Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Uma Versão Abstrata do Princípio de Concentração de Compacidade e Aplicações †

por

Diego Ferraz de Souza

Setembro/2012

João Pessoa - PB

†Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq.

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Uma Versão Abstrata do Princípio de Concentração de Compacidade e Aplicações †

por

Diego Ferraz de Souza

sob orientação do

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Setembro/2012

João Pessoa - PB

† Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq.

S729u Souza, Diego Ferraz de.
Uma versão abstrata do princípio de concentração de compacidade e aplicações / Diego Ferraz de Souza.-- João Pessoa, 2012.
111f.
Orientador: João Marcos Bezerra do Ó
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Concentração de compacidade. 3.Espaço de deslocamento. 4. Minimização com vínculo.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Uma Versão Abstrata do Princípio de Concentração de Compacidade e Aplicações

por

Diego Ferraz de Souza

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise.

Aprovada por:

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó -UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Emerson Mendonça de Abreu - UFMG

Prof. Dr. Miguel Fidencio Loayza Lozano - UFPE

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Setembro/2012

Agradecimentos

- A minha mãe, por todo incentivo, amparo e apoio.

- Ao Professor João Marcos Bezerra do Ó, meu orientador, por me guiar desde a graduação, sempre com paciência e sabedoria, mantendo a rigidez e exigência necessárias para me instruir na vida acadêmica.

- A todos os professores que me apoiaram. Em especial, aos professores Flávia Jerônimo Barbosa, Everaldo Souto de Medeiros e Uberlandio Batista Severo, pelos conselhos edificantes.

- Aos meus grandes amigos Ricardo Pinheiro da Costa e Esteban Pereira da Silva, por todos os bons momentos, todas as discussões construtivas e por toda a ajuda e contribuição.

- Aos amigos da pós-graduação e do Laboratório Milênio, em especial, Ellen Patrícia Costa Souza, Gilson Mamede de Carvalho, Yane Lisley Ramos Araújo e Dayvid Gerverson Lopes Marques, pelo companheirismo, bom humor e inspiração.

- Ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba, pela oportunidade.

- Ao CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pelo apoio financeiro.

Dedicatória

A minha Mãe e aos meus amigos.

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma versão abstrata do princípio de concentração de compacidade de Lions, estendo-o para espaços de Hilbert. Para tanto, incluímos o conceito de espaço de deslocamento, o par (H, D), formado por um espaço de Hilbert H separável (sendo $H^1(\mathbb{R}^N)$ o caso modelo, $N \geq 3$) e um conjunto D de operadores lineares limitados em H; além do conceito de convergência D-fraca. O principal resultado desta teoria é, em certo sentido, uma generalização do célebre Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki. Outra importante consequência da teoria é a equivalência entre convergência D-fraca em $H^1(\mathbb{R}^N)$, $N \geq 3$, e convergência forte em L^p, para $p \in (2, 2^*)$ e D adequado. Com esta versão, provamos existência de solução para algumas classes de problema elípticos em domínios ilimitados, via método de minimização com vínculo.

Palavras-chave: Concentração de compacidade; Espaço de deslocamento; Minimização com vínculo

Abstract

In this work we present an abstract version of the concentration compactness principle by Lions, extending it to Hilbert spaces. To do so, we include the concept of dislocation space, the pair (H, D) formed by a separable Hilbert space H (being $H^1(\mathbb{R}^N)$ the model case, $N \geq 3$) and a set D of linear limited operators on H; as well as the concept of the D-weak convergence. The main result of this theory is, in a sense, a generalization of the famous theorem of Banach-Bourbaki-Alaoglu. Another important consequence of the theory is the equivalence of D-weak convergence in $H^1(\mathbb{R}^N), N \geq 3$ and strong convergence in L^p, for $p \in (2, 2^*)$ and D appropriate. With this version, we prove existence of solution for some classes of elliptic problem on unbounded domains, via constrained minimization method.

Key words: Concentration compactness; Dislocation Space; Constrained minimization

Sumário

Introdução

Como técnica para estudarmos certas classes de problemas variacionais, é usual considerarmos um problema de minimização associado tal que todo minimizante deste é, via Método de Multiplicador de Lagrange, uma solução do problema inicial, a menos de homotetia. Na tentativa de encontrar minimizantes do problema associado, muitas vezes nos deparamos com uma dificuldade proveniente da perda de compacidade dos espaços no qual tomamos sequências minimizantes. Por exemplo, o Teorema de Rellich-Kondrachov não é válido, em geral, em domínios ilimitados (veja o Exemplo 2.1).

Muitos trabalhos foram feitos para contornar esta dificuldade. Neste contexto, em 1984, no artigo [7], P.-L. Lions introduziu um método (ou princípio), chamado de “concentração de compacidade”, consolidado mais tarde nos seus artigos [8], [9] e [10], que estabelece convergência de sequências minimizantes sob certas condições, com a ajuda de vários resultados abstratos sobre compacidade, obtidos da Teoria de Medida e Integração. O argumento de concentração de compacidade considera possível a existência dos limites das sequências minimizantes via “deslocamento” ou “dilatação” da sequência, com isto, pode-se “substituir” a compacidade clássica por uma na qual ainda pode se encontrar extremantes locais para os funcionais associados.

Apresentamos uma versão abstrata do método de concentração de compacidade, com foco nos deslocamentos. Esta versão abstrata, mais geral, foi apresentada por K. Tintarev e O. Schindler no artigo [12], e publicada posteriormente em um livro ([14]), que reúne a maior parte de suas publicações relativas a concentração de compacidade, e que serviu de principal referência para o desenvolvimento deste trabalho. A base dos nossos estudos analíticos-funcionais sobre concentração de compacidade é a noção de espaço de deslocamento, o par (H, D), formado por um espaço de Hilbert separável (sendo $H^1(\mathbb{R}^N)$ o caso modelo, com $N \geq 3$) e D um grupo de operadores unitários em H, estes entes por sua vez, satisfazem algumas propriedades relacionadas com compacidade.

Exibimos os resultados e definições preliminares no Capítulo 1. Entretanto, destacamos que apesar do método apresentado neste trabalho ser de ampla aplicação para problemas de minimização, os pré-requisitos básicos para compreensão do trabalho estão todos contidos no Capítulo 1.

Introduzimos, no Capítulo 2, o conceito de convergência D-fraca, com a qual exibimos uma versão do Teorema do Banach-Alaoglu-Bourbaki (Teorema 2.1), no seguinte sentido: dada uma sequência limitada, é possível encontrar uma subsequência que converge D-fraco para zero, a menos de termos de correção. Mais precisamente, dada $(u_k) \subset H$, a menos de subsequência,

$$u_k - \sum_{n\in\mathbb{N}_0} g_k^{(n)} w^{(n)},$$

converge D-fracamente. Além disso, podemos fazer uma escolha adequada de D de modo que a convergência D-fraca seja equivalente a convergência em $L^p(\mathbb{R}^N)$, para $p \in (2, 2^*)$ e $N \geq 3$ (Proposição 2.8).

Terminamos o capítulo fazendo, como aplicação, o estudo do seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = u^{p-1}, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N),\ u > 0, \end{cases} \tag{1}$$

para $p \in (2, 2^*)$, sendo $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ uma função $\mathbb{Z}^N$-periódica, via minimização. Discutimos também soluções radialmente simétrica para o mesmo problema.

No Capítulo 3, apresentamos uma vasta lista de aplicações dos resultados obtidos no Capítulo 2. Iniciamos introduzindo a família dos conjuntos (G, T)-flask, os quais estão associados a um grupo de operadores G e a um subgrupo T de aplicações ortogonais (uma versão do que foi apresentado em [12]). Munidos deste conceito, obtemos soluções para problemas de minimização da forma

$$c_p(\Omega) = \inf_{\substack{u\in H_0^1(\Omega), \\ \|u\|_p=1}} \int_\Omega |\nabla u|^2 + V(x)|u|^2\, dx, \tag{2}$$

sobre conjuntos abertos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, não necessariamente limitados, com $p \in (2, 2^*)$. Além do mais, supondo que Ω é um conjunto G-flask ($T = \{id\}$), também conseguimos solução para problemas do tipo

$$\inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega),\\ \|u\|_p = 1}} \int_\Omega |\nabla u|^2 - \lambda |u|^2 dx, \tag{3}$$

com $p \in (2, 2^*)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ adequado (veja o Teorema 3.5).

Em 1984, no seu artigo [7], P.-L. Lions demonstrou o seguinte resultado: dada $b \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$, $N \geq 3$, se existir o $\lim_{|x| \to \infty} b(x) = b_\infty$, e $b(x) \geq b_\infty$ então a equação

$$-\Delta u + u = b(x) u^{p-1}, \quad u > 0, \tag{4}$$

possui solução fraca para $p \in (2, 2^*)$. No fim do Capítulo 3, sob algumas hipóteses de simetria ou supondo que $b(x) < b_\infty$, obtemos solução para (4), usando alguns resultados obtidos no Capítulo 2.

Capítulo 1

Definições e Resultados Preliminares

Neste capítulo exibimos resultados e definições básicas que são utilizados durante o trabalho.

1.1 Espaços L^p

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto. Dado $p \in \mathbb{R}$, com $1 \leq p \leq \infty$, os espaços $L^p(\Omega)$ são definidos como

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R};\ f \text{ é mensurável e } \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p \, dx < \infty \right\},$$

com a norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p \ dx \right)^{1/p},$$

para $1 \leq p < \infty$, e

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \ \middle| \begin{array}{l} f \text{ é mensurável e existe uma constante } C > 0 \\ \text{tal que } |f(x)| \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega \end{array} \right\},$$

com a norma

$$\|f\|_\infty = \inf\{C;\ |f(x)| \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega\},$$

onde consideramos a classe das funções iguais q.t.p. Então, $L^p(\Omega)$, é um espaço de Banach separável, para $1 \leq p < \infty$, e reflexivo para $1 < p < \infty$ (veja [1], pág. 103). Observamos que $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ q.t.p. em Ω, além disso, caso $\Omega = \mathbb{R}^N$, denotamos $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_p$. À seguir listamos os resultados básicos usados referentes aos espaços $L^p(\Omega)$.

Proposição 1.1. ***(Desigualdade de Young)*** *Dados $a \geq 0$, e $b \geq 0$, temos que*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q,$$

onde $1/p + 1/q = 1$. Ver [1], pág. 92.

Teorema 1.1. ***(Desigualdade de Hölder)*** *Seja Ω um conjunto aberto de $\mathbb{R}^N$. Suponha que $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$, com $1/p + 1/q = 1$. Então, $uv \in L^1(\Omega)$ e*

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}\|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Ver [1], pág. 92.

Teorema 1.2. ***(Convergência Dominada de Lebesgue)*** *Dado $p \in [1, \infty)$, sejam Ω um conjunto aberto (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ satisfazendo*

(a) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$, q.t.p. em Ω,

(b) existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$, q.t.p. em Ω.

Então, $f \in L^1(\Omega)$ e $\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0$. Ver [1], pág. 92.

Teorema 1.3. *Sejam a sequência $(f_n) \subset L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ tais que $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$, com $1 \leq p < \infty$. Então existe uma subsequência $(f_{n_k}) \subset L^p(\Omega)$ e $h \in L^p(\Omega)$ tais que*

(a) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ q.t.p. em Ω.

(b) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$, para todo $k \in \mathbb{N}$, q.t.p. em Ω.

Ver [1], pág. 94.

Proposição 1.2. ***(Definição de suporte)*** *Dada $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, considere a família $(\omega_i)_{i \in I}$ de abertos de $\mathbb{R}^N$, tais que, para cada $i \in I$, $f = 0$ q.t.p. em ω_i. Defina $\omega = \bigcup_{i \in I} \omega_i$. Então $f = 0$ q.t.p. em ω. Por definição, $\operatorname{supp} f$ é o complementar de ω em $\mathbb{R}^N$. Veja [1], pág. 105.*

Note que, caso $f \in L^p(\Omega)$, a definição anterior independe de representante. Ademais, se $f \in C(\Omega)$, então $\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \Omega;\ f(x) \neq 0\}}^{\Omega}$ (fecho em Ω). Definimos também o espaço $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$, como sendo formado por todas as funções mensuráveis $f : \Omega \to \mathbb{R}$, tais que $f \in L^p(K)$, para cada $K \subset \Omega$ compacto.

1.2 Espaços de Sobolev

Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto. Suponha que $u, v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, e seja $\alpha \in \mathbb{N}$. Denote $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N$. Dizemos que v é a α-ésima derivada parcial fraca de u, e escrevemos $v = D^\alpha u$, quando

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\varphi \, dx,$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, onde $C_0^\infty(\Omega)$ denota o conjunto de todas as funções de classe $C^\infty(\Omega)$ de suporte compacto em Ω. Caso exista alguma derivada parcial, esta deve ser única, a menos de um conjunto de medida nula (veja [3]).

Definição 1.1. *Dados $k \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{R}$, com $1 \leq p < \infty$, definimos o espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ como sendo formado por todas as funções de $L^p(\Omega)$ que admitem derivadas parciais fracas até ordem k em $L^p(\Omega)$, isto é,*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \textit{para todo } |\alpha| \leq k\},$$

munido da norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Define-se também

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}}.$$

Então, $W^{k,p}(\Omega)$, $W_0^{k,p}(\Omega)$ são espaços de Banach separáveis, para $1 \leq p < \infty$, e reflexivos, para $1 < p < \infty$ (veja [4]). Para $p = 2$, o espaço $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, com norma proveniente do seguinte produto interno

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha u D^\alpha v \, dx.$$

Dado $u \in H^1(\Omega)$, escrevemos

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right).$$

Ademais,

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega uv + \nabla u \cdot \nabla v \, dx,$$

assim,

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega |u|^2 + |\nabla u|^2 \, dx.$$

Destacamos que $H^1_0(\Omega)$ é o espaço usado nos problemas elípticos tratados neste trabalho, e que $N \geq 3$ sempre, a menos de menção explícita.

Denotamos $\|u\| = \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$ e $(u, v) = (u, v)_{H^1(\mathbb{R}^N)}$.

Proposição 1.3. *(**Regra do Produto**) Sejam $u, v \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\Omega)$. Então $uv \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Veja [1], pág. 269.

Proposição 1.4. *Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto, seja $u \in H^1(\Omega)$. Então*

(a) $|u|, u_+, u_- \in H^1(\Omega)$;

(b) $\nabla |u| = \operatorname{sgn} \nabla u$.

Veja [4], pág. 152.

1.2.1 Imersões de Sobolev

Neste trabalho usamos as seguintes imersões de Sobolev.

Teorema 1.4. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ e $p \in [1, \infty)$*

*(a) (**Rellich-Kondrachov**) Se Ω é limitado, então a imersão $H^1_0(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$ é compacta, para $p \in [1, 2^*)$. O mesmo vale para $H^1(\Omega)$, quando Ω é de classe C^1. (Ver [1], pág. 290)*

(b) Se $p \in [2, 2^*]$, então a imersão $H^1(\mathbb{R}^N)$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$ é contínua. (Veja [1] Pág. 281)

1.2.2 Caracterização dos espaços $H^1_0(\Omega)$

Os próximos resultados descrevem o comportamento das funções do espaço $H^1_0(\Omega)$.

Teorema 1.5. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto.*

(a) $H_0^1(\mathbb{R}^N) = H^1(\mathbb{R}^N)$. *Ver [1], Pág. 287 .*

(b) *Se* $u \in H^1(\Omega)$ *é tal que* $\operatorname{supp} u \subset\subset \Omega$, *isto é,* $\overline{\operatorname{supp} u} \subset \Omega$, *sendo* $\overline{\operatorname{supp} u}$ *um conjunto compacto, então* $u \in H_0^1(\Omega)$. *Veja [1], Pág. 287.*

O seguinte resultado caracteriza $H_0^1(\Omega)$.

Teorema 1.6. *Suponha que* Ω *tem fronteira de classe* C^1. *Seja* $u \in L^p(\Omega)$ *com* $1 < p < \infty$. *As seguintes afirmações são equivalentes*

(a) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$;

(b) *a função*

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x), & se\ x \in \Omega, \\ 0, & se\ x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases}$$

pertence a $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. *Além disso,* $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} = \overline{\frac{\partial u}{\partial x_i}}$, $i = 1, \ldots, N$.

Veja [1], pág. 289.

Baseado neste resultado, definimos a seguinte família de conjuntos, a qual será usada no Capítulo 3.

Definição 1.2. *Dizemos que um conjunto aberto* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *satisfaz a propriedade do traço, e escrevemos* $\Omega \in \operatorname{tr}(\mathbb{R}^N)$, *quando dada* $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, *tal que* $u = 0$ *q.t.p. em* $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$, *temos* $u \in H_0^1(\Omega)$.

Desta forma, pelo Teorema 1.6, todo conjunto aberto de classe C^1 satisfaz a propriedade do traço.

Capítulo 2

Decomposição da Convergência Fraca

Neste capítulo apresentamos um refinamento, em um certo sentido, do teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki para o caso em que H é um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita. Além disso, consideramos uma aplicação em seu caso modelo: o espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$, estando associado a deslocamentos Euclidianos. Sendo assim, em todo este capítulo H será sempre um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita, a menos de menção explícita.

Considere uma sequência limitada $(u_k) \subset H$ e $\Phi : H \to \mathbb{R}$ um funcional contínuo. Sabemos que se a dimensão de H for finita, então existe uma subsequência de (u_k) a qual converge para um elemento $u \in H$, e consequentemente (usando a mesma notação) $\Phi(u_k) \to \Phi(u)$. Mas se a dimensão de H for infinita, não é certo que $\Phi(u_k) \to \Phi(u)$, uma vez que (u_k) pode não ter pontos de acumulação. Por outro lado, sabemos que $u_k \rightharpoonup u$ em H, a menos de subsequência. Mas isto também não garante que $\Phi(u_k) \to \Phi(u)$, já que Φ pode não ser fracamente contínua. Por exemplo, $\Phi(u) = \|u\|$ e $u_k = e_k$, onde (e_k) é uma base de Hilbert para H. Então $e_k \rightharpoonup 0$ em H, mas $1 = \lim \Phi(e_k) \neq 0$.

Introduzimos a noção de convergência D-fraca, a qual é uma convergência mais fraca que a convergência fraca, sob certas condições. Entretanto, sequências limitadas não necessariamente convergem D-fraco a menos de subsequência (veja o Exemplo 2.1), ao invés, converge m fracamente quando "deslocadas" por um conjunto de "deslocamento" D, formado por operadores lineares limitados (confira o Teorema 2.1). Neste caso, apesar de não termos necessariamente $\Phi(u_k) \to \Phi(u)$, obtemos $(\Phi(g_k u_k))$ convergente, com $(g_k) \subset D$ (veja a Proposição 2.9).

2.1 Convergência D-fraca e espaços de deslocamento

É claro que a convergência de uma sequência está associada a uma topologia do espaço, entretanto a definição de convergência de sequência à seguir é baseada em uma condição mais restrita que envolve a topologia fraca de H. Para que esta definição esteja bem posta, vamos precisar do seguinte resultado.

Lema 2.1. *Seja $A \in \mathcal{L}(H) = \{g : H \to H \ ; \ g$ é linear e contínuo$\}$ um operador auto-adjunto. Suponha que existe $\lambda > 0$ tal que*

$$\|Au\| \geq \lambda \|u\|, \qquad \text{para todo } u \in H, \tag{2.1}$$

então A é invertível e $\|A^{-1}\| \leq \lambda^{-1}$.

Demonstração: Note que A é injetora, pois dados $u, v \in H$, com $Au = Av$, vemos que $\|A(u-v)\| \geq \lambda\|u-v\|$. Mostremos agora que $A(H)$ é um conjunto fechado e que $A(H)^{\perp} = \{0\}$ para concluir que $A(H) = H$. Com efeito, sendo $A(H)$ um subespaço fechado de H, vemos que $H = A(H) \oplus A(H)^{\perp}$.
Seja $(Au_n) \subset A(H)$, tal que $Au_n \to w$, com $w \in H$. Pela desigualdade (2.1), concluímos que (u_n) é uma sequência limitada em H. Consequentemente, $u_n \rightharpoonup u$ em H, a menos de subsequência, para algum $u \in H$. Logo, para esta subsequência, $Au_n \rightharpoonup Au$, por unicidade do limite, obtemos $Au = w$, e portanto $A(H)$ é um subespaço fechado.
Considere agora $v \in A(H)^{\perp}$. Uma vez que $A(Av) \in A(H)$ e $A = A^*$, temos que

$$0 = (A(Av), v) = (Av, A^*v) = (Av, Av) \geq \lambda^2 \|v\|^2.$$

Logo, $v = 0$. Portanto, $A(H)^{\perp} = \{0\}$. ■

Definição 2.1. *Seja D um conjunto de operadores lineares limitados em H tal que*

$$\lambda_g := \inf_{u \in H, \|u\|=1} \|gu\|^2 > 0, \qquad \text{para cada } g \in D, \tag{2.2}$$

e satisfazendo a seguinte condição

$$g \in D \Rightarrow g^* \in D. \tag{2.3}$$

Dizemos que uma sequência $(u_k) \subset H$ converge D-fraco para $u \in H$, e denotamos

$$u_k \overset{D}{\rightharpoonup} u, \text{ em } H$$

quando para toda sequência $(g_k) \subset D$, *vale*

$$(g_k^* g_k)^{-1} g_k^*(u_k - u) \rightharpoonup 0 \text{ em } H. \tag{2.4}$$

Note que na expressão em (2.4) estamos usando implicitamente que $g_k^* g_k$ é invertível, sendo isto possível, graças ao Lema 2.1. De fato, dado $g \in D$, o operador $g^* g$ é auto-adjunto, além disso, a condição (2.3) garante que $g^* \in D$, daí, para $u \in H$, temos $\|g^* g u\| = \|g^*(gu)\| \geq \lambda_{g^*}^{1/2} \|gu\| \geq \lambda_g^{1/2} \lambda_{g^*}^{1/2} \|u\|$. Por outro lado, observe que $u_k \overset{D}{\rightharpoonup} u$ é simplesmente um símbolo que representa as condições (2.2), (2.3) e (2.4).

Exemplo 2.1. *Considere* $H = H^1(\mathbb{R})$, $D = D_{\mathbb{N}} = \{g_k : H \to H \ ; \ g_k u(t) = u(t - k), \ k \in \mathbb{N}\}$ *e* $u_k(t) = w_1(t-k) + w_2(t+k)$, *onde* $w_1, w_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. *Pelo Teorema da Mudança de Variáveis,* $g_k^* = g_{-k}$. *Assim* $g_k^* g_k = g_0 = id$. *De fato, dados* $u, v \in H^1(\mathbb{R})$, *como* $(g_k u)'(t) = u'(t-k)$, *temos*

$$\begin{aligned}
(g_k u, v) &= \int_{\mathbb{R}} g_k u(t) v(t) + (g_k u)'(t) v'(t) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} u(t-k) v(t) + u'(t-k) v'(t) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} u(t) v(t+k) + u'(t) v'(t+k) dt = (u, g_{-k} v).
\end{aligned}$$

Daí $g_k u_k(t) = u_k(t-k) = w_1(t-2k) + w_2(t)$ *e* $g_k^* u_k = u_k(t+k) = w_1(t) + w_2(t+2k)$. *Dada* $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, *para* $k \in \mathbb{N}$ *suficientemente grande, temos que* $\operatorname{supp} w_1(\cdot - k) \cap \operatorname{supp} \varphi = \emptyset$ *e* $\operatorname{supp} w_2(\cdot + k) \cap \operatorname{supp} \varphi = \emptyset$, *pois* $\operatorname{supp} w_1(\cdot - k) = \operatorname{supp} w_1 + k$ *e* $\operatorname{supp} w_2(\cdot + k) = \operatorname{supp} w_2 - k$. *Assim,*

$$\begin{aligned}
(u_k, \varphi) &= \int_{\mathbb{R}} u_k(t) \varphi(t) + u_k'(t) \varphi'(t) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} w_1(t-k) \varphi(t) + w_1'(t-k) \varphi'(t) dt \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} w_2(t+k) \varphi(t) + w_2'(t+k) \varphi'(t) dt = 0.
\end{aligned}$$

Logo, pela densidade de $C_0^\infty(\mathbb{R})$ *em* $H^1(\mathbb{R})$, $u_k \rightharpoonup 0$ *em* $H^1(\mathbb{R})$. *De modo análogo,* $g_k^* u_k \rightharpoonup w_1$ *e* $g_k u_k \rightharpoonup w_2$ *em* $H^1(\mathbb{R})$. *Por outro lado, para* $k \in \mathbb{N}$ *suficientemente grande,* $(\operatorname{supp} w_1 + k) \cap (\operatorname{supp} w_2 - k) = \emptyset$, *consequentemente*

$$\begin{aligned}
\|u_k\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}} |w_1(t-k) + w_2(t+k)|^p dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} |w_1(t-k)|^p + |w_2(t+k)|^p dt = \|w_1\|_p^p + \|w_2\|_p^p,
\end{aligned}$$

com $1 \leq p < \infty$. *Note agora que tomando* $w_1 = 0$, *vemos que* (u_k) *satisfaz a condição 2.4, mas o conjunto* D *escolhido não satisfaz a 2.3 (apesar de satisfazer 2.2, com* $\lambda_g = 1$, *para todo* $g \in D$*). De fato, dada* $(g_{k_j}) \subset D_{\mathbb{N}}$, *temos* $g_{k_j}^* u_j(t) = u_j(t + k_j) = w_2(t + k_j + j)$. *Logo, de modo semelhante ao que foi feito anteriormente, se* $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ *então* $(g_{k_j}^* u_j, \varphi) \to 0$. *Mas se considerarmos* $D = D_{\mathbb{Z}} = \{g_k : H \to H \; ; \; g_k u(t) = u(t - k), \; k \in \mathbb{Z}\}$, *a sequência* (u_k) *não converge* $D_{\mathbb{Z}}$*-fraco, pois para* $k \in \mathbb{N}$, *temos* $g_k^* u_k \rightharpoonup 0$, *sendo que* $g_{-k}^* u_k = g_k u_k \rightharpoonup w_2$ *em* $H^1(\mathbb{R})$. *Em compensação, considere ainda* $D = D_{\mathbb{Z}}$ *e* $v_k = w_1$, $k \in \mathbb{N}$. *Então* $v_k \overset{D}{\rightharpoonup} 0$.

Proposição 2.1. *Considere* $D \subset \mathcal{L}(H)$ *satisfazendo a condição* (2.2) *e* (2.3), *e seja* $(u_k) \subset H$. *Então* $u_k \overset{D}{\rightharpoonup} u$ *em* H *se, e somente se, para toda* $\varphi \in H$,

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{g \in D} (u_k - u, g(g^* g)^{-1} \varphi) = 0. \tag{2.5}$$

Demonstração: Suponha que $u_k \overset{D}{\rightharpoonup} u$, mas que não vale (2.5). Assim existem $\delta > 0$ e $\varphi_0 \in H$ tais que para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $k > n$ com

$$s_k = \sup_{g \in D} (u_k - u, g(g^* g)^{-1} \varphi_0) \geq \delta. \tag{2.6}$$

Da definição de supremo, para cada $k \in \mathbb{N}$ que verifica (2.6), existe $g_k \in D$ tal que

$$\delta \leq s_k < (u_k - u, g_k(g_k^* g_k)^{-1} \varphi_0) + 1/k,$$

o que contradiz (2.4).

Reciprocamente, suponha que vale (2.5) e seja $\varphi \in H$. Como

$$\sup_{g \in D} (u_k - u, g(g^* g)^{-1}(-\varphi)) = \sup_{g \in D} (-1)(u_k - u, g(g^* g)^{-1} \varphi),$$

dado $g \in D$, temos

$$(-1)(u_k - u, g(g^* g)^{-1} \varphi) \leq \sup_{g \in D} (u_k - u, g(g^* g)^{-1}(-\varphi)), \quad \forall \, k \in \mathbb{N}$$

logo

$$(u_k - u, g(g^* g)^{-1} \varphi) \geq -\sup_{g \in D} (u_k - u, g(g^* g)^{-1}(-\varphi)), \quad \forall k \, \in \mathbb{N}.$$

Portanto, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $\inf_{g \in D} (u_k - u, g(g^* g)^{-1} \varphi)$. Em particular, para qualquer sequência $(g_k) \subset D$, temos

$$\inf_{g \in D} (u_k - u, g(g^* g)^{-1} \varphi) \leq (u_k - u, g_k(g_k^* g_k)^{-1} \varphi) \leq \sup_{g \in D} (u_k - u, g(g^* g)^{-1} \varphi). \tag{2.7}$$

Por outro lado,

$$\lim_{k\to\infty}\inf_{g\in D}(u_k - u, g(g^*g)^{-1}\varphi) = -\lim_{k\to\infty}\sup_{g\in D}(u_k - u, g(g^*g)^{-1}(-\varphi)) = 0, \quad \forall\, \varphi \in H.$$

Além disso,

$$(u_k - u, g(g^*g)^{-1}\varphi) = ((g^*g)^{-1}g^*(u_k - u), \varphi), \quad \forall\, \varphi \in H,\ g \in D. \tag{2.8}$$

Assim, usando (2.8) e tomando o limite em (2.7) obtemos (2.4). ∎

Observação 2.1. *Caso $id \in D \subset \mathcal{L}(H)$, então toda sequência D-fracamente convergente é fracamente convergente em H. Com efeito, basta tomar a sequência $g_k = id$ na condição (2.4). Por exemplo, quando D é um grupo de operadores unitários em H. Observe também que se $D \subset \mathcal{L}(H)$ satisfaz a condição (2.2), então todo operador em D é injetor.*

Seja $g \in \mathcal{L}(H)$, dizemos que g é uma **isometria** quando $g^*g = id$, além disso, que g é um **operador unitário** quando $g^*g = gg^* = id$, isto é, se g é uma isometria bijetora. Em quaisquer destes casos $\|g\| = 1$, uma vez que $(gu, gu) = (g^*gu, u)$, para todo $u \in H$.

Observação 2.2. *Quando $D \subset \mathcal{L}(H)$ é compacto e é formado por isometrias, convergência fraca implica convergência D-fraca. De fato, seja $(u_k) \subset H$. Sem perda de generalidade, suponha que $u_k \rightharpoonup 0$ em H. Suponha por absurdo, que $u_k \overset{D}{\not\rightharpoonup} 0$ em H, isto é existe $(g_k) \subset D$ tal que $g_k^*u_k \not\rightharpoonup 0$ em H. Como D é compacto em $\mathcal{L}(H)$, a menos de subsequência, $g_k \to g$ em $\mathcal{L}(H)$. Por outro lado, $(g_k^*u_k)$ é limitada, já que (u_k) é limitada por ser fracamente convergente e $\|g_k^*\| = \|g_k\|$. Assim podemos tomar subsequência de (g_k) (na subsequência anterior) tal que $g_k^*u_k \rightharpoonup b \neq 0$, para algum $b \in H$. Além disso, (g_ku_k) também é limitada nas subsequências anteriores, logo extraindo novamente uma subsequência, $g_ku_k \rightharpoonup w$ em H, para algum $w \in H$. Afirmamos que $w \neq 0$. Com efeito, se $w = 0$ então $g_k^*u_k = g_k^*(g_k^*g_k)u_k \rightharpoonup (g^*)^2w = 0$, uma contradição. Dado $\varphi \in H$, temos*

$$\begin{aligned}
(w, \varphi) &= \lim_{k\to\infty}(g_ku_k, \varphi)\\
&= \lim_{k\to\infty}(u_k, g_k^*\varphi)\\
&= \lim_{k\to\infty}(u_k, g_k^*\varphi - g^*\varphi) + \lim_{k\to\infty}(u_k, g^*\varphi)\\
&= \lim_{k\to\infty}(u_k, (g_k - g)^*\varphi) + \lim_{k\to\infty}(u_k, g^*\varphi) = 0,
\end{aligned}$$

isto é, $(w, \varphi) = 0$ *para todo* $\varphi \in H$*. Portanto* $w = 0$*, uma contradição. Logo devemos ter* $u_k \stackrel{D}{\rightharpoonup} 0$ *em* H*.*

Observação 2.3. *Considere* D *o conjunto de todos os operadores unitários em* H*. Então convergência* D*-fraca implica convergência forte (em norma) em* H*. Com efeito, seja* $(u_k) \subset H$ *tal que* $u_k \stackrel{D}{\rightharpoonup} 0$ *em* H*. Seja* $e \in H$ *com* $\|e\| = 1$ *linearmente independente com* (u_k) *(por exemplo, tome* $e \in (u_k)^\perp$*). Defina* $Z_k = \langle e, u_k \rangle$ *o espaço bidimensional gerado por* $\{e, u_k\}$*. Considere a decomposição em soma direta de* H *dada por* $H = Z_k \oplus Z_k^\perp$ *e defina o operador linear* g_k*,*

$$g_k(u) = \begin{cases} \|u_k\| e, & se\ u = u_k, \\ \|u_k\|^{-1} u_k, & se\ u = e, \\ u, & se\ u \in Z_k^\perp. \end{cases}$$

Sejam $u = a_u u_k + b_u e + c_u \varphi_u$ *e* $v = a_v u_k + b_v e + c_v \varphi_v$*, com* $a_u, b_u, c_u, a_v, b_v, c_v \in \mathbb{R}$*. Então*

$$\begin{aligned} (u, v) &= (a_u u_k + b_u e + c_u \varphi_u, a_v u_k + b_v e + c_v \varphi_v) \\ &= a_u a_v \|u_k\|^2 + a_u b_v (u_k, e) + a_v b_u (u_k, e) + b_u b_v + c_u c_v (\varphi_u, \varphi_v). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (g_k u, g_k v) &= (g_k(a_u u_k + b_u e + c_u \varphi_u), g_k(a_v u_k + b_v e + c_v \varphi_v)) \\ &= (a_u \|u_k\| e + b_u u_k \|u_k\|^{-1} + c_u \varphi_u\ ,\ a_v \|u_k\| e + b_v u_k \|u_k\|^{-1} + c_v \varphi_v) \\ &= a_u a_v \|u_k\|^2 + a_u b_v (u_k, e) + a_v b_u (u_k, e) + b_u b_v + c_u c_v (\varphi_u, \varphi_v). \end{aligned}$$

Consequentemente $(g_k u, g_k v) = (u, v)$ *para todo* $u, v \in H$*, logo* g_k *é isometria. Dado* $v = a u_k + b e + c\varphi \in H$*, com* $a, b, c \in \mathbb{R}, \varphi \in Z_k^\perp$*, tome* $u = (b\|u_k\|^{-1}) u_k + a\|u_k\| e + c\varphi \in H$*, logo*

$$g_k u = g_k((b|u_k\|^{-1}) u_k + a\|u_k\| e + c\varphi) = (b|u_k\|^{-1}) \|u_k\| e + a\|u_k\| (\|u_k\|^{-1} u_k) + c\varphi = v,$$

assim g_k *é sobrejetora, o que mostra que* $g_k \in D$*. Considere agora* $v \in H$*, com a mesma* *notação anterior. Então*

$$\begin{aligned}(g_k^*u_k, v) = (u_k, g_k v) &= (u_k, g_k(au_k + be + c\varphi)) \\ &= a(u_k, \|u_k\|e) + b(u_k, \|u_k\|^{-1}u_k) + c(u_k, \varphi) \\ &= a(u_k, \|u_k\|e) + b\|u_k\|(e, e) + c(u_k, \varphi) \\ &= (\|u_k\|e, au_k) + (\|u_k\|e, be) + (\|u_k\|e, c\varphi) \\ &= (\|u_k\|e, v),\end{aligned}$$

pois $(u_k, \varphi) = (e, \varphi) = 0$. *Portanto* $(g_k^*u_k, v) = (\|u_k\|e, v)$, *para todo* $v \in H$ *e* $k \in \mathbb{N}$. *Ou seja,* $g_k^*u_k = \|u_k\|e$. *Como* $\|u_k\| = (g_k^*u_k, e)$ *e por hipótese* $g_k^*u_k \rightharpoonup 0$ *em* H*, concluímos que* $\|u_k\| \to 0$.

Dada a sequência de operadores $(g_k) \subset \mathcal{L}(H)$, usamos a notação $g_k \rightharpoonup g$, para indicar que (g_k) converge fracamente em cada ponto de H para g, isto é, $(g_k u, v) \to (gu, v)$, para todo $u, v \in H$.

Definição 2.2. *Dizemos que* $D \subset \mathcal{L}(H)$*, satisfazendo* (2.3)*, é um conjunto de deslocamentos quando*

$$0 < \gamma := \inf_{g \in D, \|u\|=1} \|gu\|^2 \leq \Gamma := \sup_{g \in D, \|u\|=1} \|gu\|^2 < \infty, \tag{2.9}$$

$$(u_k) \subset H,\ (g_k) \subset D,\ u_k \rightharpoonup 0 \text{ em } H \Rightarrow g_k^* g_k u_k \rightharpoonup 0 \text{ em } H, \tag{2.10}$$

e para quaisquer $(u_k) \subset H$ *e* $(g_k), (h_k) \subset D$*, temos*

$$h_k^* g_k \not\rightharpoonup 0,\ (g_k^* g_k)^{-1} g_k^* u_k \rightharpoonup 0 \text{ em } H \Rightarrow (h_k^* h_k)^{-1} h_k^* u_k \rightharpoonup 0 \text{ em } H\,, \tag{2.11}$$

a menos de subsequência.

Caso D *seja um grupo sobre a operação de composição de operadores, dizemos que* D *é um grupo de deslocamento. O par* (H, D) *é chamado de espaço de deslocamento, e os operadores* $g \in D$ *de deslocamentos.*

Observe que um conjunto de deslocamento satisfaz a condição (2.2).

Exemplo 2.2. *Considere* $H = H^1(\mathbb{R}^N)$ *e* $D = D_{\mathbb{Z}^N} := \{g_y : u \mapsto u(\cdot - y)\ ,\ y \in \mathbb{Z}^N\}$*. Então* $(H^1(\mathbb{R}^N), D_{\mathbb{Z}^N})$ *é um espaço de deslocamento. Este fato será demonstrado na Seção 2.5.*

Observação 2.4. *Pela condição* (2.9)*, deslocamentos são aplicações lineares injetoras e uniformemente limitadas, com* $\|g\| \leq \Gamma^{1/2}$*, para todo* $g \in D$*. Por outro lado, quando* D *é formado por isometrias as condições* (2.9) *e* (2.10) *são sempre satisfeitas, já que para* $\|u\|^2 = 1$ *temos* $\|gu\|^2 = 1$ *(*$\gamma = 1$*). Além disso, se* D *é um grupo de operadores unitários, para qualquer* $(g_k) \subset D$ *e* $(u_k) \subset H$*, o item* (2.11) *toma a seguinte forma*

$$g_k \not\rightharpoonup 0, u_k \rightharpoonup 0 \text{ em } H \Rightarrow g_k u_k \rightharpoonup 0, \text{ a menos de subsequência.} \tag{2.12}$$

De fato, basta tomar $g_k = id$ *e escrever "*$h_k^* = g_k$*", uma vez que* $h_k^{-1} = h_k^* \in D$ *se, e somente se,* $h_k \in D$*.*

Proposição 2.2. *Seja* D *um conjunto de operadores unitários em* H*. Se para quaisquer* $(g_k), (h_k) \subset D$*, tivermos*

$$h_k^* g_k \not\rightharpoonup 0 \text{ em } H \Rightarrow h_k^* g_k \text{ converge pontualmente,} \tag{2.13}$$

para alguma subsequência, então D *é um conjunto de deslocamento.*

Demonstração: Já que D é formado por operadores unitários, as condições (2.9) e (2.10) são satisfeitas. Mostremos que vale (2.11). Sejam $(u_k) \subset H$ e $(g_k), (h_k) \subset D$, tais que $h_k^* g_k \not\rightharpoonup 0$ e $g_k^* u_k \rightharpoonup 0$ em H. Note que $h_k^* g_k \not\rightharpoonup 0$ é equivalente a $g_k^* h_k \not\rightharpoonup 0$. Pois $(h_k^* g_k u, v) \to 0$ se, e somente se, $(u, g_k^* h_k v) \to 0$, para todo $u, v \in H$. Pela condição (2.13), $(g_k^* h_k)$ possui subsequência que converge pontualmente. Assim, dado $v \in H$ e usando a mesma notação para a subsequência, temos $(g_k^* u_k, g_k^* h_k v) \to 0$. Como $g_k g_k^* = id$, segue que $(h_k^* u_k, v) \to 0$. Ou seja, $h_k^* u_k \rightharpoonup 0$. ∎

2.2 Convergência D-fraca em l^2

Nesta seção fornecemos um exemplo de espaço de deslocamento, além de relacionar a convergência $D-$fraca com uma convergência já conhecida. Vamos considerar o espaço de Hilbert

$$H = l^2(\mathbb{Z}^N) = \left\{ c : \mathbb{Z}^N \to \mathbb{R} \ ; \ \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^N} c(\alpha)^2 < \infty \right\},$$

munido de seu produto interno usual,

$$(c(\alpha), d(\alpha))_{l^2(\mathbb{Z}^N)} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^N} c(\alpha) b(\alpha),$$

associado ao conjunto de operadores deslocamento

$$D = D_{\mathbb{Z}^N} = \{\eta_\beta : l^2(\mathbb{Z}^N) \to l^2(\mathbb{Z}^N) \ ; \ \eta_\beta c(\alpha) = c(\alpha - \beta)\}.$$

Note que $D_{\mathbb{Z}^N}$ é um grupo de operadores unitários em $l^2(\mathbb{Z}^N)$. De fato,

$$\|\eta_\beta c(\alpha)\|^2_{l^2(\mathbb{Z}^N)} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^N} c(\alpha - \beta)c(\alpha - \beta) = \|c(\alpha)\|^2_{l^2(\mathbb{Z}^N)}.$$

Além disso, $\eta_\beta^{-1} = \eta_{-\beta} = \eta_\beta^*$. Com efeito,

$$(\eta_\beta c(\alpha), d(\alpha))_{l^2(\mathbb{Z}^N)} = \\ \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^N} c(\alpha - \beta)d(\alpha) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^N} c(\alpha)d(\alpha + \beta) = (c(\alpha), \eta_{-\beta} d(\alpha))_{l^2(\mathbb{Z}^N)}.$$

Lema 2.2. $C_0(\mathbb{Z}^N) = \{c : l^2(\mathbb{Z}^N) \to \mathbb{R} \ ; \ \operatorname{supp} c$ *é compacto*$\}$ *é denso em* $l^2(\mathbb{Z}^N)$.

Demonstração: Seja $(c(\alpha)) \in l^2(\mathbb{Z}^N)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{\substack{\alpha \in l^2(\mathbb{Z}^N), \\ |\alpha| > N}} c(\alpha)^2 < \varepsilon.$$

Defina

$$d(\alpha) = \begin{cases} c(\alpha), & \text{se } |\alpha| \leq N, \\ 0, & \text{se } |\alpha| > N. \end{cases}$$

Então $\operatorname{supp}(d(\alpha))$ é compacto (topologia induzida de $\mathbb{Z}^N$) e $\|d(\alpha) - c(\alpha)\|_{l^2(\mathbb{Z}^N)} < \varepsilon$. ■

Proposição 2.3. *O par* $(l^2(\mathbb{Z}^N), D_{\mathbb{Z}^N})$ *é um espaço de deslocamento.*

Demonstração: Como $D_{\mathbb{Z}^N}$ é um grupo de operadores unitários e para quaisquer η_γ, $\eta_\beta \in D_{\mathbb{Z}^N}$, $\eta_\gamma^* \eta_\beta = \eta_{\beta - \gamma}$, pela Proposição 2.2 é suficiente mostrar que para qualquer sequência de deslocamentos (η_{β_k}), com $\eta_{\beta_k} \rightharpoonup 0$ em $l^2(\mathbb{Z}^N)$, tenhamos que (η_{β_k}) converge pontualmente, a menos de subsequência. Afirmamos que se $|\beta_k| \to \infty$ então $\eta_{\beta_k} \rightharpoonup 0$ em $l^2(\mathbb{Z}^N)$.

De fato, pelo Lema 2.2 basta tomarmos $(c(\alpha)), (d(\alpha)) \in C_0(\mathbb{Z}^N)$ e mostrarmos que $(\eta_{\beta_k} c(\alpha), d(\alpha))_{l^2(\mathbb{Z}^N)} \to 0$. Mas observe que,

$$(\eta_{\beta_k} c(\alpha), d(\alpha))_{l^2(\mathbb{Z}^N)} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^N} c(\alpha - \beta_k)d(\alpha) = 0,$$

para $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de modo que $\operatorname{supp} c(\cdot - \beta_k) \cap \operatorname{supp} d = \emptyset$. Logo $(\eta_{\beta_k} c(\alpha), d(\alpha))_{l^2(\mathbb{Z}^N)} \to 0$.

Portanto $\eta_{\beta_k} \not\rightharpoonup 0$ em $l^2(\mathbb{Z}^N)$ implica (β_k) limitada. Consequentemente (β_k) possui uma subsequência constante, logo (η_{β_k}) também. Deste modo (η_{β_k}) possui uma subsequência que converge pontualmente. ■

Vamos considerar agora o espaço de Banach

$$l^\infty(\mathbb{Z}^N) = \{c : \mathbb{Z}^N \to \mathbb{R} \; ; \; \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}^N} |c(\alpha)| < +\infty\},$$

munido da norma $\|c(\alpha)\|_\infty = \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}^N} |c(\alpha)|$. O próximo resultado nós diz que convergência D-fraca em $l^2(\mathbb{Z}^N)$ é equivalente a convergência forte em $l^\infty(\mathbb{Z}^N)$.

Proposição 2.4. *Seja $(c_k) \subset l^2(\mathbb{Z}^N)$. Então $c_k \overset{D_{\mathbb{Z}^N}}{\rightharpoonup} 0$ em $l^2(\mathbb{Z}^N)$ se, e somente se, $c_k \to 0$ em $l^\infty(\mathbb{Z}^N)$.*

Demonstração: Suponha que $c_k \overset{D_{\mathbb{Z}^N}}{\rightharpoonup} 0$ em $l^2(\mathbb{Z}^N)$. Então $\eta^*_{\beta_k} c_k \rightharpoonup 0$ em $l^2(\mathbb{Z}^N)$, para todo $(\beta_k) \subset \mathbb{Z}^N$. Da definição de supremo, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $\alpha_k \in \mathbb{Z}^N$ tal que $\|c_k(\alpha)\|_\infty / 2 < |c_k(\alpha_k)|$. Por outro lado, seja $e \in l^\infty(\mathbb{Z}^N)$ definido por

$$e(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha \neq 0, \\ 1, & \text{se } \alpha = 0. \end{cases}$$

Então,

$$\|c_k(\alpha)\|_\infty \leq 2|c_k(\alpha_k)| = 2|\eta^*_{\alpha_k} c_k(0)| = 2\left|\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^N} \eta^*_{\alpha_k} c_k(\alpha) e(\alpha)\right| = 2|(\eta^*_{\alpha_k} c_k, e)_{l^2(\mathbb{Z}^N)}| \to 0.$$

Reciprocamente, seja $(c_k) \subset l^2(\mathbb{Z}^N)$ tal que $c_k \to 0$ em $l^\infty(\mathbb{Z}^N)$. Então fixado $\beta \in \mathbb{Z}^N$, para toda sequência $(\alpha_k) \subset \mathbb{Z}^N$, temos $|\eta^*_{\alpha_k} c_k(\beta)| = |c_k(\beta + \alpha_k)| \leq \|c_k\|_\infty \to 0$. Seja $b \in C_0(\mathbb{Z}^N)$. Então $\operatorname{supp}(b(\alpha))$ é um conjunto finito e $\|b(\alpha)\|_\infty = \sup_{\alpha \in \operatorname{supp} b} |b(\alpha)|$. Consequentemente,

$$\begin{aligned}(\eta^*_{\alpha_k} c_k(\alpha), b(\alpha))_{l^2(\mathbb{Z}^N)} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^N} \eta^*_{\alpha_k} c_k(\alpha) b(\alpha) &= \sum_{\alpha \in \operatorname{supp} b} \eta^*_{\alpha_k} c_k(\alpha) b(\alpha) \\ &\leq \|b(\alpha)\|_\infty \sum_{\alpha \in \operatorname{supp} b} |\eta^*_{\alpha_k} c_k(\alpha)| \to 0.\end{aligned}$$

Pelo Lema 2.2, $\eta^*_{\alpha_k} c_k \rightharpoonup 0$ em $l^2(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}})$. Ou seja, $c_k \overset{D_{\mathbb{Z}^N}}{\rightharpoonup} 0$ em $l^2(\mathbb{Z}^N)$. ■

Corolário 2.1. *Considere $(c_k) \subset l^2(\mathbb{Z}^N)$. Se $c_k \overset{D_{\mathbb{Z}^N}}{\rightharpoonup} 0$ em $l^2(\mathbb{Z}^N)$ então, para todo $p > 2$ temos $c_k \to 0$ em $l^p(\mathbb{Z}^N)$.*

Demonstração: Pela Observação 2.1, $c_k \rightharpoonup 0$ em $l^2(\mathbb{Z}^N)$. Em particular, (c_k) é limitada em $l^2(\mathbb{Z}^N)$, isto é, existe $M > 0$ tal que $\|c_k(\alpha)\|_{l^2(\mathbb{Z}^N)} \leq M$. Além disso, da Proposição 2.4 temos $\|c_k\|_\infty \to 0$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\|c_k(\alpha)\|_{l^p(\mathbb{Z}^N)}^p = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^N} |c_k(\alpha)|^p &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^N} |c_k(\alpha)|^{p-2} |c_k(\alpha)|^2 \\
&\leq \|c_k(\alpha)\|_\infty^{p-2} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^N} |c_k(\alpha)|^2 \leq M^2 \|c_k(\alpha)\|_\infty^{p-2} \to 0.
\end{aligned}$$

Logo, $c_k \to 0$ em $l^p(\mathbb{Z}^N)$. ∎

2.3 Decomposição da Convergência Fraca

O próximo resultado é um refinamento do Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki no contexto dos espaços de deslocamento.

Teorema 2.1. *Seja (H, D) um espaço de deslocamento e γ como na condição (2.9). Se $(u_k) \subset H$ é uma sequência limitada, então existe um subconjunto $\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{N}$, e sequências $(w^{(n)}) \subset H, (g_k^{(n)}) \subset D$, $g_k^{(1)} = id$, com $k \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}_0$, tais que a menos de subsequência de (u_k), temos*

$$\left(g_k^{(n)^*} g_k^{(n)} \right)^{-1} g_k^{(n)^*} u_k \rightharpoonup w^{(n)} \text{ em } H, \tag{2.14}$$

$$g_k^{(n)^*} g_k^{(m)} \rightharpoonup 0, \text{ quando } n \neq m, \tag{2.15}$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}_0} \|w^{(n)}\|^2 \leq \gamma^{-1} \limsup \|u_k\|^2, \tag{2.16}$$

$$u_k - \sum_{n \in \mathbb{N}_0} g_k^{(n)} w^{(n)} \overset{D}{\rightharpoonup} 0, \tag{2.17}$$

onde $\sum_{n \in \mathbb{N}_0} g_k^{(n)} w^{(n)}$ converge uniformemente em k.

Demonstração: Inicialmente, mostremos que (2.14) e (2.15) implicam (2.16). Dado

$M \in \mathbb{N}_0$, temos que

$$
\begin{aligned}
0 \leq \left\| u_k - \sum_{n=1}^{M} g_k^{(n)} w^{(n)} \right\|^2 &= \left(u_k - \sum_{n=1}^{M} g_k^{(n)} w^{(n)}, u_k - \sum_{n=1}^{M} g_k^{(n)} w^{(n)} \right) \\
&= \|u_k\|^2 - 2\sum_{n=1}^{M} (u_k, g_k^{(n)} w^{(n)}) + \sum_{n=1}^{M} \|g_k^{(n)} w^{(n)}\|^2 \\
&\quad + \sum_{\substack{n,m=1 \\ n \neq m}}^{M} (g_k^{(m)} w^{(m)}, g_k^{(n)} w^{(n)}). \qquad (2.18)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, (2.15) nós fornece

$$
\sum_{\substack{n,m=1 \\ n \neq m}}^{M} (g_k^{(m)} w^{(m)}, g_k^{(n)} w^{(n)}) \to 0. \qquad (2.19)
$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{M} \left(u_k, g_k^{(n)} w^{(n)} \right) &= \sum_{n=1}^{M} \left(g_k^{(n)^*} u_k, w^{(n)} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{M} \left(g_k^{(n)^*} g_k^{(n)} w^{(n)}, w^{(n)} \right) + \sum_{n=1}^{M} \left(g_k^{(n)^*} u_k - g_k^{(n)^*} g_k^{(n)} w^{(n)}, w^{(n)} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{M} \left\| g_k^{(n)} w^{(n)} \right\|^2 + \sum_{n=1}^{M} \left(g_k^{(n)^*} (u_k - g_k^{(n)} w^{(n)}), w^{(n)} \right). \qquad (2.20)
\end{aligned}
$$

Por (2.14), vemos que

$$
\left(g_k^{(n)^*} g_k^{(n)} \right)^{-1} g_k^{(n)^*} u_k - w^{(n)} \rightharpoonup 0 \text{ em } H, \text{ para } n = 1, \ldots, M.
$$

Usando a condição (2.10) na sequência anterior, segue que

$$
g_k^{(n)^*} (u_k - g_k^{(n)} w^{(n)}) = \left(g_k^{(n)^*} g_k^{(n)} \right) \left(\left(g_k^{(n)^*} g_k^{(n)} \right)^{-1} g_k^{(n)^*} u_k - w^{(n)} \right) \rightharpoonup 0 \text{ em } H, \qquad (2.21)
$$

para $n = 1, \ldots, M$.

Donde, aplicando (2.21) em (2.20), conseguimos

$$
\sum_{n=1}^{M} (u_k, g_k^{(n)} w^{(n)}) = \sum_{n=1}^{M} \left\| g_k^{(n)} w^{(n)} \right\|^2 + o(1). \qquad (2.22)
$$

Substituindo (2.22) e (2.19) em (2.18) obtemos

$$
\|u_k\|^2 \geq \sum_{n=1}^{M} \|g_k^{(n)} w^{(n)}\|^2 + o(1).
$$

Disto, segue que

$$\limsup_k \|u_k\|^2 \geq \limsup_k \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \|g_k^{(n)} w^{(n)}\|^2. \tag{2.23}$$

Por outro lado, considerando (2.9), vale a seguinte relação

$$\|u\|^2 \leq \gamma^{-1} \inf_{g\in D} \|gu\|^2 \text{ para todo } u \in H. \tag{2.24}$$

De fato, dado $u \in H$ com $u \neq 0$, temos

$$\gamma = \inf_{g\in D, \|u\|=1} \|gu\|^2 \leq \inf_{g\in D} \left\| \frac{gu}{\|u\|} \right\|^2 = \|u\|^{-2} \inf_{g\in D} \|gu\|^2,$$

o que implica (2.24).

Em particular,

$$\|w^{(n)}\|^2 \leq \gamma^{-1} \inf_{g\in D} \|gw^{(n)}\|^2 \leq \gamma^{-1} \inf_{k\in\mathbb{N}} \|g_k^{(n)} w^{(n)}\|^2. \tag{2.25}$$

Tomando o somatório em (2.25) e usando (2.23) obtemos,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{M} \|w^{(n)}\|^2 &\leq \gamma^{-1} \sum_{n=1}^{M} \inf_{k\in\mathbb{N}} \|g_k^{(n)} w^{(n)}\|^2 \\
&\leq \gamma^{-1} \inf_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{M} \|g_k^{(n)} w^{(n)}\|^2 \\
&\leq \gamma^{-1} \limsup_k \sum_{n=1}^{M} \|g_k^{(n)} w^{(n)}\|^2 \\
&\leq \gamma^{-1} \limsup_k \|u_k\|^2. \qquad (2.26)
\end{aligned}$$

Isto prova (2.16) no caso que $\mathbb{N}_0$ é finito. Caso $\mathbb{N}_0$ seja infinito, tomamos $M \to \infty$ em (2.26).

Provemos agora que valem (2.14), (2.15) e (2.17).

Se $u_k \overset{D}{\rightharpoonup} 0$, então o teorema fica provado, por vacuidade, tomando $\mathbb{N}_0 = \emptyset$. (tomando como zero a soma em (2.16) e (2.17)). Caso contrário, se $u_k \overset{D}{\not\rightharpoonup} 0$ em H, existe uma sequência $(g_k^{(1)}) \subset D$, de modo que

$$\left(g_k^{(1)^*} g_k^{(1)}\right)^{-1} g_k^{(1)^*} u_k \not\rightharpoonup 0.$$

Note que

$$\left(g_k^{(1)^*} g_k^{(1)}\right)^{-1} g_k^{(1)^*} u_k$$

é limitada. De fato, (u_k) é limitada, e pela condição (2.9) os operadores $g \in D$ são uniformemente limitados, $\|(g^*g)^{-1}\| \leq 1/\gamma$ (veja o comentário após a Definição 2.1). Logo, a menos de subsequência,

$$\left(g_k^{(1)^*} g_k^{(1)}\right)^{-1} g_k^{(1)^*} u_k \rightharpoonup w^{(1)} \neq 0 \text{ em } H. \tag{2.27}$$

Sobre a subsequência anterior, considere

$$v_k^{(1)} := u_k - g_k^{(1)} w^{(1)}.$$

Então

$$\left(g_k^{(1)^*} g_k^{(1)}\right)^{-1} g_k^{(1)^*} v_k^{(1)} = \left(g_k^{(1)^*} g_k^{(1)}\right)^{-1} g_k^{(1)^*} u_k - w^{(1)} \rightharpoonup 0 \ \text{ em } H. \tag{2.28}$$

Portanto, se tomarmos $\mathbb{N}_0 = \{1\}$, a afirmação (2.14) é verificada, como também (2.15), por vacuidade. Consequentemente, se $v_k^{(1)} \overset{D}{\rightharpoonup} 0$ em H, então (2.17) é imediatamente verificada e deste modo o teorema fica provado.

Se $(v_k^{(1)})$ não converge D-fracamente para zero, repetimos o argumento em (2.27), isto é, existe uma sequência $(g_k^{(2)}) \subset D$ tal que, passando a subsequência (sobre a subsequência anterior),

$$\left(g_k^{(2)^*} g_k^{(2)}\right)^{-1} g_k^{(2)^*} v_k^{(1)} \rightharpoonup w^{(2)} \ \text{ em } H, \tag{2.29}$$

com $w^{(2)} \neq 0$. Sobre a subsequência anterior, considere

$$v_k^{(2)} := v_k^{(1)} - g_k^{(2)} w^{(2)}.$$

De modo análogo ao feito em (2.28), temos

$$\left(g_k^{(2)^*} g_k^{(2)}\right)^{-1} g_k^{(2)^*} v_k^{(2)} = \left(g_k^{(2)^*} g_k^{(2)}\right)^{-1} g_k^{(2)^*} v_k^{(1)} - w^{(2)} \rightharpoonup 0 \text{ em } H. \tag{2.30}$$

Afirmamos que

$$g_k^{(1)^*} g_k^{(2)} \rightharpoonup 0 \text{ em } H. \tag{2.31}$$

Com efeito, suponha por absurdo que $g_k^{(1)^*} g_k^{(2)} \not\rightharpoonup 0$. Então podemos aplicar a condição (2.11) em (2.30), e obter

$$\left(g_k^{(1)^*} g_k^{(1)}\right)^{-1} g_k^{(1)^*} \left(v_k^{(1)} - g_k^{(2)} w^{(2)}\right) = \left(g_k^{(1)^*} g_k^{(1)}\right)^{-1} g_k^{(1)^*} v_k^{(2)} \rightharpoonup 0 \text{ em } H.$$

Deste modo, por (2.28), vale

$$\left(g_k^{(1)^*} g_k^{(1)}\right)^{-1} g_k^{(1)^*} g_k^{(2)} w^{(2)} \rightharpoonup 0 \text{ em } H. \tag{2.32}$$

Por outro lado, uma vez que

$$g_k^{(1)^*} g_k^{(2)} \rightharpoonup 0 \Leftrightarrow g_k^{(2)^*} g_k^{(1)} \rightharpoonup 0,$$

temos $g_k^{(2)^*} g_k^{(1)} \not\rightharpoonup 0$. Novamente, podemos aplicar (2.11) em (2.32) para obter

$$w^{(2)} = \left(g_k^{(2)^*} g_k^{(2)}\right)^{-1} g_k^{(2)^*} g_k^{(2)} w^{(2)} \rightharpoonup 0 \text{ em } H.$$

Ou seja, $w^{(2)} = 0$. Uma contradição. Portanto devemos ter, $g_k^{(1)^*} g_k^{(2)} \rightharpoonup 0$ em H. Consequentemente, $g_k^{(2)^*} g_k^{(1)} \rightharpoonup 0$ em H. Assim, se $v_k^{(2)} \overset{D}{\rightharpoonup} 0$ em H, tomando $\mathbb{N}_0 = \{1, 2\}$ o teorema fica provado, já que (2.14) decorre de (2.31) juntamente com (2.30).
Continuando desta maneira, tomando sucessivas subsequências, chegamos a n-ésima etapa onde supomos que $v_k^{(n-1)} \overset{D}{\not\rightharpoonup} 0$ em H. Com isto, definimos:

$$\begin{cases} v_k^{(0)} := u_k, \\ v_k^{(n)} := v_k^{(n-1)} - g_k^{(n)} w^{(n)} = u_k - g_k^{(1)} w^{(1)} - ... - g_k^{(n-1)} w^{(n-1)} - g_k^{(n)} w^{(n)}, \end{cases} \tag{2.33}$$

onde $(g_k^{(n)^*} g_k^{(n)})^{-1} g_k^{(n)^*} v_k^{(n-1)} \rightharpoonup w^{(n)}$ em H, sendo $(g_k^{(n)}) \in D$ escolhido de modo que $w^{(n)} \neq 0$. Observe que $(v_k^{(n)})$ é uma sequência limitada. De fato, $v_k^{(0)} = u_k$ é limitada, e pela condição (2.9) os operadores $g \in D$ são uniformemente limitados.
Feita esta consideração, agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, considere o conjunto

$$W_n = \{w \in H \setminus \{0\} \;;\; \exists (g_j) \subset D,\ (k_j) \subset \mathbb{N} \text{ tal que } (g_j^* g_j)^{-1} g_j^* v_{k_j}^{(n)} \rightharpoonup w \text{ em } H\}.$$

Pelo que foi feito até (2.32), $v_k^{(n-1)} \overset{D}{\not\rightharpoonup} 0$ implica a existência de operadores $(g_k^{(j)})_{k\in\mathbb{N}}$, $j = 1, \ldots, n$, que satisfazem os itens (2.14) e (2.15) (e consequentemente o item (2.16)). Entretanto, o item (2.17) vale, caso $v_k^{(n)} \overset{D}{\rightharpoonup} 0$, e assim vale o teorema tomando $\mathbb{N}_0 = \{1, \ldots, n\}$. Como $W_n = \emptyset$ é equivalente a $v_k^{(n)} \overset{D}{\rightharpoonup} 0$, vamos supor que $W_n \neq \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
Note que se $w \in W_n$, então

$$\|w\| \leq \liminf_k \|(g_{k_j}^* g_{k_j})^{-1} g_{k_j}^* v_{k_j}^{(n)}\|.$$

Deste modo, pela limitação uniforme dos operadores $g \in D$ e por $(v_k^{(n)})$ ser limitada, podemos considerar

$$t_n = \sup_{w \in W_n} \|w\| < \infty.$$

Observe que se $t_n = 0$, para algum $n \in \mathbb{N}$, então $W_n = \emptyset$, o que é uma contradição. Assim, devemos ter $t_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $n \in \mathbb{N}$, seja $w^{(n+1)} \in W_n$ de modo que

$$\|w^{(n+1)}\| \geq \frac{t_n}{2}. \tag{2.34}$$

Logo, existe uma sequência $(g_k^{(n+1)}) \subset D$ associada a $w^{(n+1)}$, tal que

$$\left(g_k^{(n+1)^*} g_k^{(n+1)}\right)^{-1} g_k^{(n+1)^*} v_k^{(n)} \rightharpoonup w^{(n+1)} \text{ em } H, \tag{2.35}$$

a menos de subsequência. Recorrendo a um argumento semelhante ao que usamos em (2.31) vemos que

$$g_k^{p*} g_k^q \rightharpoonup 0 \quad \text{ sempre que } p \neq q \text{ para } p, q \leq n. \tag{2.36}$$

Desde que $t_n \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, usando a convergência (2.35), vale a desigualdade (2.26), logo elevando (2.34) ao quadrado, conseguimos

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} t_n^2 \leq 4\gamma^{-1} \limsup_k \|u_k\|^2.$$

consequentemente, $t_n^2 \to 0$ quando $n \to \infty$.

Seja agora $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ uma base ortonormal de H.

Afirmamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, vale

$$\limsup_k \sum_{i \in \mathbb{N}} 2^{-i+1} \sup_{g \in D} (v_k^{(n)}, g(g^* g)^{-1} \varphi_i)^2 \leq 2t_n^2. \tag{2.37}$$

De fato, dado $n \in \mathbb{N}$, seja

$$S_n^i = \limsup_k \sup_{g \in D} (v_k^{(n)}, g(g^* g)^{-1} \varphi_i)^2.$$

Se $S_n^i = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, vale a afirmação. Suponha então que existe $i \in \mathbb{N}$ de modo que $S_n^i > 0$. Logo, existe uma sequência $(g_k^{(n+1)}) \subset D$ tal que

$$\lim_{k \to \infty} ((g_k^{(n+1)^*} g_k^{(n+1)})^{-1} g_k^{(n+1)^*} v_k^{(n)}, \varphi_i)^2 = S_n^i,$$

a menos de subsequência de $(v_k^{(n)})$.

Do mesmo modo que foi feito anteriormente, podemos considerar a menos de subsequência,

$$\left(g_k^{(n+1)^*} g_k^{(n+1)}\right)^{-1} g_k^{(n+1)^*} v_k^{(n)} \rightharpoonup \tilde{w}^{(n+1)} \neq 0 \text{ em } H.$$

Consequentemente, na subsequência anterior,

$$S_n^i = (\tilde{w}^{(n+1)}, \varphi_i)^2 \leq \|\tilde{w}^{(n+1)}\|^2 \leq t_n^2.$$

Portanto, tomando as somas parciais,

$$\limsup_k \sum_{i=1}^{l} 2^{-i+1} \sup_{g\in D}(v_k^{(n)}, g(g^*g)^{-1}\varphi_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{l} 2^{-i+1} S_n^i \leq t_n^2 \sum_{i=1}^{l} 2^{-i+1}.$$

Fazendo $l \to \infty$, temos a desigualdade (2.37).

Dado $n \in \mathbb{N}$, seja $k(n) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} 2^{-i+1} \sup_{g\in D}(v_{k(n)}^{(n)}, g(g^*g)^{-1}\varphi_i)^2 \leq 4t_n^2. \tag{2.38}$$

Fixado $i \in \mathbb{N}$, (2.38) implica que

$$\sup_{g\in D}(v_{k(n)}^{(n)}, g(g^*g)^{-1}\varphi_i) \to 0, \quad \text{quando } n \to \infty. \tag{2.39}$$

De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n^2 < \varepsilon/4$, desde que $n > n_0$. Seja $k(n)$, $n > n_0$, suficientemente grande que verifica (2.38). Então,

$$2^{-i+1}(v_{k(n)}^{(n)}, g(g^*g)^{-1}\varphi_i)^2 \leq 2^{-i+1} \sup_{g\in D}(v_{k(n)}^{(n)}, g(g^*g)^{-1}\varphi_i)^2 < 2^{-i+1}\varepsilon,$$

para todo $g \in D$. Isto prova (2.39).

Seja $\varphi = \sum_{j=1}^{M} \varphi_{i_j}$, uma combinação linear de $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Por (2.39), temos

$$\sup_{g\in D}(v_{k(n)}^{(n)}, g(g^*g)^{-1}\varphi)^2 \leq \sum_{j=1}^{M} \sup_{g\in D}(v_{k(n)}^{(n)}, g(g^*g)^{-1}\varphi_{i_j})^2 \to 0,$$

quando $n \to \infty$. Segue daí que (2.39) se estende para todo $\varphi \in H$, uma vez que $\langle\varphi_i\rangle_{i\in\mathbb{N}}$ é denso em H.

Para provarmos isto, vamos precisar de uma limitação uniforme da sequência $(v_{k(n)}^{(n)})$ em $n \in \mathbb{N}$, isto é, precisamos que $\|v_{k(n)}^{(n)}\| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e algum $M > 0$. Isto de fato é verdade, para ver isto, basta substituir

$$(v_{k(n)}^{(n)}, g(g^*g)^{-1}\varphi_i)^2 = \|v_{k(n)}^{(n)}\|^2 \|g(g^*g)^{-1}\varphi_i\|^2 (\cos\theta)^2,$$

na desigualdade (2.38) e lembrar que (t_n) é limitada por ser convergente.

Seja agora $\varphi \in H$. Então, existe $(\varphi_{i_j}) \subset \langle(\varphi_i)\rangle_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $\varphi_{i_j} \to \varphi$ em H, quando

$j \to \infty$. Portanto,

$$\begin{aligned}\sup_{g\in D}(v_{k(n)}^{(n)}, g(g^*g)^{-1}\varphi) &\leq \sup_{g\in D}(v_{k(n)}^{(n)}, g(g^*g)^{-1}(\varphi - \varphi_{i_j})) + \sup_{g\in D}(v_{k(n)}^{(n)}, g(g^*g)^{-1}\varphi_{i_j})\\ &\leq M\Gamma\gamma^{-1}\|\varphi - \varphi_{i_j}\| + \sup_{g\in D}(v_{k(n)}^{(n)}, g(g^*g)^{-1}\varphi_{i_j}).\end{aligned}$$

Tomando $n \to \infty$ temos

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{g\in D}(v_{k(n)}^{(n)}, g(g^*g)^{-1}\varphi) \leq M\Gamma\gamma^{-1}\|\varphi - \varphi_{i_j}\|,$$

agora tomando $j \to \infty$ segue que

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{g\in D}(v_{k(n)}^{(n)}, g(g^*g)^{-1}\varphi) = 0.$$

Logo, pela Proposição 2.1, obtemos

$$v_{k(n)}^{(n)} \stackrel{D}{\rightharpoonup} 0,$$

quando $n \to \infty$. Disto, concluímos que

$$v_{k(n)}^{(n)} = u_{k(n)} - \sum_{j\leq n} g_{k(n)}^{(j)} w^{(j)} \stackrel{D}{\rightharpoonup} 0, \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Note que $k(n)$ pode ser escolhido em (2.38) arbitrariamente grande, em particular, pela desigualdade (2.26) a série, $\sum_j g_{k(n)}^{(j)} w^{(j)}$ é uniformemente convergente em k, para n suficientemente grande, e isto prova (2.17). Uma vez que estamos sempre extraindo subsequências, por recursividade, segue (2.14) e (2.15). Para concluir a demonstração, caso $u_k \not\rightharpoonup 0$ em H, em alguma subsequência, podemos tomar $g_k^{(1)} = id$ no primeiro passo. Caso $u_k \rightharpoonup 0$ em H, renumeramos as sequências, considerando uma nova $(\tilde{g}_k^{(n)})$, sendo $\tilde{g}_k^{(n)} = g_k^{(n+1)}$, e tomamos $g_k^{(1)} = id$, $\tilde{w^{(n)}} = w^{(n+1)}$ e $w^{(1)} = 0$. ∎

Como consequência do teorema, obtemos uma convergência da norma $\|u_k\|^2$, a menos de termos de correção.

Corolário 2.2. *Suponha que (H, D) é um espaço de deslocamento, sendo D formado por isometrias, e γ como na condição (2.9). Se $(u_k) \subset H$ é uma sequência limitada, então existe um subconjunto $\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{N}$, e sequências $(w^{(n)}) \subset H$ e $(g_k^{(n)}) \subset D$, $g_k^{(1)} = id$, com $k \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}_0$, tais que a menos de subsequência de (u_k), temos*

$$g_k^{(n)^*} u_k \rightharpoonup w^{(n)} \text{ em } H, \tag{2.40}$$

$$r_k := u_k - \sum_{n\in\mathbb{N}_0} g_k^{(n)} w^{(n)} \stackrel{D}{\rightharpoonup} 0, \tag{2.41}$$

$$\|u_k\|^2 - \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \|w^{(n)}\|^2 - \|r_k\|^2 \to 0, \text{ quando } k \to \infty. \tag{2.42}$$

Além disso, valem as afirmações (2.15) *e* (2.16) *do Teorema 2.1.*

Demonstração: Usando o fato que D é formado por isometrias, da condição (2.14) obtemos (2.40), além disso (2.41) é (2.17) reescrito.
Usaremos (2.40) e (2.41) para provar (2.42).

Afirmamos que

$$\lim_{k\to 0} \sum_{\substack{m\neq n\\ m,n\in\mathbb{N}_0}} (g_k^{(n)^*} g_k^{(m)} w^{(m)}, w^{(n)}) = 0. \tag{2.43}$$

Com efeito, se $\mathbb{N}_0$ for finito, (2.43) segue de (2.15). Suponha então $\mathbb{N}_0$ infinito. Fixado $n_0 \in \mathbb{N}_0$, pela convergência (2.17), temos

$$\lim_{k\to 0}\left(g_k^{(n_0)^*}(u_k - \sum_{m\in\mathbb{N}_0} g_k^{(m)} w^{(m)}), w^{(n_0)} \right) = 0,$$

Além disso, de (2.14) segue que,

$$\lim_{k\to 0} (g_k^{(n_0)^*} u_k, w^{(n_0)}) = \|w^{(n_0)}\|^2.$$

Por outro lado, uma vez que

$$\begin{aligned}
\left(g_k^{(n_0)^*}(u_k - \sum_{m\in\mathbb{N}_0} g_k^{(m)} w^{(m)}), w^{(n_0)} \right) &= (g_k^{(n_0)^*} u_k, w^{(n_0)}) - \sum_{m\in\mathbb{N}_0} (g_k^{(n_0)^*} g_k^{(m)} w^{(m)}, w^{(n_0)}) \\
&= (g_k^{(n_0)^*} u_k, w^{(n_0)}) - (g_k^{(n_0)^*} g_k^{(n_0)} w^{(n_0)}, w^{(n_0)}) \\
&\quad - \sum_{\substack{m\neq n_0\\ m\in\mathbb{N}_0}} (g_k^{(n_0)^*} g_k^{(m)} w^{(m)}, w^{(n_0)}) \\
&= \left((g_k^{(n_0)^*} u_k, w^{(n_0)}) - \|w^{(n_0)}\|^2 \right) \\
&\quad - \sum_{\substack{m\neq n_0\\ m\in\mathbb{N}_0}} (g_k^{(n_0)^*} g_k^{(m)} w^{(m)}, w^{(n_0)}),
\end{aligned}$$

passando o limite em k, obtemos

$$\sum_{\substack{m\neq n_0\\ m\in\mathbb{N}_0}} (g_k^{(n_0)^*} g_k^{(m)} w^{(m)}, w^{(n_0)}) \to 0. \tag{2.44}$$

Sendo $n_0 \in \mathbb{N}$ fixo, porém arbitrário, (2.44) se estende para todo $n \in \mathbb{N}$. Contudo, pelo item (2.17) do Teorema 2.1, a série

$$\sum_{\substack{m\neq n\\ m,n\in\mathbb{N}_0}} (g_k^{(n)^*} g_k^{(m)} w^{(m)}, w^{(n)}) = \left\| \sum_{n\in\mathbb{N}_0} g_k^{(n)} w^{(n)} \right\|^2 - \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \|w^{(n)}\|^2,$$

é uniformemente convergente em k. Denote $a_{m,n}^k = (g_k^{(n)^*} g_k^{(m)} w^{(m)}, w^{(n)})$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $l_0 \in \mathbb{N}_0$, que independe de k, de modo que para $l > l_0$, tem-se

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{\substack{m \neq n \\ m \in \mathbb{N}_0}} a_{m,n}^k - \sum_{n=1}^{l} \sum_{\substack{m \neq n \\ m \in \mathbb{N}_0}} a_{m,n}^k \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.45}$$

Deste modo, via (2.44), fixado $l > l_0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \sum_{n=1}^{l} \sum_{\substack{m \neq n \\ m \in \mathbb{N}_0}} a_{m,n}^k \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

para $k > k_0$. Como a relação (2.45) vale para todo $k \in \mathbb{N}$, em particular para qualquer $k > k_0$, desta forma

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\substack{m \neq n \\ m,n \in \mathbb{N}_0}} a_{m,n}^k \right| &= \left| \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{\substack{m \neq n \\ m \in \mathbb{N}_0}} a_{m,n}^k \right| \\ &\leq \left| \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{\substack{m \neq n \\ m \in \mathbb{N}_0}} a_{m,n}^k - \sum_{n=1}^{l} \sum_{\substack{m \neq n \\ m \in \mathbb{N}_0}} a_{m,n}^k \right| + \left| \sum_{n=1}^{l} \sum_{\substack{m \neq n \\ m \in \mathbb{N}_0}} a_{m,n}^k \right| < \varepsilon. \end{aligned} \tag{2.46}$$

O que prova a convergência (2.43). Por outro lado, temos também que

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{n \in \mathbb{N}_0} (g_k^{(n)^*} u_k, w^{(n)}) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \|w^{(n)}\|^2. \tag{2.47}$$

De fato, suponha que $\mathbb{N}_0$ é infinito. Caso contrário, se $\mathbb{N}_0$ for finito, (2.47) segue de (2.40). Pelo Teorema 2.1, $\sum_{n \in \mathbb{N}_0} g_k^{(n)} w^{(n)}$ converge uniformemente em k. Deste modo, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}_0$, que independe de k, tal que

$$\left| \sum_{n=1}^{l} (g_k^{(n)} w^{(n)}, u_k) - \sum_{n \in \mathbb{N}_0} (g_k^{(n)} w^{(n)}, u_k) \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{2.48}$$

$$\left| \sum_{n=1}^{l} \|w^{(n)}\|^2 - \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \|w^{(n)}\|^2 \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

desde que $l > n_0$. Por outro lado, fixado $l > n_0$, de (2.40) temos

$$\lim_{k \to 0} \sum_{n=1}^{l} (g_k^{(n)^*} u_k, w^{(n)}) = \sum_{n=1}^{l} \|w^{(n)}\|^2.$$

Assim, podemos tomar $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \sum_{n=1}^{l} (g_k^{(n)^*} u_k, w^{(n)}) - \sum_{n=1}^{l} \|w^{(n)}\|^2 \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

quando $k > k_0$. Como (2.48) é verificada para todo $k \in \mathbb{N}$, em particular, vale para qualquer $k > k_0$. Logo

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{n\in\mathbb{N}_0}(g_k^{(n)^*}u_k, w^{(n)}) - \sum_{n\in\mathbb{N}_0}\|w^{(n)}\|^2\right| \leq \\
&\left|\sum_{n\in\mathbb{N}_0}(g_k^{(n)^*}u_k, w^{(n)}) - \sum_{n=1}^{l}(g_k^{(n)^*}u_k, w^{(n)})\right| + \left|\sum_{n=1}^{l}(g_k^{(n)^*}u_k, w^{(n)}) - \sum_{n=1}^{l}\|w^{(n)}\|^2\right| \\
&\qquad + \left|\sum_{n=1}^{l}\|w^{(n)}\|^2 - \sum_{n\in\mathbb{N}_0}\|w^{(n)}\|^2\right| < \varepsilon,
\end{aligned}$$

Isto mostra (2.47). Mostremos agora que

$$\lim_{k\to\infty}\left(2\|r_k\|^2 - 2(u_k, r_k) - \sum_{\substack{m\neq n\\ m,n\in\mathbb{N}_0}}(g_k^{(n)}w^{(n)}, g_k^{(m)}w^{(m)})\right) = 0. \tag{2.49}$$

Com efeito, pela definição de r_k, temos

$$\begin{aligned}
2\|r_k\|^2 - 2(u_k, r_k) - \sum_{\substack{m\neq n\\ m,n\in\mathbb{N}_0}}(g_k^{(n)}w^{(n)}, g_k^{(m)}w^{(m)}) &= 2\left\|u_k - \sum_{n\in\mathbb{N}_0}g_k^{(n)}w^{(n)}\right\|^2 \\
- 2\left(u_k, u_k - \sum_{n\in\mathbb{N}_0}g_k^{(n)}w^{(n)}\right) - \sum_{\substack{m\neq n\\ m,n\in\mathbb{N}_0}}(g_k^{(n)}w^{(n)}, g_k^{(m)}w^{(m)}) \\
= 2\sum_{n\in\mathbb{N}_0}\|w^{(n)}\|^2 - 2\left(u_k, \sum_{n\in\mathbb{N}_0}g_k^{(n)}w^{(n)}\right) + \sum_{\substack{m\neq n\\ m,n\in\mathbb{N}_0}}(g_k^{(n)^*}g_k^{(m)}w^{(m)}, w^{(n)}).
\end{aligned}$$

Logo, tomando o limite em k e usando (2.43) e (2.47), obtemos (2.49).

Novamente, da definição de r_k,

$$\begin{aligned}
0 = \left\|u_k - \sum_{n\in\mathbb{N}_0}g_k^{(n)}w^{(n)} - r_k\right\|^2 &= \|u_k\|^2 + \|r_k\|^2 + \sum_{n\in\mathbb{N}_0}\|g_k^{(n)}w^{(n)}\|^2 \\
+ \sum_{\substack{m\neq n\\ m,n\in\mathbb{N}_0}}(g_k^{(n)}w^{(n)}, g_k^{(m)}w^{(m)}) - 2(\sum_{n\in\mathbb{N}_0}g_k^{(n)}w^{(n)}, u_k) - 2(u_k, r_k) \\
+ 2(\sum_{n\in\mathbb{N}_0}g_k^{(n)}w^{(n)}, r_k).
\end{aligned}$$

Como D é formado por isometrias e $u_k = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} g_k^{(n)} w^{(n)} + r_k$, segue que

$$\begin{aligned}
0 &= \|u_k\|^2 + \|r_k\|^2 + \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \|w^{(n)}\|^2 + \sum_{\substack{m\neq n\\ m,n\in\mathbb{N}_0}} (g_k^{(n)} w^{(n)}, g_k^{(m)} w^{(m)}) \\
&\quad - 2\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} g_k^{(n)} w^{(n)}, r_k + \sum_{n\in\mathbb{N}_0} g_k^{(n)} w^{(n)}\right) - 2(u_k, r_k) + 2\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} g_k^{(n)} w^{(n)}, r_k\right) \\
&= \|u_k\|^2 + \|r_k\|^2 + \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \|w^{(n)}\|^2 + \sum_{\substack{m\neq n\\ m,n\in\mathbb{N}_0}} (g_k^{(n)} w^{(n)}, g_k^{(m)} w^{(m)}) \\
&\quad - 2\left(\sum_{n} g_k^{(n)} w^{(n)}, r_k\right) - 2\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \|w^{(n)}\|^2 - 2\sum_{\substack{m\neq n\\ m,n\in\mathbb{N}_0}} (g_k^{(n)} w^{(n)}, g_k^{(m)} w^{(m)}) \\
&\quad - 2(u_k, r_k) + 2\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} g_k^{(n)} w^{(n)}, r_k\right) \\
&= \|u_k\|^2 + \|r_k\|^2 - \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \|w^{(n)}\|^2 - \sum_{\substack{m\neq n\\ m,n\in\mathbb{N}_0}} (g_k^{(n)} w^{(n)}, g_k^{(m)} w^{(m)}) - 2(u_k, r_k).
\end{aligned}$$

Somando $0 = \|r_k\|^2 - \|r_k\|^2$, concluímos

$$0 = \|u_k\|^2 - \|r_k\|^2 - \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \|w^{(n)}\|^2 + \left(2\|r_k\|^2 - 2(u_k, r_k) - \sum_{\substack{m\neq n\\ m,n\in\mathbb{N}_0}} (g_k^{(n)} w^{(n)}, g_k^{(m)} w^{(m)})\right).$$

Tomando o limite em k, e usando (2.49), obtemos (2.42). ∎

2.4 Subespaços D-flask e compacidade D-fraca

Iremos introduzir o conceito de subespaço D-flask, o qual é uma versão de fecho de um conjunto, no contexto dos espaços de deslocamentos e da convergência D-fraca.

Definição 2.3. *Seja (H, D) um espaço de deslocamento. Assuma que D é um grupo de operadores unitários. Um subespaço fechado H_0 de H é dito um subespaço D-flask se o conjunto*

$$DH_0 := \bigcup_{g\in D} g(H_0),$$

é sequencialmente fechado com respeito a topologia fraca, isto é, para toda sequência $(u_k) \subset H_0$ e $(g_k) \subset D$, tal que $(g_k u_k)$ converge fracamente em H, existem $u \in H_0$, $g \in D$ tais que $g_k u_k \rightharpoonup gu$ em H.

Exemplo 2.3. *Suponha que (H, D) é um espaço de deslocamento, sendo D um grupo de operadores unitários. Se H_0 é um subespaço fechado D-invariante de H, ou seja, $g(H_0) \subset H_0$ para todo $g \in D$, então H_0 é um subespaço D-flask. Com efeito, sejam as sequências $(u_k) \subset H_0$ e $(g_k) \subset D$ com $g_k u_k \rightharpoonup v$ em H, para algum $v \in H$. Então $v \in H_0$, já que H_0 é fechado na topologia fraca (H_0 é convexo), e tomando $g = id \in D$, temos que $g_k u_k \rightharpoonup gv$ em H. Em particular, considere $H = H^1(\Omega)$ e $H_0 = H_0^1(\Omega)$, com $\Omega = \mathbb{R}^{N-1} \times (-1, \infty)$, e $D = D_G = \{g_y : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)\ ;\ g_y u(x) = u(x-y),\ y \in G\}$, onde $G = \mathbb{Z}^{N-1} \times \{0\}$. Na próxima seção mostraremos que D_G é um grupo de operadores unitários. Como $H_0^1(\Omega)$ é um subespaço fechado de $H^1(\Omega)$, e é D_G-invariante, $H_0^1(\Omega)$ é um subespaço D-flask de $H^1(\Omega)$.*

Proposição 2.5. *Considere D um grupo de operadores unitários em H e o espaço de deslocamento (H, D). Se H_0 é um subespaço D-flask de H, então qualquer sequência limitada $(u_k) \subset H_0$ possui uma subsequência satisfazendo as conclusões do Corolário 2.2, com $w^{(n)} \in H_0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.*

Demonstração: Já que D é um grupo de operadores unitários, podemos aplicar o Corolário 2.2 para obter a existência de sequências $(\tilde{w}^{(n)}) \subset H$, $(\tilde{g}_k^{(n)}) \subset D$, $n \in \mathbb{N}_0$, que satisfazem os itens (2.15), (2.40), (2.41) e (2.42). Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, temos $\tilde{g}_k^{(n)^*} u_k \rightharpoonup \tilde{w}^{(n)}$ em H, e como H_0 é um subespaço D-flask, existem $w^{(n)} \in H_0$ e $\tilde{g}^{(n)^*} \in D$ tais que $\tilde{w}^{(n)} = \tilde{g}^{(n)^*} w^{(n)}$. Então $w^{(n)} = \tilde{g}^{(n)} \tilde{w}^{(n)} \in H_0$ e $g_k^{(n)} := \tilde{g}_k^{(n)} \tilde{g}^{(n)^*} \in D$, satisfazem as conclusões (2.40), (2.41), (2.42) e (2.15). De fato, para cada $n \in \mathbb{N}_0$,

- $g_k^{(n)^*} u_k = \tilde{g}^{(n)} \tilde{g}_k^{(n)^*} u_k \rightharpoonup \tilde{g}^{(n)} \tilde{w}^{(n)}$ em H, mas $\tilde{g}^{(n)} \tilde{w}^{(n)} = \tilde{g}^{(n)} \tilde{g}^{(n)^*} w^{(n)} = w^{(n)}$, logo $g_k^{(n)^*} u_k \rightharpoonup w^{(n)}$ em H;

- Denotando $r_k = u_k - \sum_{n \in \mathbb{N}_0} g_k^{(n)} w^{(n)}$ e $\tilde{r}_k = u_k - \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \tilde{g}_k^{(n)} \tilde{w}^{(n)}$, e uma vez que
$$g_k^{(n)} w^{(n)} = \tilde{g}_k^{(n)} \tilde{g}^{(n)^*} \tilde{g}^{(n)} \tilde{w}^{(n)} = \tilde{g}^{(n)} \tilde{w}^{(n)},$$
temos que $r_k = \tilde{r}_k \stackrel{D}{\rightharpoonup} 0$;

- Como $\|w^{(n)}\| = \|\tilde{g}^{(n)} \tilde{w}^{(n)}\| = \|\tilde{w}^{(n)}\|$, segue que
$$\|u_k\|^2 - \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \|w^{(n)}\|^2 - \|r_k\|^2 = \|u_k\|^2 - \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \|\tilde{w}^{(n)}\|^2 - \|\tilde{r}_k\|^2 \to 0,$$
quando $k \to \infty$;

- Sejam $m, n \in \mathbb{N}_0$, com $m \neq n$, e $u, v \in H$. Então

$$(g_k^{(m)^*} g_k^{(n)} u, v) = (\tilde{g}^{(m)} \tilde{g}_k^{(m)^*} \tilde{g}_k^{(n)} \tilde{g}^{(n)^*} u, v) = ((\tilde{g}_k^{(m)^*} \tilde{g}_k^{(n)}) \tilde{g}^{(n)^*} u, \tilde{g}^{(m)^*} v) \to 0,$$

quando $k \to \infty$.

Como $w^{(n)} \in H_0$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$, segue o resultado. ■

Proposição 2.6. *Seja (H, D) um espaço de deslocamento. Suponha que D é um grupo de operadores unitários em H. Então uma sequência limitada $(u_k) \subset H$ possui uma subsequência que converge D-fraco se, e somente se,*

$$(g_k) \subset D,\ g_k \rightharpoonup 0 \text{ em } H \Rightarrow g_k u_k \rightharpoonup 0 \text{ em } H, \tag{2.50}$$

a menos de subsequência.

Demonstração: Usando a mesma notação para a subsequência, suponha que $u_k \overset{D}{\rightharpoonup} u$ em H. Seja $(g_k) \subset D$ com $g_k \rightharpoonup 0$ em H Pela definição de convergência D-fraca, e já que D é um grupo de operadores unitários, temos

$$g_k u_k = g_k(u_k - u) + g_k u = ((g_k^*)^* g_k^*)^{-1} (g_k^*)^* (u_k - u) + g_k u \rightharpoonup 0 \text{ em } H,$$

a menos de subsequência. Logo (u_k) satisfaz (2.50).
Reciprocamente, suponha que a sequência (u_k) cumpra (2.50). Como (u_k) é limitada podemos aplicar o Teorema 2.1 para obter uma subsequência de (u_k) que satisfaça os itens (2.14), (2.15) e (2.17). Seja $n \in \mathbb{N}_0$, com $n > 1$. Então, passando a subsequência, $g_k^{(n)^*} g_k^{(1)} \rightharpoonup 0$ em H. Mas $g^{(1)} = id$, logo por (2.50), temos que $g_k^{(n)^*} u_k \rightharpoonup 0$ em H. Pela unicidade do limite fraco devemos ter $w^{(n)} = 0$, para $n > 1$. Consequentemente, de (2.17), temos que $u_k - w^{(1)} = u_k - \sum_{n \in \mathbb{N}_0} g_k^{(n)} w^{(n)} \overset{D}{\rightharpoonup} 0$, a menos de subsequência. Caso $\mathbb{N}_0 = \{1\}$, o resultado também segue de (2.17). ■

2.5 Convergência D-fraca em $H^1(\mathbb{R}^N)$

Nesta seção tratamos do caso modelo $H = H^1(\mathbb{R}^N)$ com

$$D = D_G := \{g_y : u \mapsto u(\cdot - y),\ y \in G\} = \{g_y : H \to H\ ;\ g_y u(x) = u(x - y),\ y \in G\},$$

onde G é um subconjunto de $\mathbb{R}^N$, que é grupo com relação a operação usual de soma de vetores. Note que D_G é um grupo comutativo de operadores unitários em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Mais precisamente, $g_{x+y} = g_x g_y = g_y g_x$, $g_0 = id$ e $g_y^{-1} = g_{-y} = g_y^*$. De fato, dados $u, v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, usando mudança de variáveis, temos

$$\begin{aligned}(g_y u, v) &= \int_{\mathbb{R}^N} u(x-y)v(x) + \nabla u(x-y) \cdot \nabla v(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} u(x)v(x+y) + \nabla u(x) \cdot \nabla v(x+y)dx \\ &= (u, g_{-y}v).\end{aligned}$$

Assim, $g_{-y} = g_y^*$. Além disso, $\|g_y u\|^2 = \|u\|^2$, para todo $y \in G$ e $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Mostramos, sob certas condições, que a convergência D_G-fraca em $H^1(\mathbb{R}^N)$ é equivalente a convergência forte em $L^p(\mathbb{R}^N)$, para $p \in (2, 2^*)$. Além disso, também obtemos uma generalização, no contexto dos espaços de deslocamento, do conhecido Lema de Brezis-Lieb.

Lema 2.3. *Seja $(y_k) \subset \mathbb{R}^N$. Então $g_{y_k} \rightharpoonup 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ se, e somente se, $|y_k| \to \infty$.*

Demonstração: Suponha por absurdo que $(y_k) \subset \mathbb{R}^N$ é limitada. Portanto, a menos de subsequência, $y_k \to y$, para algum $y \in \mathbb{R}^N$ Afirmamos que $g_{y_k} \rightharpoonup g_y$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Com efeito, dados $u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, como (y_k) é limitada, podemos tomar $R > 0$ tal que $B_R(0) \supset (\operatorname{supp} u + y_k) \cup \operatorname{supp} v$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\begin{aligned}(g_{y_k} u, v) &= \int_{B_R(0)} u(x-y_k)v(x) + \nabla u(x-y_k) \cdot \nabla v(x)dx. \qquad (2.51)\\ &\leq (\|u\|_\infty \|v\|_\infty + \|\nabla u\|_\infty \|\nabla v\|_\infty)\, |B_R(0)|, \ \forall k \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Além disso, como $u(x-y_k) \to u(x-y)$ e $\nabla u(x-y_k) \to \nabla u(x-y)$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue em $L^1(B_R(0))$, para obter $(g_{y_k}u, v) \to (g_y u, v)$. Logo, por densidade, $g_{y_k} \rightharpoonup g_y \neq 0$, uma contradição. Deste modo devemos ter $g_{y_k} \rightharpoonup 0$.

Reciprocamente, suponha que $|y_k| \to \infty$. Sejam $u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e tome $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de tal forma que $B_k = (\operatorname{supp} u + y_k) \cap \operatorname{supp} v = \emptyset$. Então, para esta escolha de $k \in \mathbb{N}$,

$$(g_{y_k} u, v) = \int_{B_k} u(x-y_k)v(x) + \nabla u(x-y_k)\nabla v(x)dx = 0.$$

Novamente, pela densidade de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, temos $g_{y_k} \rightharpoonup 0$. ■

Proposição 2.7. *Seja $G \subset \mathbb{R}^N$, um grupo com relação a operação usual de soma de vetores. Então $(H^1(\mathbb{R}^N), D_G)$ é um espaço de deslocamento.*

Demonstração: Já que a composição de elementos em D_G são da forma $u \mapsto u(\cdot + y)$, $y \in G$, pela Proposição 2.2, para verificarmos que D_G é um conjunto de deslocamento devemos mostrar que qualquer sequência de operadores $(g_{y_k}) \subset D_G$ que não converge fracamente para zero possui uma subsequência que converge pontualmente. Seja então $(g_{y_k}) \subset D_G$, com $g_{y_k} \not\rightharpoonup 0$. Pelo Lema 2.3, (y_k) é limitada, logo $y_k \to y$, para algum $y \in \mathbb{R}^N$, a menos de subsequência. Sejam $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Tomando $R > 0$, tal que $B_R(0) \subseteq \operatorname{supp} \varphi - y_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$, podemos obter uma limitação análoga a obtida em (2.51), assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$
\begin{aligned}
&|(g_{y_k} u - g_y u, \varphi)|^2 \\
&= |(u, g_{-y_k}\varphi) - (u, g_{-y}\varphi)|^2 \\
&= |(u, (g_{-y_k} - g_{-y})\varphi)|^2 \\
&\leq \|u\|^2 \|g_{-y_k}\varphi - g_{-y}\varphi\|^2 \\
&= \|u\|^2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi(x + y_k) - \varphi(x + y)|^2 + |\nabla\varphi(x + y_k) - \nabla\varphi(x + y)|^2 dx \right) \to 0.
\end{aligned}
$$

Logo, por densidade, $g_{y_k} u \rightharpoonup g_y u$ em H. Por outro lado, como $\|g_{y_k} u\|^2 = \|u\|^2 = \|g_y u\|^2$ para todo $k \in \mathbb{N}$, obtemos

$$\|g_{y_k} u - g_y u\|^2 = \|g_{y_k} u\|^2 - 2(g_{y_k} u, g_y u) + \|g_y u\|^2 \to 0.$$

Pela arbitrariedade de $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, segue que $g_{y_k} u \to g_y u$ para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. ■

O próximo exemplo fornece um conjunto de operadores que não é conjunto de deslocamento.

Exemplo 2.4. *Sejam $\mathbb{R}^N_+ = \mathbb{R}^{N-1} \times (0, \infty)$ e $\mathbb{Z}^N_+ = \mathbb{Z}^{N-1} \times \mathbb{N}$. Tome $H = H_0^1(\mathbb{R}^N_+)$, $G = \mathbb{Z}^N_+$ e $D = D_G = \{g_y : u \mapsto u(\cdot - y) \ ; \ y \in G\}$. Então D_G satisfaz as condições* (2.9) *e* (2.10), *por ser formado de isometrias em H, mas não satisfaz* (2.11). *Com efeito, seja $y_k = ke$, onde $e = (0, \ldots, 0, 1)$, $h_k = g_{y_k}$ e $g_k = g_{y_{k+1}}$. Fixe $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ com $\operatorname{supp} v \subset \mathbb{R}^{N-1} \times (0, 1)$, e considere $u_k(x) = g_{y_k} v(x) = v(x - ke)$. Dado $u \in H_0^1(\mathbb{R}^N_+)$, temos que*

- $h_k^* g_k u(x) = g_{y_k}^* g_{y_{k+1}} u(x) = u(x - (k+1)e + ke) = u(x - e)$;

- $g_k^* u_k(x) = g_{y_{k+1}}^* v(x-ke) = v(x-ke+(k+1)e) = v(x+e) = 0,$ *para todo* $x \in \mathbb{R}_+^N$ *e* $k \in \mathbb{N}$;

- $h_k^* u_k(x) = g_{y_k}^* v(x-ke) = (g_{y_k}^*) g_{y_k} v(x) = v(x)$.

Assim $h_k^* g_k \not\rightharpoonup 0$, $g_k^* u_k \rightharpoonup 0$ *mas* $h_k^* u_k \not\rightharpoonup 0$ *em* $H_0^1(\mathbb{R}_+^N)$. *Logo* $(H_0^1(\mathbb{R}_+^N), D_{\mathbb{Z}_+^N})$ *não é espaço de deslocamento.*

Lembremos que um **reticulado** de $\mathbb{R}^N$, é um subgrupo com relação a soma usual de vetores que gera $\mathbb{R}^N$.

Lema 2.4. *Considere* $G \subset \mathbb{R}^N$, *um grupo com relação a operação usual de soma de vetores, e a seguinte condição*

$$\exists R > 0 \ \textit{tal que} \ \bigcup_{y \in G} B_R(y) = \mathbb{R}^N. \tag{2.52}$$

Então G *satisfaz a condição* (2.52) *se, e somente se,* G *contém um reticulado de* $\mathbb{R}^N$. *Em particular,* $\mathbb{Z}^N$ *satisfaz* (2.52).

Demonstração: Suponha que G satisfaz (2.52). Então G contém N vetores linearmente independentes $\{v_1, \ldots, v_N\}$ de $\mathbb{R}^N$. De fato, dado $v_1 \in G$, podemos tomar $v_2 \in G$ linearmente independente com v_1, pois caso contrário, se $v_2 \in \langle v_1 \rangle$ para todo $v_2 \in G$, então $G \subset \langle v_1 \rangle$, e assim tomando $v \in \langle v_1 \rangle^\perp$ com $\operatorname{dist}(v, \langle v_1 \rangle^\perp) > R$ obtemos que G não satisfaz (2.52), uma contradição. Analogamente, podemos tomar $v_3 \in \mathbb{R}^N$, linearmente independente com $\langle v_1, v_2 \rangle$, uma vez que se $v_3 \in \langle v_1, v_2 \rangle$ para todo $v_3 \in G$, então $G \subset \langle v_1, v_2 \rangle$, e assim tomando $v \in \langle v_1, v_2 \rangle^\perp$ com $\operatorname{dist}(v, \langle v_1, v_2 \rangle^\perp) > R$, temos que G não satisfaz (2.52), o que também é uma contradição. Prosseguimos assim até encontrar N vetores linearmente independentes $\{v_1, \ldots, v_N\} \subset G$ em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Portanto $L = \langle v_1, \ldots, v_N \rangle_{\mathbb{Z}}$ é um reticulado contido em G.
Reciprocamente, suponha que G contém um reticulado L de $\mathbb{R}^N$, com $L = \langle v_1, \ldots, v_N \rangle_{\mathbb{Z}} \subset G$, onde $\{v_1, \ldots, v_N\} \subset G$ é uma base de $\mathbb{R}^N$. Tome $R = N \max_{1 \le i \le N} |v_i|$. Assim, dado $v = a_1 v_1 + \ldots + a_N v_N \in \mathbb{R}^N$ seja $\bar{v} = [a_1] v_1 + \ldots + [a_N] v_N$, sendo $[a]$ a parte inteira de $a \in \mathbb{R}$. Logo

$$|\bar{v} - v| \le \sum_{i=1}^N |[a_i] - a_i||v_i| \le \sum_{i=1}^N |v_i| \le N \max_{1 \le i \le N} |v_i| = R.$$

Portanto vale (2.52). ■

Proposição 2.8. *Seja $G \subset \mathbb{R}^N$ um grupo com relação a operação usual de soma de vetores, satisfazendo a condição (2.52). Considere $(u_k) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$, $N \geq 3$, uma sequência limitada, e $p \in (2, 2^*)$. Então $u_k \overset{D_G}{\rightharpoonup} 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ se, e somente se, $\|u_k\|_p \to 0$.*

Demonstração: Suponha que $u_k \overset{D_G}{\rightharpoonup} 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Note que se G_1 é subgrupo de G_2 então convergência D_{G_2}-fraca implica convergência D_{G_1}-fraca. Mas, pelo Lema 2.4, G contém um reticulado L de $\mathbb{R}^N$, e como L é linearmente homeomorfo a $\mathbb{Z}^N$, podemos supor a convergência $u_k \overset{D_{\mathbb{Z}^N}}{\rightharpoonup} 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Seja $Q := (0,1)^N$. Pelo Teorema de Imersão de Sobolev, existe $C > 0$ tal que

$$\|u_k\|^2_{L^p(Q+y)} \leq C\|u_k\|^2_{H^1(Q+y)}, \quad y \in \mathbb{Z}^N.$$

Consequentemente,

$$\int_{Q+y} |u_k|^p dx \leq C\|u_k\|^2_{H^1_0(Q+y)} \left(\int_{Q+y} |u_k|^p dx\right)^{1-2/p}, \quad y \in \mathbb{Z}^N. \tag{2.53}$$

Por outro lado,

$$\int_Q |g_y u_k|^p dx = \int_Q |u_k(x-y)|^p dx = \int_{Q+y} |u_k|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |u_k|^p dx, \quad y \in \mathbb{Z}^N.$$

Assim, $\sup_{y\in\mathbb{Z}^N} \left(\int_Q |g_y u_k|^p\right)^{1-2/p} < \infty$. Além disso, $\bigcup_{y\in\mathbb{Z}^N}(Q+y) = \mathbb{R}^N$, a menos de um conjunto de medida nula. Logo, fazendo a soma sobre $y \in \mathbb{Z}^N$ em (2.53), temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |u_k|^p dx = \sum_{y\in\mathbb{Z}^N} \int_{Q+y} |u_k|^p dx &\leq \sum_{y\in\mathbb{Z}^N} C\|u_k\|^2_{H^1_0(Q+y)} \left(\int_Q |g_y u_k|^p dx\right)^{1-2/p} \\ &\leq \sup_{y\in\mathbb{Z}^N} \left(\int_Q |g_y u_k|^p dx\right)^{1-2/p} \sum_{y\in\mathbb{Z}^N} C\|u_k\|^2_{H^1(Q+y)} \\ &= \sup_{y\in\mathbb{Z}^N} \left(\int_Q |g_y u_k|^p dx\right)^{1-2/p} C\|u_k\|^2. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, tome $y_k \in \mathbb{Z}^N$ satisfazendo

$$\left(\int_Q |g_{y_k} u_k|^p dx\right)^{1-2/p} \geq \frac{1}{2} \sup_{y\in\mathbb{Z}^N} \left(\int_Q |g_y u_k|^p dx\right)^{1-2/p}.$$

Uma vez (u_k) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$, existe $M > 0$ tal que $\|u_k\|^2 \leq M$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Substituindo em (2.54), pelo Teorema de Rellich-Kondrachov, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_k|^p dx \leq 2MC \left(\int_Q |g_{y_k} u_k|^p dx\right)^{1-2/p} \to 0,$$

pois $g_{y_k}u_k \rightharpoonup 0$ em $H^1(Q)$, por causa que $u_k \overset{D_{\mathbb{Z}^N}}{\rightharpoonup} 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Portanto $\|u_k\|_p \to 0$. Reciprocamente, suponha que $\|u_k\|_p \to 0$. Sejam $(g_{y_k}) \subset D_G$ e $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Então $(g_{y_k}u_k, \varphi) \to 0$. De fato, usando a desigualdade de Hölder, vemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} g_{y_k}u_k(x)\varphi(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^N} u_k(x-y_k)\varphi(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u_k(x)\varphi(x+y_k)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u_k(x)g_{y_k}^*\varphi(x)dx \\
&\le \|u_k\|_p\|g_{y_k}^*\varphi\|_q \\
&= \|u_k\|_p\,\|\varphi\|_q \to 0.
\end{aligned}$$

Onde $1/p + 1/q = 1$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^N} \nabla g_{y_k}u_k(x)\cdot\nabla\varphi(x)dx\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_k(x-y_k)\cdot\nabla\varphi(x)dx\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_k(x)\cdot\nabla\varphi(x+y_k)dx\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_k(x)\cdot\nabla g_{y_k}^*\varphi(x)dx\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^N} u_k(x)\Delta g_{y_k}^*\varphi(x)dx\right| \\
&\le \|u_k\|_p\|\Delta\varphi\|_q \to 0.
\end{aligned}$$

Logo, por densidade, $g_k u_k \rightharpoonup 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. ∎

Corolário 2.3. *Seja $(u_k) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ uma sequência limitada e $G \subset \mathbb{R}^N$, um grupo com relação a operação usual de soma de vetores, satisfazendo a condição (2.52). Então existe um subconjunto $\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{N}$, e sequências $(w^{(n)}) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$, $(y_k^{(n)}) \subset G$, $y_k^{(1)} = 0$, com $k \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}_0$, tais que a menos de subsequência de (u_k),*

$$u_k(\cdot + y_k^{(n)}) \rightharpoonup w^{(n)} \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N), \tag{2.55}$$

$$|y_k^{(n)} - y_k^{(m)}| \to \infty, \text{ quando } m \neq n, \tag{2.56}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \|w^{(n)}\|^2 \le \limsup_k \|u_k\|^2, \tag{2.57}$$

$$u_k - \sum_{n\in\mathbb{N}_0} w^{(n)}(\cdot + y_k^{(n)}) \to 0, \quad D_G\text{-fracamente e em } L^p(\mathbb{R}^N), \tag{2.58}$$

para qualquer $p \in (2, 2^*)$. Além disso, a série em (2.58) converge em $H^1(\mathbb{R})$ uniformemente em k.

Demonstração: No Teorema 2.1 considere $H = H^1(\mathbb{R}^N)$ e $D = D_G$. Então a afirmação (2.55) decorre de (2.14). Além disso, como $\gamma = 1$ (D_G é um grupo de operadores unitários), (2.57) é consequência de (2.16). Por outro lado, (2.56) decorre do Lema 2.3 aplicado em (2.15). Finalmente, a convergência (2.58) é obtida da Proposição 2.8 aplicada em (2.17). ■

Proposição 2.9. *Considere $(u_k) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ uma sequência limitada, e $G \subset \mathbb{R}^N$, um grupo com relação a operação usual de soma de vetores satisfazendo a condição* (2.52). *Sejam $\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{N}$ e $(w^{(n)}) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ como no Corolário 2.3. Suponha que $F \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ satisfaça as seguintes condições:*

1. *$F(x + y, s) = F(x, s)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}$, $y \in G$;*

2. *Dado $\varepsilon > 0$, existem $C_\varepsilon \in \mathbb{R}$ e $p_\varepsilon \in (2, 2^*)$, tais que*

$$|F(x,s)| \leq \varepsilon(|s|^2 + |s|^{2^*}) + C_\varepsilon |s|^{p_\varepsilon}, \ x \in \Omega, s \in \mathbb{R}. \tag{2.59}$$

Então

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u_k) dx = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \int_{\mathbb{R}^N} F(x, w^{(n)}) dx, \tag{2.60}$$

a menos de subsequência de (u_k).

Demonstração: Seja $\Phi : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$, definida por

$$\Phi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u)\, dx.$$

Pelo Teorema 2.1 e da condição (2.59) temos que

$$\Phi(u_k) = \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u_k)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} F\left(x, \sum_n w^{(n)}(x + y_k^{(n)})\right) dx + o(1). \tag{2.61}$$

Sendo Φ uniformemente contínuo em conjuntos limitados de $H^1(\mathbb{R}^N)$, e uma vez que $\sum_n w^{(n)}(\cdot + y_k^{(n)})$ é uniformemente limitado em k,

$$\sup_k \left| \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u_k)\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} F\left(x, \sum_n^M w^{(n)}(x + y_k^{(n)})\right) \right| \to 0, \text{ quando } M \to \infty.$$

Consequentemente, dado $M \in \mathbb{N}$, é suficiente provar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} F\left(x, \sum_{n=1}^M w^{(n)}(x + y_k^{(n)})\, dx\right) \to \sum_{n=1}^M \int_{\mathbb{R}^N} F(x, w^{(n)}(x))\, dx. \tag{2.62}$$

Uma vez que $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $H^1(\mathbb{R}^N)$, pela condição (2.59), é suficiente mostrar para $w^{(n)} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Seja $R = \sup\{|y| \,;\, y \in \operatorname{supp} w^{(n)}, n = 1, \ldots, M\}$ e tome $k_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de modo que $|y_k^{(m)} - y_k^{(n)}| > R$, para todo $m \neq n$, com $m, n = 1 \ldots, M$. Logo, para $k > k_0$, temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} F\left(x, \sum_{n=1}^{M} w^{(n)}(x + y_k^{(n)})\right) dx &= \sum_{n=1}^{M} \int_{B_R(y_k^{(m)})} F\left(x, \sum_{n=1}^{M} w^{(n)}(x)\right) dx \\ &= \sum_{n=1}^{M} \int_{B_R(y_k^{(m)})} F(x, w^{(n)})\, dx,\end{aligned}$$

o que prova o resultado. ■

Corolário 2.4. *Seja $(u_k) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ uma sequência limitada e $F \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ nas mesmas hipóteses da Proposição 2.9. Então, existe $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que, a menos de subsequência, $u_k \rightharpoonup w$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e*

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(x, u_k) - F(x, u_k - w)\, dx \to \int_{\mathbb{R}^N} F(x, w)\, dx.$$

Demonstração: Como (u_k) é limitada, podemos aplicar o Corolário 2.3 e obter, pelo item (2.58),

$$(u_k - w^{(1)}) - \sum_{\substack{n \neq 1 \\ n \in \mathbb{N}_0}} w^{(n)}(\cdot + y_k^{(n)}) \overset{D}{\rightharpoonup} 0.$$

Logo, pela Proposição 2.9,

$$\lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u_k - w^{(1)}) dx = \sum_{\substack{n \neq 1 \\ n \in \mathbb{N}_0}} \int_{\mathbb{R}^N} F(x, w^{(n)}) dx. \tag{2.63}$$

Tomando a diferença entre (2.60) e (2.63), obtemos

$$\begin{aligned}&\lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u_k) - F(x, u_k - w^{(1)}) dx \\ &\quad = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \int_{\mathbb{R}^N} F(x, w^{(n)})\, dx - \sum_{\substack{n \neq 1 \\ n \in \mathbb{N}_0}} \int_{\mathbb{R}^N} F(x, w^{(n)})\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} F(x, w^{(1)})\, dx. \end{aligned} \tag{2.64}$$

Já que na subsequência, $u_k \rightharpoonup w^{(1)}$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, o resultado segue com $w = w^{(1)}$. ■

No Corolário 2.4, tomando $F(x, u) = |u|^p$, para $p > 1$, temos o conhecido Lema de Brezis-Lieb, em uma versão mais restrita, uma vez que exigimos a convergência fraca da sequência.

Lema 2.5. ***(Lema de Brezis-Lieb)*** *Suponha que $p \in [1, \infty)$ e que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ seja um conjunto mensurável. Assuma que $(u_k) \subset L^p(\Omega)$ seja limitada e que $u_k \to w$ q.t.p. em Ω. Então*

$$\int_\Omega |u_k|^p - |u_k - w|^p dx \to \int_\Omega |w|^p dx.$$

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$ e considere

$$v_k^\varepsilon := \left(||u_k|^p - |u_k - w|^p - |w|^p| - \varepsilon |u_k - w|^p\right)_+.$$

Note que $v_k^\varepsilon(x) \to 0$ q.t.p. em Ω. Mostremos que $v_k^\varepsilon \to 0$ em $L^1(\Omega)$. Afirmamos que dado $\varepsilon > 0$ existe $C_\varepsilon > 0$ tal que $||x+1|^p - |x|^p| \leq \varepsilon |x|^p + C_\varepsilon$, para todo $x \in \mathbb{R}$. De fato, temos

$$\lim_{x \to \infty} \frac{|x+1|^p - |x|^p}{|x|^p} = 0.$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que $||x+1|^p - |x|^p| \leq \varepsilon |x|^p$, quando $|x| > R$. Mas se $|x| \leq R$ então $||x+1|^p - |x|^p| \leq (R+1)^p + R^p$. Assim, tomando $C_\varepsilon = (R+1)^p + R^p$, obtemos a afirmação.

Por outro lado, dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $b \neq 0$, tome $x = a/b$ na afirmação anterior. Assim

$$||a+b|^p - |a|^p| \leq \varepsilon |a|^p + C_\varepsilon |b|^p, \tag{2.65}$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}$. Usando a desigualdade (2.65) com $a = u_k - w$ e $b = w$ temos

$$\begin{aligned} v_k^\varepsilon &\leq \left(||u_k|^p - |u_k - w|^p| + |w|^p - \varepsilon |u_k - w|^p|\right)_+ \\ &= \left(||(u_k - w) + w|^p - |u_k - w|^p| + |w|^p - \varepsilon |u_k - w|^p|\right)_+ \\ &\leq \left(\varepsilon |u_k - w|^p + C_\varepsilon |w|^p + |w|^p - \varepsilon |u_k - w|^p\right)_+ \\ &= (1 + C_\varepsilon)|w|^p. \end{aligned}$$

Além disso, pelo Lema de Fatou, $w \in L^p(\Omega)$. Logo podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para obter

$$\int_\Omega v_k^\varepsilon dx \to 0.$$

Por outro lado, uma vez que

$$v_k^\varepsilon \geq ||u_k|^p - |u_k - w|^p - |w|^p| - \varepsilon |u_k - w|^p,$$

temos

$$\int_\Omega ||u_k|^p - |u_k - w|^p - |w|^p| \, dx \leq \int_\Omega v_k^\varepsilon dx + \varepsilon \int_\Omega |u_k - w|^p dx.$$

Consequentemente,

$$\limsup_k \int_\Omega ||u_k|^p - |u_k - w|^p + |w|^p| \, dx \leq \varepsilon \limsup_k \int_\Omega |u_k - w|^p dx.$$

Já que (u_k) é limitada e $\varepsilon > 0$ foi arbitrário, segue o resultado. ∎

2.6 Minimizantes com vínculos

Apresentamos a seguir uma aplicação do Teorema 2.1 na existência de minimizantes em problemas variacionais.

Seja $p \in (2, 2^*)$ e $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ uma função $\mathbb{Z}^N$-periódica com $\inf V > 0$. Considere

$$c_p = \inf_{\substack{u \in H^1(\mathbb{R}^N), \\ \|u\|_p = 1}} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)|u|^2 dx. \tag{2.66}$$

Note que o funcional $E(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)|u|^2 \, dx$ define uma norma equivalente a norma de $H^1(\mathbb{R}^N)$, a qual denotamos por $\|u\|_E = \sqrt{E(u)}$. De fato, tomando $C_1 = \max\{1, \|V\|_\infty\}$ e $C_2 = \min\{1, \inf V\}$, temos $E(u) \leq C_1 \|u\|^2$ e $E(u) \geq C_2 \|u\|^2$. Isto também mostra que a forma bilinear

$$(u, v)_E = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v + V(x) uv dx,$$

é um produto interno em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Observe que, pelo Teorema de Imersão de Sobolev, $c_p > 0$. Além disso, se u é minimizante de (2.66), então $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é solução fraca do seguinte problema,

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x) u = c_p u^{p-1}, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \ u > 0. \end{cases} \tag{2.67}$$

Com efeito, ao considerarmos o vínculo $S = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \ ; \ \|u\|_p^p - 1 = 0\}$ e o funcional E, vemos, pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange (Teorema A.3, confira no Apêndice A), que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$2 \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla \varphi + V(x) u \varphi dx = \lambda p \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2} u \varphi dx, \qquad \forall \varphi \in H^1(\mathbb{R}^N). \tag{2.68}$$

Por outro lado, podemos supor sem perda de generalidade que $u \geq 0$, uma vez que $|u| \in H^1(\mathbb{R}^N)$ também é um minimizante de (2.66), pois $\nabla |u| = \mathrm{sign}(u) \nabla u$. Assim, tomando $\varphi = u$ em (2.68), concluímos que $\lambda = 2c_p/p$. Substituindo em (2.68), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla \varphi + V(x) u \varphi dx = c_p \int_{\mathbb{R}^N} u^{p-1} \varphi dx, \qquad \forall \varphi \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Ou seja, $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é solução fraca de (2.67). Mais ainda, devemos ter $u > 0$. Com efeito, suponha que existe $A \subset \mathbb{R}^N$ com $|A| > 0$, tal que $u|_A = 0$. Seja $B \subset \mathbb{R}^N$, tal que $|B \cap A| > 0$. Então $\inf_B u = \inf_{\mathbb{R}^N} u = 0$, logo, pelo Princípio do Máximo (Teorema A.1, confira no Apêndice A), $u = 0$, uma contradição, pois $c_p > 0$.

Observe que por um reescalonamento $w = c_p^{1/(p-2)}u$, obtemos uma solução fraca para o problema $-\Delta u + V(x)u = u^{p-1},\ u \in H^1(\mathbb{R}^N),\ u > 0$. Observamos ainda que, o mesmo argumento pode ser aplicado para outros problemas de minimização semelhantes, mostrando assim que minimizantes são soluções de alguns problemas variacionais.

Proposição 2.10. *Seja $(u_k) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ uma sequência minimizante para o problema* (2.66)*. Então existe $(y_k) \subset \mathbb{Z}^N$ tal que $(u_k(\cdot + y_k))$ converge, a menos de subsequência, para um minimizante de* (2.66)*.*

Demonstração: Note inicialmente que dado $y \in \mathbb{Z}^N$, temos que $\|u(\cdot + y)\|_E = \|u\|_E$. Com efeito, uma vez que V é $\mathbb{Z}^N$-periódico,

$$\begin{aligned}\|u(\cdot + y)\|_E &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x+y)|^2 + V(x)|u(x+y)|^2\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 + V(x-y)|u(x)|^2\,dx = \|u\|_E.\end{aligned}$$

Primeira maneira. Considere $(u_k) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ uma sequência minimizante para o problema (2.66), ou seja, $\|u_k\|_E^2 \to c_p$ e $\|u_k\|_p = 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Note que o Corolário 2.3 continua verdadeiro para $G = \mathbb{Z}^N$ e $H^1(\mathbb{R}^N)$ munido da norma $\|\cdot\|_E$. Logo, podemos tomar, subsequência de (u_k), $\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{N}$, $(w^{(n)}) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ e $(y_k^{(n)}) \subset \mathbb{Z}^N$, $n \in \mathbb{N}_0$, dados pelo Corolário 2.3. Pela Proposição 2.9, tomando $F(x,s) = |s|^p$, temos

$$1 = \lim_{k\to\infty} \|u_k\|_p^p = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \|w^{(n)}\|_p^p. \tag{2.69}$$

Além disso, pelo item (2.57) do Corolário 2.3 segue que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \|w^{(n)}\|_E^2 \le c_p. \tag{2.70}$$

Escrevendo $t_n = \int_{\mathbb{R}^N} |w^{(n)}|^p\,dx$, e sabendo que $\|u\|_E^2 \ge c_p\|u\|_p^2$ para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, obtemos $\|w^{(n)}\|_E^2 \ge c_p t_n^{2/p}$. Substituindo isto em (2.70) conseguimos

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} t_n^{\frac{2}{p}} \le 1. \tag{2.71}$$

Por outro lado, podemos escrever (2.69) como $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} t_n = 1$, e uma vez que $2/p < 1$, por (2.71), devemos ter $t_n = 0$ a menos de um $t_{n_0} = 1$, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$. De fato, suponha por absurdo que existam $t_n \in \mathbb{R}$ com $0 < t_n < 1$, para $n \in \mathbb{N}_0$. Já que $2/p < 1$, temos $0 < t_n < t_n^{2/p}$. Logo $1 = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} t_n < \sum_{n\in\mathbb{N}_0} t_n^{2/p}$, um absurdo. Por outro lado, desde que $\|w^{(n_0)}\|_E^2 \geq c_p$, segue por (2.70) que $\|w^{(n_0)}\|_E^2 = c_p$. Portanto, $w^{(n_0)}$ é um minimizante para (2.66), já que $\|w^{(n_0)}\|_p = t_{n_0}^{1/p} = 1$. Pelo item (2.55) do Corolário 2.3 temos $u_k(\cdot + y_k^{(n_0)}) \rightharpoonup w^{(n_0)}$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Como $\|u_k(\cdot + y_k^{(n_0)})\|_E^2 = \|u_k\|_E^2 \to \|w^{(n_0)}\|_E^2$, concluímos que $u_k(\cdot + y_k^{(n_0)}) \to w^{(n_0)}$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Segunda maneira. Vamos considerar $H^1(\mathbb{R}^N)$ munido da norma $\|\cdot\|$. Seja $(u_k) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ uma sequência minimizante para o problema (2.66), isto é, $\|u_k\|_E^2 \to c_p$ e $\|u_k\|_p = 1$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Para qualquer sequência $(y_k) \subset \mathbb{Z}^N$, vemos que $(u_k(\cdot + y_k))$ também é uma sequência minimizante para (2.66), pois, por mudança de variáveis, $\|u_k(\cdot + y_k)\|_E^2 = \|u_k\|_E^2$ e $\|u_k(\cdot + y_k)\|_p = \|u_k\|_p = 1$. Por outro lado, pela Proposição 2.8, $u_k \overset{D_{\mathbb{Z}^N}}{\not\rightharpoonup} u$, em $H^1(\mathbb{R}^N)$, uma vez que $\|u_k\|_p = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim, existe uma subsequência de (u_k) a qual usamos a mesma notação, tal que $u_k(\cdot + y_k) \rightharpoonup w \neq 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Logo, para esta subsequência, temos $\|u_k(\cdot+y_k)\|_E^2 - \|u_k(\cdot+y_k) - w\|_E^2 - \|w\|_E^2 \to 0$, consequentemente

$$c_p = \lim_{k\to\infty} \|u_k(\cdot + y_k)\|_E^2 = \|w\|_E^2 + \limsup_k \|u_k(\cdot + y_k) - w\|_E^2. \tag{2.72}$$

Por outro lado, pelo Teorema de Rellich-Kondrachov, $u_k(x + y_k) \to w(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Consequentemente, podemos usar o Lema de Brezis-Lieb para obter

$$1 = \int_{\mathbb{R}^N} |u_k|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} |w|^p dx + \limsup_k \int_{\mathbb{R}^N} |u_k(\cdot + y_k) - w|^p dx. \tag{2.73}$$

Seja $t = \int_{\mathbb{R}^N} |w|^p dx = \|w\|_p^p$. Sabemos que $\|u\|_E^2 \geq c_p \|u\|_p^2$ para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, daí, usando (2.72) e (2.73), temos

$$\begin{aligned}
c_p &= \|w\|_E^2 + \limsup_k \|u_k(\cdot + y_k) - w\|_E^2 \\
&\geq c_p \|w\|_p^2 + c_p \limsup_k \|u_k(\cdot + y_k) - w\|_p^2 \\
&= c_p \left((\|w\|_p^p)^{2/p} + (\limsup_k \|u_k(\cdot + y_k) - w\|_p^p)^{2/p} \right) \\
&= c_p \left((\|w\|_p^p)^{2/p} + (1 - \|w\|_p^p)^{2/p} \right) \\
&= c_p t^{2/p} + c_p (1 - t)^{2/p}.
\end{aligned}$$

Logo, já que $c_p > 0$,

$$1 \geq t^{2/p} + (1-t)^{2/p}.$$

Como $2/p < 1$, devemos ter $t = 0$ ou $t = 1$, já que (2.73), $0 \leq t \leq 1$. Mas vimos que $t \neq 0$, portanto $t = 1$. Concluímos que $c_p \leq \|w\|_E^2$. Por outro lado, se $\lim \|u_k(\cdot + y_k) - w\|_E^2 > 0$, então (por (2.72)) $c_p > \|w\|_E^2$, uma contradição. Segue que $u_k(\cdot + y_k) \to w$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Consequentemente, de (2.72), temos $c_p = \|w\|_E^2$. Isto mostra que $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é um minimizante para (2.66) e que $u_k(\cdot + y_k) \to w$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, a menos de subsequência. ■

Observação 2.5. *Seja $\Omega = \mathbb{R}^{N-1} \times (0, \infty)$ e considere (2.66) com $V = 1$. Seja*

$$c_p(\Omega) = \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega), \\ \|u\|_{L^p(\Omega)}=1}} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 + |u(x)|^2 \, dx. \tag{2.74}$$

Então não existe minimizante para (2.74). Inicialmente vamos mostrar que $c_p(\Omega) = c_p$. Pela Proposição 2.10, podemos tomar $u \in H^1(\mathbb{R})^N$ um minimizante do problema (2.66), isto é $\|u\|_p = 1$ e $\|u\|^2 = c_p$. Defina $u_k(x) := \psi(x_N)u(x_1, \ldots, x_N - k)$, onde $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ é tal que $\psi(t) = 0$ para $t \leq 1/2$ e $\psi(t) = 1$ para $t \geq 1$. Então $(u_k) \subset H_0^1(\Omega)$, $\lim \|u_k\|_{L^p(\Omega)} = 1$ e $\lim \|u_k\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \|u\|^2 = c_p$. De fato, $(u_k) \subset H_0^1(\Omega)$, pois $\operatorname{supp} u_k \subset\subset \Omega$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Além disso, escrevendo $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) = (x', x_N)$, e usando o Teorema da Mudança de Variáveis e o Teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u_k|^p dx &= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\psi(x_N)u(x', x_N - k)|^p dx' dx_N \\
&= \int_{-k}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\psi(x_N + k)u(x)|^p dx' dx_N \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\psi(x_N + k)u(x)|^p dx' dx_N \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\psi(x_N + k)u(x)|^p dx \to \|u\|_p^p = 1,
\end{aligned}$$

onde usamos o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, uma vez que

- $|\psi(x_N + k)u(x)|^p \to |u(x)|^p$ *q.t.p. em* $\mathbb{R}^N$ *e;*
- $|\psi(x_N + k)u(x)|^p \leq |u(x)|^p$, *com* $|u|^p \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

De modo análogo,

$$\begin{aligned}\|u_k\|^2_{H^1(\Omega)} &= \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\psi(x_N)u(x',x_N-k)|^2 + |\nabla(\psi(x_N)u(x',x_N-k))|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\psi(x_N+k)u(x)|^2 + |\psi'(x_N+k)u(x) + \psi(x_N+k)\nabla u(x)|^2 dx \\ &\to \|u\|^2.\end{aligned}$$

Definindo $v_k = u_k/\|u_k\|_{L^p(\Omega)}$, *temos* $\|v_k\|_{L^p(\Omega)} = 1$ *e* $\|v_k\|^2_{H^1_0(\Omega)} \to \|u\|^2$. *Assim,* (v_k) *é uma sequência admissível para o problema* (2.74), *e portanto* $c_p(\Omega) \leq c_p$. *Ademais, como* $c_p(\Omega) \geq c_p$ *temos* $c_p(\Omega) = c_p$. *Suponha agora que existe* $w \in H^1_0(\Omega)$ *minimizante de* (2.74). *Então tomando a extensão* $\tilde{w} \in H^1(\mathbb{R}^N)$ *de* w, *como* $\tilde{w}(x) = 0$ *para* $x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega$, *temos que* $\tilde{w}$ *é minimizante de* (2.66), *pois* $\|\tilde{w}\|^2 = \|w\|^2_{H^1_0(\Omega)} = c_p(\Omega) = c_p$, *e* $\|\tilde{w}\|_p = \|w\|_{L^p(\Omega)} = 1$. *Um absurdo, pois vimos que minimizantes de* (2.66) *devem ser positivos (isto é,* $\tilde{w} > 0$*).*

2.7 Compacidade na presença de simetria

Nesta seção iremos considerar o caso em que os elementos $u \in H$ são invariantes pela aplicação de um grupo de operadores unitários. No caso particular em que $H = H^1(\mathbb{R}^N)$, obtemos uma imersão compacta, no espaço $L^p(\mathbb{R}^N)$, para $p \in (2, 2^*)$. Com isto, e com a ajuda da Simetrização de Schwarz, obtemos uma solução radialmente simétrica para o problema (2.66), no caso em que $V = 1$.

Teorema 2.2. *Sejam* (H, D) *um espaço de deslocamento,* D *e* T *grupos de operadores unitários em* H, *sendo* T *necessariamente infinito. Considere*

$$H_T = \{u \in H \; ; \; \tau u = u, \quad \forall \tau \in T\}.$$

Assuma a seguinte condição

(T) Para cada $(g_k) \subset D$ *de modo que* $g_k \rightharpoonup 0$ *em* H, *existe um subconjunto infinito* $T_{(g_k)} \subset T$, *tal que para cada* τ_1, $\tau_2 \in T_{(g_k)}$ *com* $\tau_1 \neq \tau_2$, *temos* $g_k^* \tau_1^* \tau_2 g_k \rightharpoonup 0$, *a menos de subsequência.*

Então H_T *é D-fracamente sequencialmente compacto em* H, *isto é, qualquer sequência limitada em* H_T *possui uma subsequência que converge D-fraco para um elemento em* H_T.

Demonstração: Seja $(u_k) \subset H_T$ uma sequência limitada. Então $u_k \rightharpoonup u$ em H, a menos de subsequência, para algum $u \in H$. Se $\tau \in T$, então $\tau u_k = u_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Daí, pela unicidade do limite para a convergência fraca, obtemos $\tau u = u$. Consequentemente $u \in H_T$. Uma vez que D é um grupo de operadores unitários, caso $u_k \overset{D}{\rightharpoonup} u$ em H, devemos ter $u \in H_T$ (pois isto implica que $u_k \rightharpoonup u$).

Suponha por absurdo que (u_k) não possua uma subsequência que converge D-fraco, assim pela Proposição 2.6, existe uma sequência de $(g_k) \subset D$, a qual possui uma subsequência tal que, usando a mesma notação, $g_k \rightharpoonup 0$ mas $g_k^* u_k \rightharpoonup w \neq 0$ em H. Pela condição (T), dado $M \in \mathbb{N}$ existem $\tau_1, \dots, \tau_M \in T$ de modo que, a menos de subsequência, $g_k^* \tau_j^* \tau_i g_k \rightharpoonup 0$, em H para $i, j \in \{1, \dots, M\}$ com $i \neq j$. Então

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left\| u_k - \sum_{i=1}^{M} \tau_i g_k w \right\|^2 \\
&= \|u_k\|^2 - 2\sum_{i=1}^{M} (\tau_i^* u_k, g_k w) + (\sum_{i=1}^{M} \tau_i g_k w, \sum_{j=1}^{M} \tau_j g_k w) \\
&= \|u_k\|^2 - 2\sum_{i=1}^{M} (g_k^* \tau_i^* u_k, w) + \sum_{i=1}^{M} \|g_k w\|^2 + \sum_{i \neq j} (g_k^* \tau_j^* \tau_i g_k w, w) \\
&= \|u_k\|^2 - 2\sum_{i=1}^{M} (g_k^* u_k, w) + \sum_{i=1}^{M} \|w\|^2 + \sum_{i \neq j} (g_k^* \tau_j^* \tau_i g_k w, w) \\
&= \|u_k\|^2 - 2\sum_{i=1}^{M} \|w\|^2 + \sum_{i=1}^{M} \|w\|^2 + o(1) \\
&= \|u_k\|^2 - M\|w\|^2 + o(1),
\end{aligned}$$

o que implica $\|u_k\|^2 \geq M\|w\|^2 + o(1)$, para todo $M \in \mathbb{N}$, uma contradição. Concluímos assim que $u_k \overset{D}{\rightharpoonup} u$ em H, para alguma subsequência. ∎

Denotamos o conjunto das **aplicações ortogonais** como sendo $O(N)$ (isometrias lineares sobre $\mathbb{R}^N$.)

Exemplo 2.5. *Note que se $H = H^1(\mathbb{R}^N)$, $D = D_{\mathbb{R}^N}$ e T é um subgrupo infinito de $D_{O(N)} := \{\tau_\eta : H^1(\mathbb{R}^N) \to H^1(\mathbb{R}^N) \ ; \ \tau_\eta u = u \circ \eta, \ \eta \in O(N)\}$, então a condição (T) é satisfeita. De fato, seja $(g_{y_k}) \subset D_{\mathbb{R}^N}$ com $g_k \rightharpoonup 0$ em H. Então, pelo Lema 2.3, $|y_k| \to \infty$. Dados $\tau_{\eta_1}, \tau_{\eta_2} \in T$, com $\tau_{\eta_1} \neq \tau_{\eta_2}$, e $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, já que $\tau_{\eta_1}^* = \tau_{\eta_1^{-1}}$ e*

$\tau_\eta u(x) = u \circ \eta(x)$, *temos*

$$\begin{aligned} g_{y_k}^* \tau_{\eta_1}^* \tau_{\eta_2} g_{y_k} u(x) &= g_{y_k}^* \tau_{\eta_1}^* \tau_{\eta_2} u(x - y_k) \\ &= g_{y_k}^* \tau_{\eta_1}^* u(\eta_2 x - \eta_2 y_k) = u(\eta_1^{-1}\eta_2 x - \eta_1^{-1}\eta_2 y_k + y_k) = g_{z_k}\tilde{u}(x), \end{aligned}$$

onde $z_k = -\eta_1^{-1}\eta_2 y_k + y_k$ *e* $\tilde{u}(x) = u(\eta_1^{-1}\eta_2 x) \in H^1(\mathbb{R}^N)$. *Por outro lado, pela Lei dos Cossenos,*

$$|z_k|^2 = |\eta_1^{-1}\eta_2 y_k|^2 + |y_k|^2 - 2|\eta_1^{-1}\eta_2 y_k||y_k|\cos\alpha_k.$$

Como $\eta_1, \eta_2 \in T$ *são aplicações ortogonais, segue que*

$$|z_k|^2 = 2(1 - \cos\alpha_k)|y_k|^2 \to \infty.$$

sendo $1 - \cos\alpha_k > 0$, *uma vez que* $\eta_1 \neq \eta_2$. *Além disso, exigimos* $\tau_{\eta_1}, \tau_{\eta_2} \neq id$. *Assim, pelo Lema 2.3,* $g_{z_k}\tilde{u} \rightharpoonup 0$, *ou seja,* $g_{y_k}^* \tau_{\eta_1}^* \tau_{\eta_2} g_{y_k} u \rightharpoonup 0$ *em* $H^1(\mathbb{R}^N)$. *Portanto a condição (T) é satisfeita para* $T_{(g_k)} = T \setminus \{id\}$.

Proposição 2.11. *Considere* $H^1_{O(N)} = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N)\ ;\ u \circ \eta = u\ ,\ \eta \in O(N)\}$. *Então o espaço* $H^1_{O(N)}$ *está compactamente imerso em* $L^p(\mathbb{R}^N)$ *para qualquer* $p \in (2, 2^*)$.

Demonstração: Seja $H = H^1(\mathbb{R}^N)$, $D = D_{\mathbb{R}^N}$ e $T = D_{O(N)}$ (Exemplo 2.5). Então $H^1_{O(N)} = H_T$, como no Teorema 2.2. Além disso, da mesma forma que foi feito no Exemplo 2.5, a condição (T) é satisfeita. Logo se $(u_k) \subset H^1_{O(N)}$ é limitada, então $u_k \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, a menos de subsequência. Consequentemente, pelo Teorema 2.2, $u_k \overset{D}{\rightharpoonup} u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, com $u \in H^1_{O(N)}$. Portanto, pela Proposição 2.8, $u_k \to u$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$, para $p \in (2, 2^*)$. ∎

Corolário 2.5. *O problema*

$$S_p = \inf_{\substack{u \in H^1(\mathbb{R}^N), \\ \|u\|_p = 1}} \|u\|^2, \tag{2.75}$$

para $p \in (2, 2^*)$, *possui minimizante radialmente simétrico. Além disso, qualquer sequência minimizante radialmente simétrica possui uma subsequência que converge para um minimizante de* (2.75).

Demonstração: Seja

$$S_p^* = \inf_{\substack{u \in H_T, \\ \|u\|_p = 1}} \|u\|^2. \tag{2.76}$$

Então $H^1_{O(N)} = H_T$, como no Teorema 2.2, sendo $T = D_{O(N)}$ (como no Exemplo 2.5). Por definição, temos que $S_p^* \geq S_p$. Considere agora $(u_k^*) \subset H^1_{O(N)}$ uma sequência minimizante para (2.76), isto é, $\|u_k^*\|^2 \to S_p^*$ e $\|u_k^*\|_p = 1$, para todo $k \in \mathbb{R}^N$. Então $u_k^* \rightharpoonup w$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, para algum $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$, a menos de subsequência. Pelo Teorema 2.2 devemos ter $w \in H^1_{O(N)}$. Por outro lado, considere o funcional

$$\begin{array}{rcl} \Phi : H_T & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx. \end{array}$$

Pela Proposição 2.11, Φ é fracamente contínuo em H_T. Portanto $1 = \lim \Phi(u_k^*) = \Phi(w)$. Logo $\|w\|^2 \geq S_p^*$. Como $\|w\|^2 \leq \liminf_k \|u_k^*\|^2 = S_p^*$, temos $S_p^* = \|w\|^2$. Por outro lado, dado $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, como $H^1_{O(N)} = H_{\text{rad}} = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N)\ ;\ u(x) = u(y),\ \text{se}\ |x| = |y|\}$, podemos aplicar a Simetrização de Schwarz para obter $u^* \in H^1_{O(N)}$ com $\int_{\mathbb{R}^N} |u^*|^p = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p = 1$, e $\|u^*\|^2 \leq \|u\|^2$. Portanto, $S_p^* \leq S_p$ e consequentemente $S_p = S_p^* = \|w\|^2$. Isto é, o problema (2.75) possui minimizante radialmente simétrico. Além disso, $u_k^* \to w$, pois $u_k^* \rightharpoonup w$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e $\|u_k^*\|^2 \to \|w\|^2$, a menos de subsequência. ■

Capítulo 3

Concentração de Compacidade com deslocamentos Euclidianos

Tratamos neste capítulo problemas de minimização com vínculo similares ao problema abordado na Seção 2.6. Contudo, estes são formulados em subconjuntos abertos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, não necessariamente limitados, satisfazendo certas condições (veja as Seções 3.1 e 3.2). Outros problemas de minimização com vínculo mais gerais são tratados nas seções seguintes. Além disso, estudamos (usando os métodos discutidos no Capítulo 2) outras classes de problemas elípticos (confira as Seções 3.7 e 3.8).

3.1 Conjuntos (G, T)-flask

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e G um subgrupo aditivo de $\mathbb{R}^N$. Sabemos, pela Definição 2.9, que se $D_G H_0^1(\Omega)$ é sequencialmente fechado com respeito a convergência fraca, então $H_0^1(\Omega)$ é um subespaço D_G-flask de $H^1(\mathbb{R}^N)$. Nesta seção, generalizamos esta definição, mas no contexto dos espaços de Sobolev. Todavia, além do grupo aditivo $G \subset \mathbb{R}^N$, também consideramos um subgrupo $T \subset O(N)$.

Definição 3.1. *Dados $G \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto fechado, que é grupo com relação a operação usual de soma de vetores, e um subgrupo $T \subset O(N)$, um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é dito (G, T)-flask, quando para toda sequência $(y_k) \subset G$, com $|y_k| \to \infty$, existem $z \in G$ e $\tau \in T$, tais que, para qualquer sequência $(u_k) \subset H_0^1(\Omega)$ limitada, com $u_k(\cdot + y_k) \rightharpoonup w$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, temos $w \in H_0^1(\tau\Omega + z)$. Se $T = \{id\}$, dizemos que Ω é um* *conjunto G-flask.*

Observação 3.1. *Note que todo subgrupo aditivo fechado $G \subset \mathbb{R}^N$ (com relação a operação usual de soma de vetores), é linearmente homeomorfo a algum dos seguintes subgrupos:*
$\{0\}$, $\alpha\mathbb{Z}^k$ *ou* $G = \mathbb{R}^k$, *com* $1 \leq k \leq N$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$.

A menos de menção explícita, em todo este capítulo $G \subset \mathbb{R}^N$ será sempre um conjunto fechado que é subgrupo aditivo com relação a soma usual de vetores em $\mathbb{R}^N$, e T será um subgrupo de $O(N)$.

Suponha que $H_0^1(\Omega)$ é um subespaço D_G-flask de $H^1(\mathbb{R}^N)$, então dados $(y_k) \subset G$ com $|y_k| \to \infty$, e $(u_k) \subset H_0^1(\Omega)$, com $u_k(\cdot + y_k) \rightharpoonup w$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, existem $z \in G$ e $\tilde{w} \in H_0^1(\Omega)$ tais que $w = g_z^* \tilde{w} = \tilde{w}(\cdot + z)$. Portanto Ω é um conjunto G-flask.

Exemplo 3.1. $\mathbb{R}^N$ *é um conjunto* (G, T)*-flask, para qualquer escolha de* G *e* T.

Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^N$. Dizemos que $A = B$ e que $A \subset B$ a menos de um conjunto de medida nula, quando $|A \setminus B| = |B \setminus A| = 0$, e $|A \setminus B| = 0$, respectivamente. Dada $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, denotamos por $V(u)$ o conjunto dos pontos onde u não se anula. Além disso, dada a sequência de subconjuntos $(A_k) \subset \mathbb{R}^N$, destacamos o conceito de $\liminf_k A_k$, isto é,

$$\liminf_k A_k = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} A_k.$$

Feito isto, para uso posterior, exibimos a seguinte propriedade

(L1) Se (A_{k_j}) é uma subsequência de $(A_k) \subset \mathbb{R}^N$, então $\liminf_k A_k \subset \liminf_j A_{k_j}$.

Lema 3.1. *Dados* $(u_k) \subset H_0^1(\Omega)$ *uma sequência limitada e* $(y_k) \subset \mathbb{R}^N$, *se* $u_k(\cdot + y_k) \rightharpoonup w$ *em* $H^1(\mathbb{R}^N)$, *então*

$$V(w) \subset \liminf_k (\Omega - y_k), \tag{3.1}$$

a menos de um conjunto de medida nula, e de subsequência de (y_k).

Demonstração: Como $(u_k(\cdot + y_k))$ é limitada em $\mathbb{R}^N$, pelo Teorema de Rellich-Kondrachov, $u_k(x + y_k) \to w(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N \setminus Z$, onde $|Z| = 0$, a menos de subsequência. Vamos mostrar que $V(w) \subset \liminf_k (\Omega - y_k) \cup Z$. De fato, se $x \notin Z$ e $x \notin \liminf_k (\Omega - y_k)$, então, em particular, $x \notin \cap_{k \geq n} (\Omega - y_k)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Deste modo, podemos extrair uma subsequência (y_{k_j}) tal que $x + y_{k_j} \notin \Omega$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo $w(x) = \lim u_{k_j}(x + y_{k_j}) = 0$, e assim $x \notin V(w)$. Concluímos que $V(w) \setminus \liminf_k(\Omega - y_k) \subset Z$, o que prova (3.1). ■

O seguinte resultado nós fornece uma condição suficiente para que um conjunto seja (G,T)-flask.

Teorema 3.1. *Um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ que satisfaz a propriedade do traço (veja a Definição 1.2) é um conjunto (G,T)-flask quando para toda sequência $(y_k) \subset G$, com $|y_k| \to \infty$, existem $z \in G$ e $\tau \in T$ tais que*

$$\liminf_k(\Omega - y_k) \subset \tau\Omega + z, \tag{3.2}$$

a menos de um conjunto de medida nula.

Demonstração: Sejam $(u_k) \subset H_0^1(\Omega)$ limitada e $(y_k) \subset G$, com $|y_k| \to \infty$, de modo que $u_k(\cdot + y_k) \rightharpoonup w$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Pelo Lema 3.1, existe uma subsequência (y_{k_j}) tal que $V(w) \subset \liminf_j(\Omega - y_{k_j})$, a menos de um conjunto de medida nula. Logo, por (3.2) e da propriedade (L1), temos $V(w) \subset \tau\Omega + z$, para algum $\tau \in T$ e $z \in G$. Como Ω é um conjunto que satisfaz a propriedade do traço, $w \in H_0^1(\tau\Omega + z)$. ■

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e considere Ω_ε a faixa de comprimento $\varepsilon > 0$ ao longo da fronteira de Ω, isto é,

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \ ; \ \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega)\}. \tag{3.3}$$

Sob a seguinte condição de regularidade,

$$m_\varepsilon := \sup_{y \in \mathbb{R}^N} |B_1(y) \cap \Omega_\varepsilon| \to 0, \text{ quando } \varepsilon \to 0, \tag{3.4}$$

obtemos uma caracterização geométrica da coleção dos conjuntos (G,T)-flask em termos de Ω_ε. Entretanto, precisamos dos seguintes resultados técnicos.

Lema 3.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $\varepsilon > 0$. Considere $\psi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N, [0,1])$ satisfazendo*

$$\psi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in \Omega \setminus \Omega_{2\varepsilon}, \\ 0, & se\ x \notin \Omega \setminus \Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

Além disso, dada $(y_k) \subset G$ com $|y_k| \to \infty$, seja $v_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^N)$ o limite o fraco, a menos de subsequência, de $(\psi_\varepsilon(\cdot + y_k))$. Então

$$\liminf_k(\Omega \setminus \Omega_{2\varepsilon} - y_k) \subset V(v_\varepsilon), \tag{3.5}$$

a menos de um conjunto de medida nula.

Demonstração: Pelo Teorema de Rellich-Kondrachov, considerando a subsequência dada e usando a mesma notação, $\psi_\varepsilon(x+y_k) \to v_\varepsilon(x)$ em quase todo ponto de $\mathbb{R}^N$, e como $\psi_\varepsilon = 1$ em $\Omega \setminus \Omega_{2\varepsilon}$, temos que $v_\varepsilon = 1$ em $\liminf_k(\Omega \setminus \Omega_{2\varepsilon} - y_k)$. De fato, se $x \in \liminf_k(\Omega\setminus\Omega_{2\varepsilon} - y_k)$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \Omega\setminus\Omega_{2\varepsilon} - y_k$ para todo $k > n_0$. Escrevendo $x = w - y_k$, com $w \in \Omega \setminus \Omega_{2\varepsilon}$ e $k > n_0$, obtemos $\psi(x+y_k) = \psi(w) = 1$, logo $v_\varepsilon(x) = \lim_{k\to\infty} \psi(x+y_k) = 1$. Portanto, vale (3.5). ■

Lema 3.3. *Considere $G \subset \mathbb{R}^N$ cumprindo (2.52) e o conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ satisfazendo a condição (3.4). Sejam $(y_k) \subset G, (u_k) \subset H_0^1(\Omega)$ limitada e $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tais que $u_k(\cdot + y_k) \rightharpoonup w$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Dado $\varepsilon > 0$, considere $w_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^N)$, a menos de subsequência, o limite fraco de $((\psi_\varepsilon u_k)(\cdot + y_k))$ onde $\psi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N, [0,1])$ é dado pelo Lema 3.2. Fixado $y \in \mathbb{R}^N$, temos que*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{B_1(y)} |w - w_\varepsilon| dx = 0. \tag{3.6}$$

Em particular, existe uma sequência $(w_{\varepsilon_k}) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $w_{\varepsilon_k}(x) \to w(x)$ em quase todo ponto de $B_1(y)$.

Demonstração: Como

$$((1 - \psi_\varepsilon(\cdot + y_k))u(\cdot + y_k) \rightharpoonup w - w_\varepsilon,$$

em $H^1(\mathbb{R}^N)$, podemos aplicar o Teorema de Rellich-Kondrachov em $B_1(y)$, para obter que $(1 - \psi_\varepsilon(\cdot + y_k))u(\cdot + y_k) \to w - w_\varepsilon$ em $L^1(B_1(y))$. Logo,

$$\int_{B_1(y)} |w - w_\varepsilon| dx = \lim_{k\to\infty} \int_{B_1(y)} |1 - \psi_\varepsilon(\cdot + y_k)||u_k(\cdot + y_k)| dx. \tag{3.7}$$

Pelo Teorema da Mudança de Variáveis,

$$\int_{B_1(y)} |1 - \psi_\varepsilon(\cdot + y_k)||u_k(\cdot + y_k)| dx = \int_{B_1(y-y_k)} |1 - \psi_\varepsilon||u_k| dx. \tag{3.8}$$

Usando a Desigualdade de Holder, e observando que $\|u_k\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \le C$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e algum $C > 0$, temos

$$\begin{aligned} \int_{B_1(y-y_k)} |1 - \psi_\varepsilon||u_k| dx &\le \|u_k\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \left(\int_{B_1(y-y_k)} |1 - \psi_\varepsilon|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le C|B_1(y - y_k) \cap \Omega_\varepsilon| \\ &\le \sup_{y\in\mathbb{R}^N} |B_1(y) \cap \Omega_\varepsilon|, \ \forall \ k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Pela hipótese (3.4), e combinando (3.7), (3.8) e (3.9), obtemos

$$\int_{B_1(y)} |w - w_\varepsilon| dx \leq C \sup_{y \in \mathbb{R}^N} |B_1(y) \cap \Omega_\varepsilon| \to 0, \tag{3.10}$$

quando $\varepsilon \to 0$. Isto mostra que $w_\varepsilon \to w$, quando $\varepsilon \to 0$ em $L^1(B_1(y))$, isto é, vale (3.6). Em particular, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $w_{\varepsilon_k} \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\|w - w_{\varepsilon_k}\|_{L^1(B_1(y))} \leq \frac{1}{k}.$$

Assim, podemos considerar a sequência $(w_{\varepsilon_k}) \subset L^1(B_1(y))$ que, a menos de subsequência, converge em quase todo ponto de $B_1(y)$ para w em $B_1(y)$. ■

Teorema 3.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto que satisfaz a propriedade traço, e suponha que Ω satisfaz a condição* (3.4). *Então Ω é um (G, T)-flask se, e somente se, para toda sequência $(y_k) \subset G$ com $|y_k| \to \infty$, existem $z \in G$, $\tau \in T$ tais que,*

$$\bigcup_{\varepsilon > 0} \liminf_k (\Omega \setminus \Omega_\varepsilon - y_k) \subset \tau\Omega + z, \tag{3.11}$$

a menos de um conjunto de medida nula.

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, seja $\psi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N, [0, 1])$ como no Lema 3.2. Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é (G, T)-flask e seja $(y_k) \subset G$ com $|y_k| \to \infty$. Então $(\psi_\varepsilon(\cdot + y_k))$ converge fraco em $H^1(\mathbb{R}^N)$, a menos de subsequência, para um elemento de $H^1(\mathbb{R}^N)$ que denotamos por v_ε. Pelo Lema 3.2, temos que

$$\liminf_k (\Omega \setminus \Omega_{2\varepsilon} - y_k) \subset V(v_\varepsilon), \tag{3.12}$$

a menos de um conjunto de medida nula e de subsequência. Por outro lado, como Ω é (G, T)-flask, existem $z \in G$ e $\tau \in T$ tais que $v_\varepsilon \in H_0^1(\tau\Omega + z)$, e consequentemente

$$V(v_\varepsilon) \subset \tau\Omega + z, \tag{3.13}$$

a menos de um conjunto de medida nula. Combinando as inclusões (3.12) e (3.13) obtemos

$$\liminf_k (\Omega \setminus \Omega_{2\varepsilon} - y_k) \subset \tau\Omega + z, \tag{3.14}$$

a menos de um conjunto de medida nula e de subsequência. Pela propriedade (L1) a inclusão (3.14) vale para a sequência inicial dada, e como $\varepsilon > 0$ foi arbitrário, podemos tomar a união com $\varepsilon > 0$ em (3.14) para obter (3.11).

Reciprocamente, sejam $(y_k) \subset G$ com $|y_k| \to \infty$, e $(u_k) \subset H_0^1(\Omega)$ tais que $u_k(\cdot + y_k) \rightharpoonup w$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, e suponha que existem $z \in G$ e $\tau \in T$ que verificam (3.11). Dado $\varepsilon > 0$, considere $w_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^N)$ o limite fraco de $((\psi_\varepsilon u_k)(\cdot + y_k))$, a menos de subsequência. Como $(\psi_\varepsilon u_k) \subset H_0^1(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon)$, pelo Lema 3.1 temos

$$V(w_\varepsilon) \subset \liminf_k (\Omega \setminus \Omega_\varepsilon - y_k), \tag{3.15}$$

a menos de um conjunto de medida nula e de subsequência. Por outro lado, de (3.15) e pela hipótese (3.11), segue que

$$\bigcup_{\varepsilon > 0} V(w_\varepsilon) \subset \tau\Omega + z. \tag{3.16}$$

Seja (w_{ε_k}) dada pelo Lema 3.3. Afirmamos que $V(w) \subset \bigcup_{\varepsilon>0} V(w_\varepsilon)$, a menos de um conjunto de medida nula. De fato, se $x \in V(w)$, mas $x \notin \bigcup_{\varepsilon>0} V(w_\varepsilon)$, então $w(x) \neq 0$ e $w_\varepsilon(x) = 0$, para todo $\varepsilon > 0$. Em particular, $w_{\varepsilon_k}(x) = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Além disso, como $w_{\varepsilon_k}(x) \to w(x)$ em quase todo ponto de $B_1(y)$, existe $A \subset B_1(y)$ com $|A| = 0$ tal que, $x \in A$ se, e somente se, $w_{\varepsilon_k}(x) \not\to w(x)$. Devemos ter $x \in A$, pois se $x \in B_1(y) \setminus A$ então $w_{\varepsilon_k}(x) \to w(x)$, uma contradição uma vez que $w(x) \neq 0$. Logo

$$\left| V(w) \setminus \bigcup_{\varepsilon>0} V(w_\varepsilon) \right| \leq |A| = 0,$$

que juntamente com (3.16), nós fornece

$$V(w) \subset \tau\Omega + z.$$

Já que Ω é um conjunto que satisfaz a propriedade do traço, $w \in H_0^1(\tau\Omega + z)$. ■

Usando os resultados anteriores, obtemos a seguinte lista de exemplos de conjuntos (G,T)-flask.

Proposição 3.1. *Os seguintes conjuntos são (G,T)-flask.*

(a) Qualquer conjunto limitado que satisfaz a propriedade do traço $\Omega \subset \mathbb{R}^N$;

(b) Todo conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ periódico em G, isto é, $\Omega = \bigcup_{y\in G}(U + y)$ onde $U \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto aberto;

(c) Qualquer conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ que tem como assíntota um cilindro, ou seja, para todo $\varepsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que $\Omega \setminus B_R(0) \subset (\omega \times \mathbb{R}) + B_\varepsilon(0)$, com $\Omega \supset \omega \times \mathbb{R}$, sendo $\omega \subset \mathbb{R}^{N-1}$ um conjunto aberto limitado com fronteira de classe C^1;

(d) O produto cartesiano $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, com $G = G_1 \times G_2$ e $T = T_1 \times T_2$ (considerando as operações usuais), sob as seguintes hipóteses: $\Omega_i \subset \mathbb{R}^{N_i}$ é (G_i, T_i)-flask, sendo $\partial\Omega_i$ de classe C^1, onde $N = N_1 + N_2$, com $N_i \geq 3$, para $i = 1, 2$;

(e) A união finita de conjuntos (G, T)-flask cuja interseção aos pares é limitada;

(f) $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1$, onde Ω_0 é um conjunto $(\mathbb{R}^N, O(N))$-flask e $\Omega_1 \subset \tau\Omega_0$, para algum $\tau \in O(N)$, sendo $\Omega_0 \cap \Omega_1$ limitado.

Demonstração:

(a) Seja $(y_k) \subset G$ com $|y_k| \to \infty$. Então existe uma subsequência (y_{k_j}) tal que

$$|y_{k_i} - y_{k_j}| > 2 \operatorname{diam} \Omega,$$

desde que $i \neq j$. Afirmamos que $(\Omega - y_{k_i}) \cap (\Omega - y_{k_j}) = \emptyset$, para $i \neq j$. De fato, se $x \in \Omega - y_{k_i}$ então $x = w - y_{k_i}$ para algum $w \in \Omega$. Além disso, $\operatorname{dist}(x, \Omega - y_{k_j}) > 0$, pois dado $\tilde{w} \in \Omega$, temos que

$$\begin{aligned} |x - (\tilde{w} - y_{k_j})| = |w - y_{k_j} - \tilde{w} + y_{k_i}| &\geq |y_{k_i} - y_{k_j}| - |w - \tilde{w}| \\ &\geq 2 \operatorname{diam} \Omega - |w - \tilde{w}| \\ &\geq \operatorname{diam} \Omega > 0, \end{aligned}$$

assim $x \notin \Omega - y_{k_j}$. Logo $\liminf_j (\Omega - y_{k_j}) = \emptyset$, e pela Propriedade (L1), segue que

$$\emptyset = \liminf (\Omega - y_k) \subset \tau\Omega + z,$$

para qualquer escolha de $\tau \in T$ e $z \in G$. Pelo Teorema 3.2, Ω é (G, T)-flask.

(b) Vamos mostrar que $\Omega + z = \Omega$, para todo $z \in G$. Com efeito, considere $z \in G$ fixo. Se $x \in \Omega + z$ então existe $w \in \Omega$ tal que $x = w + z$. Consequentemente, $w = u + y$, para algum $u \in U$ e $y \in G$. Assim $x = u + (y + z) \in U + (y + z) \subset \bigcup_{y \in G}(U + y) = \Omega$. Por outro lado, se $x \in \Omega$ então $x = u + y$, com $u \in U$ e $y \in G$. Logo $x = u + (y - z) + z \in U + (y - z) + z \in \Omega + z$. Isto mostra que $\Omega + z = \Omega$. Em particular, dada $(y_k) \subset G$ com $|y_k| \to \infty$, temos que $\Omega = \Omega + y_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto $\liminf_k(\Omega - y_k) = \Omega$, e pelo Teorema 3.2, tomando $z = 0$ e $\tau = id$, segue que Ω é (G,T)-flask.

(c) De fato, a menos de conjunto de medida nula, de translação e rotação, $\liminf_k(\Omega - y_k) \subset \emptyset$, Ω ou $\omega \times \mathbb{R}$. Como $\omega \times \mathbb{R} \subset \Omega$, pelo Teorema 3.2, temos que Ω é (G,T)-flask.

■

Por exemplo, $\Omega = (0,1)^3 \times \mathbb{R}^3$ é $(\mathbb{R}^6, O(6))$-flask. Entretanto $\Omega = (0,1)^5 \times (0,\infty)$ não é $(\mathbb{R}^6, O(6))$-flask, como se observa no próximo resultado (isto também mostra que nem sempre subconjuntos de um conjunto (G,T)-flask são (G,T)-flask).

Proposição 3.2. *Os seguintes conjuntos não são $(\mathbb{R}^N, O(N))$-flask.*

(a) Um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, não denso, tal que para todo $R > 0$ existe $x \in \Omega$ de modo que $B_R(x) \subset \Omega$. Em particular, um cone aberto $C = \{\sum_i^n \lambda_i \xi_i \ ; \ \lambda_i > 0\}$, onde $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \subset \mathbb{R}^N$, $n \in \mathbb{N}$, não é um conjunto $(\mathbb{R}^N, O(N))$-flask;

(b) $\Omega = (\omega \times \mathbb{R}) \setminus K$, onde $K \subset \omega \times \mathbb{R}$ é um conjunto compacto com interior não vazio e $\omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto aberto;

(c) A parte positiva do cilindro, isto é, $\Omega = \omega \times (0,\infty)$, onde $\omega \subset \mathbb{R}^{N-1}$ é um conjunto aberto.

Demonstração:

(a) Inicialmente, note que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é ilimitado. Dado $k \in \mathbb{N}$, seja $y_k \in \Omega$ tal que $B_k(y_k) \subset \Omega$. Considere $w \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, definida por $w(x) = e^{-|x|^2}$. Então $\operatorname{supp} w = \mathbb{R}^N$. Tome $\psi_k \in C^\infty(B_k(0), [0,1])$ de modo que

$$\psi_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in B_{k-1}(0), \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}^N \setminus B_k(0). \end{cases}$$

Defina $u_k = \psi_k(\cdot - y_k) w(\cdot - y_k)$. Então $(u_k) \subset C^\infty(\mathbb{R}^N)$ e

$$\begin{aligned} \operatorname{supp} u_k &\subset (\operatorname{supp} \psi_k + y_k) \cap \operatorname{supp} w \\ &\subset \operatorname{supp} \psi_k + y_k \\ &\subset B_k(0) + y_k = B_k(y_k). \end{aligned}$$

Afirmamos que $u_k(\cdot + y_k) \rightharpoonup w$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. De fato, dada $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ seja $k \in \mathbb{N}$, suficientemente grande de modo que $\operatorname{supp}\varphi \subset B_{k-1}(0)$, assim

$$\int_{\mathbb{R}^N} (u_k(\cdot + y_k) - w)\varphi - \nabla(u_k(\cdot + y_k) - w) \cdot \nabla\varphi dx =$$
$$\int_{\mathbb{R}^N} (\psi_k - 1)w\varphi - (\nabla\psi_k w + \psi_k \nabla w - \nabla w) \cdot \nabla\varphi dx = 0.$$

Como $\operatorname{supp} w = \mathbb{R}^N$, temos que $w \notin H_0^1(\tau\Omega + z)$, para qualquer $\tau \in O(N)$ e $z \in \mathbb{R}^N$. Consequentemente Ω não é (G,T)-flask.

(b) Uma vez que

$$\inf_{\tau \in O(N), z \in \mathbb{R}^N} |w \times \mathbb{R} \setminus (\tau\Omega + z)| > 0,$$

existe $v \in H_0^1(\omega \times \mathbb{R})$. Considere $M = \operatorname{supp}\{x_N \; ; \; x \in K\}$. Defina $u_k = \psi(x_N)v(\cdot - ke_N,)$, onde $e_N = (0, \ldots, 0, 1)$ e $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ é tal que $\psi(x) = 0$, para $x \leq M$ e $x \geq M + 1$, com $|\psi'| \leq 2$. Então $u_k(\cdot + ke_N) \rightharpoonup v$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, entretanto, $v \notin H_0^1(\tau\Omega + z)$, qualquer que seja $\tau \in O(N)$, $z \in \mathbb{R}^N$.

(c) Segue do modo análogo ao caso anterior, com $M = 0$ e $\Omega = (\omega \times \mathbb{R}) \setminus (\omega \times (0, \infty))$.

■

Note que a condição de densidade no item (a) da Proposição 3.2 é realmente necessária. Caso contrário, considere $\Omega = \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Como $C_0^\infty(\mathbb{R}^N \setminus 0)$ é denso em $H^1(\mathbb{R}^N)$ temos que $H_0^1(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}) = H^1(\mathbb{R}^N)$, uma contradição, uma vez que $H^1(\mathbb{R}^N)$ é $(\mathbb{R}^N, O(N))$-flask.

3.2 Existência de minimizantes em conjuntos (G,T)-flask

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, um conjunto aberto, considere o seguinte problema de minimização com vínculo

$$c_p(\Omega) = \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega), \\ \|u\|_{L^p(\Omega)} = 1}} \int_\Omega |\nabla u|^2 + |u|^2 \, dx, \tag{3.17}$$

com $p \in (2, 2^*)$. De modo análogo ao que foi feito na Seção 2.6, $c_p(\Omega) > 0$. Além disso, minimizantes para (3.17) são soluções do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = u^{p-1}, \\ u > 0, u \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{3.18}$$

a menos de reescalonamento. Provamos a existência de um minimizante para o problema (3.17), quando $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto (G, T)-flask. Para tanto, usamos os principais resultados vistos no Capítulo 2, adaptados para o contexto dos conjuntos (G, T)-flask.

Teorema 3.3. *Suponha que $G \subset \mathbb{R}^N$ satisfaz a condição (2.52) e seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto (G, T)-flask. Se $(u_k) \subset H_0^1(\Omega)$ é uma sequência limitada, então existe $\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{N}$ e sequências $(y_k^{(n)}) \subset G$, $\tau^{(n)} \subset T$ com $y_k^{(1)} = 0$, $\tau^{(1)} = id$ e $n \in \mathbb{N}_0$, tais que, a menos de subsequência para (u_k),*

$$u_k(\cdot + y_k^{(n)}) \rightharpoonup w^{(n)}, \tag{3.19}$$

em $H^1(\mathbb{R}^N)$, com $w^{(n)} \in H_0^1(\tau^{(n)}\Omega)$. Além disso, valem (2.58) e (2.56) , com

$$\sum_{n \in \mathbb{N}_0} \|w^{(n)} \circ \tau^{(n)}\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \limsup_k \|u_k\|^2_{H_0^1(\Omega)}. \tag{3.20}$$

Mais ainda, seja $F \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ como em (2.59), então

$$\lim_{k \to \infty} \int F(x, u_k) dx = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \int_\Omega F(x, w^{(n)} \circ \tau^{(n)}) dx, \tag{3.21}$$

ademais

$$\lim_{k \to \infty} \int_\Omega F(x, u_k) - F(x, u_k - w^{(1)}) \ dx = \int_\Omega F(x, w^{(1)}) \ dx. \tag{3.22}$$

Demonstração: Como (u_k) é limitada e G satisfaz (2.52), podemos usar o Corolário (2.3) para obter uma subsequência de (u_k), e sequências, $(y_k^{(n)}) \subset G$ e $(w^{(n)}) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ que satisfazem os itens (2.55), (2.56), (2.57) e (2.58) do Corolário 2.3. Já que o operador $u \mapsto u(\cdot + z^{(n)})$ é fracamente contínuo em $H^1(\mathbb{R}^N)$, segue que

$$u_k(\cdot + y_k^{(n)} + z^{(n)}) \rightharpoonup w^{(n)}(\cdot + z^{(n)}),$$

em $H^1(\mathbb{R}^N)$, para cada $n \in \mathbb{N}_0$. Pelo item (2.55) e uma vez que Ω é (G, T)-flask, existe $z^{(n)} \in G$ e $\tau^{(n)} \in T$ tal que $w^{(n)} \in H_0^1(\tau^{(n)}\Omega + z^{(n)})$, para $n \in \mathbb{N}_0$. Seja $\tilde{w}^{(n)} = w^{(n)}(\cdot + z^{(n)})$ e $\tilde{y}_k^{(n)} = y_k^{(n)} + z^{(n)}$. Então $\tilde{w}^{(n)} \in H^1(\tau^{(n)}\Omega)$, o que prova (3.19).

Além disso, $\|w^{(n)}\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \|w^{(n)}\|_{H_0^1(\tau^{(n)}\Omega+z^{(n)})} = \|\tilde{w}^{(n)}\|_{H_0^1(\tau^{(n)}\Omega)} = \|\tilde{w}^{(n)} \circ \tau^{(n)}\|_{H_0^1(\Omega)}$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Consequentemente, por (2.57), vale (3.20). Por outro lado, já que $\operatorname{supp} w^{(n)} \subset \tau\Omega + z^{(n)}$ e $F \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ como em 2.59, podemos aplicar a Proposição 2.9 para obter

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \int_\Omega F(x,u_k)dx &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u_k)dx \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \int_{\mathbb{R}^N} F(x,w^{(n)})dx \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \int_{\tau^{(n)}\Omega+z^{(n)}} F(x,w^{(n)})dx \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \int_{\tau^{(n)}\Omega} F(x,\tilde{w}^{(n)})dx \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \int_\Omega F(x,\tilde{w}^{(n)} \circ \tau^{(n)})dx,
\end{aligned}$$

o que prova (3.21). Finalmente, como $u_k \rightharpoonup w^{(1)}$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, pelo Teorema de Rellich-Kondrachov, temos que $u_k(x) \to w^{(1)}(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, assim $\operatorname{supp} w \subset \Omega$. Portanto

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \int_\Omega F(x,u_k) - F(x,u_k - w^{(1)})dx &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u_k) - F(x,u_k - w^{(1)})dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} F(x,w^{(1)})dx \\
&= \int_\Omega F(x,w^{(1)})dx,
\end{aligned}$$

assim, obtemos (3.22). ■

Teorema 3.4. *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto (G,T)-flask com G cumprindo a condição (2.52). Então para toda sequência minimizante (u_k) do problema (3.17), existem uma sequência $(y_k) \subset G$ e um elemento $\tau \in T$ tais que, a menos de subsequência, $u_k(\cdot + y_k) \to w$ em $H^1(\tau\Omega)$, sendo $w \circ \tau$ um minimizante de (3.17).*

Demonstração: Seja $(u_k) \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência minimizante para (3.17), isto é, $\|u_k\|_{L^p(\Omega)} = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $\|u_k\|^2_{H_0^1(\Omega)} \to c_p(\Omega)$. Como Ω é (G,T)-flask e G satisfaz (2.52), pelo Teorema 3.3, podemos considerar, usando a mesma notação para a subsequência, $(u_k), (w^{(n)}) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ e $(y_k^{(n)}) \subset G$, com $n \in \mathbb{N}_0$. Pelo item (3.21), tomando $F(x,s) = |s|^p$, temos

$$1 = \lim_{k\to\infty} \|u_k\|^p_{L^p(\Omega)} = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \int_\Omega |w^{(n)} \circ \tau^{(n)}|^p dx, \tag{3.23}$$

e pelo item (3.20), segue que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \|w^{(n)} \circ \tau^{(n)}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c_p(\Omega). \tag{3.24}$$

Escrevendo $t_n = \int_\Omega |w^{(n)} \circ \tau^{(n)}|^p dx$ e sabendo que

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \geq C_p(\Omega)\|u\|^2_{L^p(\Omega)}, \tag{3.25}$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$, temos $\|w^{(n)} \circ \tau^{(n)}\|^2_{H_0^1(\Omega)} \geq c_p(\Omega)t_n^{2/p}$. Substituindo em (3.24), obtemos

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} t_n^{\frac{2}{p}} \leq 1. \tag{3.26}$$

Por outro lado, podemos escrever (3.23) como $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} t_n = 1$, e uma vez que $2/p < 1$, devemos ter $t_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$, a menos de um $t_{n_0} = 1$, para algum $n_0 \in \mathbb{N}_0$. Por (3.24) e (3.25), segue que $\|w^{(n_0)} \circ \tau^{(n_0)}\|^2_{H_0^1(\Omega)} = c_p(\Omega)$. Portanto, (3.17) possui um minimizante. Além disso, pelo item (3.19) do Teorema 3.3 temos que $u_k(\cdot + y_k^{(n_0)}) \rightharpoonup w^{(n_0)}$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e como $\|u_k(\cdot + y_k^{(n_0)})\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \|u_k\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \|u_k\|^2_{H_0^1(\Omega)}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, obtemos $u_k(\cdot + y_k^{(n_0)}) \to w^{(n_0)}$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. ■

3.3 Conjuntos de Rellich

Como já vimos na Proposição 3.1, conjuntos limitados que satisfazem a propriedade do traço, são conjuntos (G, T)-flask. Nesta seção iremos introduzir um conceito que generaliza este resultado.

Definição 3.2. *Dizemos que o conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto de Rellich, quando $H_0^1(\Omega)$ está compactamente imerso em $L^p(\Omega)$, para $p \in (2, 2^*)$.*

Exemplo 3.2. *Pelo Teorema de Rellich-Kondrachov, todo conjunto limitado é um conjunto de Rellich.*

Nosso próximo resultado fornece uma caracterização dos conjuntos de Rellich.

Proposição 3.3. *Seja $G \subset \mathbb{R}^n$ um subgrupo aditivo de $\mathbb{R}^N$ satisfazendo a condição (2.52). Um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto de Rellich se, e somente se, para toda sequência limitada $(u_k) \subset H_0^1(\Omega)$ e toda sequência $(y_k) \subset G$, com $|y_k| \to \infty$, temos $u_k(\cdot + y_k) \rightharpoonup 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, a menos de subsequência.*

Demonstração: Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto de Rellich. Sejam $(u_k) \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência limitada e $(y_k) \subset G$ com $|y_k| \to \infty$. Então existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u_k \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$, a menos de subsequência. Consequentemente, usando a mesma notação para a subsequência, $u_k \to u$ em $L^p(\Omega)$, para $p \in (2, 2^*)$. Pela Proposição 2.8, $u_k \overset{D_G}{\rightharpoonup} u$ $H^1(\mathbb{R}^N)$. Por outro lado, já que $|y_k| \to \infty$, podemos aplicar o Lema 2.3 para obter que $g_k^* \rightharpoonup 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, na subsequência. Uma vez que (u_k) possui uma subsequência que converge D_G-fracamente, pela condição (2.50) da Proposição 2.6, temos que $g_{y_k}^* u_k \rightharpoonup 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, isto é, $u_k(\cdot + y_k) \rightharpoonup 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$.
Reciprocamente, seja $(u_k) \subset H_0^1(\Omega)$ limitada. Mostraremos que (u_k) possui uma subsequência que converge em $L^p(\Omega)$, com $p \in (2, 2^*)$. Para tanto, vamos mostrar que (u_k) satisfaz a condição (2.50). De fato, seja $(g_{y_k}) \subset D_G$ com $g_{y_k} \rightharpoonup 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Como $g_{y_k} \rightharpoonup 0$ é equivalente a $g_{y_k}^* \rightharpoonup 0$, em $H^1(\mathbb{R}^N)$, pelo Lema 2.3 temos que $|-y_k| \to \infty$. Por hipótese, segue que $g_{-y_k}^* \rightharpoonup 0$, ou seja, $g_{y_k} u_k \rightharpoonup 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Logo a condição (2.50) é satisfeita, e $u_k \overset{D_G}{\rightharpoonup} u$ em $H_0^1(\Omega)$, a menos de subsequência. Usando a Proposição 2.8, concluímos que $u_k \to u$ em $L^p(\Omega)$, a menos de subsequência. ∎

Observe que a condição imposta na Proposição 3.3 independe de G.

Proposição 3.4. *Suponha que o subgrupo aditivo $G \subset \mathbb{R}^N$ satisfaz* (2.52) *e seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto. Se para toda sequência $(y_k) \subset G$, com $|y_k| \to \infty$, o conjunto $\liminf_k(\Omega - y_k)$ tem medida nula, então Ω é um conjunto de Rellich.*

Demonstração: Sejam $(u_k) \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência limitada e $(y_k) \subset G$, com $|y_k| \to \infty$. Então, a menos de subsequência, $u_k(\cdot + y_k) \rightharpoonup w$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Pelo Lema 3.1, passando a subsequência, se necessário, $V(w) \subset \liminf_k(\Omega - y_k)$. Por hipótese, segue que $|V(w)| \leq |\liminf_k(\Omega - y_k)| = 0$. Logo $w = 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, e pela Proposição 3.3, temos que Ω é um conjunto de Rellich. ∎

Corolário 3.1. *Se $G \subset \mathbb{R}^N$ cumpre* (2.52)*, todo conjunto de Rellich é (G, T)-flask.*

Demonstração: De fato, seja $(u_k) \subset H_0^1(\mathbb{R}^N)$ limitada, e $(y_k) \subset G$ com $|y_k| \to \infty$, tal que $u_k(\cdot + y_k) \rightharpoonup w$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Pela Proposição 3.3, $u_{k_j}(\cdot + y_{k_j}) \rightharpoonup 0$, para alguma subsequência. Logo, pela unicidade do limite fraco, $w = 0$, assim $w \in H_0^1(\tau\Omega + z)$, para qualquer escolha de $\tau \in T$ e $z \in G$. ∎

A condição de regularidade (3.4) também pode ser usada para caracterizar conjuntos de Rellich, desde que G cumpra a condição (2.52), conforme é visto no próximo resultado.

Proposição 3.5. *Suponha que $G \subset \mathbb{R}^N$ satisfaça a condição* (2.52). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto cumprindo* (3.4). *Então Ω é um conjunto de Rellich se, e somente se, para toda sequência $(y_k) \subset G$, com $|y_k| \to \infty$, e todo $\varepsilon > 0$, temos*

$$|\liminf_k(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon - y_k)| = 0, \tag{3.27}$$

onde Ω_ε é definido por (3.3).

Demonstração: Suponha que Ω é um conjunto de Rellich. Dado $\varepsilon > 0$, seja $\psi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N, [0,1])$ e $v_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^N)$ como no Lema 3.2. Pela Proposição 3.3, devemos ter $v_\varepsilon = 0$, consequentemente, por (3.5), temos

$$|\liminf_k(\Omega \setminus \Omega_{2\varepsilon} - y_k)| = 0.$$

Pela arbitrariedade de $\varepsilon > 0$, obtemos (3.27).
Reciprocamente, seja $(y_k) \subset G$, com $|y_k| \to \infty$, $(u_k) \subset H_0^1(\Omega)$ limitada e $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_k(\cdot + y_k) \rightharpoonup w$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Dado $\varepsilon > 0$, seja $w_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^N)$ como no Lema 3.3. Já que $(\psi_\varepsilon u_k) \subset H_0^1(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon)$, pelo Lema 3.1 e da hipótese (3.27), temos

$$|V(w_\varepsilon)| \leq |\liminf_k(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon - y_k)| = 0.$$

Portanto $w_\varepsilon = 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, e por (3.6), segue que $w = 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, uma vez que $y \in \mathbb{R}^N$ e $\varepsilon > 0$ são arbitrários. Pela Proposição 3.3, Ω é um conjunto de Rellich. ∎

Exemplo 3.3. *O conjunto $\Omega = \{(x', x_N) \in \mathbb{R}^N \ ; \ |x'| < 1/(1 + x_N^2)\}$ é um conjunto de Rellich.*

3.4 Concentração de Compacidade com Simetria

Obtemos uma versão mais geral da Proposição 2.11, a qual nós fornece uma imersão compacta quando $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ possui alguma simetria.

Proposição 3.6. *Seja T um subgrupo fechado e infinito de $O(N)$. Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto T-simétrico, isto é, $\tau\Omega = \Omega$ para todo $\tau \in T$, e suponha que para toda sequência $(y_k) \subset \mathbb{R}^N$, com $|y_k| \to \infty$ e $|\liminf(\Omega - y_k)| > 0$, tenhamos*

$$|\tau y_k - y_k| \to \infty, \qquad \textit{para todo } \tau \in T \setminus \{id\}. \tag{3.28}$$

Então $H_T := \{u \in H_0^1(\Omega)\ ;\ u \circ \eta = u,$ *para todo* $\eta \in T\}$ *está imerso compactamente em* $L^p(\Omega)$, *para todo* $p \in (2, 2^*)$.

Demonstração: Dada $(u_k) \subset H_T$ limitada, considere $(w^{(n)}) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ e $(y_k^{(n)}) \subset \mathbb{R}^N$, dadas pelo Teorema 3.3. Afirmamos que $w^{(n)} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, com $n > 1$. De fato, suponha por absurdo que existe $n_0 \in \mathbb{N}_0$, com $n_0 > 1$, tal que $w^{(n_0)} \neq 0$, ou equivalentemente, $|V(w^{(n_0)})| > 0$. Pelo Lemma 3.1, $|V(w^{(n_0)})| \leq \liminf_k |(\Omega - y_k^{(n_0)})|$, consequentemente,

$$0 < \left|\liminf_k (\Omega - y_k^{(n_0)})\right|. \tag{3.29}$$

Além disso $|y_k^{(n)}| \to \infty$, para $n \in \mathbb{N}_0$, com $n > 1$. Por (3.28), dados $\eta_1, \eta_2 \in T \setminus \{id\}$ com $\eta_1 \neq \eta_2$, vale

$$\left|\eta_1 y_k^{(n_0)} - \eta_2 y_k^{(n_0)}\right| = \left|\eta_2(\eta_2^{-1}\eta_1 y_k^{(n_0)} - y_k^{(n_0)})\right| = \left|\eta_2^{-1}\eta_1 y_k^{(n_0)} - y_k^{(n_0)}\right| \to \infty. \tag{3.30}$$

Ademais, dado $\eta \in T$, devemos ter

$$u_k(\cdot + \eta y_k^{(n_0)}) = u_k \circ \eta(\eta^{-1} \cdot + y_k^{(n_0)}) = u_k(\eta^{-1} \cdot + y_k^{(n_0)}) \rightharpoonup w^{(n_0)} \circ \eta^{-1}, \tag{3.31}$$

em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Aqui usamos a continuidade fraca do operador $u \mapsto u \circ \eta^{-1}$ (observe que este pertence ao espaço $\mathcal{L}(H^1(\mathbb{R}^N))$. Dado $M \in \mathbb{N}$, sejam $\eta_1, \dots, \eta_M \in T \setminus \{id\}$, distintos entre si. Expandindo

$$\left\| u_k - \sum_{j=1}^{M} w^{(n_0)} \circ \eta_j^{-1}(\cdot - \eta_j y_k^{(n_0)}) \right\|^2 \geq 0,$$

e usando mudança de variáveis obtemos

$$\begin{aligned}
0 \leq \|u_k\|^2 &- 2\sum_{j=1}^{M} \left(u_k, w^{(n_0)} \circ \eta_j^{-1}(\cdot - \eta_j y_k^{(n_0)})\right) \\
&+ \sum_{i \neq j}^{M} \left(w^{(n_0)} \circ \eta_i^{-1}(\cdot - \eta_i y_k^{(n_0)}), w^{(n_0)} \circ \eta_j^{-1}(\cdot - \eta_j y_k^{(n_0)})\right) \\
&+ \sum_{j=1}^{M} \left\| w^{(n_0)} \circ \eta_j^{-1}(\cdot - \eta_j y_k^{(n_0)}) \right\|^2 \\
= \|u_k\|^2 &- 2\sum_{j=1}^{M} \left(u_k(\cdot + \eta_j y_k^{(n_0)}), w^{(n_0)} \circ \eta_j^{-1}\right) \\
&+ \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}} \left(w^{(n_0)} \circ \eta_i^{-1}, w^{(n_0)} \circ \eta_j^{-1}(\cdot + \eta_i y_k^{(n_0)} - \eta_j y_k^{(n_0)})\right) + M \left\| w^{(n_0)} \right\|^2.
\end{aligned}$$

Por fim, aplicando (3.31) e (3.30) junto com o Lema 2.3 temos que

$$\liminf_k \|u_k\|^2 \geq M\|w^{(n_0)}\|^2,$$

uma contradição, uma vez que M é arbitrário e (u_k) é limitada. Portanto, pelo item (2.58) do Corolário 2.3, temos que $u_k \stackrel{D_{\mathbb{R}^N}}{\rightharpoonup} w^{(1)}$ a menos de subsequência e, pela Proposição 2.8, $u_k \to w^{(1)}$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$, também a menos de subsequência. ■

Exemplo 3.4. *Seja* $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ z^2 < x^2 + y^2 + c^2\}$*, com* $c \in \mathbb{R}$*, e considere* $T = \{\eta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\ ;\ \eta(x, y, z) = (x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta, x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta, z),\ \ \theta \in \mathbb{R}\}$*, formado por todas as rotações em torno do eixo* z*. Então o subespaço* H_T *de* $H_0^1(\Omega)$*, das funções simétricas com relação ao eixo* z*, está compactamente imerso em* $L^p(\Omega)$*, para* $2 < p < 6$*.*

3.5 Concentração de Compacidade e a Desigualdade de Friedrichs

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto. A seguinte desigualdade é conhecida como Desigualdade de Friedrichs (em alguns contextos também é conhecida como Desigualdade de Poincaré),

$$\int_\Omega |u|^2 dx \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2 dx, \tag{3.32}$$

para algum $C > 0$ e todo $u \in H_0^1(\Omega)$. Considere o seguinte funcional

$$\|u\|_\lambda^2 := \int_\Omega |\nabla u|^2 - \lambda |u|^2 dx, \tag{3.33}$$

com $\lambda \in \mathbb{R}$. Algumas condições geométricas sobre Ω fazem com que valha (3.32). Por exemplo, quando Ω possui projeção limitada sobre algum do eixos (veja [1], pág. 291). Uma vez que valha (3.32), o funcional (3.33) é não negativo, e juntamente com outras hipóteses, conseguimos o suficiente para resolver problemas de minimização da forma

$$s_p(\Omega) := \inf_{u \in H_0^1(\Omega),\ \int_\Omega |u|^p dx = 1} \|u\|_\lambda^2, \tag{3.34}$$

para $p \in (2, 2^*)$. Por outro lado, seja

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{u \in H_0^1(\Omega),\ \int_\Omega |u|^2 dx = 1} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx, \tag{3.35}$$

o primeiro autovalor do operador Laplaciano. Então $\lambda_1(\Omega) > 0$ se, e somente se, vale (3.32). Considere,

$$\lambda(\Omega) := \sup_{\rho>0} \lambda_1(\Omega + B_\rho(0)) \leq \lambda_1(\Omega). \tag{3.36}$$

Nosso próximo resultado mostra que se $\lambda < \lambda(\Omega)$ então (3.34) possui um minimizante.

Teorema 3.5. *Sejam G um subgrupo de $\mathbb{R}^N$ satisfazendo* (2.52) *e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto G-flask. Se Ω satisfaz* (3.32) *e $\lambda < \lambda(\Omega)$, então o problema* (3.34) *admite um minimizante $u \in H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração: Considere a forma bilinear

$$(u,v)_\lambda := \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v - \lambda uv\, dx, \tag{3.37}$$

bem como sua forma quadrática associada

$$\|u\|_\lambda^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 - \lambda |u|^2\, dx. \tag{3.38}$$

Aqui, usamos a mesma notação anterior, uma vez que $u \in H_0^1(\Omega)$ implica que $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, quando consideramos a extensão de $\bar{u}$ de u, como Teorema 1.6. Note que (3.38) não necessariamente define uma norma em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Porém, por (3.35) e (3.36), vemos que

$$\lambda < \lambda(\Omega) \leq \lambda_1(\Omega) \leq \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx}{\int_\Omega |u|^2\, dx} \quad \text{para todo } u \in H_0^1(\Omega)\ , u \neq 0. \tag{3.39}$$

Assim, $\|u\|_\lambda^2 > 0$ para todo $u \in H_0^1(\Omega)$, $u \neq 0$, e consequentemente, $s_p(\Omega) \geq 0$. Mais ainda, valendo (3.32), a forma bilinear (3.37) é positiva definida e coerciva em $H_0^1(\Omega)$, e a norma (3.38) proveniente, é equivalente a norma de Sobolev de $H_0^1(\Omega)$.

Vamos mostrar que $s_p(\Omega) > 0$. De fato, suponha que $s_p(\Omega) = 0$. Considere, $(u_k) \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência minimizante para $s_p(\Omega)$, isto é, $\|u_k\|_\lambda \to s_p(\Omega)$ e $\|u_k\|_p = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Tomando $\varepsilon > 0$ satisfazendo $\lambda + \varepsilon < \lambda_1(\Omega)$ temos, da definição de $\lambda_1(\Omega)$,

$$\lambda + \varepsilon < \lambda_1(\Omega) \leq \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx}{\int_\Omega |u|^2\, dx} \quad \text{para cada } u \in H_0^1(\Omega),\ u \neq 0.$$

Ou seja

$$\varepsilon \|u\|_2^2 < \|u\|_\lambda^2 \quad \text{para todo } u \in H_0^1(\Omega),\ u \neq 0. \tag{3.40}$$

Substituindo u_k em (3.40) temos $\|u_k\|_2 \to 0$ e consequentemente $\|\nabla u_k\|_2 \to 0$. Logo $\|u_k\| \to 0$. Por outro lado, pelo Teorema de Imersão de Sobolev, existe uma constante

$C > 0$ tal que $\|u\|_p^2 \leq C\|u\|^2$, para todo $u \in H_0^1(\Omega)$, o que implica $\|u_k\|_p \to 0$, uma contradição. Portanto $s_p(\Omega) > 0$.

De (3.40) segue que $\|u_k\|_2$ é limitada para toda sequência minimizante (u_k) pois $\|u_k\|_\lambda$ é convergente. Consequentemente, $\|\nabla u_k\|_2$ também o é. Portanto (u_k) é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Tome $(w^{(n)}) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ e $(y_k^{(n)}) \subset G$, $n \in \mathbb{N}_0$, satisfazendo as condições do Teorema 3.3 e considere a seguinte desigualdade:

$$\limsup_k \|u_k\|_\lambda^2 \geq \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \|w^{(n)}\|_\lambda^2. \tag{3.41}$$

Com a qual, seguindo a mesma argumentação usada no Teorema 3.4, segue o resultado. Assim, nosso objetivo passa a ser o de provar a desigualdade (3.41).

Da definição de $\lambda(\Omega)$, podemos tomar $\rho > 0$ tal que

$$\lambda < \lambda_1\left(\Omega + B_\rho(0)\right) \leq \lambda(\Omega).$$

Por um raciocínio análogo ao feito em (3.39) temos que $(\cdot,\cdot)_\lambda$ define uma forma bilinear positivo definida em $H_0^1(\Omega + B_\rho(0))$. Considere $\psi \in C_0^\infty\left(\Omega + B_\rho(0)\right)$ com $\psi \equiv 1$ sobre Ω e $0 \leq \psi \leq 1$. Pelo Lema 3.1 $V(w^{(n)}) \subset \liminf_k(\Omega - y_k^{(n)})$ a menos de um conjunto de medida nula. Assim, para quase todo $x \in V(w^{(n)})$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \bigcap_{k\geq k_0}(\Omega - y_k^{(n)})$, isto é, $x + y_k^{(n)} \in \Omega$ para todo $k \geq k_0$, $n \in \mathbb{N}_0$. Assim, $\psi(x + y_k^{(n)}) = 1$ para $k \geq k_0$, portanto $\psi(x+y_k^{(n)}) \to 1$ para quase todo $x \in V(w^{(n)})$ e para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, como $0 \leq 1 - \psi(\cdot + y_k^{(n)}) \leq 1$, temos que $|(1 - \psi(\cdot + y_k^{(n)}))w^{(n)}|^2 \leq |w^{(n)}|^2$. Podemos então aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para obter

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left|(1-\psi)w^{(n)}(\cdot - y_k^{(n)})\right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left|(1 - \psi(\cdot + y_k^{(n)}))w^{(n)}\right|^2 dx \to 0. \tag{3.42}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla\left((1-\psi)w^{(n)}(\cdot - y_k^{(n)})\right)\right|^2 dx \\
&\quad= \int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla(1-\psi)w^{(n)}(\cdot - y_n^{(n)}) + (1-\psi)\nabla w^{(n)}(\cdot - y_k^{(n)})\right|^2 dx \\
&\quad= \int_{\mathbb{R}^N} \left|-\nabla(\psi w^{(n)}(\cdot - y_k^{(n)})) + \nabla w^{(n)}(\cdot - y_k^{(n)}) - \psi\nabla w^{(n)}(\cdot - y_k^{(n)})\right|^2 dx \\
&\quad= \int_{\mathbb{R}^N} \left|-\nabla\psi(\cdot + y_k^{(n)})w^{(n)} + \nabla w^{(n)} - \psi(\cdot + y_k^{(n)})\nabla w^{(n)}\right|^2 dx \to 0,
\end{aligned}$$

que junto com (3.42) nos dá

$$\left\|(1-\psi(\cdot+y_k^{(n)}))w^{(n)}\right\| = \left\|(1-\psi)w^{(n)}(\cdot-y_k^{(n)})\right\| \to 0, \quad n\in\mathbb{N}_0. \tag{3.43}$$

Isto é, $\psi(\cdot+y_k^{(n)})w^{(n)} \to w^{(n)}$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Dado $M\in\mathbb{N}$, como $u_k-\psi\sum_{n=1}^{M} w^{(n)}(\cdot-y_k^{(n)})\in H_0^1(\Omega+B_\rho(0))$, temos que

$$\left\|u_k-\psi\sum_{n=1}^{M} w^{(n)}(\cdot-y_k^{(n)})\right\|_\lambda \geq 0. \tag{3.44}$$

Expandindo (3.44), obtemos

$$\begin{aligned}\|u_k\|_\lambda^2+\sum_{n=1}^{M}\left\|\psi w^{(n)}(\cdot-y_k^{(n)})\right\|_\lambda^2-2\sum_{n=1}^{M}\left(u_k,\psi w^{(n)}(\cdot-y_k^{(n)})\right)_\lambda&\\ +\sum_{\substack{m\neq n\\ m,n\in\mathbb{N}_0}}\left(\psi w^{(m)}(\cdot-y_k^{(m)}),\psi w^{(n)}(\cdot-y_k^{(n)})\right)_\lambda&\geq 0.\end{aligned} \tag{3.45}$$

Estimemos cada termos de (3.45).

Observe que $\psi w^{(n)}(\cdot-y_k^{(n)})\in H_0^1(\Omega+B_\rho(0))$ e $w^{(n)}\in H_0^1(\Omega)$ para todo $k\in\mathbb{N}$ e $n\in\mathbb{N}_0$, uma vez que Ω é G-flask (item (3.19) do Teorema (3.3)). Assim, por (3.43) e pela equivalência das normas em $H_0^1(\Omega+B_\rho(0))$, vemos que $\psi(\cdot+y_k^{(n)})w^{(n)}\to w^{(n)}$ em $H_0^1(\Omega+B_\rho(0))$, na norma $\|\cdot\|_\lambda$. Daí,

$$\|\psi w^{(n)}(\cdot-y_k^{(n)})\| = \|\psi(\cdot+y_k^{(n)})w^{(n)}\| \to \|w^{(n)}\|. \tag{3.46}$$

Estimemos agora o terceiro termo. Uma vez que $u_k(\cdot+y_k^{(n)})\rightharpoonup w^{(n)}$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, por (3.43), temos que

$$\left(u(\cdot+y_k^{(n)}),\psi(\cdot+y_k^{(n)})w^{(n)}\right)\to\|w^{(n)}\|^2$$

e

$$\left(u(\cdot+y_k^{(n)}),\psi(\cdot+y_k^{(n)})w^{(n)}\right)_2\to\|w^{(n)}\|_2^2.$$

Consequentemente

$$\left(\nabla u(\cdot+y_k^{(n)}),\nabla\left(\psi(\cdot+y_k^{(n)})w^{(n)}\right)\right)_2\to\|\nabla w^{(n)}\|_2^2,$$

e daí,

$$\left(u(\cdot+y_k^{(n)}),\psi(\cdot+y_k^{(n)})w^{(n)}\right)_\lambda\to\|w^{(n)}\|_\lambda^2. \tag{3.47}$$

Estimemos agora o último termo de (3.45). Como $|y_k^{(n)} - y_k^{(m)}| \to \infty$ quando $m \neq n$, ou seja, $g_{y_k^{(n)} - y_k^{(m)}} \rightharpoonup 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e $\psi(\cdot + y_k^{(n)})w^{(n)} \to w^{(n)}$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, temos que

$$\begin{aligned}\psi(\cdot + y_k^{(n)})w^{(n)}(\cdot + y_k^{(n)} - y_k^{(m)}) &= \psi(\cdot + y_k^{(m)} + (y_k^{(n)} - y_k^{(m)}))w^{(m)}(\cdot + y_k^{(n)} - y_k^{(m)}) \\ &= g_{y_k^{(n)} - y_k^{(m)}}(\psi(\cdot + y_k^{(m)})w^{(m)}) \rightharpoonup 0 \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N).\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}&\Big(\psi w^{(n)}(\cdot - y_k^{(n)}), \psi w^{(m)}(\cdot - y_k^{(m)})\Big) = \\ &\qquad \Big(\psi(\cdot + y_k^{(n)})w^{(n)}, \psi(\cdot + y_k^{(n)})w^{(m)}(\cdot + y_k^{(n)} - y_k^{(m)})\Big) \to 0 \quad (3.48)\end{aligned}$$

para $m, n \in \mathbb{N}_0$ com $m \neq n$.

Passando $\limsup_k$ em (3.45) e usando as estimativas (3.46), (3.47) e (3.48) obtemos

$$\limsup_k \|u_k\|_\lambda^2 \geq \sum_{n=1}^{M} \|w^{(n)}\|_\lambda^2.$$

Uma vez que M é arbitrário, vale (3.41). ■

Note que a Desigualdade de Friedrichs não pode ser estendida para $H^1(\Omega)$, pois (3.32) falha ao tomarmos Ω limitado e $u = 1$.

3.6 Solubilidade em conjuntos que não são (G,T)-flask

A definição de ínfimo em (3.17) pode ser estendida a subconjuntos arbitrários $A \subset \mathbb{R}^N$ por

$$\tilde{c}_p(A) = \sup_{\substack{\Omega \supset A, \\ \Omega \text{ aberto}}} c_p(\Omega), \quad (3.49)$$

para $p \in (2, 2^*)$. Nesta seção, provamos a existência de minimizantes para (3.49), considerando o comportamento assintótico de $\liminf_k(\Omega - y_k)$, com $|y_k| \to \infty$.

Observação 3.2. *Seja*

$$t_p(A) := \sup_{\substack{\Omega \supset A, \\ \Omega \in \operatorname{tr}(\mathbb{R}^N)}} c_p(\Omega).$$

Aqui, usamos a notação descrita na Definição 1.2. Então $\tilde{c}_p(A) = t_p(A)$. De fato, denotando $\tilde{X} = \{\tilde{\Omega} \supset A \ ; \ \tilde{\Omega} \in \operatorname{tr}(\mathbb{R}^N)\}$ e $X = \{\Omega \supset A \ ; \ \Omega$ é aberto$\}$, temos que

$\tilde{X} \subset X$, assim $t_p(A) \leq \tilde{c}_p(A)$. Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$ existe $\Omega \in X$ tal que $\tilde{c}_p(A) - \varepsilon < c_p(\Omega)$. Uma vez que Ω é aberto, podemos tomar um aberto B de classe C^1 tal que $A \subset B \subset \Omega$, para concluir que $\tilde{c}_p(A) - \varepsilon < c_p(\Omega) \leq c_p(B)$. Isto justifica a afirmação.

Proposição 3.7. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e $p \in (2, 2^*)$. Se para toda sequência $(y_k) \subset \mathbb{R}$ com $|y_k| \to \infty$ temos*

$$\tilde{c}_p(\liminf_k (\Omega - y_k)) > c_p(\Omega), \tag{3.50}$$

então o problema (3.17) tem um minimizante e toda sequência minimizante converge em $H_0^1(\Omega)$.

Demonstração: Seja $(u_k) \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência minimizante de $c_p(\Omega)$, isto é, $\|u_k\|^2_{H_0^1(\Omega)} \to c_p(\Omega)$ e $\|u_k\|_{L^p(\Omega)} = 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Como (u_k) é limitado, pelo Corolário 2.3 existem $(w^{(n)}) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ e $(y_k^{(n)}) \subset \mathbb{Z}^N$, $n \in \mathbb{N}_0$, que satisfazem (2.55), (2.56), (2.57) e (2.58) para alguma subsequência de (u_k). Escrevendo $t_n = \int_{\mathbb{R}^N} |w^{(n)}|^p dx = \|w^{(n)}\|_p^p$, $n \in \mathbb{N}_0$, pela Proposição 2.9, tomando $F(x,s) = |s|^p$, temos

$$1 = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_k|^p dx = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \int_{\mathbb{R}^N} |w^{(n)}|^p dx = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \|w^{(n)}\|_p^p = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} t_n,$$

isto é,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} t_n = 1. \tag{3.51}$$

Já que $|y_k^{(n)}| \to \infty$, para cada $n \geq 2$, pela condição (3.50), e usando a Observação 3.2, conseguimos $\Omega_n \subset \mathbb{R}^N$, um conjunto que satisfaz a propriedade do traço com

$$\Omega_n \supset \liminf_k (\Omega - y_k^{(n)}) \tag{3.52}$$

e $c_p(\Omega) < c(p, \Omega_n) \leq \tilde{c}_p(\liminf_k (\Omega - y_k^{(n)}))$, com $n \in \mathbb{N}_0$ e $n \geq 2$. Para $n = 1$, tomemos $\Omega_1 = \Omega$. Por outro lado, pelo Lema 3.1,

$$V(w^{(n)}) \subset \liminf_k (\Omega - y_k^{(n)}), \tag{3.53}$$

a menos de um conjunto de medida nula e de subsequência de $(y_k^{(n)})$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Já que Ω_n é um conjunto que satisfaz a propriedade traço, $w^{(n)} \in H_0^1(\Omega_n)$, para todo

$n \in \mathbb{N}_0$. Como $\|w^{(n)}\|^2_{L^p(\Omega_n)} c_p(\Omega_n) \le \|w^{(n)}\|^2_{H^1_0(\Omega_n)}$, temos

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \|w^{(n)}\|^2_{L^p(\Omega_n)} c_p(\Omega_n) &\le \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \|w^{(n)}\|^2_{H^1_0(\Omega_n)} \\ &\le \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \|w^{(n)}\|^2 \le \limsup_k \|u_k\|^2 = c_p(\Omega).\end{aligned}$$

Por (3.52) e (3.53) segue que $\|w^{(n)}\|_{L^p(\Omega_n)} = \|w^{(n)}\|_p$ e $\|w^{(n)}\|^2_{H^1_0(\Omega_n)} = \|w^{(n)}\|^2$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, logo

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \|w^{(n)}\|^2_{L^p(\Omega)} c_p(\Omega_n) \le c_p(\Omega),$$

isto é,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} t_n^{2/p} c_p(\Omega_n) \le c_p(\Omega), \tag{3.54}$$

e como $c_p(\Omega) < c_p(\Omega_n) \le c_p(\Omega)$, e $c_p(\Omega) = c_p(\Omega_1)$, segue que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} t_n^{2/p} c_p(\Omega) \le \sum_{n\in\mathbb{N}_0} t_n^{2/p} c_p(\Omega_n) \le c_p(\Omega).$$

Uma vez que $c_p(\Omega) > 0$, temos

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} t_n^{2/p} \le 1. \tag{3.55}$$

Como $2/p < 1$, por (3.51) e (3.54), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_{n_0} = 1$, sendo $t_n = 0$, para $n \in \mathbb{N}_0$ com $n \neq n_0$. Note que se $n_0 > 1$ então $c_p(\Omega) < c(p, \Omega_{n_0})$, além disso, por (3.54), segue que $c_p(\Omega) \ge c(p, \Omega_{n_0})$, um absurdo, logo devemos ter $n_0 = 1$.

Já que $\|w^{(1)}\|^2 \le \liminf_k \|u_k\|_{H^1_0(\Omega)} = c_p(\Omega)$, pois $u_k \rightharpoonup w^{(1)}$ em $H^1_0(\Omega)$, e como $\|w^{(1)}\|_{L^p(\Omega)} = \|w^{(1)}\|_p$, segue de (3.51) que $\|w^{(1)}\|_p = 1$, assim $c_p(\Omega) \le \|w^{(n)}\|$. Logo, $c_p(\Omega) = \|w^{(1)}\|^2$, e já que $\|u_k\|^2 \to c_p(\Omega) = \|w^{(1)}\|^2$, temos $u_k \to w^{(1)}$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. ■

No próximo resultado usamos fortemente o que foi discutido na Seção 2.6.

Proposição 3.8. *Sejam $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^N$, conjuntos abertos tais que $\Omega_1 \subset \Omega_2$, com $\Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1} \neq \emptyset$. Se $c_p(\Omega_1)$ é atingido, $p \in (2, 2^*)$, então $c_p(\Omega_2) < c_p(\Omega_1)$.*

Demonstração: Note inicialmente que $c_p(\Omega_2) \le c_p(\Omega_1)$. Vamos mostrar que temos a desigualdade estrita. De fato, suponha por absurdo que $c(p, \Omega_1) = c(p, \Omega_2)$. Seja $u \in H^1_0(\Omega_1)$ um minimizante não negativo para $c_p(\Omega_1)$. Como $H^1_0(\Omega_1) \subset H^1_0(\Omega_2)$, temos que $\|u\|^2_{H^1_0(\Omega_2)} = \|u\|^2_{H^1_0(\Omega_1)} = c_p(\Omega_1)$ e $\|u\|_{L^p(\Omega_2)} = \|u\|_{L^p(\Omega_1)} = 1$. Logo u é um minimizante de $c_p(\Omega_2)$, e consequentemente pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange é solução fraca de $-\Delta u + u = u^{p-1}$ em Ω_2. Assim, pelo Princípio do Máximo, $u > 0$ em Ω_2, uma contradição, já que $u \in H_0^1(\Omega_1)$. Deste modo, devemos ter $c_p(\Omega_2) < c_p(\Omega_1)$. ■

Se pudermos decompor um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, como união de dois abertos cuja interseção é limitada, com uma hipótese adicional, garantimos a existência de mínimo para (3.17).

Proposição 3.9. *Dados Ω_1, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^N$ abertos tais que $\Omega_1 \cap \Omega_2$ é limitado, seja $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ e $p \in (2, 2^*)$. Se $c_p(\Omega_i) > c_p(\Omega)$, $i = 1, 2$, então $c_p(\Omega)$ é atingindo.*

Demonstração: Seja $(u_k) \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência minimizante para $c_p(\Omega)$, isto é, $\|u_k\|^2_{H_0^1(\Omega)} \to c_p(\Omega)$ e $\|u_k\|^p_{L^p(\Omega)} = 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Considere o conjunto compacto $B = \overline{\Omega_1 \cap \Omega_2}$ e $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, [0,1])$, sendo $\psi(x) = 1$ para todo $x \in B$ e $\operatorname{supp}\psi \subset\subset \Omega$. Como (u_k) é limitada, a menos de subsequência, $u_k \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$ e pelo Teorema de Rellich-Kondrachov $u_k(x) \to u(x)$ em quase todo ponto de Ω. Seja $\Phi : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ definida como $\Phi u := \psi u$. Então Φ é um operador linear contínuo. De fato, dada $u \in H_0^1(\Omega)$, usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz e a de Young,

$$u\nabla\psi \cdot \psi\nabla u \leq \frac{u^2|\nabla\psi|^2}{2} + \frac{\psi^2|\nabla u|^2}{2},$$

consequentemente

$$\|\Phi u\|^2 \leq \int_\Omega 2\psi^2|\nabla u|^2 + 2u^2|\nabla\psi|^2 + \psi^2 u^2 dx \leq 3\|\psi\|_{C^1}\|u\|^2,$$

onde $\|\psi\|_{C^1} = \max\{\|\psi\|_\infty, \|\nabla\psi\|_\infty\}$. Logo $\psi u_k \rightharpoonup \psi u$ em $H_0^1(\Omega)$, e pelo Teorema de Rellich-Kondrachov, uma vez que $\operatorname{supp}\psi \subset\subset \Omega$, temos $\psi u_k \to \psi u$ em $L^p(\Omega)$, para $p \in [1, 2^*)$. Usando a desigualdade triangular, obtemos

$$\left|\|u_k - \psi u_k + \psi u\|_{L^p(\Omega)} - \|u_k\|_{L^p(\Omega)}\right| \leq \|\psi u_k - \psi u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Logo, $\|u_k - \psi u_k + \psi u\|^p_{L^p(\Omega)} \to 1$, ou equivalentemente,

$$\int_\Omega |u_k - (\psi u_k - \psi u)|^p dx = o(1) + 1. \tag{3.56}$$

Vamos provar que

$$\|u_k - \psi(u_k - u)\|^2 \to c_p(\Omega). \tag{3.57}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\|u_k - \psi(u_k - u)\|^2 - \|u_k\|^2 &= \|u_k\|^2 - 2(u_k, \psi(u_k - u)) + \|\psi(u_k - u)\|^2 - \|u_k\|^2 \\
&= \|\psi(u_k - u)\|^2 - 2(u_k, \psi(u_k - u)) \\
&= \|\psi(u_k - u)\|^2 - 2(u_k, \psi(u_k - u)) + \\
&\qquad + 2(u, \psi(u_k - u)) - 2(u, \psi(u_k - u)) \\
&= \|\psi(u_k - u)\|^2 - 2(u_k - u, \psi(u_k - u)) + o(1), \qquad (3.58)
\end{aligned}$$

pois $\psi(u_k - u) \rightharpoonup 0$ em $H_0^1(\Omega)$. Expandindo os termos em (3.58) e reagrupando, obtemos:

$$\int_\Omega \psi^2(u_k - u)^2 - 2\psi(u_k - u)^2 dx \\
+ \int_\Omega |\nabla \left(\psi(u_k - u)\right)|^2 - 2\nabla\psi(u_k - u) \cdot \nabla(u_k - u) dx. \qquad (3.59)$$

Como ψ é limitada em Ω, $u_k \to u$ em $L^2(\Omega)$ e $\psi^{1/2}$ satisfaz as mesmas propriedades que ψ, isto é, $\psi^{1/2}u_k \to \psi^{1/2}u$ em $L^p(\Omega)$, temos que a primeira integral em (3.59) converge para zero. Além disso,

$$\begin{aligned}
&|\nabla(\psi(u_k - u))|^2 - 2\nabla(\psi(u_k - u)) \cdot \nabla(u_k - u) \\
&\quad = |(u_k - u)\nabla\psi + \psi\nabla(u_k - u)|^2 - 2[(u_k - u)\nabla\psi + \psi\nabla(u_k - u)] \cdot \nabla(u_k - u) \\
&\quad = |\nabla\psi|^2|u_k - u|^2 + 2(u_k - u)\psi\nabla\psi \cdot \nabla(u_k - u) + \psi^2|\nabla(u_k - u)|^2 \\
&\qquad - 2(u_k - u)\nabla\psi \cdot \nabla(u_k - u) - 2\psi|\nabla(u_k - u)|^2 \\
&\quad = |\nabla\psi|^2|u_k - u|^2 + 2(\psi - 1)(u_k - u)\nabla\psi \cdot \nabla(u_k - u) + (\psi^2 - 2\psi)|\nabla(u_k - u)|^2.
\end{aligned}$$

Por outro lado, usando a definição de derivada fraca, e o fato que $(\psi - 1)\frac{\partial\psi}{\partial x_j} \in C_0^\infty(\Omega)$, para $j = 1, \ldots, N$, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega 2(\psi - 1)(u_k - u)\nabla\psi \cdot \nabla(u_k - u)dx &= \int_\Omega (\psi - 1)\nabla\psi \cdot \nabla((u_k - u)^2)dx \\
&= \int_\Omega (\psi - 1)\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial\psi}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}[(u_k - u)^2]dx \\
&= \int_\Omega \sum_{j=1}^{N} (\psi - 1)\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}[(u_k - u)^2]dx \\
&= -\int_\Omega \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\psi - 1)\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right](u_k - u)^2 dx \\
&= -\int_\Omega \operatorname{div}((\psi - 1)\nabla\psi)(u_k - u)^2 dx.
\end{aligned}$$

Agora usando o fato que $\nabla\psi$, $\operatorname{div}(\psi - 1)\nabla\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ e que $u_k \to u$ em $L^2(\Omega)$, segue que

$$\begin{aligned}
\|u_k - \psi(u_k - u)\|^2 - \|u_k\|^2 &= \|\psi(u_k - u)\|^2 - 2(u_k - u, \psi(u_k - u)) + o(1) \\
&= \int_\Omega (\psi^2 - 2\psi)|\nabla(u_k - u)|^2 dx + o(1) \\
&\leq o(1), \qquad (3.60)
\end{aligned}$$

pois $(\psi^2 - 2\psi) \leq 0$. Pela definição de $c_p(\Omega)$, temos

$$c_p(\Omega) \leq \frac{\|u_k - \psi(u_k - u)\|^2}{\|u_k - \psi(u_k - u)\|_p^2}, \text{ para todo } k \in \mathbb{N},$$

e por (3.60) segue que

$$\|u_k - \psi(u_k - u)\|_p^2 c_p(\Omega) \leq \|u_k - \psi(u_k - u)\|^2 \leq o(1) + \|u_k\|^2,$$

passando o limite em k e usando (3.56), obtemos (3.57).

Logo, normalizando se necessário, $v_k = u_k - \psi(u_k - u)$ é uma sequência minimizante para $c_p(\Omega)$. Agora, considere as seguintes funções

$$u_k^{(1)}(x) = \begin{cases} (1 - \psi(x))u_k(x), & \text{se } x \in \Omega_1 \setminus B \\ 0, & \text{se } x \in \Omega_2, \end{cases}$$

$$u_k^{(2)}(x) = \begin{cases} (1 - \psi(x))u_k(x), & \text{se } x \in \Omega_2 \setminus B \\ 0, & \text{se } x \in \Omega_1. \end{cases}$$

Então $(u_k^{(1)}) \subset H_0^1(\Omega_1 \setminus B)$ e $(u_k^{(2)}) \subset H_0^1(\Omega_2 \setminus B)$, além disso, existem $u^{(1)} \in H_0^1(\Omega_1 \setminus B)$ e $u^{(2)} \in H_0^1(\Omega_2 \setminus B)$, tais que $u_k^{(1)} \rightharpoonup u^{(1)}$ em $H_0^1(\Omega_1 \setminus B)$ e $u_k^{(2)} \rightharpoonup u^{(2)}$ em $H_0^1(\Omega_2 \setminus B)$, a menos de subsequência. Passando a subsequência se necessário, já que $(1-\psi)u_k = u_k^{(1)} + u_k^{(2)}$, temos, pela unicidade do limite fraco, que $(1-\psi)u = u^{(1)} + u^{(2)}$. Como $(\Omega_1 \setminus B) \cap (\Omega_2 \cap B) = \emptyset$ e $u_k^{(i)} - u^{(i)} = (1-\psi)(u_k - u)$ em $\Omega_i \setminus B$, $i = 1, 2$,

$$\begin{aligned}
\|u_k^{(1)} - u^{(1)}\|^2 + \|u_k^{(2)} - u^{(2)}\|^2 &= \|(u_k^{(1)} - u^{(1)}) + (u_k^{(2)} - u^{(2)})\|^2 \\
&= \|u_k^{(1)} + u_k^{(2)} - (1-\psi)u\|^2 \\
&= \|(1-\psi)u_k - (1-\psi)u\|^2 \\
&= \|u_k - \psi u_k + \psi u - u\|^2 \\
&= \|v_k - u\|^2 \\
&= \|v_k\|^2 - 2(v_k, u) + \|u\|^2 \\
&= \|v_k\|^2 - \|u\|^2 + 2(\|u\|^2 - (v_k, u)) \\
&= \|v_k\|^2 - \|u\|^2 + o(1),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|u_k^{(1)} - u^{(1)}\|^2 + \|u_k^{(2)} - u^{(2)}\|^2 = \|v_k\|^2 - \|u\|^2 + o(1), \tag{3.61}$$

pois $v_k \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$. Como (v_k) é limitada em $L^p(\Omega)$, e $v_k(x) \to u(x)$ em quase todo ponto em Ω, podemos aplicar o Lema de Brezis-Lieb para obter:

$$1 - \int_\Omega |v_k - u|^p \, dx \to \int_\Omega |u|^p \, dx.$$

Por outro lado, já que $((1-\psi)(u_k - u)) = v_k - u$,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u|^p \, dx + \int_\Omega |u_k^{(1)} - u^{(1)}|^p \, dx + \int_\Omega |u_k^{(2)} - u^{(2)}|^p dx& \\
&= \int_\Omega |u|^p \, dx + \int_\Omega |(1-\psi)(u_k - u)|^p \, dx \\
&= \int_\Omega |u|^p \, dx + \int_\Omega |v_k - u|^p \, dx \\
&= \int_\Omega |u|^p \, dx + 1 - \left(1 - \int_\Omega |v_k - u|^p \, dx\right) \\
&\to \int_\Omega |u|^p \, dx + 1 - \int_\Omega |u|^p \, dx = 1.
\end{aligned}$$

Isto mostra que

$$\int_\Omega |u|^p \, dx + \int_\Omega |u_k^{(1)} - u^{(1)}|^p dx + \int_\Omega |u_k^{(2)} - u^{(2)}| dx \to 1.$$

Escrevendo $t_0 = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega |u|^p \, dx$ e $t_i = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega |u_k^{(i)}|^p \, dx$, $i = 1, 2$, temos que

$$t_0 + t_1 + t_2 = 1. \tag{3.62}$$

Usando (3.61), segue que

$$\begin{aligned}
\|v_k\|^2 &= \|u\|^2 + \|u_k^{(1)} - u^{(1)}\| + \|u_k^{(2)} - u^{(2)}\|^2 + o(1) \\
&\geq c_p(\Omega)\|u\|_p^2 + c_p(\Omega_1)\|u_k^{(1)} - u^{(1)}\|_p^2 + c_p(\Omega_2)\|u_k^{(2)} - u^{(2)}\|_p^2 + o(1) \qquad (3.63) \\
&> c_p(\Omega)\|u\|_p^2 + c_p(\Omega)\|u_k^{(1)} - u^{(1)}\|_p^2 + c_p(\Omega)\|u_k^{(2)} - u^{(2)}\|_p^2 + o(1) \\
&= c_p(\Omega)(t_0^{2/p} + t_1^{2/p} + t_2^{2/p}) + o(1). \qquad (3.64)
\end{aligned}$$

Passando o limite em (3.64), obtemos $c_p(\Omega) \geq c_p(\Omega)(t_0^{2/p} + t_1^{2/p} + t_2^{2/p})$, isto é,

$$1 \geq t_0^{2/p} + t_1^{2/p} + t_2^{2/p} \qquad (3.65)$$

Como $t_0, t_1, t_2 \in [0, 1]$ e $2/p < 1$, de (3.62) e (3.65), t_0, t_1 ou t_2 é igual a 1. Afirmamos que $t_0 = 1$. De fato, tomando o limite em (3.63), temos

$$c_p(\Omega)t_0^{2/p} + c_p(\Omega_1)t_1^{2/p} + c_p(\Omega_2)t_2^{2/p} \leq c_p(\Omega).$$

Logo, se $t_1 = 1$ ou $t_2 = 1$, obtemos uma contradição, já que por hipótese $c_p(\Omega_i) > c_p(\Omega)$, $i = 1, 2$. Portanto, $\|u\|_{L^p(\Omega)} = t_0^{1/p} = 1$, e consequentemente $c_p(\Omega) \leq \|u\|^2$. Além disso, $\|u\| \leq \liminf_k \|u_k\| = c_p(\Omega)$. Isto mostra que $u \in H_0^1(\Omega)$ é minimizante para $c_p(\Omega)$. Por outro lado, como $\|u_k\|^2 \to c_p(\Omega) = \|u\|^2$ e $u_k \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$, também temos que $u_k \to u$ em $H_0^1(\Omega)$ na subsequência considerada. ■

3.7 Convergência com Penalidade no Infinito

Como vimos na Seção 2.6, dada $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, existe um minimizante para (2.66). Entretanto, adicionando a condição $\lim_{|x|\to\infty} V(x) = V_\infty > V$, é possível dispensar os deslocamentos na sequência minimizante na Proposição 2.10.

Teorema 3.6. *Dado $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, com $\inf_{\mathbb{R}^N} V > 0$, suponha que*

$$V(x) < V_\infty := \lim_{|y|\to\infty} V(y), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N, \qquad (3.66)$$

em quase todo ponto de $\mathbb{R}^N$. Considere a forma bilinear simétrica,

$$a(u, v) = \int_{\mathbb{R}^N} V(x)uv + \nabla u \cdot \nabla v \; dx, \qquad (3.67)$$

e seja,

$$c_p = \inf_{\substack{u \in H^1(\mathbb{R}^N), \\ \|u\|_p = 1}} a(u, u), \qquad (3.68)$$

com $p \in (2, 2^*)$. Então c_p é atingido e toda sequência minimizante para c_p tem uma subsequência que converge para um minimizante em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração: Como $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $\inf_{\mathbb{R}^N} V > 0$, a forma bilinear na equação (3.67) é positiva definida, além disso,

$$C_1(u,u) \le a(u,u) \le C_2(u,u) \quad \text{para todo } u \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

onde $C_1 = \min\{1, \inf V\}$ e $C_2 = \max\{1, \|V\|_\infty\}$, e consequentemente, $\|u\|_a := (a(u,u))^{1/2}$ é uma norma equivalente a norma de Sobolev em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Ademais, vale a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, e assim, fixado $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $a(u,\cdot)$ é uma aplicação linear contínua (logo fracamente contínua).

Seja $(u_k) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ uma sequência minimizante para c_p, isto é, $\|u_k\|_a^2 \to c_p$ e $\|u_k\|_p = 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Já que (u_k) é limitado (por causa da equivalência de normas) em $H^1(\mathbb{R}^N)$, podemos considerar uma subsequência de (u_k) que converge fracamente, isto é, $u_k \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, para algum $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Usando a definição de $a(\cdot,\cdot)$, segue que

$$\begin{aligned}
\|u_k - u\|_a^2 &= \|u_k\|_a^2 - 2a(u_k, u) + \|u\|_a^2 \\
&= \|u_k\|_a^2 - 2a(u_k, u) + \|u\|_a^2 + (\|u\|_a^2 - \|u\|_a^2) \\
&= \|u_k\|_a^2 - 2a(u_k - u, u) - \|u\|_a^2,
\end{aligned}$$

e denotando $v_k = u_k - u$, obtemos, usando a definição de c_p,

$$\|u_k\|_a^2 = \|v_k\|_a^2 + 2a(v_k, u) + \|u\|_a^2 \tag{3.69}$$

$$\ge \|v_k\|_a^2 + 2a(v_k, u) + c_p\|u\|_p^2. \tag{3.70}$$

Seja $t = \limsup_k \|v_k\|_p^p$. Afirmamos que $t = 0$. Suponha por absurdo que $t \neq 0$, com isto, vale a seguinte desigualdade

$$\limsup_k \|v_k\|_a^2 > c_p t^{2/p}. \tag{3.71}$$

De fato, como $\lim_{|x|\to\infty} V(x) = V_\infty$, dado $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$x \notin U_\varepsilon \Rightarrow V(x) \ge V_\infty - \varepsilon, \tag{3.72}$$

em quase todo ponto de $\mathbb{R}^N$, sendo $U_\varepsilon := B_R(0)$. Por outro lado, pelo Teorema de Rellich-Kondrachov,

$$\int_{U_\varepsilon} V(x)|v_k|^2\,dx \to 0. \tag{3.73}$$

Com efeito, já que $v_k \rightharpoonup 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, temos que $v_k \to 0$ em $L^p(U_\varepsilon)$ para $p \in [1, 2^*)$, em particular,

$$\|v_k\|^2_{L^2(U_\varepsilon)} \to 0. \tag{3.74}$$

Logo

$$\int_{U_\varepsilon} V(x)|v_k(x)|^2\,dx \leq \|V\|_\infty \int_{U_\varepsilon} |v_k|^2\,dx \to 0,$$

o que prova (3.73). Considere agora

$$c_p^\infty := \inf_{\|u\|=1} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V_\infty u^2\,dx.$$

Então, por definição, temos que

$$c_p^\infty \|u\|_p^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V_\infty u^2\,dx, \tag{3.75}$$

para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Usando (3.73) e a definição de $a(\cdot,\cdot)$ segue que

$$\begin{aligned}
\|v_k\|_a^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_k|^2 + V(x)v_k^2\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_k|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^N\setminus U_\varepsilon} V(x)v_k^2\,dx + \int_{U_\varepsilon} V(x)v_k^2\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_k|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^N\setminus U_\varepsilon} V(x)v_k^2\,dx + o(1),
\end{aligned}$$

agora, por (3.72), obtemos

$$\|v_k\|_a^2 \geq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_k|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^N\setminus U_\varepsilon} (V_\infty - \varepsilon)v_k^2\,dx + o(1),$$

e da convergência (3.74),

$$\begin{aligned}
\|v_k\|_a^2 &\geq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_k|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} (V_\infty - \varepsilon)v_k^2\,dx - \int_{U_\varepsilon} (V_\infty - \varepsilon)v_k^2\,dx + o(1) \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_k|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} (V_\infty - \varepsilon)v_k^2\,dx + o(1),
\end{aligned}$$

pela desigualdade em (3.75),

$$\begin{aligned}
\|v_k\|_a^2 &\geq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_k|^2 + V_\infty v_k^2\,dx - \varepsilon \int_{\mathbb{R}} v_k^2\,dx + o(1) \\
&\geq c_p^\infty \|v_k\|_p^2 - \varepsilon \|v_k\|_2^2 + o(1),
\end{aligned}$$

como ε é arbitrário concluímos que

$$\|v_k\|_a^2 \geq c_p^\infty \|v_k\|_p + o(1).$$

Tomando o limite em k, obtemos

$$\limsup_k \|v_k\|_a^2 \geq c_p^\infty t^{2/p}. \tag{3.76}$$

Pela Proposição 2.10, podemos tomar $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$ um minimizante para c_p^∞, e usando a hipótese (3.66), temos que

$$c_p^\infty = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 + V_\infty w^2\, dx > \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 + V(x) w^2\, dx \geq c_p, \tag{3.77}$$

substituindo em (3.76) concluímos

$$\limsup_k \|v_k\|_a^2 > c_p t^{2/p},$$

o que prova (3.71), a qual culminará em uma contradição. Com efeito, pelo Lema de Brezis-Lieb, temos

$$1 - \|u_k - u\|_p^p \to \|u\|_p^p, \tag{3.78}$$

logo $\|u\|_p^p = 1 - \limsup_k \|v_k\|_p^p$, isto é, $\|u\|_p^2 = (1-t)^{2/p}$. Como $v_k \rightharpoonup 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ (na norma Sobolev), usando a equivalência das normas, tomando o limite em (3.70) e aplicando (3.71), obtemos que $c_p > c_p t^{2/p} + c_p(1-t)^{2/p}$ e consequentemente, como $c_p > 0$,

$$t^{2/p} + (1-t)^{2/p} < 1. \tag{3.79}$$

Por outro lado, de (3.70) temos que

$$\|u_k\|_a^2 \geq c_p \|v_k\|_p^2 + 2a(v_k, u) + c_p \|u\|_p^2,$$

consequentemente, tomando o limite,

$$c_p \geq c_p t^{2/p} + c_p \|u\|_p^2 \geq c_p t^{2/p}.$$

Logo, $t \in (0,1]$. Considere $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $F(s) = s^{2/p} + (1-s)^{2/p}$. Já que $2/p < 1$, devemos ter $F(s) \geq 1$, para todo $s \in [0,1]$. Entretanto, por (3.79) temos $F(t) < 1$, uma contradição. Portanto, devemos ter $t = 0$. Assim, passando a subsequência, se necessário, $\|u_k - u\|_p \to 0$, e consequentemente, $\|u_k\|_p \to \|u\|_p$, assim $\|u\|_p = 1$, donde $c_p \leq \|u\|_a^2$. No entanto, por (3.69), temos que

$$\|u_k\|_a^2 \geq c_p \|v_k\|_p^2 + 2a(v_k, u) + \|u\|_a^2,$$

e passando o limite em k, segue que

$$c_p \geq c_p t^{2/p} + \|u\|_a^2,$$

isto é, $c_p \geq \|u\|_a^2 (t = 0)$. Isto mostra que $u \in H^1(\mathbb{R})$ é um minimizante para c_p, e além disso, $u_k \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, pois a norma $\|\cdot\|_a$ é equivalente a norma de Sobolev. ■

Observe que se $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ é $\mathbb{Z}^N$-periódica, então $V = V_\infty$, caso exista o limite. De fato, seja $T > 0$ seu período, e suponha por absurdo que V não é constante, então existem $x, y \in \mathbb{R}^N$, tais que $V(x) \neq V(y)$. Definindo as sequências $x_n = x + ne_N T$ e $y_n = x + ne_N T$, temos que $|x_n| \to \infty$ e $|y_n| \to \infty$, entretanto, uma vez que $V(x_n) = V(x)$ e $V(y_n) = V(y)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $V(x) = \lim_{n\to\infty} V(x_n) = V_\infty = \lim_{n\to\infty} V(y_n) = V(y)$, uma contradição.

Proposição 3.10. *Dado $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, com $\inf_{\mathbb{R}^N} V > 0$, suponha que exista o limite $V_\infty := \lim_{|y|\to\infty} V(y)$ e que*

$$V(x) > V_\infty := \lim_{|y|\to\infty} V(y), \ \forall x \in \mathbb{R}^N, \tag{3.80}$$

em quase todo ponto de $\mathbb{R}^N$. Considere

$$c_p^\infty = \inf_{\|u\|_p = 1} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V_\infty |u|^2 \, dx.$$

Então $c_p = c_p^\infty$, e não existe minimizante para c_p.

Demonstração: De fato, se $V_\infty < V(x)$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V_\infty |u|^2 \, dx < \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)|u|^2 \, dx, \tag{3.81}$$

para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, logo $c_p^\infty \leq c_p$. Por outro lado, seja $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$ um minimizante para c_p^∞, dado pela Proposição 2.10, e tome $(y_k) \subset \mathbb{R}^N$ tal que $|y_k| \to \infty$. Pelo Lema 2.3, $w_k := w(\cdot - y_k) \rightharpoonup 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. De (3.80), dado $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$x \notin U_\varepsilon \Rightarrow V(x) < V_\infty + \varepsilon, \tag{3.82}$$

em quase todo ponto de $\mathbb{R}^N$, sendo $U_\varepsilon := B_R(0)$. Por outro lado, pelo Teorema de Rellich-Kondrachov,

$$\int_{U_\varepsilon} V(x)|w_k|^2 \, dx \to 0. \tag{3.83}$$

De fato, uma vez que $w_k \rightharpoonup 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, devemos ter $w_k \to 0$ em $L^p(U_\varepsilon)$ para $p \in [1, 2^*)$, em particular,

$$\|w_k\|^2_{L^2(U_\varepsilon)} \to 0. \tag{3.84}$$

Logo

$$\int_{U_\varepsilon} V(x)|w_k|^2\,dx \leq \|V\|_\infty \int_{U_\varepsilon} |w_k|^2\,dx \to 0,$$

o que prova (3.83). Pela definição de c_p^∞,

$$c_p^\infty \|u\|_p^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V_\infty |u|^2\,dx, \tag{3.85}$$

para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Por (3.83) e usando a definição de $a(\cdot,\cdot)$,

$$\begin{aligned}
\|w_k\|_a^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_k|^2 + V(x)|w_k|^2\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_k|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^N\setminus U_\varepsilon} V(x)|w_k|^2\,dx + \int_{U_\varepsilon} V(x)|w_k|^2\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_k|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^N\setminus U_\varepsilon} V(x)|w_k|^2\,dx + o(1),
\end{aligned}$$

agora, de (3.82), temos que

$$\|w_k\|_a^2 < \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_k|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^N\setminus U_\varepsilon} (V_\infty + \varepsilon)|w_k|^2\,dx + o(1),$$

e por (3.84),

$$\begin{aligned}
\|w_k\|_a^2 &< \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_k|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} (V_\infty + \varepsilon)|w_k|^2\,dx - \int_{U_\varepsilon} (V_\infty + \varepsilon)|w_k|^2\,dx + o(1) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_k|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} (V_\infty + \varepsilon)|w_k|^2\,dx + o(1).
\end{aligned}$$

Finalmente, pela desigualdade em (3.85), obtemos

$$\|w_k\|_a^2 < \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_k|^2 + V_\infty |w_k|^2\,dx + \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} w_k^2 dx + o(1).$$

Uma vez que ε é arbitrário, e usando mudança de variáveis, segue que

$$\begin{aligned}
c_p \leq \|w_k\|_a^2 &< \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_k|^2 + V_\infty |w_k|^2\,dx + o(1) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 + V_\infty |w|^2\,dx + o(1) \\
&= c_p^\infty + o(1)
\end{aligned}$$

tomando o limite em k, concluímos que $c_p \leq c_p^\infty$, e assim $c_p = c_p^\infty$. Se existir um minimizante $w_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ para (2.66) então por (3.81),

$$c_p = c_p^\infty < \|w_0\|_a^2 = c_p,$$

um absurdo. ■

3.8 Minimização por penalidade no infinito

O método de concentração de compacidade tratado neste trabalho também pode ser empregado para problemas de minimização com vínculo sujeitos a funções-peso no vínculo. Para uso posterior, necessitamos do seguinte resultado

Proposição 3.11. *Seja $b \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, e suponha que existe o limite $b_\infty = \lim_{k\to\infty} b(x)$. Sejam $(u_k), (w^{(n)})$ e $(y_k^{(n)})$ como no Corolário 2.3. Então, para $p \in (2, 2^*)$, e $y \in G$, temos que*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u_k(\cdot + y)|^p \, dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|w^{(1)}(\cdot + y)|^p \, dx + \sum_{n\geq 2} \int_{\mathbb{R}^N} b_\infty |w^{(n)}|^p \, dx, \quad (3.86)$$

sendo esta convergência uniforme em $y \in G$.

Demonstração: Uma vez que considerarmos o lado esquerdo de (3.86) como sendo $\int_{\mathbb{R}^N} b(\cdot - y)|u_k|^p \, dx$, devido a convergência de b, podemos reduzir a demonstração ao caso em que $y = 0$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $u_k = \sum_{n\in\mathbb{N}} w^{(n)}(\cdot - y_k^{(n)})$. Já que a série é absolutamente convergente e $u \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx$ é contínua, é suficiente provar a proposição como se a soma tivesse uma quantidade finita de termos. Por densidade de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, uma vez que $|y_k^{(n)} - y_k^{(m)}| \to \infty$, para $m \neq n$, $m, n \in \mathbb{N}_0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, de modo que para $k \geq k_0$, as funções $w^{(n)}(\cdot - y_k^{(n)})$ possuem suporte disjunto. Neste caso,

$$\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u_k|^p \, dx = \sum_{n\geq 1} \int_{\mathbb{R}^N} b(\cdot + y_k^{(n)})|w^{(n)}|^p \, dx$$
$$\to \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|w^{(1)}|^p \, dx + \sum_{n\geq 2} \int_{\mathbb{R}^N} b_\infty |w^{(n)}|^p \, dx,$$

o que prova o resultado. ■

Proposição 3.12. *Sejam T, um grupo finito de transformações ortogonais ($T < O(N)$, $\#T = m$) com $\tau - id$ bijeção para todo $\tau \in T \setminus \{id\}$ e, $b \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ com assíntota positiva no infinito, ou seja,*

$$\lim_{|x|\to\infty} b(x) := b_\infty > 0.$$

Suponha que b é simétrica com respeito a T, isto é, $b \circ \tau = b$ para todo $\tau \in T$ e seja $H_T = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N); u \circ \tau = u$ para todo $\tau \in T\}$. Se

$$b(x) > m^{1-\frac{p}{2}} b_\infty, \tag{3.87}$$

q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, então o problema

$$c_{p,b} := \inf_{u \in H_T; \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u(x)|^p dx = 1} \|u\|^2, \quad p \in (2, 2^*),$$

admite um minimizante.

Demonstração: Primeiramente, mostraremos que

$$c_{p,\infty} \geq m^{\frac{2}{p}-1} c_{p,b}, \tag{3.88}$$

onde

$$c_{p,\infty} := \inf_{u \in H^1(\mathbb{R}^N); \int_{\mathbb{R}^N} b_\infty |u|^p = 1} \|u\|^2.$$

Considere

$$c^O_{p,b} := \inf_{u \in H^1_{O(N)}; \int_{\mathbb{R}^N} b_\infty |u|^p dx \geq 1} \|u\|^2.$$

Como $H^1_{O(N)} = H^1_{rad}$, pela Simetrização de Schwarz, dado $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ com $\|u\|_p = 1$, existe $u^* \in H_{O(N)}$ tal que $\|u^*\| \leq \|u\|$ e $\|u^*\|_p = \|u\|_p = 1$. Assim, $c^O_{p,b} \leq c_{p,\infty}$. Já que, por definição, $c^O_{p,b} \geq c_{p,\infty}$, devemos ter,

$$c_{p,\infty} = c^O_{p,b}. \tag{3.89}$$

Uma vez que $T \subset O(N)$, temos que $H^1_{O(N)} \subset H_T$, consequentemente,

$$c^O_{p,b} \geq \inf_{u \in H_T: \int_{\mathbb{R}^N} b_\infty |u|^p dx \geq 1} \|u\|^2. \tag{3.90}$$

Por (3.87), $b_\infty |u|^p < m^{p/2-1} b(x)|u|^p$ para todo $u \in H^1(\mathbb{R})$. Assim,

$$\{u \in H_T; b_\infty |u|^p \geq 1\} \subset \{u \in H_T : m^{p/2-1} b(x)|u|^p \geq 1\},$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned} \inf_{u \in H_T; \int_{\mathbb{R}^N} b_\infty |u|^p dx \geq 1} \|u\|^2 &\geq \inf_{u \in H_T; \int_{\mathbb{R}^N} m^{p/2-1} b(x)|u|^p dx \geq 1} \|u\|^2 \\ &= m^{2/p-1} \inf_{u \in H_T; \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx \geq 1} \|u\|^2 = m^{2/p-1} c_{p,b}. \end{aligned} \tag{3.91}$$

Onde a última identidade segue observando-se que se

$$u \in \{u \in H_T; \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx \geq 1\},$$

então

$$\int_{\mathbb{R}^N} m^{p/2-1} b(x)|\lambda u|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} m^{p/2-1}\lambda^p b(x)|u|^p \geq 1,$$

para $m^{p/2-1}\lambda^p = 1$, isto é, $\lambda u \in \{u \in H_T; \int_{\mathbb{R}^N} m^{p/2-1} b(x)|u|^p dx \geq 1\}$ e reciprocamente. Portanto

$$\lambda\{u \in H_T; \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx \geq 1\} = \{u \in H_T; \int_{\mathbb{R}^N} m^{p/2-1} b(x)|\lambda u|^p dx \geq 1\}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\inf_{u \in H_T; \int_{\mathbb{R}^N} m^{p/2-1} b(x)|u|^p dx \geq 1} \|u\|^2 \\ &\qquad = \inf_{u \in H_T; \int_{\mathbb{R}^N} m^{p/2-1} b(x)|u|^p dx \geq 1} \|\lambda u\|^2 = \lambda^2 \inf_{u \in H_T; \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx \geq 1} \|u\|^2. \end{aligned}$$

A afirmação (3.88) segue por (3.89), (3.90) e (3.91). Dada $(u_k) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ uma sequência minimizante para $c_{p,b}$, ou seja, $\|u_k\|^2 \to c_{p,b}$ e $\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u_k|^p dx = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, considere as sequências $(w^{(n)}) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ e $(y_k^{(n)}) \subset G = \mathbb{R}^N$ dadas pelo Corolário 2.3.

Note que

$$u_k(\cdot + \tau y_k^{(n)}) = u_k(\tau \cdot + y_k^{(n)}) \rightharpoonup w^{(n)} \circ \tau^{-1},$$

em $H^1(\mathbb{R}^N)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Além disso, dados $\tau, \tilde{\tau} \in T$ com $\tau \neq \tilde{\tau}$, como $\tilde{\tau}^{-1}\tau \in T$, devemos ter $\tilde{\tau}^{-1}\tau - id$ invertível, dessa forma, existe $\delta > 0$ tal que $|(\tilde{\tau}^{-1}\tau - id)x| \geq \delta|x|$. Assim,

$$\begin{aligned} |\tau y_k^{(n)} - \tilde{\tau} y_k^{(n)}| &= |(\tilde{\tau}^{-1}\tau y_k^{(n)} - y_k^{(n)}| \\ &= |\left(\tilde{\tau}^{-1}\tau - id\right) y_k^{(n)}|, \\ &\geq \delta |y_k^{(n)}|, \end{aligned}$$

em particular, $|\tau y_k^{(n)} - \tilde{\tau} y_k^{(n)}| \to \infty$ para $n > 1$. Podemos, portanto, reescrever (2.58) como

$$u_k - w^{(1)} - \sum_{\substack{n>1 \\ \tau \in T}} w^{(n)} \circ \tau^{-1}(\cdot - \tau y_k^{(n)}) \xrightarrow{D} 0. \tag{3.92}$$

Por (2.57), temos que

$$\|w^{(1)}\|^2 + m \sum_{n>1} \|w^{(n)}\|^2 \leq c_{p,b}. \tag{3.93}$$

Tomando $F(x,s) = b(x)|s|^p$ e $F_\infty(x,s) = b_\infty|s|^p$ na Proposição 3.11 obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|w^{(1)}|^p dx + m \sum_{n>1} \int_{\mathbb{R}^N} b_\infty |w^{(n)}| dx \geq \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u_k|^p dx = 1. \tag{3.94}$$

Usando a hipótese (3.87) no segundo termo de (3.94), concluímos

$$\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|w^{(1)}|^p dx + m^{p/2} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|w^{(n)}|^p dx \geq 1.$$

Denote $t_1 = \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|w^{(1)}|^p dx$, $\theta_n = \int_{\mathbb{R}^N} b_\infty |w^{(n)}|^p dx$ e $t_n = m\theta_n$, quando $n \in \mathbb{N}_0$, com $n > 1$. De (3.87) segue que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} t_n \geq 1. \tag{3.95}$$

Por outro lado, da definição de $c_{p,b}$ e de $c_{p,\infty}$, temos que $\|w^{(1)}\|^2 \geq c_{p,b} t_1^{2/p}$ e $\|w^{(n)}\|^2 \geq c_{p,\infty}\theta_n^{2/p}$, para $n \in \mathbb{N}_0$, $n > 1$. Logo

$$c_{p,b} t_1^{2/p} + m c_{p,\infty} \sum_{\substack{n>1 \\ n\in\mathbb{N}_0}} \theta_n^{2/p} \leq \|w^{(1)}\|^2 + m \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \|w(n)\|^2 \leq c_{p,b}.$$

Substituindo (3.88) no segundo termo da expressão anterior e usando $\theta_n^{2/p} = t_n^{2/p} m^{-2/p}$ temos que

$$\begin{aligned} c_{p,b} &\geq c_{p,b} t_1^{2/p} + m(m^{2/p-1}) c_{p,b} \sum_{n>1} \theta_n^{2/p} \\ &= c_{p,b} t_1^{2/p} + m^{2/p} c_{p,b} \sum_{n>1} \theta_n^{2/p} \\ &= c_{p,b} t_1^{2/p} + c_{p,b} \sum_{n>1} t_n^{2/p}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} t_n^{2/p} \leq 1. \tag{3.96}$$

Por (3.95) e (3.96), uma vez que $2/p < 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $t_{n_0} = 1$ e $t_n = 0$, para $n \neq n_0$. Por (3.94) devemos ter necessariamente $n_0 = 1$ assim, da definição de t_1, $c_{p,b} \leq \|w^{(1)}\|^2$. Além disso, $\|w^{(1)}\|^2 \leq \liminf_k \|u_k\|^2 = c_{p,b}$. Portanto, $w^{(1)}$ é um minimizante para $c_{p,b}$. ■

Consideramos no próximo resultado um problema análogo ao da Proposição 3.12, com $T = \{id\}$. Entretanto exigimos uma condição de penalidade no peso, relacionado com uma medida de probabilidade μ (isto é, $\mu(\mathbb{R}^N) = 1$).

Teorema 3.7. *Suponha que $b \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $b_\infty := \lim_{|x|\to\infty} b(x) > 0$, e que existe uma medida de Borel μ sobre $\mathbb{R}^N$, com $\mu(\mathbb{R}^N) = 1$, tal que*

$$b_\mu(x) := \int_{\mathbb{R}^N} b(x+y)\, d\mu(y) > b_\infty, \tag{3.97}$$

em quase todo ponto de $\mathbb{R}^N$. Então existe uma solução fraca positiva para a equação

$$-\Delta u + u = b(x)u^{p-1}, \tag{3.98}$$

todo $p \in (2, 2^*)$.

Observe que dada $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, com $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi\, dx = 1$ a medida de Borel $\mu(B) := \int_B \varphi\, dx$ é tal que $\mu(\mathbb{R}^N) = 1$.

Demonstração: Sejam

$$c_b = \sup_{\|u\|^2=1} \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p\, dx \quad \text{e} \quad c_\infty = \sup_{\|u\|^2=1} \int_{\mathbb{R}^N} b_\infty |u|^p\, dx.$$

Note que c_b e c_∞ estão bem definidos (são finitos). De fato, dado $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, com $\|u\| = 1$, pelo Teorema da Imersão de Sobolev existe $C > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p\, dx \le b_\infty \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p\, dx \le b_\infty C\|u\|^p = Cb_\infty.$$

Vamos mostrar que

$$c_\infty = b_\infty c_p^{-p/2}, \tag{3.99}$$

onde c_p é dado por (2.66). Assim um minimizante de (2.66) com $V \equiv 1$ é, a menos de constante multiplicativa, um maximizante para c_∞, o qual denotado por $w^{(\infty)}$. Com efeito, supondo (3.99), se $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é um minimizante para c_p, então

$$c_\infty = b_\infty(\|w\|^2)^{-p/2} = b_\infty \frac{1}{\|w\|^p} = \int_{\mathbb{R}^N} b_\infty \left|\frac{w}{\|w\|}\right|^p dx.$$

Ou seja, $(1/\|w\|)\, w$ é um maximizante de c_∞, já que $\|w/\|w\|\|^2 = 1$. Para provar (3.99), considere (w_k) uma sequência maximizante de c_∞, ou seja, $b_\infty\|w_k\|_p^p \to c_\infty$ e $\|w_k\| = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim, $\|w_k\| \to (c_\infty/b_\infty)^{1/p}$. Tome $\tilde{w}_k = w_k/\|w_k\|_p$. Então $\|\tilde{w}_k\|_p = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, consequentemente $c_p \le \|\tilde{w}_k\|^2 = 1/\|w_k\|_p^2$, e tomando o limite, temos que

$$\frac{b_\infty}{c_p^{p/2}} \ge c_\infty. \tag{3.100}$$

Por outro lado, considere $(\bar{u}_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ uma sequência minimizante para c_p, isto é, $\|\bar{u}_k\|^2 \to c_p$ e $\|\bar{u}_k\|_p = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, seja $\tilde{u}_k = \bar{u}_k/\|\bar{u}\|$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Então $c_\infty \geq b_\infty \|\tilde{u}_k\|_p^p = b_\infty/\|\bar{u}_k\|^p \to b_\infty/c_p^{p/2}$, portanto

$$c_\infty \geq \frac{b_\infty}{c_p^{p/2}}. \tag{3.101}$$

Desta forma, por (3.100) e (3.101), concluímos que $c_\infty = b_\infty c^{-p/2}$.

Seja $(u_k) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ uma sequência maximizante para c_b, assim, $\|u_k\| = 1$ pra todo $k \in \mathbb{N}$, e $\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u_k|^p dx \to c_b$. Como $(|u_k|)$ também é sequência maximizante, vamos supor sem perda de generalidade que $u_k \geq 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Já que (u_k) é limitada, podemos considerar uma subsequência de (u_k), e sequências, $(w^{(n)}) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ e $(y_k^{(n)}) \subset G = \mathbb{R}^N$, $n \in \mathbb{N}_0$, dadas pelo Corolário 2.3. Seja $(y_k) \subset \mathbb{R}^N$ com $|y_k| \to \infty$, e denote $t^2 = \sum_{n>1} \|w^{(n)}\|^2$. Agora defina

$$v_k = w^{(1)} + tw^{(\infty)}(\cdot - y_k).$$

Usando a definição de v_k, o Lema 2.3, e o fato que $\|w^{(\infty)}\| = 1$, temos

$$\begin{aligned}
\|v_k\|^2 &= (w^{(1)} + tw^{(\infty)}(\cdot - y_k), w^{(1)} + tw^{(\infty)}(\cdot - y_k)) \\
&= \|w^{(1)}\|^2 + 2t(w^{(1)}, w^{(\infty)}(\cdot - y_k)) + t^2\|w^{(\infty)}\|^2 \\
&\to \|w^{(1)}\| + t^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \|w^{(n)}\| \leq \limsup_k \|u_k\|^2 = 1.
\end{aligned}$$

Tomando $F(x,s) = b(x)|s|^p$ e $F_\infty(x,s) = b_\infty|s|^p$ na Proposição 3.11, obtemos

$$c_b = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u_k|^p\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|w^{(1)}|^p\, dx + \sum_{n>1} \int_{\mathbb{R}^N} b_\infty |w^{(n)}|^p\, dx. \tag{3.102}$$

Sejam $\tilde{w}^{(1)} = w^{(1)}$, $\tilde{w}^{(2)} = tw^{(\infty)}$, $\tilde{y}^{(1)} = 0$ e $\tilde{y}^{(2)} = y_k$. Vamos mostrar que estas sequências satisfazem as conclusões do Corolário 2.3. Com efeito,

- $v_k(\cdot + \tilde{y}_k^{(1)}) = v_k \rightharpoonup w^{(1)} = \tilde{w}^{(1)}$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$;
- $|\tilde{y}^{(1)} - \tilde{y}^{(2)}| = |y_k| \to \infty$;
- $v_k - \tilde{w}^{(1)}(\cdot - \tilde{y}_k^{(1)}) - \tilde{w}^2(\cdot - \tilde{y}_k^{(1)}) = v_k - w^{(1)} - tw^{(\infty)}(\cdot - y_k) = 0.$

Lembrando que, pela demonstração do Teorema 2.1, (2.57) segue de (2.55) e (2.56). Logo, para essas sequências, podemos aplicar a Proposição 3.11 para obter

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|v_k|^p = \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|w^{(1)}|^p + \int_{\mathbb{R}^N} b_\infty |tw^\infty|^p\, dx. \tag{3.103}$$

Vamos provar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|w^{(1)}|^p\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} b_\infty|w^{(n)}|^p\,dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|w^{(1)}|^p\,dx + \sum_{n>1}\int_{\mathbb{R}^N} b_\infty|w^{(n)}|^p\,dx \quad (3.104)$$

De fato, usando a definição de t, obtemos

$$b_\infty\|tw^\infty\|_p^p = (t^2)^{p/2}b_\infty\|w^{(\infty)}\|_p^p = \left(\sum_{n>1}\|w^{(n)}\|^2\right)^{p/2} b_\infty\|w^{(\infty)}\|_p^p. \quad (3.105)$$

Como $w^{(n)}/\|w^{(n)}\|$, $n>1$, é admissível para c_∞, e $w^{(\infty)}$ é maximizante temos que

$$b_\infty\|w^{(\infty)}\|_p^p \geq b_\infty\left\|\frac{w^{(n)}}{\|w^{(n)}\|}\right\|_p^p = b_\infty\frac{\|w^{(n)}\|_p^p}{\|w^{(n)}\|^p},$$

elevando a $2/p$, segue que

$$\|w^{(n)}\|^2 \geq \frac{\|w^{(n)}\|_p^2}{\|w^{(\infty)}\|_p^2},$$

substituindo em (3.105),

$$\left(\sum_{n>1}\|w^{(n)}\|^2\right)^{p/2} b_\infty\|w^{(\infty)}\|_p^p \geq \left(\sum_{n>1}\frac{\|w^{(n)}\|_p^2}{\|w^\infty\|_p^2}\|w^\infty\|_p^2\right) b_\infty = \left(\sum_{n>1}\|w^{(n)}\|_p^2\right)^{p/2} b_\infty. \quad (3.106)$$

Uma vez que, $(\sum b_j)^q \geq \sum b_j^q$, para qualquer $b_j \geq 0$, com $(b_j) \in l^q$, $q>1$, usando (3.106), temos que

$$\left(\sum_{n>1}\|w^{(n)}\|_p^2\right)^{p/2} \geq \sum_{n>1}\|w^{(n)}\|_p. \quad (3.107)$$

Finalmente, substituindo (3.107) em (3.105), obtemos (3.104). Por outro lado, usando (3.102) e (3.103) na desigualdade (3.107), temos

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|v_k|^p\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|w^{(1)}|^p + b_\infty|tw^{(\infty)}|^p\,dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|w^{(1)}|^p\,dx + \sum_{n>1}\int_{\mathbb{R}^N} b_\infty|w^{(n)}|^p\,dx = c_p. \quad (3.108)$$

Agora, considere $\bar{v}_k = v_k/\|v_k\|$. Como $\|v_k\|^2 \to L \leq 1$, por (3.108) segue que,

$$\begin{aligned} c_b &\geq \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|\bar{v}_k|^p\,dx = \frac{1}{\|v_k\|^p}\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|v_k|^p\,dx \\ &\to \frac{1}{L^{p/2}}\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|w^{(1)}|^p + b_\infty|tw^{(\infty)}|\,dx \geq \frac{c_b}{L^{p/2}} \geq c_b, \end{aligned}$$

assim, $\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|\bar{v}_k|^p\,dx = c_b$. Desta forma, vamos supor, sem perda de generalidade, que (v_k) é admissível, isto é, $\|v_k\|^2 = 1$. Portanto de (3.108), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|w^{(1)}|^p\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} b_\infty |tw^{(\infty)}|^p\,dx = c_b. \tag{3.109}$$

Vamos mostrar que $w^{(1)} \neq 0$, para tanto, note inicialmente que $c_b > 0$. De fato, como $\lim_{|x|\to\infty} b_\infty > 0$ existe $R > 0$ tal que $b(x) > b_\infty/2$, desde que $|x| > R$. Seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))$ com $\|\varphi\| = 1$, logo

$$c_b \geq \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|\varphi|^p\,dx = \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} b(x)|\varphi|^p\,dx \geq \frac{b_\infty}{2}\int_{\mathbb{R}\setminus B_R(0)} |\varphi|^p\,dx = \frac{b_\infty}{2}\|\varphi\|_p^p > 0.$$

Assim, $c_b > 0$. Disto, temos que $w^{(1)} \neq 0$. De fato, se $t = 0$, por (3.109), $\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|w^{(1)}|^p\,dx = c_b$. Portanto, se $w^{(1)} = 0$, então $c_b = 0$, um absurdo, logo $w^{(1)} \neq 0$. Suponha agora que $t > 0$ e considere as sequências

- $\tilde{v}_k := v_k(\cdot + y_k - y) = w^{(1)}(\cdot + y_k - y) + tw^{(\infty)}(\cdot - y)$;
- $\tilde{w}^{(1)} = tw^{(\infty)}(\cdot - y)$ e $\tilde{w}^{(2)} = w^{(1)}(\cdot - y)$;
- $y_k^{(1)} = 0$ e $\tilde{y}_k^{(2)} = -y_k$.

Então, para estas sequências, as conclusões do Corolário 2.3 são satisfeitas. Com efeito,

- $\tilde{v}_k(\cdot + \tilde{y}_k^{(1)}) = v_k \rightharpoonup tw^{(\infty)}(-y) = \tilde{w}^{(1)}$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, já que $|y_k - y| \to \infty$ devido a desigualdade triangular.
- $$\begin{aligned}\tilde{v}_k(\cdot + \tilde{y}_k^{(2)}) &= v_k(\cdot + y_k - y - y_k) = v_k(\cdot - y)\\ &= w^{(1)}(\cdot - y) + tw^{(\infty)}(\cdot - y - y_k) \rightharpoonup w^{(1)}(\cdot - y) = \tilde{w}^{(2)}\end{aligned}$$
  em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Logo, $\tilde{v}_k(\cdot + \tilde{y}^{(2)}) \rightharpoonup \tilde{w}^{(2)}$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$;
- Como $\tilde{w}^{(1)}(\cdot - \tilde{y}_k^{(1)}) = tw^{(\infty)}(\cdot - y)$ e $\tilde{w}_2(\cdot - \tilde{y}_k^{(2)}) = w^{(1)}(\cdot + y_k - y)$, temos que
  $$\tilde{v}_k - \tilde{w}^{(1)}(\cdot - \tilde{y}_k^{(1)}) - \tilde{w}^{(2)}(\cdot - \tilde{y}_k^{(2)}) = 0,$$
  consequentemente, vale (2.58).

Portanto, tomando $F(x,s) = b(x)|s|^p$ e $F_\infty = b_\infty|s^p|$ na Proposição 3.11, temos que,

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|\tilde{v}|^p\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|\tilde{w}^{(1)}|^p\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} b_\infty|\tilde{w}^{(2)}|^p\,dx,$$

ou equivalentemente, usando o Teorema da Mudança de Variáveis, obtemos

$$\lim_{k\to\infty}\int b(x)|v_k(\cdot - y_k - y)|^p\,dx = \int b(x)|tw^{(\infty)}|^p\,dx + \int b_\infty|w^{(1)}|^p\,dx. \tag{3.110}$$

Como $\|v_k(\cdot + y_k - y)\| = \|v_k\| = 1$, por (3.110), segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|tw^{(\infty)}(\cdot - y)|^p\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} b_\infty|w^{(1)}|^p\,dx \le c_b. \tag{3.111}$$

Substituindo (3.109) em (3.111) temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|tw^{(\infty)}(\cdot - y)|^p\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} b_\infty|w^{(1)}|^p\,dx \le \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|w^{(1)}|^p\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} b_\infty|tw^{(\infty)}|^p\,dx.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}(b(x)-b_\infty)|w^{(1)}|^p\,dx &\ge \int_{\mathbb{R}^N}(b(x)-b_\infty)|tw^{(\infty)}(\cdot - y)|^p\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^N}(b(\cdot + y)-b_\infty)|tw^{(\infty)}|^p\,dx.\end{aligned} \tag{3.112}$$

Integrando o lado esquerdo de (3.112) com respeito a medida μ, e usando que $\mu(\mathbb{R}^N) = 1$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^N}(b(x)-b_\infty)|w^{(1)}|^p\ dx\right)d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^N}(b(x)-b_\infty)|w^{(1)}|^p dx. \tag{3.113}$$

Agora, integrando o lado direito de (3.112), com respeito a medida μ, e usando o Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^N}(b(\cdot + y)-b_\infty)|tw^{(\infty)}|^p\ dx\right)d\mu(y) =\\ &\quad= \int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^N}(b(\cdot + y)-b_\infty)|tw^{(\infty)}|^p\,d\mu(y)\right)dx\\ &\quad= \int_{\mathbb{R}^N}\left(|tw^{(\infty)}|^p\int_{\mathbb{R}^N}b(\cdot + y)\,d\mu(y) - b_\infty|tw^{(\infty)}|\int_{\mathbb{R}^N}d\mu(y)\right)dx\\ &\quad= \int_{\mathbb{R}^N} b_\mu|tw^{(\infty)}|^p - b_\infty|tw^{(\infty)}|^p\,dx\\ &\quad= \int_{\mathbb{R}^N}(b_\mu - b_\infty)|tw^{(\infty)}|^p\,dx.\end{aligned} \tag{3.114}$$

Pela hipótese (3.97), temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N}(b(x)-b_\infty)|w^{(1)}|^p dx \ge \int_{\mathbb{R}^N}(b_\mu - b_\infty)|tw^{(\infty)}|^p\,dx > 0,$$

pois $\|tw^{(\infty)}\|_p^p > 0$. Logo, $w^{(1)} \ne 0$.

Vamos provar que $w^{(1)}$ é solução fraca de (3.98). Suponha por absurdo que $w^{(1)}$ não é solução fraca de (3.98), então existe $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $(w^{(1)}, v) < 0$ e $\delta = p\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|w^{(1)}|^{p-1}dx > 0$. Por densidade podemos supor $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Defina $u_k^s := v_k + sv$, com $s > 0$, e $\varepsilon_s := -(2s(v, w^{(1)}) + s^2\|v\|^2)$. Como $(v, w^{(1)}) < 0$, existe $s > 0$ suficientemente pequeno de modo que $\varepsilon_s > 0$. Usando a definição de v_k, e que $\|w^{(\infty)}\|^2 = 1$, temos que

$$
\begin{aligned}
\|u_k^s\|^2 &= \|w^{(1)} + tw^{(\infty)}(\cdot - y_k) + sv\|^2 \\
&= \|sv + w^{(1)}\|^2 + 2(w^{(1)} + sv, tw^{(\infty)}(\cdot - y_k)) + \|tw^{(\infty)}\|^2 \\
&= \|w^{(1)}\|^2 + 2s(v, w^{(1)}) + s^2\|v\| + t^2\|w^{(\infty)}\| + 2t(w^{(1)} + sv, w^{(\infty)}(\cdot - y_k)).
\end{aligned}
$$

Já que $|y_k| \to \infty$, pelo Lema 2.3, segue que,

$$
\begin{aligned}
\|u_k^s\| &= \|w^{(1)}\| - \varepsilon_s + t^2 + o(1) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \|w^{(n)}\|^2 - \varepsilon_s + o(1) \le 1 - \varepsilon_s + o(1).
\end{aligned}
$$

Portanto, dado $s > 0$ suficientemente pequeno, existe $k_s \in \mathbb{N}$ tal que $-\varepsilon_s + o(1) \le 0$, para $k \ge k_s$. Ou seja, $\|u_k^s\| \le 1$. Seja $G(\tau) = |\tau|^p$ e $g(\tau) = G'(\tau) = p|\tau|^{p-2}\tau$. Então, para $k \ge k_s$, temos que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u_k^s|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^N} b(x)(G(v_k) + G(u_k^s) - G(v_k))\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} b(x)G(v_k) + b(x)(G(v_k + sv) - G(v_k))\, dx
\end{aligned}
$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$
\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u_k^s|^p\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} b(x)G(v_k) + b(x)\int_0^s \frac{d}{d\tau}(G(v_k + \tau v))\, d\tau dx,
$$

usando a regra da cadeia, temos

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u_k^s|^p\, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} b(x)G(v_k) + \left(b(x)\int_0^s g(v_k + \tau v)v\, d\tau\right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|w^{(1)} + tw^{(\infty)}(\cdot - y_k)|^p\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_0^s b(x)g(v_k + \tau v)\, d\tau\right) dx,
\end{aligned}
$$

pelo Teorema de Fubini,

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u_k^s|^p\, dx \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|w^{(1)} + tw^{(\infty)}(\cdot - y_k)|^p\, dx + \int_0^s \int_{\operatorname{supp} v} b(x)g(v_k + \tau v)v\, dx d\tau. \quad (3.115)
\end{aligned}
$$

Afirmamos que

$$\int_{\operatorname{supp} v} b(x)g(v_k+\tau v)v - b(x)g(w^{(1)}+\tau v)v\,dx \to 0 \text{ quando } k\to\infty, \tag{3.116}$$

para cada $\tau \in (0,s)$. De fato, dado $\tau\in(0,s)$, escreva $u_k^\tau = v_k+\tau v$ e $u^\tau = w^{(1)}+\tau v$. Então $u_k^\tau \rightharpoonup u^\tau$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Como $\operatorname{supp} v$ é compacto, pelo Teorema de Rellich-Kondrachov, temos que $u_k^\tau \to u^\tau$ em $L^p(\operatorname{supp} v)$. Logo, passando a uma subsequência (se necessário) $u_k^\tau(x)\to u^\tau(x)$ e existe $h\in L^p(\operatorname{supp} v)$ tal que $|u_k^\tau|$, $|u^\tau|\le h$ em quase todo ponto de $\operatorname{supp} v$. Por outro lado, note que

- $b(x)v(|u_k^\tau(x)|^{p-2}u_k^\tau(x) - |u^\tau|^{p-2}u^\tau)\to 0$ em quase todo ponto de $\operatorname{supp} v$;
- $$\begin{aligned} |b(x)v(|u_k^\tau|^{p-2}u_k^\tau - |u^\tau|^{p-2}u^\tau)| &\le \|b\|_\infty\|v\|_\infty(|u_k^\tau|^{p-1}+|u^\tau|^{p-1})\\ &\le 2\|b\|_\infty\|v\|_\infty h^{p-1}\\ &\le (1/\bar{q})(2\|b\|_\infty\|v\|_\infty)^{\bar{q}} + h^p/\bar{p}\in L^1(\operatorname{supp} v), \end{aligned}$$

  onde, usamos a desigualdade de Young, com $\bar{p}=p/(p-1)$ e $\bar{q}=p$ é o seu expoente conjugado.

Deste modo, podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para obter a afirmação (3.116). Como (v_k) é uma sequência maximizante, por (3.116) e (3.115), temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u_s^\tau|^p\,dx &= c_b + o(1) + \int_0^s\left(\int_{\operatorname{supp} v} b(x)g(v_k+\tau v)v\,dx\right)d\tau\\ &= c_b+o(1)+\int_0^s\int_{\operatorname{supp} v} b(x)g(w^{(1)}+\tau v)v\,dxd\tau + so(1), \end{aligned} \tag{3.117}$$

Agora, usando estimativas análogas as anteriores e levando em consideração que

$$b(x)g(w^{(1)}+\tau v)v \to b(x)g(w^{(1)}) \text{ quando } \tau\to 0 \text{ em quase todo ponto de } \operatorname{supp} v,$$

obtemos

$$c_b+o(1)+\int_0^s\int_{\operatorname{supp} v} b(x)g(w^{(1)}+\tau v)v\,dxd\tau \ge c_b+\frac{s\delta}{2}+(1+s)o(1), \tag{3.118}$$

pois, dado $\varepsilon=\delta/2$, existe $s_0>0$ tal que $\delta/2 < \int_{\operatorname{supp} v} b(x)g(w^{(1)}+\tau v)v\,dx$, para $\tau\in(0,s_0)$, sendo s_0 suficientemente pequeno de modo que continue valendo $\|u_k^s\|\le 1-\varepsilon_s+o(1)$, $s<s_0$. Para $s<s_0$ fixado, existe $k_s\in\mathbb{N}$ suficientemente grande (maior

que o anterior) de modo que $s\delta/2 + (1+s)o(1) > 0$. Logo $c_b + s\delta/2 + (1+s)o(1) > c_b$, substituindo em (3.118) e usando (3.117) temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u_k^s|^p\,dx > c_b,$$

uma contradição, pois sendo $\|u_k^s\| \le 1$, temos $\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u_k^s|^p\,dx \le c_b$, já que

$$c_b = \sup_{\|u\|\le 1} \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p\,dx.$$

Concluímos que $w^{(1)} \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é uma solução fraca de (3.98). ∎

Teorema 3.8. *Seja $b \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, com $b_\infty := \lim_{|x|\to\infty} b(x) > 0$, tal que*

$$b(x) < b_\infty,\ \ x \in \mathbb{R}^N, \tag{3.119}$$

então existe um conjunto finito $Y \subset \mathbb{Z}^N$ e uma solução fraca para

$$-\Delta u + u = b^Y(x)u^{p-1},\ \ u > 0, \tag{3.120}$$

onde b^Y é uma combinação convexa de funções $b(\cdot - y)$, $y \in Y$.

Demonstração: Dado $y \in \mathbb{Z}^N$ seja

$$\begin{array}{rccl} g_y: & H^1(\mathbb{R}^N) & \to & \mathbb{R} \\ & u & \mapsto & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} b(x-y)|u(x)|^p\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u(x+y)|^p\,dx. \end{array}$$

Afirmamos que $g_y \in C^1(H^1(\mathbb{R}^N))$. Com efeito, note inicialmente que

$$\int |u|^{p-1}|v|\,dx \le \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

onde usamos a Desigualdade de Hölder. Além disso a derivada de Gateaux é dada por $d_G g_y u \cdot v = \int_{\mathbb{R}^N} b(\cdot - y)|u|^{p-2}uv\,dx$. De fato, usando o Teorema do Valor Médio e o Teorema da Convergência de Lebesgue na estimava acima, segue que

$$\begin{aligned} &\left|\frac{g_y(u+tv) - g_y(v)}{t} - b(\cdot - y)|u|^{p-2}uvdx\right| \\ &\le \frac{1}{|t|}\int_{\mathbb{R}^N} |b(\cdot - y)|\,\big||u+tv|^p - |v|^p - |t||u|^{p-2}uv\big|\,dx \\ &\le \|b\|_\infty \int_{\mathbb{R}^N} \big||u+\xi tv|^{p-2}(u+\xi tv)|v| - |u|^{p-2}uv\big|\,dx \to 0, \end{aligned}$$

a continuidade segue da continuidade do Operador de Nemytskii (ver [15], página 10). Considere

$$c_b = \sup_{\|u\|^2 \leq 1} \inf_{y \in \mathbb{Z}^N} g_y(u). \tag{3.121}$$

Note que $\inf_{y\in\mathbb{Z}^N} g_y > -\infty$. De fato,

$$\begin{aligned}
g_y(u) &= \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u(x+y)|^p\,dx \\
&= \int_{B_r} b(x)|u(x+y)|^p\,dx + \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r} b(x)|u(x+y)|^p\,dx \\
&\geq \int_{B_r} b(x)|u(x+y)|^p\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{b_\infty}{2}|u(x+y)|^p\,dx \\
&\geq \inf_{B_r} b \int_{B_r} |u(x+y)|^p dx + \frac{b_\infty}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |u(x+y)|^p dx \\
&\geq \min\left\{\inf_{B_r} b, \frac{b_\infty}{2}\right\}\left(\int_{B_r} |u(x+y)|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u(x+y)|^p dx\right) \\
&= \min\left\{\inf_{B_r} b, \frac{b_\infty}{2}\right\}\|u\|_p^p,
\end{aligned}$$

para todo $y \in \mathbb{Z}^N$, onde $r > 0$ é tal que $b(x) > b_\infty/2$, desde que $|x| > r$.

Dado $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $u \neq 0$, temos

$$\lim_{|y|\to\infty} b(x-y)|u(x)|^p = b_\infty|u(x)|^p,$$

em quase todo ponto de $\mathbb{R}^N$. Além disso, pela hipótese (3.119),

$$b(x-y)|u(x)|^p < b_\infty|u(x)|^p.$$

Como $b_\infty|u|^p \in L^1(\mathbb{R}^N)$, segue pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\lim_{|y|\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} b(x-y)|u(x)|^p\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} b_\infty|u(x)|^p\,dx. \tag{3.122}$$

Ademais, pela continuidade de b e da hipótese (3.119), temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} b_\infty|u|^p\,dx &= \int_{\mathbb{R}^N} b_\infty|u(x+z)|^p\,dx \\
&> \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u(x+z)|^p\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} b(x-z)|u(x)|^p\,dx
\end{aligned} \tag{3.123}$$

Logo, por (3.122) e (3.123) obtemos

$$\lim_{|y|\to\infty} g_y(u) > \int_{\mathbb{R}^N} b(x-z)|u(x)|^p\,dx, \tag{3.124}$$

para todo $z \in \mathbb{Z}^N$. Denotando $L = \lim_{|y|\to\infty} g_y(u)$ e tomando $\varepsilon = L - g_{z_0}(u) > 0$, com $z_0 \in \mathbb{Z}^N$ fixado, obtemos $R = R(\varepsilon, z_0) > 0$ tal que $g_{z_0}(u) < g_y(u)$, desde que $y \notin B_R(0) \cap \mathbb{Z}^N$. Assim, se $g_y(u) \leq g_{z_0}(u)$ então $y \in B_R(0) \cap \mathbb{Z}^N$. Logo, o ínfimo na definição de c_b é atingido em um conjunto finito $Y(u) = B_R(0) \cap \mathbb{Z}^N$.

Por outro lado, como toda função definida em um espaço discreto é contínua o ínfimo de $g_y(u)$ é atingido sobre $\mathbb{Z}^N \setminus Y(u)$. Portanto, podemos definir

$$\delta(u) = \min_{y \in \mathbb{Z}^N \setminus Y(u)} g_y(u) - \min_{y \in \mathbb{Z}^N} g_y(u) > 0, \tag{3.125}$$

ademais, existe $y_0 \in \mathbb{Z}^N$ tal que $g_{y_0}(u) = \inf_{y \in \mathbb{Z}^N} g_y(u)$, e pela Imersão de Sobolev temos que

$$\inf_{y \in \mathbb{Z}^N} g_y(u) \leq b_\infty \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \, dx \leq b_\infty c \|u\|^p,$$

para algum $c > 0$. Logo c_b é finito. Além disso, $c_b > 0$. De fato, tome $R > 0$ suficientemente grande de modo que $b(x) > b_\infty/2$, para $|x| > R$. Seja $u_r \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo

$$u_r(x) = \begin{cases} c, & \text{se } x \in B_r \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}^N \setminus B_{r+1} \end{cases}$$

onde $B_r = B_r(0)$ com $r > R > 0$ e $c > 0$. Então

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u_r(x+y)|^p \, dx &= \int_{B_R} b(x)|u_r(x+y)|^p \, dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} b(x)|u_r(x+y)|^p \, dx \\
&\geq \left(-\inf_{B_R} b\right) |B_R| c^p + \frac{b_\infty}{2} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} |u_r(x+y)|^p \, dx \\
&= \left(-\inf_{B_R} b\right) |B_R| c^p + \frac{b_\infty}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |u_r(x+y)|^p \, dx \\
&\quad - \frac{b_\infty}{2} \int_{B_R} |u_r(x+y)|^p \, dx \\
&\geq \left(-\inf_{B_R} b\right) |B_R| c^p + \frac{b_\infty}{2} |B_r| c^p - \frac{b_\infty}{2} c^p |B_R|
\end{aligned}$$

Como $r > R > 0$ foi tomado de forma arbitrário, podemos escolhe-lo suficientemente grande de modo que $|B_r| > \left(\inf_{B_R} b + \frac{b_\infty}{2}\right) |B_R|$. Logo para esta escolha, $\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u(x+y)|^p \, dx > 0$.

Seja $(u_k) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ uma sequência maximizante para c_b, isto é, $\|u_k\|^2 \leq 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$, e $\inf_{y \in \mathbb{Z}^N} g_y(u_k) \to c_b$. Como $g_y(u_k) = g_y(|u_k|)$, podemos supor sem perda de generalidade que $u_k \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, considere

$y_k \in Y(u_k) \subset \mathbb{Z}^N$ tal que $g_{y_k}(u_k) = \inf_{y \in \mathbb{Z}^N} g_y(u_k)$. Então,

$$\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u_k(x+y)|^p \, dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u_k(x+y_k)|^p \, dx, \tag{3.126}$$

para todo $y \in \mathbb{Z}^N$.

Defina $v_k = u_k(\cdot + y_k)$. Então (v_k) é uma sequência maximizante para c_b. De fato,

$$g_0(v_k) = \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|v_k|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u_k(x+y_k)|^p \, dx = g_y(u_k) \to c_b.$$

Além disso, $\|v_k\|^2 = \|u_k\|^2 \leq 1$, devido a invariância da norma de Sobolev em $H^1(\mathbb{R}^N)$ sobre deslocamentos. Mais ainda, $0 \in Y(v_k)$ é tal que $g_0(b_k) = \inf_{y \in \mathbb{Z}^N} v_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, já que, $g_y(v_k) = g_{y_k+y}(u_k) \geq g_{y_k}(u_k) = g_0(v_k)$. Considere a subsequência de (v_k) e as sequências $(y_k^{(n)}) \subset \mathbb{Z} = G$, $w^{(n)} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$, com $n \in \mathbb{N}_0$, dadas pelo Corolário 2.3. Pelo Teorema de Rellich-Kondrachov, na subsequência, $v_k(x+y_k^{(n)}) \to w^{(n)}(x)$, em quase todo ponto de $\mathbb{R}^N$, para $n \in \mathbb{N}_0$. Desta forma, como $v_k \geq 0$, segue que $w^{(n)} \geq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$. Pela Proposição 3.11, tomando $F(x,s) = b(x)|s|^p$ e $F_\infty(x,s) = b_\infty |s|^p$, temos que

$$c_b = \lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|v_k|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|w^{(n)}|^p \, dx + \sum_{n>1} \int_{\mathbb{R}^N} b_\infty |w^{(1)}|^p \, dx. \tag{3.127}$$

Além disso, fixado $m \in \mathbb{N}_0$, considere as seguintes sequências

$$\tilde{v}_k = v_k(\cdot + y_k^{(m)}),$$

$$\tilde{y}_k^{(n)} = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 1, \\ y_k^{(n)} - y_k^{(m)}, & \text{se } n \notin \{1, m\}, \\ -y_k^{(m)}, & \text{se } n = m, \end{cases}$$

com

$$\tilde{w}^{(n)} = \begin{cases} w^{(m)}, & \text{se } n = 1, \\ w^{(n)}, & \text{se } n \notin \{1, m\}, \\ w^{(1)}, & \text{se } n = m. \end{cases}$$

Então para estas escolhas, as conclusões do Corolário 2.3 são satisfeitas. De fato,

- $\tilde{v}(\cdot + \tilde{y}_k^{(n)}) = v_k(\cdot + y_k^{(m)} + \tilde{y}_k^{(n)})$

$$= \begin{cases} v_k(\cdot + y_k^{(m)}) \rightharpoonup w^{(m)} = \tilde{w}^{(1)}, \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N), & \text{se } n = 1, \\ v_k(\cdot + y_k^{(n)}) \rightharpoonup w^{(n)} = \tilde{w}^{(n)}, \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N), & \text{se } n \notin \{1, m\}, \\ v_k(\cdot + y_k^{(1)}) \rightharpoonup w^{(1)} = \tilde{w}^{(m)}, \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N), & \text{se } n = m, \end{cases}$$

- Seja $n, l \in \mathbb{N}_0$, com $n \neq l$. Então

$$|\tilde{y}_k^{(n)} - \tilde{y}_k^{(l)}| = |y_k^{(n)}|,\ |y_k^{(l)}|, |y_k^{(m)}|,\ |y_k^{(n)} - y_k^{(l)}|,\ |y_k^{(n)} - y_k^{(m)}| \text{ ou } |y_k^{(l)} - y_k^{(m)}|.$$

Logo, $|\tilde{y}_k^{(n)} - \tilde{y}_k^{(l)}| \to \infty$ quando $k \to \infty$.

- $\tilde{v}_k - \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \tilde{w}^{(n)}(\cdot - \tilde{y}_k^{(n)}) = v_k(\cdot + y_k^{(m)}) - w^{(1)}(\cdot - y_k^{(1)} + y_k^{(m)})$

$$-w^{(m)}(\cdot - y^{(m)} + y_k^{(m)}) - \sum_{\substack{n>1\\ n\neq m}} w^{(n)}(-y_k^{(n)} + y_k^{(m)})$$

$$= v_k(\cdot + y_k^{(m)}) - \sum_{n\in\mathbb{N}_0} w^{(n)}(\cdot - y_k^{(n)} + y_k^{(m)}) \overset{D_{\mathbb{Z}^N}}{\rightharpoonup} 0,$$

pois $v_k - \sum_{n\in\mathbb{N}_0} w^{(n)}(\cdot - y_k^{(n)}) \overset{D_{\mathbb{Z}^N}}{\rightharpoonup} 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Note que pelo que foi feito acima, a conclusão do Corolário 2.3 ainda vale para a sequência $\tilde{v}_k(\cdot + z)$, $z \in \mathbb{Z}^N$, já que o operador $u \mapsto u(\cdot + z)$ é fracamente contínuo. Portanto aplicando a Proposição 3.11 (com $F(x,s) = b(x)|s|^p$), para esta escolha de sequência, obtemos

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|\tilde{v}(x+z)|^p\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|\tilde{w}^{(1)}(\cdot + z)|^p dx + \sum_{\substack{n>1\\ n\in\mathbb{N}_0}} \int_{\mathbb{R}^N} b_\infty |\tilde{w}^{(n)}(\cdot + z)|^p\,dx,$$

ou equivalentemente,

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|v_k(\cdot + y_k^{(m)} + z)|^p\,dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|w^{(m)}(\cdot + z)|^p dx + \sum_{\substack{n\neq m\\ n\in\mathbb{N}_0}} \int_{\mathbb{R}^N} b_\infty |w^{(n)}(\cdot + z)|^p\,dx. \quad (3.128)$$

Tomando o limite em (3.126) com $y = y_k + y_k^{(m)} + z$, e usando (3.128), juntamente com (3.127), temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|w^{(m)}(\cdot + z)|^p\,dx + \sum_{\substack{n\neq m\\ n\in\mathbb{N}_0}} \int_{\mathbb{R}^N} b_\infty |w^{(n)}|^p\,dx \geq$$
$$\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|w^{(1)}|^p\,dx + \sum_{\substack{n>1\\ n\in\mathbb{N}_0}} \int_{\mathbb{R}^N} b_\infty |w^{(n)}|^p\,dx = c_b. \quad (3.129)$$

Usando que

$$\sum_{\substack{n>1\\ n\in\mathbb{N}_0}} \int_{\mathbb{R}^N} b_\infty |w^{(n)}|^p\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} b_\infty |w^{(m)}|^p\,dx + \sum_{\substack{n>1\\ n\neq m}} \int_{\mathbb{R}^N} b_\infty |w^{(n)}|^p\,dx$$

e a igualdade,

$$\sum_{\substack{n\neq m\\ n\in\mathbb{N}_0}} \int_{\mathbb{R}^N} b_\infty |w^{(n)}|^p\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} b_\infty |w^{(1)}|^p dx + \sum_{\substack{n>1\\ n\neq m}} b_\infty |w^{(n)}|^p\,dx$$

em (3.129) obtemos, pela arbitrariedade de $m \in \mathbb{N}_0$ e $z \in \mathbb{Z}^N$, que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (b_\infty - b(x))|w^{(n)}(\cdot + y)|^p \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} (b_\infty - b(x))|w^{(1)}|^p dx, \tag{3.130}$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$ e $y \in \mathbb{Z}^N$.

De (3.130) segue que $w^{(1)} \neq 0$, pois caso contrário, teremos

$$\|(b_\infty - b(x))^{1/p} w^{(n)}(\cdot + y)\|_p^p = 0,$$

e consequentemente $(b_\infty - b(x))^{1/p} w^{(n)}(x + y) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, a menos de um conjunto de medida nula, logo pela hipótese (3.119), $w^{(n)} = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$, assim, por (3.127), $c_b = 0$, uma contradição, já que $c_b > 0$.

Seja $Y = Y(w^{(1)})$ tomando $n = 1$ em (3.130) vemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|w^{(1)}(\cdot + y)|^p \, dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|w^{(1)}|^p \, dx, \text{ para todo } y \in \mathbb{Z}^N.$$

Logo $\inf_{y \in \mathbb{Z}^N} g_y(w^{(1)}) = g_0(w^{(1)})$ e consequentemente $0 \in Y$. Sejam $p = \#Y$ e $C = \left\{\sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla g_{y_j}(w^{(1)}); \lambda_j \geq 0 \text{ para } j = 1, \ldots, p\right\}$ o cone gerado por $\{\nabla g_y(w^{(1)})\}_{y \in Y}$. Vamos mostrar que $w^{(1)} \in C$. Disto segue que $w^{(1)}$ é solução fraca de (3.120), com $b^Y \in C$. Suponha por absurdo que $w^{(1)} \notin C$. Então existe $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, com $\|\varphi\| = 1$, e $\varepsilon > 0$ tal que $(w^{(1)}, \varphi) < -2\varepsilon$ e $(\nabla g_y(w^{(1)}), \varphi) > 2\varepsilon$, para todo $y \in Y$. Considere agora a sequência $(u_k + t\varphi)$, com $t > 0$. Então

$$\|v_k + t\varphi\|^2 = \|v_k\|^2 + 2t(v_k, \varphi) + t^2\|\varphi\|^2 = \|v_k\|^2 + 2t(v_k, \varphi) + t^2,$$

como (v_k) é uma sequência maximizante e $(\varphi, v_k) \to (\varphi, w^{(1)})$, temos para $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, que

$$\|v_k + t\varphi\|^2 \leq 1 - 4\varepsilon t + t^2.$$

Assim, se $t \leq 4\varepsilon$, então

$$\|v_k + t\varphi\|^2 \leq 1. \tag{3.131}$$

De fato, $1 - 4\varepsilon t + t^2 \leq 1$ se, e somente se, $t \leq 4\varepsilon$. Isto mostra que $v_k + t\varphi$ é uma sequência admissível para c_b, assim $c_b \geq \|v_k + t\varphi\|^2$. Sejam $\bar{v}_k = v_k + t\varphi$, $\bar{y}_k^{(n)} = y_k^{(n)}$ e $\bar{w}^{(n)} = w^{(n)}$, $n > 1$, com $\bar{w}^{(1)} = w^{(1)} + t\varphi$. Pelo Lema 2.3, $v_k(\cdot + \bar{y}_k^{(n)}) = v_k(\cdot + y_k^{(n)}) + t\varphi(\cdot + y_k^{(n)}) \rightharpoonup$

$w^{(n)} = \bar{w}^{(n)}$, em $H^1(\mathbb{R}^N)$, caso $n > 2$, e $v_k \rightharpoonup w^{(1)} + t\varphi$. Fixado $y \in Y$, para estas sequências podemos aplicar a Proposição 3.11, com $F(x,s) = b(x-y)|s|^p$, para obter

$$\begin{aligned} g_y(v_k + t\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^N} b(\cdot - y)|v_k + t\varphi|^p dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} b(\cdot - y)|w^{(1)} + t\varphi|^p\, dx + \sum_{\substack{n\geq 2\\ n\in\mathbb{N}_0}} \int_{\mathbb{R}^N} b_\infty |w^{(n)}|^p\, dx + o(1). \end{aligned} \tag{3.132}$$

Por outro lado, considere

$$\begin{aligned} \psi:\ [0,4\varepsilon] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto g_y(w^{(1)} + t\varphi). \end{aligned}$$

Já que $g_y \in C^1(H^1(\mathbb{R}^N))$, pelo Teorema do Valor Médio, dado $t \in (0,4\varepsilon)$, existe $t_0 \in (0,t)$ tal que

$$\psi(t) - \psi(0) = (\nabla g_y(w^{(1)} + t_0\varphi), \varphi)t,$$

ou equivalentemente,

$$g_y(w^{(1)} + t\varphi) - g_y(w^{(1)}) = (\nabla g_y(w^{(1)} + t_0\varphi))t. \tag{3.133}$$

Seja agora $\Phi : [0,4\varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\Phi(t) = (\nabla g_y(w^{(1)} + t\varphi), \varphi)$. Pela continuidade de g_y', e como $\Phi(0) > 2\varepsilon$, diminuindo $t > 0$ se necessário, segue que $\Phi(t) > 2\varepsilon$, ou seja,

$$(\nabla g_y(w^{(1)} + t\varphi)) > 2\varepsilon. \tag{3.134}$$

Logo, usando (3.133) em (3.134), obtemos

$$g_y(w^{(1)} + t\varphi) - g_y(w^{(1)}) > 2\varepsilon t, \tag{3.135}$$

para t suficientemente pequeno. Por outro lado, pela Proposição 3.11 (tomando $F(x,s) = b(x-y)|s|^p$), temos

$$g_y(v_k) = \int_{\mathbb{R}^N} b(\cdot - y)|w^{(1)}|^p\, dx + \sum_{\substack{n>1\\ n\in\mathbb{N}_0}} b_\infty |w^{(n)}|^p\, dx + o(1). \tag{3.136}$$

Substituindo (3.135) e (3.136) em (3.132), segue que,

$$g_y(v_k + t\varphi) > g_y(v_k) + 2\varepsilon t + o(1),$$

para t suficientemente pequeno. Fixado $t > 0$, seja $k = k(t)$ suficientemente grande de modo que $o(1) + \varepsilon t \geq 0$. Como (v_k) é uma sequência maximizante para c_b, temos que $g(v_k) = c_b + o(1)$, já que $c_b \geq g_y(v_k) \geq g_0(v_k)$. Portanto,

$$g_y(v_k + t\varphi) \geq c_b + \varepsilon t, \tag{3.137}$$

para t suficientemente pequeno fixo e $k(t)$ suficientemente grande. Considere $\tilde{y} \in \widetilde{Y} = \mathbb{Z}^N \setminus Y$. Por (3.133), tomando $C = \inf_{\tilde{y}\in\mathbb{Z}^N} \nabla g_{\tilde{y}}(w^{(1)} + t\varphi)$, segue que

$$g_{\tilde{y}}(w^{(1)} + t\varphi) - g_{\tilde{y}}(w^{(1)}) \geq Ct_0,$$

para $t \in (0, 4\varepsilon)$ e algum $t_0 \in (0, t)$. Por um argumento análogo ao usado em (3.132), temos

$$\begin{aligned} g_{\tilde{y}}(v_k + t\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^N} b(\cdot - y)|w^{(1)} + t\varphi|^p \, dx + \sum_{n>1} \int_{\mathbb{R}^N} b_\infty |w^{(n)}|^p \, dx + o(1) \\ &\geq g_{\tilde{y}}(w^{(1)}) + \sum_{n>1} \int_{\mathbb{R}^N} |w^{(n)}|^p \, dx + Ct + o(1). \end{aligned} \tag{3.138}$$

Por outro lado, seja $\delta = \delta(w^{(1)})$ como em (3.125) e considere $y_0 \in Y$ tal que $g_{y_0}(w^{(1)}) = \min_{y\in Y} g_y(w^{(1)})$. Então

$$g_{\tilde{y}}(w^{(1)}) \geq \min_{y\in\mathbb{Z}^N\setminus Y} g_y(w^{(1)}) = \delta + \min_{y\in Y} g_y(w^{(1)}) = \delta + g_{y_0}(w^{(1)}).$$

Substituindo em (3.138) e usando a Proposição 3.11 com $F(x, s) = b(x - y_0)|s|^p$, obtemos

$$\begin{aligned} g_{\tilde{y}}(v_k + t\varphi) &\geq \delta + g_{y_0}(v_k) + Ct + o(1) \\ &= c_b + \delta + Ct + o(1) \\ &\geq c_b + \delta - |C|t + o(1). \end{aligned}$$

Diminuindo $t > 0$, se necessário, podemos supor $\delta - |C|t \geq \delta/2$. Para esta escolha de $t > 0$ tome $k = k(t)$ suficientemente grande de modo que

$$g_{\tilde{y}}(v_k + t\varphi) \geq c_b + \delta/2. \tag{3.139}$$

Finalmente, tomando $t > 0$ suficientemente pequeno e $k = k(t)$ suficientemente grande, de modo que valha (3.137) e (3.139), obtemos

$$\min_{y\in\mathbb{Z}^N} g_y(v_k + t\varphi) > c_b,$$

uma contradição, já que $\|v_k + t\varphi\| \leq 1$. ∎

Apêndice A

Resultados Complementares

Este apêndice destina-se a apresentar sem demonstrações alguns resultados auxiliares que são utilizados no trabalho.

Teorema A.1. ***(Princípio do Máximo)*** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e $\lambda \geq 0$. Suponha que $u \in H^1(\Omega)$ satisfaz a equação $-\Delta u + \lambda u \geq 0$, no sentido fraco, isto é*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v + \lambda uv \, dx \geq 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad v \geq 0.$$

Se para alguma bola $B \subset\subset \Omega$,

$$\inf_B u = \inf_\Omega u \leq 0,$$

a função u deve ser constante em Ω. Veja [4], Teorema 8.19.

Definição A.1. *Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$, conjuntos borelianos de $\mathbb{R}^N$, disjuntos aos pares e de medida finita, e $0 < a_n < a_{n-1} < \ldots < a_1$ números reais. Se f é uma função degrau tal que*

$$f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i},$$

definimos um arranjo de f por

$$f^* = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{[R_{i-1} \leq |x| \leq R_i]},$$

onde $R_0 = 0$ e $R_{i-1} \leq R_i$ são dados pela relação

$$\operatorname{med}([R_{i-1} \leq |x| \leq R_i]) = \operatorname{med}(A_i),$$

onde med *é a medida de Lebesgue.*

Teorema A.2. ***(Simetrização de Schwarz)*** *Sejam $1 \leq p \leq +\infty$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ uma função positiva. Existe uma única $f^* \in L^p(\mathbb{R})$ tal que $f^* \geq 0$ e para todo $\alpha > 0$,*

$$\text{med}([f \geq \alpha]) = \text{med}([f^* \geq \alpha]),$$

onde o conjunto $[f^* \geq \alpha]$ é uma bola $B_{R_\alpha}(0)$. A função f^* é radialmente decrescente e é chamada de rearranjo decrescente ou de Simetrização de Schwarz da função f. Além do mais, para toda função contínua e crescente

$$G : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,$$

tal que $G(0) = 0$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(f^*(x))\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} G(f(x))\, dx.$$

Além disso, dada $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ uma função positiva. Então $u^* \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^*|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx.$$

Veja [5], Pág. 259 e 264.

Definição A.2. *Seja X um espaço de Banach, $\omega \subset X$ um aberto e $J \in C^1(\omega, \mathbb{R})$. Dizemos que $u \in \omega$ é um* ***ponto crítico*** *de J, se $J'(u) = 0$. Se u não é um ponto crítico dizemos que u é um* ***ponto regular*** *de J. Se $c \in \mathbb{R}$, dizemos que c é valor crítico de J, se existe $u \in \omega$ tal que $J(u) = c$ e $J'(u) = 0$. Se c não é um valor crítico, dizemos que c é um* ***valor regular*** *de J. Seja $F \in C^1(X, \mathbb{R})$ e um conjunto de restrições*

$$S := \{v \in X : F(v) = 0\}$$

suponha que para todo $u \in S$, tenhamos $F'(u) \neq 0$. Se $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ (ou de classe C^1 numa vizinhança de S ou então C^1 sobre S). Dizemos que $c \in \mathbb{R}$ é um ***valor crítico*** *de J sobre S se existe $u \in S$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $J(u) = c$ e $J'(u) = \lambda F'(u)$. O ponto u é um ponto crítico de J sobre S e o número real λ é chamado de* ***multiplicador de Lagrange*** *do valor crítico c (ou do ponto crítico u).*

Teorema A.3. ***(Multiplicadores de Lagrange)*** *Sob as hipóteses e notações acima, suponha que $u_0 \in S$ é tal que $J(u_0) = \inf_{v \in S} J(v)$. Então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que*

$$J'(u_0) = \lambda F'(u_0).$$

Veja [5] Pág. 55

Referências Bibliográficas

[1] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Universitext. Springer, New York, 2011.

[2] John B. Conway. *A course in functional analysis*, volume 96 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, second edition, 1990.

[3] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010.

[4] David Gilbarg and Neil S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition.

[5] Otared Kavian. *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, volume 13 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications].* Springer-Verlag, Paris, 1993.

[6] Erwin Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications.* John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 1978.

[7] P.-L. Lions. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. I. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 1(2):109–145, 1984.

[8] P.-L. Lions. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. II. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 1(4):223–283, 1984.

[9] P.-L. Lions. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. I. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 1(1):145–201, 1985.

[10] P.-L. Lions. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. II. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 1(2):45–121, 1985.

[11] H. L. Royden. *Real analysis.* The Macmillan Co., New York, 1963.

[12] I. Schindler and K. Tintarev. An abstract version of the concentration compactness principle. *Rev. Mat. Complut.*, 15(2):417–436, 2002.

[13] Kyril Tintarev. A semilinear elliptic problem on unbounded domains with reverse penalty. *Nonlinear Anal.*, 64(7):1496–1502, 2006.

[14] Kyril Tintarev and Karl-Heinz Fieseler. *Concentration compactness.* Imperial College Press, London, 2007. Functional-analytic grounds and applications.

[15] Michel Willem. *Minimax theorems.* Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 24. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996.