da seguinte forma:

$$\Psi(r, \phi, z) = e^{il\phi + ikz} e^{-\frac{\sigma}{2}} e^{\frac{|l-\beta k|}{2}\sigma} \Phi(\sigma), \quad (2.92)$$

a função $\Phi(\sigma)$ é desconhecida. A nova equação diferencial tem a forma:

$$\sigma \frac{d^2 \Phi(\sigma)}{d\sigma^2} + (1 + |l - \beta k| - \sigma) \frac{d\Phi(\sigma)}{d\sigma} - \left(\frac{A_c}{2\sqrt{\gamma}} + 1 + |l - \beta k| \right) \Phi(\sigma) = 0, \quad (2.93)$$

onde $A_c = -2mE + k^2$.

A solução da equação (2.93) é uma função hipergeométrica confluyente, logo:

$$\Phi = {}_1F_1 \left(\iota, \frac{|l - \beta k|}{\alpha} + 1; \frac{1}{2}(m\omega r^2) \right), \quad (2.94)$$

com $\iota = (1 + |l - \beta k| + \frac{A_c}{2\sqrt{\gamma}})$. Análogo ao que foi discutido na eq.(2.83), o comportamento assintótico para grandes valores do argumento é dada por:

$${}_1F_1(\iota, b; \sigma) \approx \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(\iota)} e^\sigma \sigma^{\iota-b} [1 + O(|\sigma|^{-1})], \quad (2.95)$$

com $b = \frac{|l-\beta k|}{\alpha} + 1$. A função $\Phi(\sigma)$ diverge para valores grandes de seu argumento, logo, as soluções para estados ligados só podem ser obtidas impondo que a função se torne um polinômio de grau n (ABRAMOWITZ; STEGUM, 1965),

$$\iota = -n. \quad (2.96)$$

Com a condição (2.96), obtém-se os níveis de energia fornecido por,

$$E = \omega \left(n + |l - \beta k| + 1 \right) + \frac{k^2}{2m}. \quad (2.97)$$

⁶O processo é análogo ao feito para gerar os termos das equações (2.74) e (2.76). Basta fazer o mesmo para a variável σ

para $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

A autofunção referente aos níveis de energia tem a expressão,

$$\Psi = C_{nl} r^{|l-\beta k|} e^{ikz} e^{il\phi} e^{-\frac{\gamma r^2}{2}} {}_1F_1\left(-n, |l-\beta k| + 1, m\omega r^2\right), \quad (2.98)$$

a constante de normalização dada por C_{nl} . O parâmetro β quebra a degenerescência dos níveis de energia. O termo β é devido à torção associada ao defeito.

3 Oscilador Harmônico num Meio Elástico com uma Deslocação Espiral

3.1 O Defeito de Deslocação Espiral

Nesta seção abordaremos a descrição das deslocações lineares de bordas em meios elásticos. Este defeito topológico está presente no problema central dessa dissertação.

Suponha uma secção transversal de um cilindro de raio R . Um corte no plano desde a origem até a borda do eixo x^2 , no ponto $(x^1 = 0, x^2 = r, x^3 = 0)$ e outro em uma região superior $(x^2 > 0, x^1 > 0)$, como descrito na figura 6.

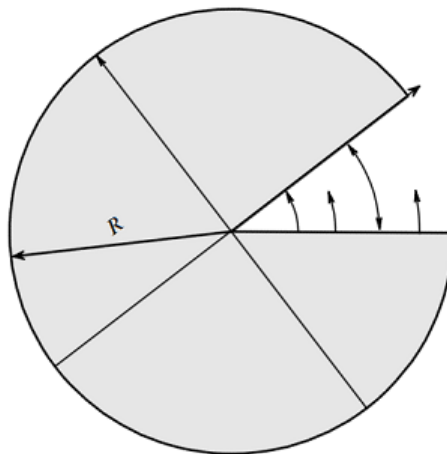


Figura 6: Corte na secção reta do cilindro (KATANAEV, 2005).

Feito isso, desloque a parte da região $(x^2 > 0, x^1 > 0)$ pelo vetor \mathbf{b} em direção ao eixo de deslocamento x^3 , em seguida, cole a superfície cortada (Veja Figura 7).

Em deformações por deslocação em cristais, considerando como meios contínuos, pos-

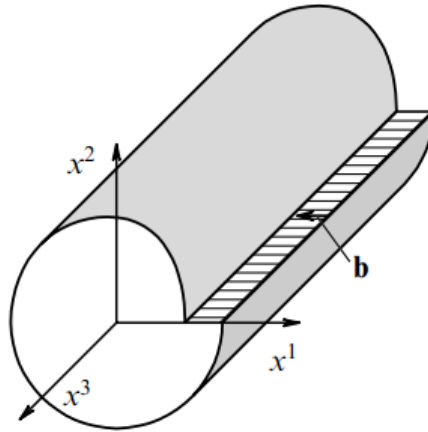


Figura 7: Deslocação linear de borda. Com vetor de Burgers perpendicular à linha de deslocamento (KATANAIEV, 2005).

suem a seguinte propriedade: quando uma região circular em qualquer contorno fechado C que rodeia a linha de deslocamento x^3 , o vetor de deslocamento elástico \mathbf{u} recebe um aumento definido e finito \mathbf{b} , igual a um dos períodos da rede; o vetor \mathbf{b} é conhecido como *vetor de Burgers* da deslocação considerada (LANDAU; LIFSHITZ, 1959). Esta propriedade é escrita na forma

$$\oint_C dx^k \partial_k u^i(x) = - \oint_C dx^k \partial_k y^i(x) = -b^i, \quad (3.1)$$

onde C é um contorno fechado que envolve o eixo de deslocamento x^3 , fig. 8.

A propriedade (3.1), define que na presença de deslocação, o vetor de deslocamento é uma função não uniforme das coordenadas. Fisicamente, por suposição, não há falta de uniformidade: O aumento \mathbf{b} denota uma mudança adicional dos pontos de rede, o que geralmente não altera seu estado. O *vetor Burgers*, pode não ser constante no corte. Neste caso, ele varia de 0 para algum valor constante de \mathbf{b} à medida que se move do eixo de movimento. Depois da colagem, o meio chega ao estado de equilíbrio, reconhecido como *deslocação de borda*.

Uma deslocação pode ser feita de diferentes maneiras. Caso o vetor Burgers seja perpendicular ao plano de corte e dirigido a partir dele no caso considerado, então a cavidade produzida deve ser preenchida com um meio antes da colagem. A deslocação de borda também é obtida do resultado de girar $\frac{\pi}{2}$ em torno do eixo x^3 . Logo, é caracterizada não pela superfície de corte, mas pela linha de deslocamento e o vetor \mathbf{b} .

Assumimos que as derivadas parciais do vetor de deslocamento $\partial_i u^i$ (tensor de distorção) são funções suaves na superfície de corte. Esta suposição é justificada fisicamente

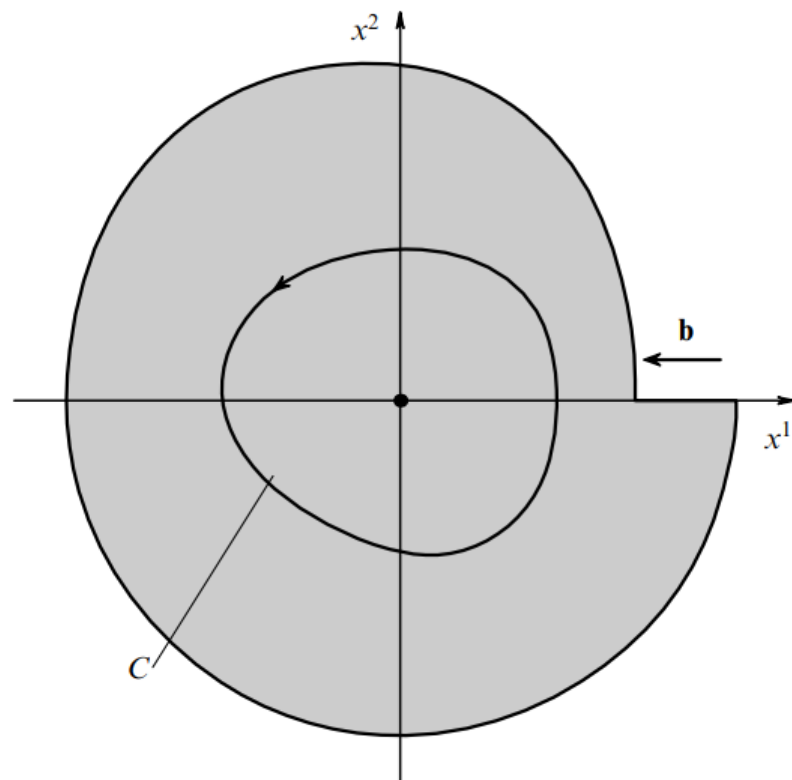


Figura 8: Seção reta do cilindro com deslocação de borda. C é o contorno de integração para o vetor Burgers \mathbf{b} (KATANAEV, 2005).

porque estas derivadas definem o tensor de deformação (veja expressão 2.36). Por sua vez, as derivadas parciais do tensor de deformação devem existir e ser funções suaves no equilíbrio em todos os lugares, exceto possivelmente, no eixo x^3 , pois, de outra forma, equações de equilíbrio (equação 2.58) não teria significado. Assumindo que a métrica e as tetradas são funções suaves em todos os lugares no \mathbf{R}^3 , exceto aos eixos de deslocamento, já que o tensor de deformação define a métrica induzida (equação (2.60)) (KATANAEV, 2005).

3.1.1 Métrica do Defeito: Deslocação Espiral

Nesta seção, lidaremos com um mecanismo de deslocamento e com ele a mudança na geometria intrínseca de um corpo euclidiano para não-euclidiano. Como as deslocações levam a uma mudança na métrica do material, começamos por introduzir o campo de deformação local assim como descrito no trabalho *Material metric, connectivity and dislocations* (VALANIS; PANOSKALTSIS, 2005),

$$F_j^i(x^j), \quad (3.2)$$

que é dito ser um campo de deslocamento análogo a expressão (2.32) se $\nabla \times \mathbf{F}^i \neq 0$. Neste caso, F_j^i é dito ser um bi-vetor de deslocamento. Sendo \mathbf{F}^i o campo de deformação local com as componentes F_j^i . Tal que, x^i representa as coordenadas na posição inicial e x'^i para posições posteriores em um tempo qualquer. Para ds sendo o comprimento do elemento dx'^i na presença de um campo de deslocamento, isto é, a distância ds^2 entre dois pontos próximos no espaço deslocado é

$$ds^2 = dx'^k dx'^k = F_i^k F_j^k dx^i dx^j = g_{ij} dx^i dx^j, \quad (3.3)$$

sendo g_{ij} as componentes do tensor métrico do domínio material na presença de \mathbf{F}^k .

Como nosso sistema é representado por uma *deslocação de borda*, esse campo F_i^k tem a forma local,

$$F_i^k(x^1, x^2) = \begin{pmatrix} 1 & F_2^1 & 0 \\ F_1^2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Consequentemente a métrica do corpo, em termos de seus componentes covariantes g_{ij} na presença do campo de deslocamento é

$$g_{ij} = F_i^k F_j^k = \begin{pmatrix} 1 + F_1^2 F_1^2 & F_1^2 F_2^1 & 0 \\ F_1^2 F_2^1 & 1 + F_2^1 F_2^1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

As deslocações em forma de espiral são retratadas com simplicidade em sistemas de coordenadas cilíndricas com uma métrica \mathbf{g} , onde

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & r^2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Juntando o deslocamento de borda de um círculo formando uma espiral, isto é, a deformação do bi-vetor \mathbf{F} é dado pela expressão,

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & \chi & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

os elementos deformados e de referência estão relacionados como

$$\begin{pmatrix} dr' \\ d\phi' \\ dz' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \chi & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\phi \\ dz \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Examinamos a distorção de uma curva circular $r = \text{constante}$, então, $dr = 0$, no plano $z = \text{constante}$. Com isso, a equação (3.8)

$$dr' = \chi d\phi, \quad d\phi' = d\phi, \quad dz' = dz = 0, \quad (3.9)$$

que resulta em,

$$\phi' = \phi, \quad z' = z, \quad r'(\phi) = \int_0^\phi \chi(\phi, r_0) d\phi + r_0. \quad (3.10)$$

A equação (3.10) mostra que a curva circular é deformada em uma espiral pelo campo de deslocamento. Tal que, a forma precisa da espiral é dependente da forma da função $\chi(r, \phi)$. A métrica do campo de deslocamento agora tem a forma:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \chi & 0 \\ \chi & (\chi^2 + r^2) & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

E com elemento de linha:

$$ds^2 = dr^2 + 2\chi dr d\phi + (\chi^2 + r^2) d\phi^2 + dz^2. \quad (3.12)$$

Considerando um meio elástico que contém uma deslocação de borda, que corresponde à distorção de um círculo em uma espiral. Esses defeitos topológicos são descritos pelo elemento de linha descrito acima.

3.1.2 O Operador de Laplace-Beltrami: Deslocação Espiral

Nesta subseção iremos calcular o operador de Laplace para métrica (3.12) do nosso sistema de defeito topológico. Como nossa deslocação de borda modifica um círculo para uma espiral, as propriedades geométricas do espaço e tais características são descritas pelo elemento de linha do tensor métrico. Para este caso, utilizamos o operador de Laplace-Beltrami (2.12) para definir a operação de diferenciação no novo sistema.

Pela relação:

$$g^{ij}g_{ij} = \mathbf{1}_{3 \times 3}, \quad (3.13)$$

podemos calcular a inversa da métrica covariante (3.11) para aplicar no operador de Laplace. Então,

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\chi^2}{r^2} & -\frac{\chi}{r^2} & 0 \\ -\frac{\chi}{r^2} & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Sendo g definido como,

$$g = \det(g_{ij}), \quad (3.15)$$

para matriz (3.14), obtemos:

$$g = r^2. \quad (3.16)$$

O operador de Laplace-Beltrami com os termos do tensor métrico não nulo é dado pela expressão,

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_r(g^{rr}\sqrt{g}\partial_r) + \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_r(g^{r\phi}\sqrt{g}\partial_\phi) + \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\phi(g^{\phi r}\sqrt{g}\partial_r) + \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\phi(g^{\phi\phi}\sqrt{g}\partial_\phi) + \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_z(g^{zz}\sqrt{g}\partial_z). \quad (3.17)$$

aplicando os termos da matriz g^{ij} ,

$$\Delta = \left(1 + \frac{\chi^2}{r^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{\chi^2}{r^3}\right)\frac{\partial}{\partial r} - 2\frac{\chi}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial r\partial\phi}\right) + \frac{\chi}{r^3}\left(\frac{\partial}{\partial\phi}\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (3.18)$$

obtemos a expressão do operador de Laplace para o nosso sistema.

3.2 Oscilador Harmônico na Presença de uma Deslocação Espiral

Nesta seção apresentamos o principal resultado do nosso trabalho (MAIA; BAKKE, 2018). Inicialmente escrevemos a equação de Schrödinger com plano de fundo estabelecido pela deslocação em espiral discutida na subseção (3.1.1), e assim, obtemos soluções exatas. Analisamos as influências da deslocação espiral no oscilador harmônico bidimensional.

Consideremos um meio elástico e contínuo que contém uma deslocação de borda, que corresponde à distorção de um círculo em uma espiral (Veja Figura 9).

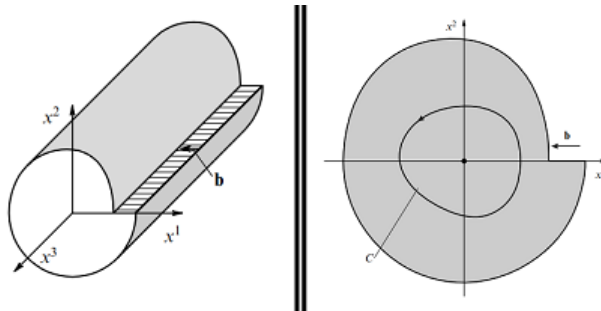


Figura 9: Cilindro com deslocação de borda e secção reta transformando um círculo em espiral (KATANAEV, 2005).

Como visto na seção (3.1.1), defeitos topológicos de deslocação espiral são descritos pelo elemento de linha:

$$ds^2 = dr^2 + 2\chi drd\phi + (\chi^2 + r^2)d\phi^2 + dz^2, \quad (3.19)$$

tal que, a constante χ é o parâmetro relacionado à deslocação. Em seguida limitamos uma partícula sem *spin* ao potencial tipo oscilador harmônico ($V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$) no espaço com deslocação espiral. Assim como, no caso do oscilador bidimensional sem defeito topológico, usaremos as unidades ($\hbar = c = 1$), Com \hbar sendo a constante de Planck sobre 2π e c a velocidade da luz. O tensor métrico covariante g_{ij} é dado pela expressão (3.11) e possui os termos não nulos:

$$g_{rr} = 1; \quad g_{r\phi} = \chi; \quad g_{\phi r} = \chi; \quad g_{\phi\phi} = (\chi^2 + r^2); \quad g_{zz} = 1. \quad (3.20)$$

Em seguida, como a métrica tem que satisfazer a relação $g^{ij}g_{ij} = \mathbf{1}_{3 \times 3}$, podemos

escrever a matriz inversa g^{ij} , dado pela forma:

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\chi^2}{r^2} & -\frac{\chi}{r^2} & 0 \\ -\frac{\chi}{r^2} & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Uma partícula sem *spin*, quântica, não-relativística e incorporada em um espaço com defeito topológico é descrita pela equação de Schrödinger

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m} \Delta \Psi + \frac{m\omega^2 r^2}{2} \Psi, \quad (3.22)$$

sendo m a massa da partícula, ω a frequência angular do oscilador, i número complexo e Δ o operador de Laplace-Beltrami. Aplicando o operador (3.18) na equação (3.22), obtemos,

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m} \left[\left(1 + \frac{\chi^2}{r^2} \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{\chi^2}{r^3} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{\chi}{r^2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial \phi} \right) - \frac{\chi}{r^2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi \partial r} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\chi}{r^3} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right] + \frac{m\omega^2 r^2}{2} \Psi, \quad (3.23)$$

equação de Schrödinger com a expressão de Δ para coordenadas cilíndricas.

Como a equação diferencial parcial (3.23) não contém os termos explicitamente de tempo t , ϕ e z . Então, podemos afirmar que os operadores referente à estas grandezas comutam com o hamiltoniano, com isso, os operadores de \hat{L}_ϕ e \hat{P}_z compartilham o mesmo conjunto de autofunções. Então, podemos escrever uma solução pelo método de separação de variáveis.

$$\Psi(r, \phi, z, t) = e^{-iEt + i\phi + ikz} f(r), \quad (3.24)$$

E é a energia do sistema, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ os autovalores referente ao momento angular da coordenada ϕ , k a constante referente ao momento z e $f(r)$ representa uma função qualquer de r . Calculando as derivadas de $\Psi(r, \phi, z, t)$ e substituindo na equação (3.23) obtemos uma nova equação apenas dependendo da variável r .

A nova equação tem a forma,

$$\left(1 + \frac{\chi^2}{r^2} \right) \frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{\chi^2}{r^3} - \frac{2i\chi l}{r^2} \right) \frac{df(r)}{dr} - \left(\frac{l^2}{r^2} - \frac{i\chi l}{r^3} + A + m^2 \omega^2 r^2 \right) f(r) = 0, \quad (3.25)$$

com $A = k^2 - 2mE$. A expressão (3.25) é uma equação diferencial linear ordinária de segunda ordem.

Uma possível solução da equação (3.25) pode ser dada na forma:

$$f(r) = \exp\left(il \tan^{-1}\left(\frac{r}{\chi}\right)\right) \times Q(r), \quad (3.26)$$

onde $Q(r)$ é uma função desconhecida. Precisamos das derivadas de $f(r)$ para substituir na equação (3.25) e obter uma nova equação diferencial.

A equação (3.25) toma a forma:

$$\left(1 + \frac{\chi^2}{r^2}\right)Q''(r) + \left(\frac{1}{r} - \frac{\chi^2}{r^3}\right)Q'(r) - \left(\frac{l^2}{\chi^2 + r^2} + A + m^2\omega^2r^2\right)Q(r) = 0. \quad (3.27)$$

Uma mudança de variável é necessária para simplificar nossa discussão. Assumimos que,

$$u = m\omega(\chi^2 + r^2). \quad (3.28)$$

A nova equação diferencial tem a forma dada pela seguinte expressão:

$$uQ''(u) + Q'(u) - \frac{1}{4}\left(\frac{l^2}{u} + \frac{A}{m\omega} + u - m\omega\chi^2\right)Q(u) = 0. \quad (3.29)$$

Para resolver a equação(3.29), precisamos analisar o comportamento assintótico. Observe que para valores grandes de u ou seja, $u \rightarrow \infty$, u domina completamente o resto das componentes. Neste caso,

$$Q''(u) \approx \frac{u}{4}, \quad (3.30)$$

que possui solução aproximada

$$Q(r) \approx c_1e^{-\frac{u}{4}} + c_2e^{\frac{u}{4}}, \quad (3.31)$$

c_1 e c_2 são constantes. Reveja a equação(2.72) porque o caso é análogo. Como já sabemos, a função solução terá a forma,

$$Q(u) = e^{-\frac{u}{2}}W(u), \quad (3.32)$$

sendo $W(u)$ uma função desconhecida. Assim como nos casos anteriores, derivamos $Q(u)$ e substituímos na equação diferencial (3.29) para obter uma nova relação com a análise assintótica de u tendendo ao infinito satisfeita.

A equação (3.29) toma a forma:

$$uW''(u) + (1-u)W'(u) - \frac{1}{4}\left(2 + \frac{l^2}{u} + \frac{A}{m\omega} - m\omega\chi^2\right)W(u) = 0. \quad (3.33)$$

Agora precisamos analisar o limite assintótico para $u \rightarrow 0$, tal que, temos a solução na forma:

$$W(u) = u^{\frac{|l|}{2}}J(u), \quad (3.34)$$

sendo $J(u)$ uma função qualquer, podemos construir uma nova equação diferencial linear ordinária, que nos dará um comportamento finito/normalizado já que satisfaz os limites assintóticos.

Assim, ao analisar o comportamento assintótico, substituindo as derivadas na equação (3.33), obtemos a seguinte expressão diferencial:

$$uJ''(u) + (|l| + 1 - u)J'(u) - \frac{1}{4}\left(2|l| + 2 + \frac{A}{m\omega} - m\omega\chi^2\right)J(u) = 0, \quad (3.35)$$

onde a equação (3.35) é uma hipergeométrica confluyente, que possui solução na forma:

$$J(u) = {}_1F_1\left(\frac{-m^2\omega^2\chi^2 + 2\omega(1 + |l|)m + k^2 - 2mE}{4m\omega}, 1 + |l|, u\right). \quad (3.36)$$

Observe que o comportamento assintótico de uma função hipergeométrica confluyente para grandes valores de seu argumento é dado por

$${}_1F_1(a, b; u) \approx \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)}e^u u^{a-b}[1 + O(|u|^{-1})], \quad (3.37)$$

portanto, diverge quando $u \rightarrow \infty$. Com o objetivo de obter soluções de estados ligados para a equação de Schrödinger, precisamos impor que $a = -n$ ($n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$). Com esta condição, a função hipergeométrica confluyente torna-se bem-comportada quando $u \rightarrow \infty$.

Consequentemente obtemos os níveis de energia,

$$E_{n,l} = 2\omega \left(\frac{1}{2} + \frac{|l|}{2} + n \right) + \frac{k^2}{2m} - \frac{m\omega^2\chi^2}{2}. \quad (3.38)$$

Assim, a equação (3.38) representa os níveis de energia do oscilador harmônico bi-dimensional na presença de uma deslocação tipo-espiral (MAIA; BAKKE, 2018). Podemos observar que os efeitos topológicos modificam o espectro, devido a nova contribuição dada pelo terceiro termo do lado direito. Em contraste com os resultados obtidos por (FURTADO; MORAES, 2000), para o defeito de *deslocação tipo-hélice* que modifica o momento angular e possibilita efeitos análogo ao *Aharonov-Bohm* para estados ligados (PESHKIN; TONOMURA, 1989), como não obtemos mudança alguma ao número quântico l da expressão (3.39), descartamos esta possibilidade de analogia. Observe que, tomando $\chi = 0$ na última expressão, recuperamos os resultados para o OHB na ausência de irregularidades no espaço (veja a relação 2.86).

3.3 Confinamento por Potencial de Paredes Rígidas

Nesta seção consideramos a presença de um potencial de confinamento de paredes rígidas no sistema discutido na seção anterior. Então, para um raio fixo r_0 , devido à presença da deslocação espiral, temos $u_0 = m\omega(\chi^2 + r^2)$. Portanto, a partícula quântica para condições impostas de aprisionamento, possui a seguinte condição de limite:

$$J(r_0) \rightarrow J(u_0) = 0. \quad (3.39)$$

Pelos parâmetros: $a = \frac{|l|}{2} + \frac{1}{2} - \lambda$ e $b = |l| + 1$, sendo $\lambda = |l| + 1$; tal que, considerando um valor fixo para o parâmetro b e o parâmetro λ com valores grandes, podemos escrever a função hipergeométrica confluyente por uma solução fixa

$${}_1F_1(a, b; u_0) \propto \cos(\sqrt{2bu_0 - 4au_0} - b\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}). \quad (3.40)$$

Da equação (3.40) obtemos os níveis de energia decorrentes da interação da partícula quântica com o oscilador harmônico sujeito a um potencial de confinamento de parede infinita:

$$E_{n,l} = \frac{1}{2m(r_0^2 + \chi^2)} \left(n\pi + \frac{|l|}{2}\pi + \frac{3\pi}{4} \right)^2 - \frac{1}{2}m\omega^2\chi^2 + \frac{k^2}{2m}. \quad (3.41)$$

Na equação (3.41), há duas contribuições para os níveis de energia que decorrem do defeito topológico de deslocação espiral (MAIA; BAKKE, 2018). O primeiro corresponde à presença de um raio efetivo dado por $\sqrt{r_0^2 + \chi^2}$. A segunda é dada pelo 2º termo do lado direito do espectro de energia para um potencial de paredes infinitas. Podemos afirmar observando $E_{n,l}$ assim como na seção anterior, que não produz alteração no número quântico do momento angular(l). Nesse sentido, sem o aparecimento de efeitos análogos ao efeito *Aharonov-Bohm*¹ para estados ligados.

¹Veja as Referências (FURTADO; MORAES, 2000), (BEZERRA, 1997), (PESHKIN; TONOMURA, 1989), (FURTADO; BEZERRA; MORAES, 2016), (VITORIA; BAKKE, 2016) e (VITORIA; BAKKE, 2017)

4 Considerações finais

Analisamos os efeitos sobre uma partícula quântica sem spin sujeita a um oscilador harmônico bidimensional na presença de defeito topológico de deslocação tipo-espiral no meio elástico. As mudanças devido a irregularidade do espaço produzem uma nova contribuição para o espectro de energia proporcional ao parâmetro do defeito (MAIA; BAKKE, 2018). Quando comparado à sistemas parecidos como o discutido por (FURTADO; MORAES, 2000), para sistemas com deslocação tipo-hélice¹, observamos que nenhuma mudança no número quântico l é dada devido à topologia do nosso elemento linha, portanto, impossibilita aparição de fenômenos análogos ao efeito *Aharonov-Bohm* para estados ligados.

Também aplicamos ao sistema um potencial de parede rígida/infinita para manter o OHB confinado na região. Com isso, duas contribuições para os níveis de energia decorreram, onde um deles é dado pela presença de um raio efetivo $\sqrt{r_0^2 + \chi^2}$ em $E_{n,l}$ (Veja equação 3.41). Assim como no caso anterior, nenhuma mudança no número quântico l é dada devido à topologia (MAIA; BAKKE, 2018). O mesmo pode ser dito para efeito análogos ao *Aharonov-Bohm* em comparação com o caso anterior sem o confinamento.

A modificação nos níveis de energia para ambos os sistemas com ou sem barreira de potencial é a mais notória contribuição, porque revela a influência do defeito topológico de deslocação espiral no sistema (MAIA; BAKKE, 2018). A não alteração no número quântico do momento angular l , descarta a possibilidade de efeito análogo ao *Aharonov-Bohm* para estados ligados. Como o trabalho trata-se de um estudo amplo, as possibilidades de aplicações podem ocorrer tanto para sistemas tipo grafeno, deslocando o plano da rede de átomos do material e tendo um estudo análogo ao nosso, quanto no contexto de gravitação, baseado em (BAKKE; FURTADO, 2013), a extensão do elemento de linha para sistemas relativísticos, como aplicação no oscilador de Dirac. Como perspectiva do trabalho, incluir alguns parâmetros como o spin e analisar as consequências desta adição.

¹Há uma grande quantidade de estudos sobre esse modelo, como por exemplo: (MARQUES; FURTADO; MORAES, 2005), (FILGUEIRAS et al., 2016), (MA et al., 2016), (WANG et al., 2015), (FILGUEIRAS; SILVA, 2015), (FURTADO; BEZERRA; MORAES, 2001) e (FURTADO; BEZERRA; MORAES, 2016)

APÊNDICE A – O Efeito Aharonov-Bohm para Estados Ligados

Este apêndice é referente a uma seção do livro *Introduction to Quantum Mechanics* (GRIFFITHS, 1994). Na eletrodinâmica clássica, o potencial escalar φ e o potencial vetor \mathbf{A} não são diretamente mensuráveis; as quantidades físicas são os campos elétrico e magnético:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (\text{A.1})$$

Para aplicação de transformação de calibre nos potenciais, as expressões tornam-se,

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}, \quad \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda, \quad (\text{A.2})$$

em que Λ é uma função desconhecida de posição e tempo.

Na mecânica quântica, o hamiltoniano depende de φ e \mathbf{A} , não de \mathbf{E} (campo elétrico) e \mathbf{B} (campo magnético):

$$H = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right)^2 + q\varphi. \quad (\text{A.3})$$

A teoria ainda é invariante sob as transformações de calibre. Porém, no ano de 1956, Aharonov e Bohm demonstraram que o potencial vetor pode alterar o comportamento quântico de uma partícula carregada até mesmo quando ela está passando por uma região em que o campo é nulo.

Por exemplo, uma partícula restrita a percorrer um círculo de raio b . Ao longo do eixo, corre um solenoide de raio $a < b$, que possui corrente elétrica constante I (veja a figura 10).

Se o solenoide for muito longo, o campo magnético interno será uniforme e o campo

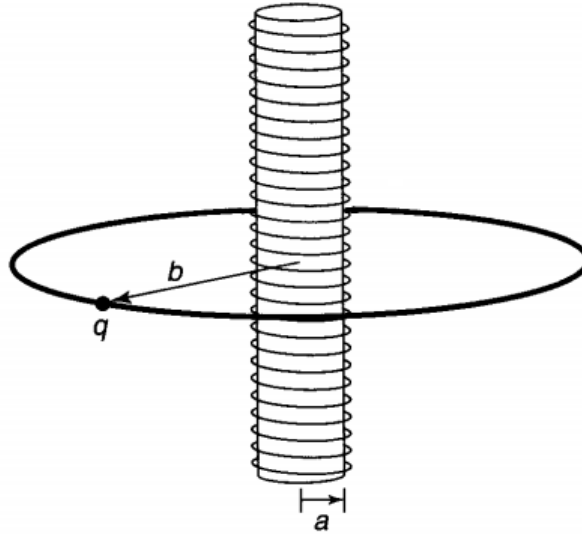


Figura 10: Uma conta carregada em um anel circular por meio do qual passa um longo solenoide (GRIFFITHS, 1994).

externo será nulo. Porém o potencial vetor na região fora não é zero; observe que, quando adotando a condição de calibre $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, temos:

$$\mathbf{A} = \frac{\Phi}{2\pi r} \hat{\phi}, \quad (r > a), \quad (\text{A.4})$$

em que $\Phi = \pi a^2 B$ caracteriza o **fluxo magnético** através do solenoide. Mas, o solenoide está sem carga e, portanto, $\varphi = 0$. Nesse caso, o hamiltoniano tem a forma:

$$H = \frac{1}{2m} [-\hbar^2 \nabla^2 + q^2 A^2 + 2i\hbar q (\mathbf{A} \cdot \nabla)]. \quad (\text{A.5})$$

A função de onda possui dependência somente do ângulo azimutal $\phi (= \pi/2$ e $r = b$), então, $\nabla \rightarrow (\hat{\phi}/b)(d/d\phi)$, e a equação de Schrödinger torna-se,

$$\frac{1}{2m} \left[-\frac{\hbar^2}{b^2} \frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\frac{q\Phi}{2\pi b} \right)^2 + i \frac{\hbar q \Phi}{\pi b^2} \frac{d}{d\phi} \right] \psi(\phi) = E\psi(\phi). \quad (\text{A.6})$$

Organizando os termos,

$$\frac{d^2\psi}{d\phi^2} - 2i\beta \frac{d\psi}{d\phi} + \epsilon\psi = 0, \quad (\text{A.7})$$

onde,

$$\beta \equiv \frac{q\Phi}{2\pi\hbar}, \quad \epsilon \equiv \frac{2mb^2E}{\hbar^2} - \beta^2. \quad (\text{A.8})$$

Com solução dada por,

$$\psi = Ae^{i\lambda\phi}, \quad (\text{A.9})$$

as constantes definidas como:

$$\lambda = \beta \pm \sqrt{\beta^2 + \epsilon} = \beta \pm \frac{b}{\hbar}\sqrt{2mE}. \quad (\text{A.10})$$

Analisando a continuidade de $\psi(\phi)$, em $\phi = 2\pi$, exige que λ seja um número inteiro:

$$\beta \pm \frac{b}{\hbar}\sqrt{2mE} = n, \quad (\text{A.11})$$

obtendo os níveis de energia dado por:

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2mb^2} \left(n - \frac{q\Phi}{2\pi\hbar} \right)^2, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (\text{A.12})$$

Observe que as energias permitidas dependem claramente do fluxo magnético dentro do solenoide, **mesmo que o campo na região da partícula seja zero.**

ANEXO A – Lista de Publicação

Os resultados deste trabalho foram publicados no *Journal Physica B: Condensed Matter*.



ELSEVIER

Contents lists available at [ScienceDirect](#)

Physica B: Condensed Matter

journal homepage: www.elsevier.com/locate/physb



Harmonic oscillator in an elastic medium with a spiral dislocation

A.V.D.M. Maia, K. Bakke^{*}

Departamento de Física, Universidade Federal da Paraíba, Caixa Postal 5008, 58051-900, João Pessoa, PB, Brazil



ARTICLE INFO	ABSTRACT
<p><i>Keywords:</i> Spiral dislocation Linear topological defects Harmonic oscillator Analytical solutions</p>	<p>We investigate the behaviour of a two-dimensional harmonic oscillator in an elastic medium that possesses a spiral dislocation (an edge dislocation). We show that the Schrödinger equation for harmonic oscillator in the presence of a spiral dislocation can be solved analytically. Further, we discuss the effects of this topological defect on the confinement to a hard-wall confining potential. In both cases, we analyse if the effects of the topology of the spiral dislocation gives rise to an Aharonov-Bohm-type effect for bound states.</p>

Figura 11: Primeira página de publicação com resumo no *Journal Physica B: Condensed Matter*(MAIA; BAKKE, 2018).

Referências

- ABRAMOWITZ, M.; STEGUM, I. A. *Handbook of Mathematical Functions*. 1th. ed. New York: Dover Publications Inc, 1965.
- ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. *Mathematical Methods for Physicists*. 6th. ed. New York: Elsevier Academic Press, 2005.
- BAKKE, K. *Fases Geométricas, Quantização de Landau e Computação Quântica Holonômica para Partículas Neutras na Presença de Defeitos Topológicos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal da Paraíba, 2009.
- BAKKE, K.; FURTADO, C. Abelian geometric phase due to the presence of an edge dislocation. *Physical Review A*, v. 87, n. 1, p. 012130, 2013.
- BAMMANN, D. J. A model of crystal plasticity containing a natural length scale. *Materials Science and Engineering*, n. A309-310, p. 406–410, 2001.
- BEZERRA, V. B. Global effects due to a chiral cone. *Journal of Mathematical Physics*, v. 38, n. 5, p. 2553, 1997.
- DEXTER, D. L.; SEITZ, F. Effects of dislocations on mobilities in semiconductors. *Physical Review*, v. 86, n. 6, p. 964, 1952.
- D'INVERNO, R. A. *Introducing Einstein's Relativity*. 1th. ed. New York: Clarendon Press, 1992.
- EISBERG, R. M.; RESNICK, R. *Quantum Physics os Atoms, Molecules, Solids, Nuclei and Particles*. 2th. ed. New York: John Wiley e Sons, 1923.
- FIGIELSKI, T. Dislocations as electrically active centres in semiconductors-half a century from the discovery. *Journal of Physics: Condensed Matter*, v. 14, p. 12665, 2002.
- FILGUEIRAS, C. et al. Landau quantization, aharonov-bohm effect and two-dimensional pseudoharmonic quantum dot around a screw dislocation. *Physics Letters A*, v. 380, n. 45, p. 3847–3853, 2016.
- FILGUEIRAS, C.; SILVA, E. O. 2deg on a cylindrical shell with a screw dislocation. *Physics Letters A*, v. 370, n. 36, p. 2110–2115, 2015.
- FLANDERS, H. *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences*. 1th. ed. New York: Academic Press, 1963.
- FURTADO, C.; BEZERRA, V. B.; MORAES, F. Quantum scattering by a magnetic flux screw dislocation. *Physics Letters A*, v. 289, n. 3, p. 160–166, 2001.

- FURTADO, C.; BEZERRA, V. B.; MORAES, F. On the effects of a screw dislocation and a linear potential on the harmonic oscillator. *Physica B: Condensed Matter*, v. 496, p. 45–48, 2016.
- FURTADO, C.; MORAES, F. Harmonic oscillator interacting with conical singularities. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 33, n. 31, p. 5513, 2000.
- GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Quantum Mechanics*. 1th. ed. New Jersey: Prentice Hall, 1994.
- HÄHNER, P.; BAY, K.; ZAISER, M. Fractal dislocation patterning during plastic deformation. *Physical Review Letters*, v. 81, n. 12, p. 2470–2473, 1998.
- JACKSON, J. D. *Classical Electrodynamics*. 3th. ed. Danvers: John Wiley e Sons, Inc., 1998.
- JASZEK, R. Carrier scattering by dislocations in semiconductors. *Journal of Materials Science: Materials in Electronics*, v. 12, n. 1, p. 1–9, 2001.
- JOST, J. *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. 6th. ed. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
- KATANAEV, M. O. Geometric theory of defects. *Physics Uspekhi*, v. 48, n. 7, p. 675–701, 2005.
- KITTEL, C. *Introduction to Solid State Physics*. 1th. ed. New York: John Wiley e sons, Inc, 1953.
- KLEINERT; HAGEN. *Gauge Fields In condensed Matter*. 1th. ed. Singapore: World Scientific, 1989.
- KOEHLER, J. S. On the dislocation theory of plastic deformation. *Physical Review*, v. 60, p. 397–410, 1941.
- KRÖNER, E. Berechnung der elastischen konstanten des vielkristalls aus den konstanten des einkristalls. *Zeitschrift für Physik*, v. 151, p. 504–518, 1958.
- KUHLMANN-WILSDORF, D. Theory of plastic deformation: Properties of low energy dislocation structures. *Materials Science and Engineering*, n. A113, p. 1–41, 1989.
- KUHLMANN-WILSDORF, D. The theory of dislocation-based crystal plasticity. *Philosophical Magazine A*, v. 79, n. 4, p. 955–1008, 1999.
- LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Course of Theoretical Physics: Theory of Elasticity*. 2th. ed. New York: Pergamon Press, 1959.
- LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Course of Theoretical Physics: Quantum Mechanics*. 2th. ed. New York: Pergamon Press, 1965.
- MA, K. et al. Hall conductivity in the cosmic defect and dislocation spacetime. *Chinese Physics Letters*, v. 33, n. 10, p. 100401, 2016.
- MAIA, A. V. D. M.; BAKKE, K. Harmonic oscillator in an elastic medium with a spiral dislocation. *Physica B: Condensed Matter*, v. 531, p. 213–215, 2018.

- MARQUES, G. A.; FURTADO, V. B. B. C.; MORAES, F. Quantum effects due to a magnetic flux associated to a topological defect. *International journal of Modern Physics A*, v. 20, n. 26, 2005.
- MEDEIROS, E. F.; MELLO, E. B. de. Relativistic quantum dynamics of a charged particle in cosmic string spacetime in the presence of magnetic field and scalar potential. *The European Physical Journal C*, v. 72, p. 2051, 2012.
- MURA, T. Continuum theory of plasticity and dislocations. *International Journal of Engineering Science*, v. 5, n. 4, p. 341–351, 1967.
- NYE, J. F. Some geometrical relations in dislocated crystals. *Acta Metallurgica*, v. 1, p. 153–162, 1953.
- ORTIZ, M.; REPETTO, E.; STAINIER, L. A theory of subgrain dislocation structures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 48, p. 2077–2114, 2000.
- PEACH, M.; KOEHLER, J. S. The forces exerted on dislocations and the stress fields produced by them. *Physical Review*, v. 80, n. 1, p. 436–439, 1950.
- PESHKIN, M.; TONOMURA, A. *The Aharonov-Bohm Effect*. 1th. ed. Berlin: Springer-Verlag, in: Lecture Notes in Physics, 1989.
- PUNTIGAM, R. A.; SOLENG, H. H. Volterra distortions, spinning strings, and cosmic defects. *Classical and Quantum Gravity*, v. 14, n. 5, p. 1129–1150, 1997.
- READ, W. T.; SHOCKLEY, W. Dislocation models of crystal grain boundaries. *Physical Review*, v. 78, n. 3, p. 275–289, 1950.
- REGUEIRO, R. A.; BAMMANN, D. J.; MARIN, E. B. A nonlocal phenomenological anisotropic finite deformation plasticity model accounting for dislocation defects. *Journal of Engineering Materials and Technology*, v. 124, p. 380–387, 2002.
- REIF, F. *Statistical Thermal Physics*. 1th. ed. Tokyo: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1965.
- SHOCKLEY, W. Some predicted effects of temperature gradients on diffusion in crystals. *Physical Review*, v. 91, p. 1563, 1953.
- VALANIS, K. C.; PANOSKALTSIS, V. P. Material metric, connectivity and dislocations in continua. *Acta Mechanica*, v. 175, n. 1–4, p. 77–103, 2005.
- VITORIA, R. L. L.; BAKKE, K. Torsion effects on a relativistic position-dependent mass system. *General Relativity and Gravitation*, v. 48, n. 12, p. 161, 2016.
- VITORIA, R. L. L.; BAKKE, K. Aharonov-bohm effect for bound states in relativistic scalar particle systems in a spacetime with a spacelike dislocation. *International Journal of Modern Physics D*, v. 27, n. 1, p. 1850005, 2017.
- VOLTERRA, V. L'équilibre des corps élastiques multiples connexes. *Annales Scientifiques de L'É.N.S.*, v. 24, n. 3, p. 401–517, 1907.
- WANG, J. et al. Deformations of the spin currents by topological screw dislocation and cosmic dispiration. *Annals of Physics*, v. 362, p. 327–335, 2015.

WENG, G. J.; PHILLIPS, A. On the kinematics of continuous distribution of dislocations in plasticity. *International Journal of Engineering Science*, v. 14, n. 1-E, p. 65–73, 1976.