Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Sobre Soluções de Equações Elípticas Envolvendo o N-Laplaciano e Crescimento Crítico Exponencial

Gustavo da Silva Araújo †

†Este trabalho contou com o apoio financeiro do CNPq

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Sobre Soluções de Equações Elípticas Envolvendo o N-Laplaciano e Crescimento Crítico Exponencial

por

Gustavo da Silva Araújo

sob a orientação do

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

João Pessoa - PB
março de 2013

A663s Araújo, Gustavo da Silva.

Sobre Soluções de Equações Elíptica Envolvendo o N-Laplaciano e Crescimento Crítico Exponencial / Gustavo da Silva Araújo. - João Pessoa: [s.n.], 2013.

122f. : il.

Orientador: Uberlandio Batista Severo.

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Crescimento crítico exponencial. 3. Desigualdade de Trudinger-Moser. 4. N-Laplaciano.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Sobre Soluções de Equações Elípticas Envolvendo o N-Laplaciano e Crescimento Crítico Exponencial

por

Gustavo da Silva Araújo

Dissertação apresentada ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise.

Aprovada por:

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza - UFPB

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves - UFCG

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó - UFPB (Suplente)

Universidade Federal da Paraíba

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Mestrado em Matemática

João Pessoa - PB

A Maria Antonieta (in memoriam), querida avó. A Franklin Filho (in memoriam), o "Príncipe". A meus Pais e Irmãos e a Pedro.

Dedico.

Agradecimentos

- Agradeço aos meus pais, responsáveis diretos pela educação que tive, por me fazerem ter orgulho de onde vim, por terem me ensinado os valores que carrego até hoje e que hei de carregar durante toda a vida. Agradeço aos meus irmãos, Léo, Guiga e Mauricinho, pelo amor e compreensão despendidos ao longo da vida, deixando-os cientes que penso neles todos os dias.

- Agradeço ao meu amigo e professor Uberlandio Severo, por toda a colaboração e paciência na elaboração deste trabalho e, principalmente, por ter sido o meu grande orientador na graduação e no mestrado, ensinando-me com experiência e ética os vários caminhos que podem ser trilhados pela vida acadêmica.

- Agradeço a Pedro, sobrinho amado, pelas inúmeras vezes que me roubou dos livros para brincar de dinossauro, futebol, beyblade... Obrigado por tudo.

- Agradeço aos amigos e colegas de graduação e pós-graduação. Em especial agradeço a Diego Ferraz, Esteban Silva, Eudes Lima, Gilson Carvalho, José Carlos Júnior, Pammella Queiroz, Reginaldo Júnior, Ricardo Pinheiro e Yane Lisley, que colocaram o desejo de aprender e ensinar acima de qualquer possível competição medíocre de conhecimento e por terem compreendido que temos os mesmos objetivos e que unidos somos mais fortes no que diz respeito a perseguí-los.

- Agradeço novamente a Pammella, pela paciência por suportar as horas de dedicação aos estudos e pelo amor que faz inundar nossas vidas.

Sucesso e vida longa a todos.

Resumo

Neste trabalho, estudamos existência, multiplicidade e não-existência de soluções positivas, com respeito a um parâmetro positivo λ, para uma classe de problemas elípticos quasilineares em domínios limitados de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, envolvendo o operador N-laplaciano e uma não-linearidade $f(t)$ que se comporta como t^α, para algum $\alpha \in (0, N-1)$, quando $t \to 0^+$ e possui crescimento crítico exponencial do tipo Trudinger-Moser em $+\infty$. Na obtenção dos resultados, podemos destacar a utilização de teoremas do tipo minimax, métodos de sub e supersolução e um refinamento da Desigualdade de Trudinger-Moser devido a P.-L. Lions.

Palavras-chave: Crescimento crítico exponencial, Desigualdade de Trudinger-Moser, N-laplaciano.

Abstract

In this work, we study existence, multiplicity and nonexistence of positive solutions, with respect to a positive parameter λ, for a class of quasilinear elliptic problems in bounded domains of $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, involving the N-laplacian operator and a nonlinearity $f(t)$ which behaves as t^α, for some $\alpha \in (0, N-1)$, when $t \to 0^+$ and has critical exponential growth of Trudinger-Moser type at $+\infty$. In order to obtain the results, we have used minimax theorems, sub and supersolution methods and a refinement of the Trudinger-Moser inequality due to P.-L. Lions.

Key words: Critical exponential growth, Trudinger-Moser inequality, N-laplacian.

Sumário

Notações

- $\mathbb{R}^N$ =Espaço euclidiano N-dimensional, $N \geq 2$, cuja norma é $|x| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_N^2}$, onde $x = (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N$;

- Ω denota um domínio suave de $\mathbb{R}^N$;

- ∂A é a fronteira do conjunto A e $\overline{A} = A \cup \partial A$ é o fecho de A;

- Seja $A \subseteq \mathbb{R}^N$ um conjunto mensurável. $|A|$ denotará a medida de Lebesgue do conjunto A em $\mathbb{R}^N$;

- $B_r(a)$ denota a bola aberta em $\mathbb{R}^N$ centrada em $a \in \mathbb{R}^N$ com raio r;

- S^{N-1} é a esfera unitária de $\mathbb{R}^N$, isto é, $S^{N-1} = \partial B_1(0)$;

- ω_{N-1} é o volume de S^{N-1};

- $\alpha_N = N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}$;

- Sejam f e g funções reais definidas num subconjunto A de $\mathbb{R}^N$. Então,

$$\{f < g\} := \{x \in A; f(x) < g(x)\}.$$

  De forma análoga define-se $\{f \leq g\}, \{f > g\}, \{f \geq g\}, \{f = g\}$;

- X^* representa o dual topológico do espaço vetorial normado X;

- O suporte de f é o conjunto $\text{supp}(f) = \overline{\{x \in X; f(x) \neq 0\}}$;

- $C(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ é contínua}\}$;

- $C^k(\Omega)$ é o espaço das funções reais definidas em Ω que possuem todas as derivadas de ordem menor ou igual a k contínuas;

- $C_c^k(\Omega) = \{f \in C^k(\Omega); f \text{ tem suporte compacto}\}$;

- $BC(\Omega) = \{f \in C(\Omega);\ f \text{ é limitada}\}$;

- $C_0(\Omega)$ é o fecho de $C_c(\Omega)$ em $BC(\Omega)$ com respeito a norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|;$$

- Dizemos que $f \in C^\infty(\Omega)$ se $f \in C^k(\Omega)$, para todo $k \in \mathbb{N}$. De forma análoga define-se $C_c^\infty(\Omega)$;

- $C^{k,\beta}(\Omega) = \{f \in C^k(\Omega);\ |f(x) - f(y)| \leq C\|x-y\|^\beta,\ \text{para todos } x, y \in \Omega\}$, para alguma constante C positiva, $\beta \in (0,1)$;

- $L^q(\Omega) = \big\{f : \Omega \to \mathbb{R}\quad \text{mensurável};\ \int_\Omega |f|^q dx < +\infty\big\}$, $1 \leq q < \infty$, denota o espaço de Lebesgue com a norma dada por

$$\|f\|_q = \left(\int_\Omega |f|^q\right)^{\frac{1}{q}};$$

- $L^\infty(\Omega)$ denota o espaço das funções mensuráveis que são limitadas q.t.p. em Ω, com norma dada por

$$\|u\|_\infty = \inf\{C > 0; |u(x)| < C \text{ q.t.p em } \Omega\};$$

- $L^q_{loc}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}\quad \text{mensurável};\ f \in L^q(K),\ \text{para todo compacto } K \subset \Omega\}$, $1 \leq q \leq \infty$;

- $W^{1,N}(\Omega)$ é o espaço de Sobolev das funções em $L^N(\Omega)$ que possuem as derivadas fracas de primeira ordem pertencentes a $L^N(\Omega)$.

- $W_0^{1,N}(\Omega)$ é o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ em $W^{1,N}(\Omega)$ com respeito a norma

$$\|u\|_{1,N} := \left(\int_\Omega (|\nabla u|^N + |u|^N)\right)^{\frac{1}{N}},$$

que é a norma usual em $W^{1,N}(\Omega)$ e $W_0^{1,N}(\Omega)$;

- Sejam $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ e

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^N\right)^{\frac{1}{N}}$$

a norma do gradiente. Devido a desigualdade de Poincaré, prova-se que as normas $\|\cdot\|_{1,N}$ e $\|\cdot\|$ são equivalentes;

- Representa-se por $W^{-1,\frac{N}{N-1}}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{1,N}(\Omega)$ e denota-se por

$$\|\cdot\|_{W^{-1,\frac{N}{N-1}}(\Omega)}$$

a norma usual em $W^{-1,\frac{N}{N-1}}(\Omega)$.

- $f = O(g)$ significa que, para algum $C > 0$, tem-se $|f| \leq C|g|$;

- $o_n(1)$ denota uma sequência de números reais que converge a zero quando $n \to \infty$;

- Seja A um conjunto. A função característica de A é definida como

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1, & se \quad x \in A \\ 0, & se \quad x \notin A; \end{cases}$$

- $\text{dist}(x, A)$ denota a distância do ponto x ao conjunto A;

- $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_N}\right)$ denota o gradiente de u;

- $\text{div}F$ denota o divergente do campo F;

- $\Delta_p u = \text{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$, $p > 1$;

- $\rightharpoonup$ e $\to$ denotam, respectivamente, convergências fraca e forte em um espaço normado.

- q.t.p. significa "quase todo ponto".

Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar existência, multiplicidade e não-existência de soluções para uma classe de problemas elípticos quasilineares em domínios limitados de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, envolvendo o operador N-laplaciano e não-linearidades com crescimento crítico exponencial.

Em diversas áreas da Matemática Aplicada, Física e Mecânica podemos encontrar fenômenos que podem ser modelados por equações que envolvem o operador p-laplaciano, $p > 1$. Tal operador surge, por exemplo, em glaciologia, no estudo dos fluidos não-newtonianos, na teoria de elasticidade não-linear, em algumas reações de difusão e na extração de petróleo. Para mais detalhes sobre o desenvolvimento dos aspectos físicos para problemas modelados pelo operador p-laplaciano, citamos, por exemplo, [7, 11, 28, 35] e suas referências.

Mais especificamente, estamos interessados na análise de existência, não-existência e multiplicidade de soluções fracas para a seguinte classe de problemas elípticos quasilineares:

$$\begin{cases} -\Delta_N u &= \lambda f(u), & \text{em} & \Omega \\ u &> 0, & \text{em} & \Omega \\ u &= 0, & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_λ}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, é um domínio limitado com fronteira suave, Δ_N denota o operador N-laplaciano, isto é,

$$\Delta_N u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{N-2}\nabla u) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{N-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right),$$

λ é um parâmetro positivo e a não-linearidade $f(t) = h(t)e^{|t|^{N/(N-1)}}$ é uma função que satisfaz as seguintes condições: existem constantes $\alpha \in (0, N-1)$ e $t_* \in (0,1)$ tais que

(A1) $h \in C^1((0,\infty))$, $h(t) = 0$ para todo $t \leq 0$ e $h(t) > 0$ para todo $t > 0$;

(A2) a função $t \mapsto f(t)$ é não-decrescente em $(0, t_*) \cup (1/t_*, \infty)$;

(A3) $\begin{cases} (1) \quad \lim_{t\to 0^+} \frac{h(t)}{t^\alpha} > 0 \\ (2) \quad \text{a aplicação } t \mapsto t^{1-N} f(t) \text{ é não-crescente em } (0, t_*); \end{cases}$

(A4) $\begin{cases} (1) \quad \lim_{t\to\infty} h(t)e^{\varepsilon|t|^{N/(N-1)}} = \infty, \text{ para todo } \varepsilon > 0 \\ (2) \quad \lim_{t\to\infty} h(t)e^{-\varepsilon|t|^{N/(N-1)}} = 0, \text{ para todo } \varepsilon > 0; \end{cases}$

(A5) $\lim_{t\to\infty} h(t)te^{\varepsilon t^{1/(N-1)}} = \infty$, para todo $\varepsilon > 0$;

(A6) existem $R > 0$ e $C > 0$ tais que, para todo $s \geq R$, $F(s) \leq Cf(s)$, onde

$$F(s) = \int_0^s f(t)dt.$$

As hipóteses $(A1) - (A6)$ sobre a não-linearidade f são basicamente consideradas por Giacomoni, Prashanth e Sreenadh em [26]. A condição $(A3) - (1)$ nos diz que f é uma não-linearidade que se comporta como uma potência t^α quando $t \to 0^+$. Por outro lado, a hipótese $(A4)$ nos assegura que f possui crescimento crítico exponencial do tipo Trudinger-Moser em $+\infty$ com expoente $\beta_0 = 1$.

Historicamente, o papel desempenhado por não-linearidades do tipo côncava-convexa na obtenção de múltiplas soluções foi investigado primeiramente por Ambrosetti, Brézis e Cerami no trabalho [5], no qual estudaram o problema

$$\begin{cases} -\Delta u &=& u^{\frac{N+2}{N-2}} + \lambda u^q, & \text{em} & \Omega \\ u &>& 0, & \text{em} & \Omega \\ u &=& 0, & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

com $0 < q < 1$, e mostraram a existência de $\Lambda > 0$ tal que, para $\lambda \in (0, \Lambda)$, (0.1) admitia pelo menos duas soluções e, para $\lambda > \Lambda$, não possuía solução. Subsequentemente, nos trabalhos [8, 9], foi feita a mesma abordagem na correspondente versão quasilinear do problema (0.1), isto é,

$$\begin{cases} -\Delta_p u &=& u^{p^*-1} + \lambda u^q, & \text{em} & \Omega \\ u &>& 0, & \text{em} & \Omega \\ u &=& 0, & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.2}$$

onde $1 < p < N, p^* = Np/(N-p)$ e $0 < q < p-1$. Neste caso, só foi possível garantir a existência de $\Lambda > 0$ tal que, para $\lambda \in (0, \Lambda)$, (0.2) possuísse multiplas soluções e, para $\lambda > \Lambda$, não possuísse solução, se $2N/(N+2) < p < 3$ ou $p \geq 3$, $p-1 > q > P^* - 2/(p-1) - 1$.

Este trabalho está organizado em quatro capítulos e um apêndice.

No **Capítulo 1**, apresentaremos alguns resultados importantes que serão utilizados nos capítulos subsequentes do trabalho.

No **Capítulo 2**, mostraremos que, em um certo sentido, um dos itens do Princípio de Concentração de Compacidade de P.-L. Lions (ver Teorema 2.6) pode ser visto como um refinamento da Desigualdade de Trudinger-Moser. Ademais, apresentamos uma prova deste refinamento usando argumentos de Simetrização de Schwarz e, no Capítulo 4, o aplicamos para garantirmos a existência de uma segunda solução para o problema (P_λ). Desta forma, foi necessário introduzirmos alguns fatos sobre Simetrização de Schwarz.

Iniciamos o **Capítulo 3** dando exemplos e fazendo alguns comentários a cerca da não-linearidade $f(t) = h(t)e^{|t|^{N/(N-1)}}$. Neste capítulo, definiremos o conceito de crescimento crítico exponencial do tipo Trudinger-Moser em $+\infty$ e mostraremos que f é uma função que satisfaz tal condição.

Dois dos três principais resultados desta dissertação encontram-se no Capítulo 3. O primeiro deles é o seguinte:

Teorema 0.1 *Se a não-linearidade f satisfaz (A1), (A2), (A3)-(1) e (A3)-(2), então existe $\lambda_0 > 0$ (ver (3.18)) tal que, para qualquer $\lambda \in (0, \lambda_0)$, o problema (P_λ) possui uma única solução, digamos u_λ, com a propriedade $\|u_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \leq t_*$.*

O que fizemos para provar o Teorema 0.1 foi associar ao problema (P_λ) um problema auxiliar, o qual denotamos por $(\widetilde{P}_\lambda)$, e, utilizando minimização de funcionais e um princípio de comparação devido a Abdellaoui e Peral em [1], provamos que o problema $(\widetilde{P}_\lambda)$ possuía uma única solução $\tilde{u_\lambda}$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$. O fato crucial dessa estratégia é que o problema $(\widetilde{P}_\lambda)$ foi escolhido de forma que sua única solução $\tilde{u_\lambda}$ fosse também uma solução do problema original (P_λ) que satisfizesse a condição $\|\tilde{u_\lambda}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq t_*$.

O outro importante resultado deste capítulo é o seguinte:

Teorema 0.2 *Suponha que f satisfaz (A1), (A2), (A3)-(1), (A3)-(2), (A4)-(1), (A4)-(2) e (A6). Então, existe $\Lambda \in (0, \infty)$ tal que* *(i)* (P_λ) *possui pelo menos uma solução, digamos* u_λ*, para* $\lambda \in (0, \Lambda)$*;*

(ii) (P_Λ) *possui solução* u_Λ*;*

(iii) (P_λ) *não possui solução, para* $\lambda > \Lambda$.

Na demonstração do item (i) do Teorema 0.2, utilizamos um argumento de minimização local na topologia de $\mathcal{C} = C^1(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}_0(\overline{\Omega})$ (Ver página 56) para mostrarmos que, restrito a $\mathcal{C}$, o funcional energia J_λ associado ao problema (P_λ) possuía mínimo local u_λ. Para que isto fosse possível, podemos destacar a necessidade de obtermos um princípio de comparação forte (ver Lema 3.21), bem como a utilização de métodos variacionais, de outros princípios de comparação e resultados de regularidade devidos a Liebermann [32] e Tolksdorf [40].

Em seguida, trabalhamos no intuito de provar que o mínimo local u_λ do funcional energia J_λ restrito a $\mathcal{C}$ é também mínimo local de J_λ em $W_0^{1,N}(\Omega)$. A prova foi feita por contradição. Utilizamos um argumento de iteração de Moser, método dos Multiplicadores de Lagrange e resultados de regularidade de [19, 40], obtemos uma contradição com o fato de u_λ ser mínimo local de $J_\lambda|_{\mathcal{C}}$.

Para a obtenção do item (ii), basicamente usamos o item (i) e minimização local do funcional J_λ.

A prova do item (iii) do Teorema 0.2 foi feita por redução ao absurdo. Utilizando, dentre outros, resultados de regularidade do Liebermann [32] e Tolksdorf [40], Princípio do Máximo de Vázquez e um método de sub e supersolução, foi possível provarmos que o primeiro autovalor de $-\Delta_N$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$ não era isolado, contrariando, desta forma, resultados de Anane [6], os quais garantem que o primeiro autovalor λ_1 de $-\Delta_N$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$, com sua correspondente auto função normalizada ϕ_1, é isolado.

No **Capítulo 4**, provaremos o principal resultado desta dissertação, que pode ser enunciado como segue:

Teorema 0.3 *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$*,* $N \geq 2$*, um domínio limitado com fronteira suave. Suponha que* $f(t) = h(t)e^{t^{N/(N-1)}}$*,* $t \geq 0$*, satisfaz as hipóteses (A1)-(A6). Então,*

(i) existe $\Lambda > 0$ *tal que* (P_λ) *admite, pelo menos, duas soluções, digamos* u_λ *e* v_λ*, para todo* $\lambda \in (0, \Lambda)$*, uma solução para* $\lambda = \Lambda$ *e nenhuma solução para* $\lambda > \Lambda$*;*

(ii) quando $\lambda \to 0$, $u_\lambda \to 0$ *em* $C^1(\overline{\Omega})$.

Levando-se em consideração o Teorema 0.2, para provar o item (i) do Teorema 0.3, basta mostrarmos a existência de uma segunda solução de (P_λ). Para isto, podemos destacar a utilização de uma versão generalizada do Teorema do Passo da Montanha para um funcional modificado $\tilde{J}_\lambda$ e do refinamento da desigualdade de Trudinger-Moser tratado no Capítulo 2. Foi necessário estudarmos os níveis críticos e as sequências de Palais-Smale.

No **Apêndice A**, apresentamos a formulação fraca da classe de problemas que estamos estudando e fazemos um estudo da diferenciabilidade do funcional energia associado.

Com o intuito de não ficarmos recorrendo à Introdução e de tornar os capítulos independentes, nos capítulos 3 e 4, iremos enunciar novamente as hipóteses sobre a não-linearidade f e os resultados principais.

Capítulo 1

Definições e Resultados Preliminares

Neste capítulo, encontram-se alguns resultados extremamente importantes para uma melhor compreensão de todo o trabalho.

1.1 Desigualdades

Teorema 1.1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz - [21], pág. 624)

$$|\langle x, y\rangle| \leq |x||y|, \qquad x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Teorema 1.2 (Desigualdade de Minkowski - [21], pág. 623) *Seja Ω um domínio de $\mathbb{R}^N$ e $1 \leq p \leq \infty$. Se $u, v \in L^p(\Omega)$, então*

$$\|u+v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p.$$

Teorema 1.3 (Desigualdade de Hölder - [21], pág. 622) *Sejam Ω um domínio de $\mathbb{R}^N$ e $1 \leq p, q \leq \infty$. Suponha que $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$, com $1/p + 1/q = 1$. Então, $uv \in L^1(\Omega)$ e*

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

1.2 Resultados de Medida e Integração

Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida, onde $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de Ω e μ é uma medida finita definida sobre $\mathcal{A}$.

Observação 1.4 *Se μ é a medida de Lebesgue, a integral*

$$\int_\Omega f d\mu$$

será denotada por

$$\int_\Omega f.$$

Um resultado clássico e que será bastante explorado no decorrer desse trabalho é o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, cujo enunciado é o seguinte:

Teorema 1.5 ([12]) *Seja (f_n) uma sequência de funções reais integráveis em Ω tais que $f_n \to f$ q.t.p. em Ω. Suponha que exista uma função integrável g tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p. em Ω, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então f é integrável e*

$$\int_\Omega f_n d\mu \to \int_\Omega f d\mu.$$

1.2.1 Teorema de Vitali

Um conceito importante para uma sequência de funções integráveis é a noção de equi-integrabilidade (ver Definição 4.12 do Capítulo 1 de [29]), a qual apresentaremos agora:

Definição 1.6 *Dizemos que uma sequência (f_n) de funções em $L^1(\Omega)$ é equi-integrável se a seguinte condição é satisfeita: para qualquer $\varepsilon > 0$, existem um conjunto mensurável A, de medida finita, e $\delta > 0$ tais que*

$$\begin{cases} \text{para todo } n \geq 1, \displaystyle\int_{\Omega \setminus A} |f_n| < \varepsilon; \\ \text{para todo } E \subset \Omega \text{ mensurável tal que } |E| < \delta, \displaystyle\int_E |f_n| < \varepsilon. \end{cases}$$

Observação 1.7 *No caso particular em que Ω tem medida finita, o conceito de equi-integrabilidade se reduz apenas à segunda condição.*

Apresentaremos a seguir o Teorema de Vitali, o qual foi de suma importância para a obtenção dos principais resultados desta dissertação. Para maiores informações, ver, por exemplo, [29], Capítulo 1, Teorema 4.13.

Teorema 1.8 (Vitali) *Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ que converge q.t.p. para uma função mensurável f. Então (f_n) converge para f em $L^1(\Omega)$ se, e somente se, (f_n) é uma sequência de funções equi-integráveis.*

1.3 Resultados de Cálculo Diferencial e Integral

Teorema 1.9 (Valor Intermediário - [33], pág. 56) *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua, definida num conjunto conexo $X \subset \mathbb{R}^N$. Se existem $a, b \in X$ e $d \in \mathbb{R}$ tais que $f(a) < d < f(b)$, então existe $c \in X$ tal que $f(c) = d$.*

Teorema 1.10 (Valor Médio de Lagrange - [33], pág. 123) *Seja $f : U \to \mathbb{R}$ definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^N$. Suponhamos que o segmento de reta $[a, a+v] = \{a+tv; 0 \leq t \leq 1\}$ esteja contido em U, que a restrição $f|[a, a+v]$ seja contínua e que exista a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$, segundo v, em todo ponto $x \in (a, a+v)$. Então, existe $\theta \in (0,1)$ tal que*

$$f(a+v) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial v}(a + \theta v).$$

Teorema 1.11 (Multiplicador de Lagrange - [29], pág. 55) *Sejam X um espaço de Banach, F e G funções de classe $C^1(X)$, e $x_0 \in X$ um extremo local de F restrito ao conjunto*

$$M := \{x \in X;\ G(x) = G(x_0) = c\}.$$

Se $G'(x_0) \neq 0$, ou seja $G'(x_0)w \neq 0$ para algum $w \in X$, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$F'(x_0) = \lambda G'(x_0),$$

ou seja,

$$F'(x_0)w = \lambda G'(x_0)w, \quad \text{para todo } w \in X.$$

Teorema 1.12 (Integração por Partes - [21], pág. 628) *Sejam Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ e $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$. Então,*

$$\int_\Omega u_{x_i} v = -\int_\Omega u v_{x_i} + \int_{\partial\Omega} u v \nu^i dS,$$

onde $\nu = (\nu^1, ..., \nu^N)$ é o campo de vetores normais unitários ao longo de $\partial\Omega$.

Teorema 1.13 (Coordenadas Polares - [21], pág. 628) *Seja $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ contínua e integrável. Então,*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B(x_0, r)} f dS \right) dr,$$

para todo $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Em particular,

$$\frac{d}{dr} \left(\int_{B_r(x_0)} f \right) = \int_{\partial B_r(x_0)} f dS,$$

para todo $r > 0$.

1.4 Resultados de Análise Funcional

Teorema 1.14 ([21], pág. 639) *Sejam X um espaço de Banach reflexivo e (u_n) uma sequência limitada de elementos de X. Então, existem uma subsequência (u_{n_j}) de (u_n) e $u \in X$ tais que*

$$u_{n_j} \rightharpoonup u \quad \text{em} \;\; X.$$

Teorema 1.15 ([21], pág. 639) *Sejam $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach e (u_n) uma sequência em X. Se $u_n \rightharpoonup u$ em X, então $\|u_n\|$ é limitada e*

$$\|u\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|.$$

1.5 Espaços de Sobolev

Teorema 1.16 ([12], Corolário IX.14) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado de classe C^1 com fronteira limitada e $1 \leq p \leq \infty$. Então, temos as seguintes imersões contínuas:*

(i) se $p \in [1, N)$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$;

(ii) $W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $q \in [N, \infty)$;

(iii) se $p > N$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Teorema 1.17 (Rellich-Kondrachov - [12], Teorema IX.16) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado de classe C^1 e $1 \leq p \leq \infty$. Então, temos as seguintes imersões compactas:*

(i) se $p \in [1, N)$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $q \in [1, p^*)$;

(ii) $W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $q \in [1, \infty)$;

(iii) se $p > N$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$.

1.6 Resultados de Regularidade

Considere o operador elíptico quasilinear $(x, u) \mapsto \operatorname{div}(\mathbf{a}(x, \nabla u))$ definido por

$$\operatorname{div}(\mathbf{a}(x, \nabla u)) := \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, \nabla u(x)) \quad (x \in \Omega, u \in W_0^{1,N}(\Omega)) \tag{1.1}$$

com valores em $W_0^{-1,\frac{N}{N-1}}(\Omega)$, o espaço dual de $W_0^{1,N}(\Omega)$, onde as componentes a_i do vetor $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_N)$ são funções de x e $\eta = \nabla u \in \mathbb{R}^N$.

Dizemos que o operador $(x, u) \mapsto \text{div}(\mathbf{a}(x, \nabla u))$ satisfaz as *condições de elipticidade e crescimento* se existem constantes $\kappa \in [0, 1]$ e $\gamma, \Gamma \in (0, \infty)$ tais que

(a1) $a_i(x, 0) = 0;\ i = 1, ..., N;$

(a2) $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial a_i}{\partial \eta_j}(x, \eta)\xi_i\xi_j \geq \gamma(\kappa + |\eta|)^{N-2}|\xi|^2;$

(a3) $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} \left|\frac{\partial a_i}{\partial \eta_j}(x, \eta)\right| \leq \Gamma(\kappa + |\eta|)^{N-2};$

(a4) $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} \left|\frac{\partial a_i}{\partial x_j}(x, \eta)\right| \leq \Gamma(\kappa + |\eta|)^{N-2}|\eta|;$

(a5) $|b(x, u)| \leq \Gamma(\kappa + |u|)^{N-2}|u|,$

Observação 1.18 *Na demonstração do Lema 3.21 da Seção 3.4.2 do Capítulo 3, mostramos que o operador $N-$laplaciano definido por*

$$\Delta_N u = div(|\nabla u|^{N-2}\nabla u)$$

satisfaz as condições de elipticidade e crescimento mencionadas acima.

Portanto, devido a observação acima, podemos enquadrar o operador N-laplaciano nos resultados de Liebermann [32] e Tolksdorf [40], cujo enunciado adaptado ao caso do N-laplaciano é o seguinte:

Teorema 1.19 (Estimativa $C^{1,\beta}$ para o N-laplaciano - [32, 40])
Seja Ω um domínio limitado com fronteira de classe $C^{1,\beta}$, para algum $\beta \in (0, 1)$, e seja $u \in W_0^{1,N}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ tal que $\Delta_N u \in L^\infty(\Omega)$. Então, $u \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ e $\|u\|_{C^{1,\beta}(\overline{\Omega})} \leq K_1$, para algum $\beta \in (0, 1)$ e $K_1 > 0$, onde β e K_1 são constantes que dependem apenas de p e N e de um limite sobre $\|u\|_\infty$ e $\|\Delta_N u\|_\infty$.

Enunciemos abaixo outro resultado de regularidade que foi bastante utilizado no decorrer deste trabalho.

Teorema 1.20 ([2], Teorema 1.31) *Sejam m um inteiro não-negativo, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitado e $0 < \lambda \leq 1$. Então, a imersão $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega})$ é compacta.*

1.7 Resultados de Existência

Definição 1.21 *Sejam X um espaço de Banach e $J : X \to \mathbb{R}$ um funcional. Dizemos que:*

(i) J é semicontínuo inferiormente (s.c.i.) se $J^{-1}(a,\infty)$ é aberto em X, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$;

(ii) J é sequencialmente semicontínuo inferiormente (s.s.c.i) se

$$u_k \to u \Rightarrow \liminf_{k\to\infty} J(u_k) \geq J(u);$$

(iii) J é fracamente semicontínuo inferiormente (f.s.c.i.) se J é s.c.i na topologia fraca de X;

(iv) J fracamente sequencialmente semicontínuo inferiormente (f.s.s.c.i.) se

$$u_k \rightharpoonup u \Rightarrow \liminf_{k\to\infty} J(u_k) \geq J(u).$$

Observação 1.22 *(i) J é s.c.i se, e somente se, J é s.s.c.i.*

(ii) J é f.s.c.i se, e somente se, J é f.s.s.c.i.

Para mais detalhes a respeito da observação acima ver, por exemplo, [23].

Definição 1.23 *Seja X um espaço de Banach. Dizemos que $J : X \to \mathbb{R}$ é coercivo se $J(u) \to \infty$ quando $\|u\| \to \infty$.*

Teorema 1.24 (Método Direto do Cálculo das Variações - [39]) *Seja X um espaço de Banach reflexivo e suponha que o funcional $J : X \to \mathbb{R}$ é*

(i) fracamente semicontínuo inferiormente;

(ii) coercivo.

Então, J é limitado inferiormente e existe $u_0 \in X$ tal que

$$J(u_0) = \inf_X J(u).$$

Além disso, se J é diferenciável, então todo ponto de mínimo é ponto crítico.

Para o resultado que apresentaremos a seguir, precisaremos da seguinte definição:

Definição 1.25 *Dizemos que um subconjunto fechado H de um espaço de Banach X separa os pontos u e v em X se u e v pertencem a componentes conexas de $X \backslash H$ disjuntas.*

Teorema 1.26 ([25], Teorema 1) *Sejam X um espaço de Banach, X^* o espaço dual de X e $\phi : X \to \mathbb{R}$ um funcional Gâteaux diferenciável tal que a derivada de Gâteaux $\phi' : X \to X^*$ seja contínuo da topologia de X para a topologia fraca* de X^*. Sejam u e v dois pontos distintos de X e considere o número*

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \phi(g(t)),$$

onde $\Gamma := \{g \in C([0,1], X); g(0) = u \text{ e } g(1) = v\}$. Suponha que F é um subconjunto fechado de X tal que $F \cap \{x \in X; \phi(x) \geq c\}$ separa os pontos u e v. Então, existe uma sequência (x_n) em X satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) $\lim_{n\to\infty} dist(x_n, F) = 0$;

(ii) $\lim_{n\to\infty} \phi(x_n) = c$;

(iii) $\lim_{n\to\infty} \|\phi'(x_n)\|_{X^*} = 0$.

1.7.1 Um Método de Sub e Supersolução

Um conceito que será bastante utilizado neste trabalho é o seguinte:

Definição 1.27 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, um domínio limitado. Diremos que $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ é uma subsolução do problema $-\Delta_N u = h(u)$ em Ω se $-\Delta_N u \leq h(u)$ no sentido fraco, isto é, se*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{N-2} \nabla u \nabla \phi \leq \int_\Omega h(u)\phi, \quad \text{para todo } \phi \in W_0^{1,N}(\Omega), \phi \geq 0.$$

Analogamente, apenas invertendo a desigualdade, define-se supersolução.

Quando temos uma sub e uma supersolução, digamos $\underline{u}$ e $\overline{u}$, para um determinado problema e conseguimos obter, via propriedades de $\underline{u}$ e $\overline{u}$, uma solução de tal problema, dizemos que tal solução foi obtida via um método de sub e supersolução.

Provaremos agora, via método de sub e supersolução, um teorema que garante a existência de uma solução para um determinado problema. Entretanto, para nos auxiliar na demonstração de tal resultado, necessitamos da seguinte desigualdade:

Teorema 1.28 ([37], Lema A.0.5) *Sejam $x, y \in \mathbb{R}^N$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno canônico em $\mathbb{R}^N$. Então,*

$$\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x-y \rangle \geq \begin{cases} c_p|x-y|^p, & \text{se } \ p \geq 2 \\ c_p \dfrac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}}, & \text{se } \ 1 < p < 2, \end{cases}$$

onde c_p é uma constante positiva que depende de p.

Teorema 1.29 *Sejam $\underline{u}, \overline{u} \in W_0^{1,N}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $\underline{u} \leq \overline{u}$, sub e supersolução, respectivamente, do problema*

$$\begin{cases} -\Delta_N u &= Cu^{N-1}, & \text{em} & \Omega \\ u &> 0, & \text{em} & \Omega \\ u &= 0, & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

onde C é uma constante não-negativa. Então, (1.2) possui uma solução fraca $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ tal que $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$.

Prova: Consideremos, inicialmente, $h : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x,t) = \begin{cases} C\underline{u}(x)^{N-1}, & \text{se } \ t \leq \underline{u}(x) \\ Ct^{N-1}, & \text{se } \ \underline{u}(x) \leq t \leq \overline{u}(x) \\ C\overline{u}^{N-1}(x), & \text{se } \ t \geq \overline{u}(x) \end{cases}$$

Por hipótese, temos $\underline{u}, \overline{u} \in L^\infty(\Omega)$. Logo, pela definição de $h(x,t)$, existe $M > 0$ tal que $h(x,t) \leq M$ q.t.p. em $\Omega \times \mathbb{R}$. Sendo

$$H(x,t) = \int_0^t h(x,s)ds,$$

temos que

$$|H(x,u)| = \left| \int_0^u h(x,t)dt \right| \leq M \left| \int_0^u dt \right| = M\,|u|\,,$$

donde

$$-\int_\Omega |H(x,u)| \geq -M \int_\Omega |u|\,. \tag{1.3}$$

Consideremos o problema auxiliar

$$\begin{cases} -\Delta_N u = h(x,u), & \text{em} \quad \Omega \\ u > 0, & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.4}$$

cujo funcional energia associado é dado por

$$\Psi(u) = \frac{1}{N}\|u\|^N - \int_\Omega H(x,u).$$

Argumentos análogos aos do Apêndice A mostram que Ψ é diferenciável. Mostremos agora que Ψ é coercivo e f.s.c.i. De fato, por (1.3), temos que

$$\begin{aligned} \Psi(u) &= \frac{1}{N}\|u\|^N - \int_\Omega H(x,u) \\ &\geq \frac{1}{N}\|u\|^N - M\int_\Omega |u| \\ &= \frac{1}{N}\|u\|^N - M\|u\|_1 \\ &\geq \frac{1}{N}\|u\|^N - MC_1\|u\| \qquad \text{(Teorema 1.17)} \\ &\to \infty, \end{aligned}$$

quando $\|u\| \to \infty$, provando que Ψ é coercivo. Quanto a ser f.s.c.i., considere $(u_n) \subset W_0^{1,N}(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$. Assim, $u_n \to u$ q.t.p. em Ω, donde $H(x,u_n) \to H(x,u)$ q.t.p. em Ω. Como $h(x,t) \leq M$ q.t.p. em $\Omega \times \mathbb{R}$, segue que $H(x,u_n)$ é limitada q.t.p. em Ω. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos que

$$\int_\Omega H(x,u_n) \to \int_\Omega H(x,u). \tag{1.5}$$

Por outro lado, usando novamente que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$, pelo Teorema 1.15, obtemos

$$\frac{1}{N}\|u\|^N \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{N}\|u_n\|^N. \tag{1.6}$$

Assim, por (1.5) e (1.6) e pela semicontinuidade inferior da norma na topologia fraca, segue que

$$\begin{aligned} \Psi(u) &= \frac{1}{N}\|u\|^N - \int_\Omega H(x,u) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{N}\|u_n\|^N + \liminf_{n\to\infty}\left(-\int_\Omega H(x,u_n)\right) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{N}\|u_n\|^N - \int_\Omega H(x,u_n)\right) \\ &= \liminf_{n\to\infty} \Psi(u_n), \end{aligned}$$

ou seja, J é f.s.s.c.i. Pela Observação 1.22, temos que J é f.s.c.i., como queríamos demonstrar. Logo, pelo Teorema 1.24, existe $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ solução de (1.4).

Afirmação: $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$.

De fato, como $\underline{u}$ é subsolução de (1.2) e u é ponto de mínimo de Ψ (e, portanto, um ponto crítico de Ψ), temos que

$$\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{N-2}\nabla \underline{u}\nabla\phi \leq C\int_\Omega \underline{u}^{N-1}\phi$$

e

$$\int_\Omega |\nabla u|^{N-2}\nabla u\nabla\phi = \int_\Omega h(x,u)\phi,$$

para toda $\phi \in W_0^{1,N}(\Omega)$, $\phi \geq 0$. Portanto, para toda $\phi \in W_0^{1,N}(\Omega)$, $\phi \geq 0$,

$$\int_\Omega (|\nabla \underline{u}|^{N-2}\nabla \underline{u} - |\nabla u|^{N-2}\nabla u)\nabla\phi \leq \int_\Omega (C\underline{u}^{N-1} - h(x,u))\phi. \tag{1.7}$$

Escolhendo $\phi = (\underline{u} - u)^+$, obtemos, pela própria definição de h, que

$$\int_\Omega (C\underline{u}^{N-1} - h(x,u))(\underline{u} - u)^+ = \int_{\{\underline{u}\geq u\}} (C\underline{u}^{N-1} - h(x,u))(\underline{u} - u)^+ = 0.$$

Consequentemente, substituindo a expressão acima em (1.7), segue que

$$\int_{\{\underline{u}\geq u\}} (|\nabla \underline{u}|^{N-2}\nabla \underline{u} - |\nabla u|^{N-2}\nabla u)\nabla(\underline{u} - u)^+ \leq 0.$$

Entretanto, pelo Teorema 1.28, segue que

$$\int_\Omega |\nabla(\underline{u} - u)^+|^N = \int_{\{\underline{u}\geq u\}} |\nabla(\underline{u} - u)|^N \leq 0,$$

donde

$$\|(\underline{u} - u)^+\| = 0.$$

Logo, $(\underline{u} - u)^+ = 0$ q.t.p. em Ω, isto é, $\underline{u} \leq u$ q.t.p. em Ω.

De maneira semelhante ao que fizemos anteriormente, mostra-se que $u \leq \overline{u}$ em Ω e, portanto, concluímos que $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$. Para finalizar, basta observarmos que, pela definição de h, $h(x,u) = Cu^{N-1}$, segue que u é solução de (1.2) e $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$, como queríamos demonstrar. ■

1.8 Princípios de Comparação

O resultado abaixo é conhecido como *Identidade de Picone para o operador p-laplaciano* e sua demonstração pode ser encontrada em [4].

Lema 1.30 (Identidade de Picone para o p-laplaciano) *Sejam $w > 0$ e $v \geq 0$ duas funções contínuas em Ω e diferenciáveis q.t.p. em Ω. Para $p > 1$, defina*

$$L(v,w) = |\nabla v|^p + (p-1)\frac{v^p}{w^p}|\nabla w|^p - p\frac{v^{p-1}}{w^{p-1}}|\nabla w|^{p-2}\nabla w \nabla v$$

e

$$R(v,w) = |\nabla v|^p - \nabla\left(\frac{v^p}{w^{p-1}}\right)|\nabla w|^{p-2}\nabla w.$$

Então,

(i) $L(v,w) = R(v,w)$;

(ii) $L(v,w) \geq 0$ *q.t.p. em* Ω;

(iii) $L(v,w) = 0$ *q.t.p. em Ω se, e somente se, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $v = kw$ em cada componente conexa de Ω.*

Como aplicação da Identidade de Picone para o p-laplaciano, iremos demonstrar o lema a seguir, que é um princípio de comparação fraco, o qual será de suma importância nas demonstrações dos principais resultados do Capítulo 3 (Teoremas 3.7 e 3.8).

Lema 1.31 ([1], Lema 4.1) *Seja $\rho : [0,\infty) \to [0,\infty)$ uma função contínua tal que $t \mapsto t^{1-N}\rho(t)$ seja não-crescente. Sejam $v, w \in W_0^{1,N}(\Omega)$ funções contínuas em Ω e diferenciáveis q.t.p. em Ω, sub e supersolução, respectivamente, do problema*

$$\begin{cases} -\Delta_N u &= \rho(u) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &> 0 \quad\ \ \ \text{em} \quad \Omega. \end{cases}$$

Então $w \geq v$ q.t.p. em Ω.

Prova: Por definição de sub e supersolução, para todas $\phi, \psi \in W_0^{1,N}(\Omega)$ não-negativas, temos que

$$\int_\Omega |\nabla v|^{N-2}\nabla v \nabla \psi \leq \int_\Omega \rho(v)\psi$$

e

$$\int_\Omega |\nabla w|^{N-2}\nabla w \nabla \phi \geq \int_\Omega \rho(w)\phi.$$

Consequentemente,

$$\int_\Omega (|\nabla w|^{N-2}\nabla w\nabla\phi - |\nabla v|^{N-2}\nabla v\nabla\psi) \geq \int_\Omega (\rho(w)\phi - \rho(v)\psi). \tag{1.8}$$

Sendo $\varphi := (v^N - w^N)^+ \in W_0^{1,N}(\Omega)$, como $v, w > 0$ em Ω, podemos considerar as funções testes

$$\psi = \frac{\varphi}{v^{N-1}} \qquad \text{e} \qquad \phi = \frac{\varphi}{w^{N-1}}. \tag{1.9}$$

Denotando

$$A := \int_\Omega (|\nabla w|^{N-2}\nabla w\nabla\phi - |\nabla v|^{N-2}\nabla v\nabla\psi),$$

por (1.8) e (1.9), temos que

$$\begin{aligned} A &\geq \int_\Omega \left(\frac{\rho(w)}{w^{N-1}} - \frac{\rho(v)}{v^{N-1}}\right)(v^N - w^N)^+ \\ &= \int_{\{v>w\}} \left(\frac{\rho(w)}{w^{N-1}} - \frac{\rho(v)}{v^{N-1}}\right)(v^N - w^N)^+, \end{aligned}$$

onde $\{v > w\} := \{x \in \Omega; v(x) > w(x)\}$. Observe que, pelo fato de $t \mapsto t^{1-N}\rho(t)$ ser não-crescente, o lado direito da desigualdade acima é não-negativo e, como v e w são diferenciáveis q.t.p. em Ω, temos que

$$\begin{aligned} A &= \int_\Omega |\nabla w|^{N-2}\nabla w \frac{w^{N-1}\nabla\varphi - (N-1)w^{N-2}\varphi\nabla w}{w^{2(N-1)}} \\ &\quad - \int_\Omega |\nabla v|^{N-2}\nabla v \frac{v^{N-1}\nabla\varphi - (N-1)v^{N-2}\varphi\nabla v}{v^{2(N-1)}}. \end{aligned}$$

Para $\varphi = (v^N - w^N)^+$, temos, a menos de um conjunto de medida nula, que

$$\nabla\varphi = N(v^{N-1}\nabla v - w^{N-1}\nabla w)\mathcal{X}_{\{v\geq w\}}.$$

Consequentemente, temos as seguintes igualdades sobre $\Omega \cap \{v \geq w\}$:

$$\begin{aligned} \frac{w^{N-1}\nabla\varphi - (N-1)w^{N-2}\varphi\nabla w}{w^{2(N-1)}} &= N\frac{v^{N-1}}{w^{N-1}}\nabla v - (N-1)\frac{v^N}{w^N}\nabla w - \nabla w \\ \frac{v^{N-1}\nabla\varphi - (N-1)v^{N-2}\varphi\nabla v}{v^{2(N-1)}} &= -N\frac{w^{N-1}}{v^{N-1}}\nabla w + (N-1)\frac{w^N}{v^N}\nabla w + \nabla v. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
A &= \int_\Omega |\nabla w|^{N-2}\nabla w \frac{w^{N-1}\nabla\varphi - (N-1)w^{N-2}\varphi\nabla w}{w^{2(N-1)}} \\
&\quad - \int_\Omega |\nabla v|^{N-2}\nabla v \frac{v^{N-1}\nabla\varphi - (N-1)v^{N-2}\varphi\nabla v}{v^{2(N-1)}} \\
&= \int_{\Omega\cap\{v>w\}} \left(N\frac{v^{N-1}}{w^{N-1}}|\nabla w|^{N-2}\nabla w\nabla v - (N-1)\frac{v^N}{w^N}|\nabla w|^N - |\nabla w|^N \right) \\
&\quad + \int_{\Omega\cap\{v>w\}} \left(N\frac{w^{N-1}}{v^{N-1}}|\nabla v|^{N-2}\nabla v\nabla w - (N-1)\frac{w^N}{v^N}|\nabla v|^N - |\nabla v|^N \right) \\
&=: \int_{\Omega\cap\{v>w\}} L_1 + \int_{\Omega\cap\{v>w\}} L_2.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Lema 1.30, segue que $L_1, L_2 \leq 0$ em Ω, donde concluimos que $A \leq 0$ em Ω. No entanto, no conjunto $\{v > w\} = \{x \in \Omega; v(x) > w(x)\}$, temos que

$$\frac{\rho(w)}{w^{N-1}} - \frac{\rho(v)}{v^{N-1}} \geq 0.$$

Logo, o conjunto $\{v > w\}$ tem medida de Lebesgue nula e, consequentemente, obtemos que $w \geq v$ q.t.p. em Ω. ■

Outro lema que será crucial para a demonstração dos Teoremas 3.7 e 3.8 é o princípio de comparação forte para soluções fracas não-negativas $u, v \in W_0^{1,N}(\Omega)$, respectivamente, das equações

$$-\mathrm{div}(\mathbf{a}(x,\nabla u)) - b(x,u) = \varphi(x) \quad \text{em } \Omega; \qquad u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \tag{1.10}$$

$$-\mathrm{div}(\mathbf{a}(x,\nabla v)) - b(x,v) = \psi(x) \quad \text{em } \Omega; \qquad v = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \tag{1.11}$$

onde $\varphi, \psi \in L^\infty(\Omega)$ são tais que $0 \leq \varphi \leq \psi$ e $\varphi \not\equiv \psi$ em Ω e o operador elíptico quasilinear $(x,u) \mapsto \mathrm{div}(\mathbf{a}(x,\nabla u))$ é definido como em (1.1). As componentes a_i do vetor $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_N)$ são funções de x e $\eta = \nabla u \in \mathbb{R}^N$. Assumiremos que $a_i \in C(\Omega\times\mathbb{R}^N)\cap C^1(\Omega\times\mathbb{R}^N\setminus\{0\})$ e $b(x,u)$ uma função de Carathéodory, isto é, mensurável em $x \in \Omega$ para todo $u \in \mathbb{R}$ e contínua em $u \in \mathbb{R}$ para quase todo $x \in \Omega$.

Enunciemos tal princípio:

Lema 1.32 ([18], Teorema 2.1) *Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, cuja fronteira é uma variedade conexa de classe C^2. Assuma que $\mathbf{a}$ satisfaz as condições de elipticidade e crescimento* *(a1)* $a_i(x, 0) = 0;\ i = 1, ..., N;$

(a2) $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial a_i}{\partial \eta_j}(x, \eta)\xi_i\xi_j \geq \gamma(\kappa + |\eta|)^{N-2}|\xi|^2;$

(a3) $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} \left|\frac{\partial a_i}{\partial \eta_j}(x, \eta)\right| \leq \Gamma(\kappa + |\eta|)^{N-2};$

(a4) $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} \left|\frac{\partial a_i}{\partial x_j}(x, \eta)\right| \leq \Gamma(\kappa + |\eta|)^{N-2}|\eta|;$

(a5) $|b(x, u)| \leq \Gamma(\kappa + |u|)^{N-2}|u|,$

onde $\kappa \in [0, 1]$, *e* $\gamma, \Gamma \in (0, \infty)$, *para todo* $x \in \Omega, \eta \in \mathbb{R}^N\backslash\{0\}, \xi \in \mathbb{R}^N$, *e a condição de Hölder continuidade*

(a6) *Para cada compacto* $K \subset \mathbb{R}^N\backslash\{0\}$, *existe uma constante* $\beta \in (0, 1)$ *tal que* $\partial a_i/\partial \eta_j \in C^\beta(\overline{\Omega} \times K)$, *para todo* $i, j = 1, ..., N$.

Além disso, suponha que b satisfaz

(b1) $b(x, u)$ *é não-decrescente em* u, *para* $(x, u) \in \Omega \times \mathbb{R}$, *e o problema (1.10) possui única solução fraca* $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$.

Se $\varphi, \psi \in L^\infty(\Omega)$ *são tais que* $0 \leq \varphi \leq \psi$ *e* $\varphi \neq \psi$ *em* Ω *e* $u, v \in W_0^{1,N}(\Omega)$ *são, respectivamente, soluções fracas não-negativas das equações (1.10) e (1.11), então*

$$0 \leq u < v \quad \text{em } \Omega \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} < \frac{\partial u}{\partial \nu} \leq 0.$$

Há ainda um outro princípio de comparação forte, cuja demonstração é baseada no lema acima e que será utilizado para a obtenção de alguns resultados desta dissertação, porém só iremos enunciá-lo e prová-lo na Seção 3.4.2 do Capítulo 3 (ver Lema 3.21).

Agora, baseado no Lema A.0.7 de [37], iremos apresentar e demonstrar o seguinte princípio de comparação fraco:

Lema 1.33 *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio limitado com fronteira suave e* $u_1, u_2 \in W_0^{1,N}(\Omega)$ *satisfazendo*

$$\begin{cases} -\Delta_N u_1 + Cu_1 \leq -\Delta_N u_2 + Cu_2 & \text{no sentido fraco em } \Omega \\ u_1 \leq u_2, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde C *é uma constante não-negativa. Então,* $u_1 \leq u_2$ *em* Ω

Prova: Considere a função teste $\phi = \max\{u_1 - u_2, 0\}$. Assim,

$$\int_{\{u_1>u_2\}} \langle |\nabla u_2|^{N-2}\nabla u_1 - |\nabla u_2|^{N-2}\nabla u_2, \nabla u_1 - \nabla u_2\rangle \leq -C\int_{\{u_1>u_2\}} (u_1-u_2)^2 \leq 0,$$

pois

$$C\int_{\{u_1>u_2\}} (u_1-u_2)^2 \geq 0.$$

Logo, pelo Lema 1.28, concluimos o resultado. ■

1.9 Princípio do Máximo de Vázquez

Para mais detalhes a respeito desta seção, ver [41], Teorema 5.

Teorema 1.34 (Princípio do Máximo de Vázquez) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e conexo e $u \in C^1(\Omega)$ tal que $\Delta_p u \in L^2_{loc}(\Omega)$, $u \geq 0$ q.t.p. em Ω, $\Delta_p u \leq \beta(u)$ q.t.p. em Ω, onde $\beta : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, não-decrescente, com $\beta(0) = 0$ e que satisfaz uma das seguintes condições:*

(i) $\beta(s) = 0$, para algum $s > 0$;

(ii) $\beta(s) > 0$ para todo $s > 0$ e

$$\int_0^1 (\beta(s)s)^{-\frac{1}{p}} ds = \infty.$$

Então, se u não é identicamente nula em Ω, $u > 0$ em Ω. Além disso, se $u \in C^1(\Omega \cup \{x_0\})$, para algum $x_0 \in \partial\Omega$ que satisfaz a condição da esfera interior e $u(x_0) = 0$, então

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0,$$

onde ν é o vetor normal interior a $\partial\Omega$ em x_0.

Capítulo 2

Simetrização de Schwarz e um Refinamento da Desigualdade de Trudinger-Moser

O Princípio de Concentração de Compacidade, desenvolvido por P.-L. Lions em [34, Teorema I.6], é uma ferramenta poderosa para provar a existência de extremais em desigualdades funcionais e a existência de soluções para problemas envolvendo EDP's elípticas, principalmente em situações em que argumentos padrões de compacidade não se aplicam.

Antes de enunciarmos de forma precisa este resultado, iremos introduzir um tipo de convergência para que possamos entender melhor as hipóteses do Princípio de Concentração de Compacidade de P.-L. Lions. As definições e os teoremas apresentados a seguir podem ser encontrados em [24].

Lembremos que Ω denota um domínio suave de $\mathbb{R}^N$.

Definição 2.1 *Sejam μ uma medida de Borel em $\overline{\Omega}$ e E um subconjunto de Borel de $\overline{\Omega}$. Dizemos que μ é regular exterior em E se*

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U); E \subset U, U \text{ aberto}\}$$

e regular interior em E se

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K); K \subset E, K \text{ compacto}\}.$$

Se μ é regular exterior e regular interior em todos os borelianos, μ é dita regular.

O Teorema da Decomposição de Jordan[1] nos garante que se μ é uma medida com sinal, então existem únicas medidas positivas μ^+ e μ^- tais que $\mu = \mu^+ - \mu^-$. As medidas μ^+ e μ^- são chamadas, respectivamente, *variação positiva* e *variação negativa* de μ. Definiremos a *variação total* de μ como sendo a medida dada por

$$|\mu| = \mu^+ + \mu^-.$$

Definição 2.2 *Uma medida de Radon em $\overline{\Omega}$ é uma medida de Borel que é finita em conjuntos compactos, regular exterior em todos os borelianos e regular interior em todos os abertos. Diremos que μ é uma medida de Radon em $\overline{\Omega}$ com sinal se μ é uma medida de Borel com sinal tal que as variações positiva e negativa de μ são medidas de Radon em $\overline{\Omega}$. Denotaremos por $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$ o espaço das medidas de Radon em $\overline{\Omega}$ com sinal e, para cada $\mu \in \mathcal{M}(\overline{\Omega})$, definimos*

$$\|\mu\| = |\mu|(\overline{\Omega}),$$

onde $|\mu|$ é a variação total de μ.

Esta definição nos dá suporte para enunciarmos um Teorema de Representação de Riez (ver [24], Teorema 7.17). Para isto, lembremos que $C_0(\Omega)$ é o fecho de $C_c(\Omega)$) em $BC(\Omega)$ com respeito a norma $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|$.

Teorema 2.3 (Teorema da Representação de Riesz) *Para cada $\mu \in \mathcal{M}(\overline{\Omega})$ e $f \in C_0(\overline{\Omega})$, considere*

$$I_\mu(f) = \int_\Omega f d\mu.$$

Então, a aplicação $\mu \mapsto I_\mu$ é um isomorfismo isométrico de $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$ para $C_0(\overline{\Omega})^*$

O teorema acima permite que escrevamos (ainda que com abuso de notação) $\mathcal{M}(\overline{\Omega}) = C_0(\overline{\Omega})^*$ e definamos convergência na topologia fraca* de $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$ como segue:

Definição 2.4 *Dizemos que $(\mu_n) \subset \mathcal{M}(\overline{\Omega})$ converge fraco* para μ, e denotamos $\mu_n \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$, se*

$$\int_\Omega f d\mu_n \to \int_\Omega f d\mu,$$

para toda $f \in C_0(\overline{\Omega})$.

[1] Ver [24], Teorema 3.4

Para finalizar, façamos a seguinte observação[2]:

Observação 2.5 *Sejam $\mu \in \mathcal{M}(\overline{\Omega})$ e $f \in L^1(\Omega)$. A medida definida por*

$$\mu_f(E) = \int_E f d\mu$$

é uma medida finita e, portanto, uma medida de Radon. Mais ainda:

$$\|\mu_f\| = \|f\|_1.$$

Assim, a aplicação

$$\begin{array}{rccc} T : & L^1(\Omega) & \to & \mathcal{M}(\overline{\Omega}) \\ & f & \mapsto & \mu_f \end{array}$$

é uma imersão isométrica, donde concluímos que podemos considerar $L^1(\Omega)$ como um subespaço de $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$. Desta forma, se $\{u_k\}$ é uma sequência em $W_0^{1,N}(\Omega)$ com $\|u_k\| \le 1$, podemos enxergar as sequências $\{|u_k|^N\}, \{|\nabla u_k|^N\}$ e $\{e^{\alpha_N |u_k|^{\frac{N}{N-1}}}\}$ como sequências no espaço das medidas de Radon com sinal, já que, pela definição de $W^{1,N}(\Omega)$ e pela Desigualdade de Trudinger-Moser, sabemos que

$$\{|u_k|^N\}, \{|\nabla u_k|^N\}, \{e^{\alpha_N |u_k|^{\frac{N}{N-1}}}\} \subset L^1(\Omega).$$

Com isto em mente, estamos prontos para enunciar o Princípio de Concentração de Compacidade de P.-L. Lions.

Teorema 2.6 *Sejam $N \ge 2$ e Ω um subconjunto de $\mathbb{R}^N$ aberto e limitado. Seja $\{u_k\}$ uma sequência em $W_0^{1,N}(\Omega)$ tal que $\|u_k\| \le 1$. Sejam $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ e $\mu \in \mathcal{M}(\overline{\Omega})$ e assuma que*

$$u_k \rightharpoonup u \text{ em } W_0^{1,N}(\Omega), \quad u_k \to u \text{ q.t.p. em } W_0^{1,N}(\Omega) \quad \text{e} \quad |\nabla u_k|^N \overset{*}{\rightharpoonup} \mu \text{ em } \mathcal{M}(\overline{\Omega}). \tag{2.1}$$

(i) Se $u = 0$, $\mu = \delta_{x_0}$, para algum $x_0 \in \overline{\Omega}$, e

$$\int_\Omega e^{\alpha_N |u_k|^{\frac{N}{N-1}}} \to c + |\Omega|,$$

para algum $c \in [0, \infty)$, então

$$e^{\alpha_N |u_k|^{\frac{N}{N-1}}} \overset{*}{\rightharpoonup} c\delta_{x_0} + |\Omega| \quad \text{em} \quad \mathcal{M}(\overline{\Omega}).$$

[2]Ver [24], página 223

(ii) Se $u = 0$ e μ não é uma massa de Dirac concentrada em um ponto, então existe $p > 1$ tal que

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \int_\Omega e^{p\alpha_N |u_k|^{\frac{N}{N-1}}} < \infty.$$

(iii) Se $u \neq 0$, então existe $p > 1$ tal que

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \int_\Omega e^{p\alpha_N |u_k|^{\frac{N}{N-1}}} < \infty. \tag{2.2}$$

Além disso, em ambos os casos (ii) e (iii),

$$e^{\alpha_N |u_k|^{\frac{N}{N-1}}} \to e^{\alpha_N |u|^{\frac{N}{N-1}}} \quad em\ L^1(\Omega). \tag{2.3}$$

Para garantirmos a multiplicidade de solução para o principal problema desta dissertação (ver o problema (P_λ) no Capítulo 3), fizemos o uso do item *(iii)* do princípio enunciado acima. Este item está relacionado com a desigualdade de Trudinger-Moser, a qual assegura a existência de uma constante $C = C(N)$, dependendo apenas de N, tal que

$$\int_\Omega e^{\alpha_N |u|^{\frac{N}{N-1}}} \leq C|\Omega|, \tag{2.4}$$

para toda $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$, com $\|u\| \leq 1$, onde

$$\alpha_N = N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}$$

e ω_{N-1} é a medida da esfera unitária $(N-1)$-dimensional. Além disso, (2.4) não ocorre se α_N for substituído por qualquer número $\beta > \alpha_N$, isto é, dependendo da escolha de u, a integral do lado esquerdo pode assumir valores arbitrariamente grandes.

A grosso modo, o item *(iii)* do Princípio de Concentração de Compacidade de P.-L. Lions, ver [34, Teorema I.6], garante-nos que, se uma sequência $\{u_k\}$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$ converge pontual e fracamente para alguma função $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$, $u \neq 0$, então uma desigualdade do tipo (2.4) ocorre para a sequência $\{u_k\}$, com uma constante maior do que α_N, dependendo de $\|u\|$. Neste sentido, podemos dizer que o item *(iii)* do Teorema 2.6 é um "refinamento" da Desigualdade de Trudinger-Moser.

2.1 Simetrização de Schwarz

O Princípio de Concentração de Compacidade para Desigualdades do Tipo Trudinger-Moser foi enunciado primeiramente em [34, Teorema I.6 e Observação I.18] e, posteriormente, aplicado para determinar vários resultados na teoria de EDP's elípticas (ver, por exemplo, [3, 20]). A prova original dada em [34], para o caso $N \geq 3$, e a demonstração do refinamento da Desigualdade de Trudinger-Moser que daremos na próxima seção envolvem argumentos de simetrização e, por isto, faremos uma breve exposição sobre Simetrização de Schwarz.

Definição 2.7 *Sejam Ω um domínio limitado, $1 \leq p \leq \infty$ e $u \in L^p(\Omega)$ uma função positiva. O rearranjo decrescente de u é a aplicação $u^{\#} : [0, |\Omega|] \to [0, \infty]$ definida por*

$$u^{\#}(s) = \sup\{t \geq 0; |\{x \in \Omega; |u(x)| > t\}| > s\}.$$

Exemplo 2.8 (Kawohl (1986)) *Sejam $\Omega = (-2, 2) \subset \mathbb{R}$ e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por*

$$u(x) = \begin{cases} 2 + x, & se \quad -2 \leq x \leq -1, \\ 1 & se \quad -1 \leq x \leq 0, \\ 1 + x, & se \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2 - x, & se \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Então, não é difícil ver que

$$u^{\#}(s) = \begin{cases} \dfrac{3 - s}{2}, & se \quad 0 \leq s \leq 1, \\ 1, & se \quad 1 \leq s \leq 2, \\ \dfrac{4 - s}{2}, & se \quad 2 \leq s \leq 4. \end{cases}$$

Geometricamente, temos

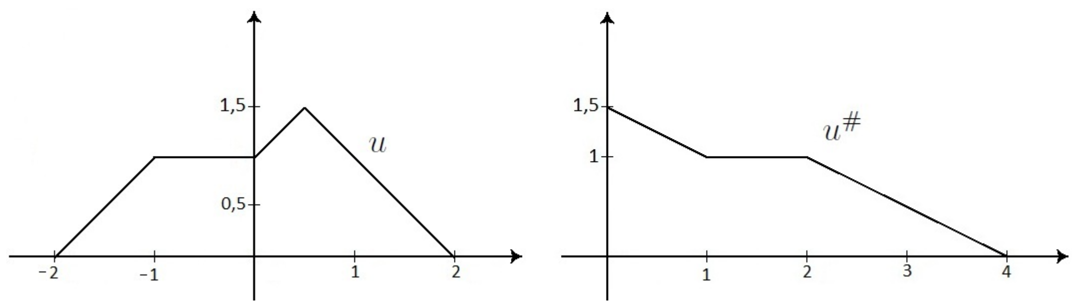

Figura 2.1: Exemplo 2.8

A seguir, apresentamos alguns resultados e definições que serão utilizadas mais adiante.

Proposição 2.9 ([30], Proposição 1.1.1) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitado e $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Então $u^{\#}$ é não-crescente e contínua à esquerda.*

Definição 2.10 *Duas funções reais $u : \Omega_1 \to \mathbb{R}$ e $v : \Omega_2 \to \mathbb{R}$, não necessariamente definidas sobre o mesmo domínio, são ditas equimensuráveis se*

$$|\{x \in \Omega_1; u(x) > t\}| = |\{y \in \Omega_2; v(y) > t\}|, \quad \textit{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Observação 2.11 *Se u e v são equimensuráveis, dizemos que u é um rearranjamento de v e vice-versa.*

No sentido da observação acima, a proposição a seguir, juntamente com a Proposição 2.9, explicam porque $u^{\#}$ é chamada de rearranjo decrescente de u (ver Definição 2.7).

Proposição 2.12 ([30], Proposição 1.1.3) *As funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ e $u^{\#} : [0, |\Omega|] \to \mathbb{R}$ são equimensuráveis, isto é, para todo t,*

$$|\{x \in \Omega; u(x) > t\}| = |\{s \in [0, |\Omega|]; u^{\#}(s) > t\}|.$$

Proposição 2.13 ([30], Corolário 1.1.3) *Sejam $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $G(u) \in L^1(\Omega)$. Então $G(u^{\#}) \in L^1((0, |\Omega|))$ e*

$$\int_\Omega G(u) = \int_0^{|\Omega|} G(u^{\#}(s))ds.$$

Corolário 2.14 ([30], Corolário 1.1.4) *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $u \in L^p(\Omega)$. Então $u^{\#} \in L^p((0, |\Omega|))$ e*

$$\|u\|_p = \|u^{\#}\|_{L^p((0,|\Omega|))}.$$

Definiremos agora a *simetrização de Schwarz de u* (ou *decrescimento radialmente simétrico* de u), a qual, juntamente com a bola $\Omega^\star := B_R(0)$ que satisfaz $|\Omega^\star| = |\Omega|$, será muito utilizada na demonstração dos resultados deste capítulo.

Definição 2.15 (Simetrização de Schwarz) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado, $1 \leq p \leq \infty$ e $u \in L^p(\Omega)$ uma função não-negativa. O decrescimento radialmente simétrico $u^\star : \Omega^\star \to [0, \infty)$ de u é definido por*

$$u^\star(x) = u^{\#}\left(\frac{\omega_{N-1}}{N}|x|^N\right),$$

onde $x \in \Omega^\star$, $\Omega^\star$ é a bola aberta de centro na origem e de raio R que satisfaz $|\Omega^\star| = |\Omega|$ e $u^{\#}$ é a simetrização de Schwarz de u.

2.2 Um Refinamento da Desigualdade de Trudinger-Moser

Como dito anteriormente, o refinamento da Desigualdade de Trudinger-Moser devido a P.-L. Lions é aplicado para determinar vários resultados na teoria de EDP's elípticas, inclusive no principal teorema desta dissertação (Teorema 4.1). O problema é que nas várias aplicações deste resultado usa-se que (2.2) é válido para todo $p < P$, onde

$$P = \begin{cases} \left(1 - \int_\Omega |\nabla u|^N\right)^{-\frac{1}{N-1}}, & \text{se } \int_\Omega |\nabla u|^N < 1, \\ \infty, & \text{se } \int_\Omega |\nabla u|^N = 1. \end{cases} \tag{2.5}$$

Entretanto, se nos basearmos na demonstração dada em [34], tal argumento não é verdade (para mais detalhes, ver [16], Exemplo 2.3), já que a prova dada em [34] por P.-L. Lions, para $N \geq 3$, envolve a simetrização de Schwarz $u^\bigstar$ de u e a bola $\Omega^\bigstar := B_R(0)$ que satisfaz $|\Omega^\bigstar| = |\Omega|$, e tal argumento de simetrização assegura a veracidade de (2.2) no item (iii) apenas para $p < \overline{P}$, onde $\overline{P}$ é definido como

$$\overline{P} = \begin{cases} \left(1 - \int_{\Omega^\bigstar} |\nabla u^\bigstar|^N\right)^{-\frac{1}{N-1}}, & \text{se } \int_{\Omega^\bigstar} |\nabla u^\bigstar|^N < 1, \\ \infty, & \text{se } \int_{\Omega^\bigstar} |\nabla u^\bigstar|^N = 1. \end{cases} \tag{2.6}$$

Pela *desigualdade de Pólya-Szegö*, isto é,

$$\int_{\Omega^\bigstar} |\nabla u^\bigstar|^N \leq \int_\Omega |\nabla u|^N, \tag{2.7}$$

obtemos que $\overline{P} \leq P$. Como a igualdade ocorre apenas para uma classe muito particular de funções u (ver [15, 22]), segue, mais geralmente, que $\overline{P} < P$. Portanto, além de ser um refinamento da Desigualdade de Trudinger-Moser, podemos dizer que a prova do teorema a seguir corrige a demonstração do item (iii) do Teorema de P.-L. Lions (Teorema 2.6), no sentido de que obtem-se uma limitação superior ótima para o valor de p em (2.2). Isto é, sendo P definido como em (2.5), sob as mesmas hipóteses do item (iii) do Teorema de P.-L. Lions, tem-se que (2.2) é válido para todo $p < P$. Ademais, se $p \geq P$, então esta conclusão não é válida. A prova do resultado a seguir é devido à Černý, Cianchi e Hencl e pode ser encontrada em [16].

Teorema 2.16 *Sejam $N \geq 2$ e Ω um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^N$. Se $\{u_k\} \subset W_0^{1,N}(\Omega)$ e $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ são tais que*

$$\|u_k\| \leq 1, \quad u_k \rightharpoonup u \text{ em } W_0^{1,N}(\Omega) \quad e \quad u_k \to u \text{ q.t.p. em } W_0^{1,N}(\Omega), \tag{2.8}$$

e P é definido como em (2.5), então, para todo $p < P$, existe uma constante $C = C(N,p)$ tal que

$$\int_\Omega e^{p\alpha_N |u_k|^{\frac{N}{N-1}}} \leq C. \tag{2.9}$$

Além disso, a conclusão é falsa se $p \geq P$.

O Teorema acima valida as várias aplicações do Princípio da Concentração de Compacidade em $W_0^{1,N}(\Omega)$, onde é explorada a validade de (2.2) para toda gama dos valores de p menor do que P. A prova do Teorema 2.16 a ser apresentada aqui, mesmo utilizando (2.7), baseia-se em um argumento diferente. Grosseiramente falando, vamos mostrar que a sequência simetrizada $\{u_k^\star\}$ de qualquer sequência crítica $\{u_k\}$ tem um comportamento especial. Em seguida, transformaremos esta informação para a seqüência original $\{u_k\}$ sem fazer uso da simetrização de Schwarz de u e, finalmente, obteremos a conclusão desejada.

Prova do Teorema 2.16: Como $u_k \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$, pelo Teorema 1.15, segue que $\|u\| \leq 1$. Dividiremos a demonstração em 3 etapas.

Etapa 1 Começaremos assumindo que

$$\int_\Omega |\nabla u|^N < 1$$

e, para obter a conclusão desejada, faremos um argumento por contradição. Assim, suponha que exista uma sequência $\{u_k\} \subset W_0^{1,N}(\Omega)$ qua satisfaz (2.8) e que torne (2.9) falso, para algum $p_1 < P$. Isto é, suponha, por absurdo, que

$$\int_\Omega e^{p_1\alpha_N |u_k|^{\frac{N}{N-1}}} \to \infty, \quad \text{quando } k \to \infty. \tag{2.10}$$

Afirmação 1: $u_k^\star$ e u_k são equimensuráveis.

De fato, para todo t, temos que

$$|\{y \in \Omega^\star; u_k^\star(y) > t\}| = \left|\left\{y \in \Omega^\star; u_k^\# \left(\frac{\omega_{N-1}}{N}|y|^N\right) > t\right\}\right|. \tag{2.11}$$

Como

$$y \in \Omega^\star = B_R(0) \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\omega_{N-1}}{N}|y|^N \leq \frac{\omega_{N-1}}{N}R^N = |B_R(0)| = |\Omega| \Leftrightarrow \frac{\omega_{N-1}}{N}|y|^N \in [0, |\Omega|],$$

segue que

$$\left|\left\{y \in \Omega^\star; u_k^\# \left(\frac{\omega_{N-1}}{N}|y|^N\right) > t\right\}\right| = |s \in [0, |\Omega|]; u_k^\#(s) > t|. \tag{2.12}$$

Substituindo (2.12) em (2.11), concluimos que

$$|\{y \in \Omega^\star; u_k^\star(y) > t\}| = |s \in [0, |\Omega|]; u_k^\#(s) > t|. \tag{2.13}$$

Pela Proposição 2.12, sabemos que u_k e $u_k^\#$ são equimensuráveis, isto é,

$$|s \in [0, |\Omega|]; u_k^\#(s) > t| = |x \in \Omega; u_k(x) > t|,$$

donde, substituindo em (2.13), obtemos

$$|\{y \in \Omega^\star; u_k^\star(y) > t\}| = |x \in \Omega; u_k(x) > t|,$$

ou seja, $u_k^\star$ e u_k são equimensuráveis, provando, portanto, o que tínhamos afirmado.

Usando a afirmação anterior, pela Proposição 2.13, obtemos que

$$\int_{\Omega^\star} e^{p_1\alpha_N|u_k^\star|^{\frac{N}{N-1}}} = \int_\Omega e^{p_1\alpha_N|u_k|^{\frac{N}{N-1}}}.$$

Logo, supor (2.10) nos garante que

$$\int_{\Omega^\star} e^{p_1\alpha_N|u_k^\star|^{\frac{N}{N-1}}} \to \infty, \quad \text{quando } k \to \infty. \tag{2.14}$$

Desde que

$$\left(\int_0^{|\Omega|} \left(\alpha_N^{\frac{N-1}{N}} \left(-\frac{du_k^\#}{dr}\right)\right)^N r^{N-1} dr\right)^{\frac{1}{N}} = \|\nabla u_k^\star\|_{L^N(\Omega^\star)}$$

e, pela desigualdade de Pólya-Szegö (2.7), $\|\nabla u_k^\star\|_{L^N(\Omega^\star)} \leq \|\nabla u_k\|_{L^N(\Omega)} = \|u_k\|$, segue que

$$\left(\int_0^{|\Omega|} \left(\alpha_N^{\frac{N-1}{N}} \left(-\frac{du_k^\#}{dr}\right)\right)^N r^{N-1} dr\right)^{\frac{1}{N}} \leq \|u_k\| \leq 1, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.15}$$

Sendo $u_k^\#(|\Omega|) = 0$ e $u_k^\#$ localmente absolutamente contínua (Ver Proposição 2.9), o Teorema Fundamental do Cálculo nos garante que

$$u_k^\#(s) = \int_s^{|\Omega|} -\frac{du_k^\#}{dr} dr, \quad s \in (0, |\Omega|). \tag{2.16}$$

Assim, pela desigualdade de Hölder, com $1/N + (N-1)/N = 1$, e por (2.15), concluimos que

$$\begin{aligned}
&u_k^{\#}(s)\\
&= \int_s^{|\Omega|} -\frac{du_k^{\#}}{dr}dr\\
&= \int_s^{|\Omega|} \alpha_N^{\frac{N-1}{N}}\left(-\frac{du_k^{\#}}{dr}\right) r^{\frac{N-1}{N}} \frac{1}{\alpha_N^{\frac{N-1}{N}} r^{\frac{N-1}{N}}}dr\\
&\leq \left(\int_s^{|\Omega|}\left(\alpha_N^{\frac{N-1}{N}}\left(-\frac{du_k^{\#}}{dr}\right)\right)^N r^{N-1}dr\right)^{\frac{1}{N}} \left(\int_s^{|\Omega|}\left(\frac{1}{\alpha_N^{\frac{N-1}{N}} r^{\frac{N-1}{N}}}\right)^{\frac{N}{N-1}} dr\right)^{\frac{N-1}{N}}\\
&= \left(\int_s^{|\Omega|}\left(\alpha_N^{\frac{N-1}{N}}\left(-\frac{du_k^{\#}}{dr}\right)\right)^N r^{N-1}dr\right)^{\frac{1}{N}} \left(\int_s^{|\Omega|}\left(\frac{1}{\alpha_N r}\right) dr\right)^{\frac{N-1}{N}}\\
&= \left(\int_s^{|\Omega|}\left(\alpha_N^{\frac{N-1}{N}}\left(-\frac{du_k^{\#}}{dr}\right)\right)^N r^{N-1}dr\right)^{\frac{1}{N}} \left(\frac{1}{\alpha_N}\log\left(\frac{|\Omega|}{s}\right)\right)^{\frac{N-1}{N}}\\
&\leq \left(\frac{1}{\alpha_N}\log\left(\frac{|\Omega|}{s}\right)\right)^{\frac{N-1}{N}}, \quad s \in (0, |\Omega|).
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Afirmação 2: Dado $p_2 \in (p_1, P)$, para quaisquer $k_0 \in \mathbb{N}$ e $s_0 \in (0, |\Omega|)$, existem $k \in \mathbb{N}$, $k > k_0$, e $s \in (0, s_0)$ tais que

$$u_k^{\#}(s) \geq \left(\frac{1}{p_2\alpha_N}\right)^{\frac{N-1}{N}}\left(\log\left(\frac{|\Omega|}{s}\right)\right)^{\frac{N-1}{N}}. \tag{2.18}$$

De fato, suponha, por absurdo, que existam $k_0 \in \mathbb{N}$ e $s_0 \in (0, |\Omega|)$ tais que

$$u_k^{\#}(s) < \left(\frac{1}{p_2\alpha_N}\right)^{\frac{N-1}{N}}\left(\log\left(\frac{|\Omega|}{s}\right)\right)^{\frac{N-1}{N}}, \quad \text{para todo } s \in (0, s_0), k \geq k_0.$$

Desde que $p_1 < p_2$, a expressão acima, juntamente com (2.17), nos garante que

$$\begin{aligned}
\int_0^{|\Omega|} e^{\alpha_N p_1 |u_k^{\#}|^{\frac{N}{N-1}}} ds &= \int_0^{s_0} e^{\alpha_N p_1 |u_k^{\#}|^{\frac{N}{N-1}}} ds + \int_{s_0}^{|\Omega|} e^{\alpha_N p_1 |u_k^{\#}|^{\frac{N}{N-1}}} ds \\
&\leq \int_0^{s_0} e^{\alpha_N p_1 \left| \left(\frac{1}{p_2 \alpha_N}\right)^{\frac{N-1}{N}} \left(\log\left(\frac{|\Omega|}{s}\right)\right)^{\frac{N-1}{N}} \right|^{\frac{N}{N-1}}} ds \\
&\quad + \int_{s_0}^{|\Omega|} e^{\alpha_N p_1 \left| \left(\frac{1}{\alpha_N} \log\left(\frac{|\Omega|}{s}\right)\right)^{\frac{N-1}{N}} \right|^{\frac{N}{N-1}}} ds \\
&= \int_0^{s_0} e^{\log\left(\frac{|\Omega|}{s}\right)^{\frac{p_1}{p_2}}} ds + \int_{s_0}^{|\Omega|} e^{\log\left(\frac{|\Omega|}{s}\right)^{p_1}} ds \\
&= \int_0^{s_0} \left(\frac{|\Omega|}{s}\right)^{\frac{p_1}{p_2}} ds + \int_{s_0}^{|\Omega|} \left(\frac{|\Omega|}{s}\right)^{p_1} ds \\
&\leq |\Omega|^{\frac{p_1}{p_2}} \int_0^{s_0} s^{-\frac{p_1}{p_2}} ds + \left(\frac{|\Omega|}{s_0}\right)^{p_1} (|\Omega| - s_0) \\
&= |\Omega|^{\frac{p_1}{p_2}} \frac{p_2 s_0^{\frac{p_2 - p_1}{p_2}}}{p_2 - p_1} + \left(\frac{|\Omega|}{s_0}\right)^{p_1} (|\Omega| - s_0) \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

o que contraria (2.14). Está provada, portanto, a Afirmação 2.

Desta forma, passando a uma subsequência se necessário, existe uma sequência $\{s_k\}$ tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$u_k^{\#}(s_k) \geq \left(\frac{1}{p_2 \alpha_N}\right)^{\frac{N-1}{N}} \left(\log\left(\frac{|\Omega|}{s_k}\right)\right)^{\frac{N-1}{N}} \quad \text{e} \quad s_k \leq \frac{1}{k}. \tag{2.19}$$

Agora, dado $L > 0$, definamos os operadores $T^L : W^{1,N}(\Omega) \to W^{1,N}(\Omega)$ e $T_L : W^{1,N}(\Omega) \to W^{1,N}(\Omega)$, respectivamente, por

$$T^L(v) = \min\{|v|, L\}\text{sign}(v) \qquad \text{e} \qquad T_L(v) = v - T^L(v).$$

Assim,

(i) se $\min\{|u_k|, L\} = L$, temos que

$$\nabla(T^L(u_k)) = 0 \qquad \text{e} \qquad \nabla(T_L(u_k)) = \nabla u_k;$$

(ii) se $\min\{|u_k|, L\} = |u_k|$, temos que

$$\nabla(T^L(u_k)) = \nabla u_k \qquad \text{e} \qquad \nabla(T_L(u_k)) = 0.$$

Logo, de (i) e (ii), segue que

$$\int_\Omega |\nabla u_k|^N = \int_\Omega |\nabla(T^L(u_k))|^N + \int_\Omega |\nabla(T_L(u_k))|^N. \tag{2.20}$$

Além disso, temos que

$$T^L(u_k) \to T^L(u) \text{ q.t.p. em } \Omega \qquad \text{e} \qquad T_L(u_k) \to T^L(u) \text{ q.t.p. em } \Omega. \tag{2.21}$$

Como $\{T^L(u_k)\}$ é uma sequência limitada em $W^{1,N}(\Omega)$ (pois $\{u_k\}$ também é), $\{T^L(u_k)\}$ possui uma subsequência fracamente convergente em $W^{1,N}(\Omega)$. Devido a (2.21), temos que o limite fraco em $W^{1,N}(\Omega)$ desta subsequência também é $T^L(u)$ e, portanto, segue que

$$T^L(u_k) \rightharpoonup T^L(u) \text{ em } W^{1,N}(\Omega) \qquad \text{e} \qquad T_L(u_k) \rightharpoonup T^L(u) \text{ em } W^{1,N}(\Omega).$$

A seguir, fixemos $p_3 \in (p_2, P)$ e provemos que podemos tomar L suficientemente grande de forma que

$$\frac{1 - \int_\Omega |\nabla u|^N}{1 - \int_\Omega |\nabla(T^L(u))|^N} > \left(\frac{p_3}{P}\right)^{N-1}. \tag{2.22}$$

Com efeito, observe que

$$\begin{aligned} T^L(v) &= \min\{|v|, L\}\text{sign}(v) \\ &= \begin{cases} |v|\text{sign}(v), & \text{se } |v| \le L, \\ L\text{sign}(v), & \text{se } |v| > L, \end{cases} \\ &= \begin{cases} -v, & \text{se } -L \le v \le 0, \\ v, & \text{se } 0 \le v \le L, \\ -L, & \text{se } v < -L, \\ L, & \text{se } v > L, \end{cases} \end{aligned}$$

donde concluimos que $T^L(v)$ é uma função contínua de v. Assim, como v possui derivada fraca (pois $v \in W^{1,N}(\Omega)$), $T^L(v)$ também possui e, portanto, faz sentido calcularmos o gradiente de $T^L(v)$. Desta forma,

$$\nabla T^L(v) = \begin{cases} -\nabla v, & \text{se } \; -L \le v \le 0, \\ \nabla v, & \text{se } \; 0 \le v \le L, \\ 0, & \text{se } \; |v| \ge L \end{cases}$$

e, consequentemente,

$$|\nabla T^L(v)|^N = \begin{cases} |\nabla v|^N, & \text{se} \quad |v| \le L, \\ 0 & \text{se} \quad |v| \ge L. \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla T^L(v)|^N &= \int_{\{x\in\Omega; |v(x)|\le L\}} |\nabla v|^N \\ &= \int_\Omega |\nabla v|^N \mathcal{X}_{\{x\in\Omega;|v(x)\le L|\}} \\ &\to \int_\Omega |\nabla v|^N, \qquad \text{quando } L \to \infty. \end{aligned}$$

Logo, quando $L \to \infty$,

$$\frac{1 - \int_\Omega |\nabla u|^N}{1 - \int_\Omega |\nabla (T^L(u))|^N} \to 1 > \left(\frac{p_3}{P}\right)^{N-1} \quad (\text{pois } p_3 < P),$$

o que prova (2.22).

Passando a uma subsequência se necessário, de (2.19) obtemos que $u_k^\#(s_k) > L$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Consequentemente, sendo $u_k^\#(|\Omega|) = 0 < L < u_k^\#(s_k)$, pelo Teorema do Valor Intermediário (Teorema 1.9), garantimos a existência de $r_k \in (s_k, |\Omega|)$ tal que $u_k^\#(r_k) = L$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Este fato, juntamente com (2.16), (2.19) e com a desigualdade de Hölder, nos garante, de forma análoga a (2.17), que

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{p_2\alpha_N}\right)^{\frac{N-1}{N}} \left(\log\left(\frac{|\Omega|}{s_k}\right)\right)^{\frac{N-1}{N}} - L \\ &\le u_k^\#(s_k) - u_k^\#(r_k) \\ &= \int_{s_k}^{r_k} -\frac{du_k^\#}{dr} dr \\ &= \int_{s_k}^{r_k} -\frac{du_k^\#}{dr} \alpha_N^{\frac{N-1}{N}} r^{\frac{N-1}{N}} \frac{1}{\alpha_N^{\frac{N-1}{N}} r^{\frac{N-1}{N}}} dr \\ &\le \left(\int_{s_k}^{r_k} \left(-\frac{du_k^\#}{dr} \alpha_N^{\frac{N-1}{N}} r^{\frac{N-1}{N}}\right)^N dr\right)^{\frac{1}{N}} \left(\int_{s_k}^{r_k} \left(\frac{1}{\alpha_N^{\frac{N-1}{N}} r^{\frac{N-1}{N}}}\right)^{\frac{N}{N-1}} dr\right)^{\frac{N-1}{N}} \\ &\le \left(\int_{s_k}^{r_k} \left(-\frac{du_k^\#}{dr} \alpha_N^{\frac{N-1}{N}} r^{\frac{N-1}{N}}\right)^N dr\right)^{\frac{1}{N}} \left(\frac{1}{\alpha_N} \log\left(\frac{|\Omega|}{s_k}\right)\right)^{\frac{N-1}{N}}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{p_2}\right)^{\frac{N-1}{N}} - \frac{L}{\left(\frac{1}{\alpha_N}\log\left(\frac{|\Omega|}{s_k}\right)\right)^{\frac{N-1}{N}}} &\leq \left(\int_{s_k}^{r_k}\left(-\frac{du_k^{\#}}{dr}\alpha_N^{\frac{N-1}{N}} r^{\frac{N-1}{N}}\right)^N dr\right)^{\frac{1}{N}} \\ &\leq \left(\int_{0}^{r_k}\left(-\frac{du_k^{\#}}{dr}\alpha_N^{\frac{N-1}{N}} r^{\frac{N-1}{N}}\right)^N dr\right)^{\frac{1}{N}}, \quad (2.24)\end{aligned}$$

Como $s_k \to 0$ quando $k \to \infty$, obtemos

$$\frac{L}{\left(\frac{1}{\alpha_N}\log\left(\frac{|\Omega|}{s_k}\right)\right)^{\frac{N-1}{N}}} \to 0 \quad \text{quando} \quad k \to \infty. \tag{2.25}$$

Assim, por (2.24) e (2.25) e pelo fato de ser $p_2 < p_3$, segue que, para k suficientemente grande,

$$\left(\frac{1}{p_3}\right)^{\frac{N-1}{N}} \leq \left(\int_{0}^{r_k}\left(-\frac{du_k^{\#}}{dr}\alpha_N^{\frac{N-1}{N}} r^{\frac{N-1}{N}}\right)^N dr\right)^{\frac{1}{N}}. \tag{2.26}$$

Todavia, pela desigualdade de Pólya-Szegö (2.7) e pela definição de T_L, temos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla(T_L(u_k))|^N &\geq \int_{\Omega^\star}\left|\nabla\left((T_L(u_k))^\star\right)\right|^N \\ &= \int_{\Omega^\star}\left|\nabla\left(T_L(u_k^\star)\right)\right| \\ &= \int_0^{r_k}\left(-\frac{du_k^{\#}}{dr}\alpha_N^{\frac{N-1}{N}} r^{\frac{N-1}{N}}\right)^N dr, \quad (2.27)\end{aligned}$$

onde $\Omega^\star$ é a bola em $\mathbb{R}^N$ que satisfaz $|\Omega^\star| = |\Omega|$. Substituindo (2.27) em (2.26) segue que

$$\left(\frac{1}{p_3}\right)^{N-1} \leq \int_\Omega |\nabla(T_L(u_k))|^N. \tag{2.28}$$

Portanto, utilizando a expressão (2.20), obtemos

$$p_3 \geq \frac{1}{\left(1 - \int_\Omega |\nabla(T^L(u_k))|^N\right)^{\frac{1}{N-1}}} \tag{2.29}$$

e, consequentemente,

$$p_3 \geq \frac{1}{\left(1 - \liminf_{k\to\infty}\int_\Omega |\nabla(T^L(u_k))|^N\right)^{\frac{1}{N-1}}}.$$

Pelo Teorema 1.15 e por (2.22), segue que

$$\begin{aligned} p_3 &\geq \frac{1}{\left(1 - \int_\Omega |\nabla(T^L(u))|^N\right)^{\frac{1}{N-1}}} \\ &> \frac{p_3}{P}\frac{1}{\left(1 - \int_\Omega |\nabla u|^N\right)^{\frac{1}{N-1}}}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Lembrando que estamos supondo inicialmente

$$\int_\Omega |\nabla u|^N < 1,$$

temos, por definição,

$$P = \frac{1}{\left(1 - \int_\Omega |\nabla u|^N\right)^{\frac{1}{N-1}}}.$$

Logo, de (2.30), obtemos

$$p_3 > \frac{p_3}{P}\frac{1}{\left(1 - \int_\Omega |\nabla u|^N\right)^{\frac{1}{N-1}}} = p_3,$$

o que é uma contradição.

Etapa 2 Para o caso em que

$$\int_\Omega |\nabla u|^N = 1,$$

os argumentos são semelhantes e, devido a isto, iremos apenas esboçar as diferenças. Quando

$$\int_\Omega |\nabla u|^N = 1,$$

temos que $P = \infty$. Assim, fixe $p_2 > p_1$ qualquer, escolha $p_3 > p_2$ e tome $L > 0$ de tal forma que

$$\int_\Omega |\nabla(T^L(u))|^N > 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_3}\right)^{N-1}.$$

Tomando k suficientemente grande para que ocorra (2.26), segue que (2.29) também irá ocorrer. Portanto, desde que $T^L(u_k) \to T^L(u)$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$, o Teorema 1.15 juntamente com a expressão acima garantirão que

$$\frac{p_3}{2^{\frac{1}{N-1}}} > p_3,$$

uma contradição.

Pelas Etapas 1 e 2, segue, portanto, que, se $\{u_k\}$ é uma sequência que satisfaz (2.8), então, para todo $p < P$, existe uma constante $C = C(N,p)$ tal que

$$\int_\Omega e^{p\alpha_N |u_k|^{\frac{N}{N-1}}} \leq C.$$

Etapa 3 Para concluir, resta provarmos que a conclusão é falsa se $p \geq P$. Assim, dado $p \geq P$, devemos exibir uma sequência $\{u_k\} \subset W_0^{1,N}(\Omega)$ e uma função $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ que satisfaçam

$$\|u_k\| \leq 1, \quad u_k \rightharpoonup u \text{ em } W_0^{1,N}(\Omega) \;\text{ e }\; u_k \to u \; q.t.p. \text{ em } W_0^{1,N}(\Omega),$$

e que, no entanto,

$$\int_\Omega e^{p\alpha_N |u_k|^{\frac{N}{N-1}}} \to \infty.$$

De fato, fixe $p \geq P$ e suponha, sem perda de generalidade, que $0 \in \Omega$. Seja $R > 0$ tal que $\overline{B_R(0)} \subset \Omega$. Dado $\xi \in (0,1)$, defina $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ por

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \; |x| \in [R, \infty) \\ 3A - \frac{3A}{R}|x| & \text{se } \; |x| \in \left(\frac{2R}{3}, R\right) \\ A & \text{se } \; |x| \in \left[0, \frac{2R}{3}\right], \end{cases}$$

onde $A > 0$ é escolhido de maneira que $\|u\| = \xi < 1$. Desta forma, temos, por definição, que

$$P = \frac{1}{(1-\xi^N)^{\frac{1}{N-1}}}.$$

Sendo $\mathcal{R} = R/3$, considere a sequência de Moser $\{v_k\} \subset W_0^{1,N}(\Omega)$ (ver [36]) definida por

$$v_k(x) = \frac{1}{\omega_{N-1}^{\frac{1}{N}}} \begin{cases} \left(\dfrac{k}{N}\right)^{\frac{N-1}{N}}, & 0 \leq |x| \leq \dfrac{\mathcal{R}}{e^{\frac{k}{N}}}, \\ \left(\dfrac{N}{k}\right)^{\frac{1}{N}} \log \dfrac{\mathcal{R}}{|x|}, & \dfrac{\mathcal{R}}{e^{\frac{k}{N}}} \leq |x| \leq \mathcal{R}, \\ 0 & |x| \geq \mathcal{R}. \end{cases}$$

Assim, é sabido que $\|v_k\| = 1$ (ver Proposição 4.6). Finalmente, considere

$$u_k = u + (1-\xi^N)^{\frac{1}{N}} v_k.$$

Desta forma, é fácil ver que $u_k \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$ e $u_k \to u$ q.t.p. em Ω. Além disso, como ∇u e ∇v_k possuem suportes disjuntos, isto é,

$$\operatorname{supp}(\nabla u) \cap \operatorname{supp}(\nabla v_k) = \varnothing,$$

segue que

$$\|u_k\|^N = \int_{B_R(0)} |\nabla u|^N + (1-\xi^N)\int_{B_R(0)} |\nabla v_k|^N = 1.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega e^{p\alpha_N |u_k|^{\frac{N}{N-1}}} &\geq \int_\Omega e^{P\alpha_N |u_k|^{\frac{N}{N-1}}} \\
&\geq \int_{B_{\frac{\mathcal{R}}{e^{\frac{k}{N}}}}(0)} e^{P\alpha_N |A+(1-\xi^N)^{\frac{1}{N}} v_k|^{\frac{N}{N-1}}} \\
&= \int_{B_{\frac{\mathcal{R}}{e^{\frac{k}{N}}}}(0)} e^{\alpha_N \frac{1}{(1-\xi^N)^{\frac{1}{N-1}}} |A+(1-\xi^N)^{\frac{1}{N}} v_k|^{\frac{N}{N-1}}} \\
&= \int_{B_{\frac{\mathcal{R}}{e^{\frac{k}{N}}}}(0)} e^{\alpha_N |C_1+v_k|^{\frac{N}{N-1}}} \\
&= C_2 \frac{1}{e^k} e^{(C_3+k^{\frac{N-1}{N}})^{\frac{N-1}{N}}} \\
&\to \infty, \qquad \text{quando} \quad k \to \infty,
\end{aligned}$$

onde C_1, C_2 e C_3 são constantes positivas, provando, portanto, a Etapa 3 e, consequentemente, o Teorema 2.16. ■

Capítulo 3

Existência e Não-Existência de Solução com Respeito ao Parâmetro λ

Neste capítulo, motivados pelo artigo [26], estudaremos a existência e não-existência de soluções para uma classe de problemas da forma

$$\begin{cases} -\Delta_N u = \lambda f(u), & \text{em} \quad \Omega \\ u > 0, & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_λ}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, é um domínio limitado com fronteira suave, $\Delta_N u = \text{div}(|\nabla u|^{N-2}\nabla u)$ é o operador $N-$laplaciano e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função que envolve uma combinação de termos côncavos e convexos e satisfaz as condições (A1)-(A6) detalhadas mais adiante.

Antes de enunciarmos as condições (A1)-(A6) impostas sobre a não-linearidade f, definiremos a noção de crescimento crítico do tipo Trudinger-Moser em $+\infty$.

Definição 3.1 *Dizemos que uma função $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possui crescimento crítico exponencial do tipo Trudinger-Moser em $+\infty$ se existe $\beta_0 > 0$ tal que*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{g(x,t)}{e^{\beta|t|^{\frac{N}{N-1}}}} = \begin{cases} 0, & \text{uniformemente em } x \in \Omega, \text{ para todo } \beta > \beta_0 \\ \infty, & \text{uniformemente em } x \in \Omega, \text{ para todo } \beta < \beta_0. \end{cases}$$

β_0 é conhecido como expoente crítico.

Este crescimento exponencial é motivado pela desigualdade de Trudinger-Moser (veja, por exemplo, [36]), a qual é enunciada como segue:

Teorema 3.2 (Desigualdade de Trudinger-Moser) *Seja $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ tal que $\|u\| \leq 1$. Então existe uma constante $C = C(N)$, que depende somente de N, tal que*

$$\int_\Omega e^{\alpha_N |u|^{\frac{N}{N-1}}} \leq C(N)|\Omega|, \tag{3.1}$$

onde $\alpha_N = N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}$ e ω_{N-1} é a medida da esfera unitária $(N-1)$-dimensional. Além disso, apesar da integral do lado esquerdo ser finita se α_N for substituida por qualquer $\beta > 0$, (3.1) não ocorre se α_N for substituído por qualquer $\beta > \alpha_N$, isto é, dependendo da escolha de u, a integral pode assumir valores arbitrariamente grandes.

Agora, de posse desta definição, enunciemos as hipóteses sobre a não-linearidade $f(t) = h(t)e^{|t|^{N/(N-1)}}$: existem constantes $\alpha \in (0, N-1)$ e $t_* \in (0,1)$ tais que

(A1) $h \in C^1((0,\infty))$, $h(t) = 0$ para todo $t \leq 0$ e $h(t) > 0$ para todo $t > 0$;

(A2) a função $t \mapsto f(t)$ é não-decrescente em $(0, t_*) \cup (1/t_*, \infty)$;

(A3) $\begin{cases} (1) & \lim_{t\to 0^+} \frac{h(t)}{t^\alpha} > 0 \\ (2) & \text{a aplicação } t \mapsto t^{1-N} f(t) \text{ é não-crescente em } (0, t_*); \end{cases}$

(A4) $\begin{cases} (1) & \lim_{t\to\infty} h(t)e^{\varepsilon t^{N/(N-1)}} = \infty, \text{ para todo } \varepsilon > 0 \\ (2) & \lim_{t\to\infty} h(t)e^{-\varepsilon t^{N/(N-1)}} = 0, \text{ para todo } \varepsilon > 0; \end{cases}$

(A5) $\lim_{t\to\infty} h(t)te^{\varepsilon t^{1/(N-1)}} = \infty$, para todo $\varepsilon > 0$;

(A6) existem $R > 0$ e $C > 0$ tais que, para todo $s \geq R$, $F(s) \leq Cf(s)$.

Observação 3.3 *(i) O pressuposto (A3)-(1) nos garante que f é uma não-linearidade que se comporta como t^β, $\beta \leq \alpha$, quando $t \to 0^+$.*
(ii) A hipótese (A4)-(2) é equivalente a dizer que f possui crescimento crítico do tipo Trudinger-Moser em $+\infty$ com expoente crítico $\beta_0 = 1$.

De fato, temos que, para todo $\varepsilon > 0$,

$$0 = \lim_{t\to\infty} \frac{h(t)}{e^{\varepsilon t^{N/(N-1)}}} = \lim_{t\to\infty} \frac{h(t)e^{t^{\frac{N}{N-1}}}}{e^{\varepsilon t^{N/(N-1)}} e^{|t|^{\frac{N}{N-1}}}} = \lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{e^{(\varepsilon+1)t^{N/(N-1)}}}.$$

Assim, chamando $\beta = \varepsilon + 1$, como $\varepsilon > 0$, temos que $\beta > 1$ e

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{e^{\beta t^{N/(N-1)}}} = 0.$$

Além disso, como para todo $\varepsilon > 0$,

$$\infty = \lim_{t\to\infty} h(t)e^{\varepsilon t^{N/(N-1)}} = \lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{e^{(1-\varepsilon)t^{N/(N-1)}}},$$

denotando $\beta = 1 - \varepsilon$, segue que $\beta < 1$ e

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{e^{\beta t^{N/(N-1)}}} = \infty,$$

provando, assim, que a não-linearidade f possui crescimento crítico do tipo Trudinger-Moser em $+\infty$ com expoente $\beta_0 = 1$. De forma análoga prova-se a recíproca.

Exemplo 3.4 *Para $N = 2$, um exemplo típico de não-linearidade satisfazendo as condições (A1)-(A6) é*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & se \quad t \in (-\infty, 0) \\ \sqrt{t}e^{t^2-\sqrt{2}} & se \quad t \in [0, \infty), \end{cases}$$

cujo gráfico está representado abaixo:

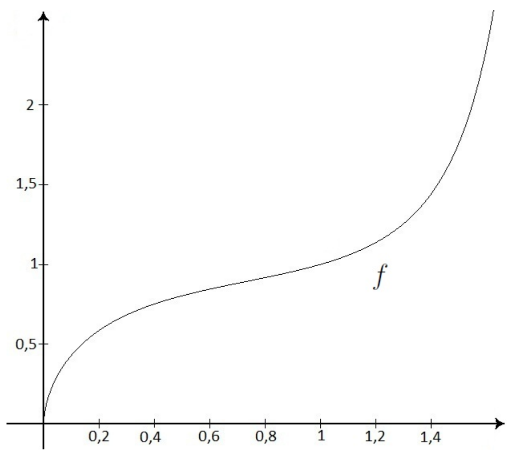

Figura 3.1: Exemplo 3.4

Considerando $\alpha = 1/2$ e $h(t) = t^{\frac{1}{2}}e^{-t^{\frac{1}{2}}}$, é fácil verificarmos as hipóteses (A1) e (A2). Verifiquemos as demais condições:

(A3) Temos que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{h(t)}{t^\alpha} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{e^{t^{\frac{1}{2}}}} = 1 > 0$$

e, para $t \in [0, \infty)$,

$$\frac{f(t)}{t} = t^{-\frac{1}{2}} e^{t^2 - t^{\frac{1}{2}}}$$

é decrescente no intervalo $(0, t_*)$, para algum t_* suficientemente pequeno, pois, para $t > 0$ próximo de zero, temos que

$$\left(\frac{f(t)}{t}\right)' = (t^{-\frac{1}{2}} e^{t^2 - t^{\frac{1}{2}}})' = \frac{1}{2} s^{-\frac{3}{2}} e^{t^2 - t^{\frac{1}{2}}} \left(4t^2 - t^{\frac{1}{2}} - 1\right) < 0.$$

(A4) Devido ao item (ii) da Observação 3.3, é suficiente provarmos que f possui crescimento crítico em $\beta_0 = 1$. Realmente, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{e^{\beta t^2}} &= \lim_{t\to\infty} \frac{t^{\frac{1}{2}} e^{t^2 - t^{\frac{1}{2}}}}{e^{\beta t^2}} \\ &= \lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}} e^{(1-\beta)t^2 - t^{\frac{1}{2}}} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se} \quad \beta > 1 \\ \infty & \text{se} \quad \beta < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

(A5) Para todo $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{t\to\infty} h(t) e^{\varepsilon t^2} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^{\frac{1}{2}} e^{\varepsilon t^2}}{e^{t^{\frac{1}{2}}}} = \infty.$$

(A6) Por fim, notemos que, para todo $t > 0$,

$$t^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} + 2t^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}.$$

Assim, utilizando também o Teorema Fundamental do Cálculo, segue que

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^t f(s) ds \\ &= \int_0^t s^{\frac{1}{2}} e^{s^2 - s^{\frac{1}{2}}} ds \\ &\leq \int_0^t \left(\frac{1}{2} s^{-\frac{1}{2}} + 2s^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\right) e^{s^2 - s^{\frac{1}{2}}} ds \\ &= \int_0^t f'(s) ds \\ &= f(t). \end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos que, para qualquer $R > 0$ e para $C = 1$,

$$t \geq R > 0 \Rightarrow F(t) \leq C f(t) = f(t).$$

Um exemplo que generaliza o anterior e que também é fácil verificarmos que satisfaz as hipóteses (A1)-(A6) é o seguinte:

Exemplo 3.5 $h(t) = t^{\alpha}(1+t)^{m}e^{-t^{\beta}}, \alpha \in (0, N-1), m \geq 0$ *e* $0 < \beta < \frac{1}{N-1}$.

Outro típico exemplo de não-linearidade f é dado por:

Exemplo 3.6 $h(t) = t^{\alpha}(1+t)^{m}e^{-t^{\beta}}, \alpha \in (0, N-1), m \geq 0$ *e* $\frac{1}{N-1} < \beta < \frac{N}{N-1}$.

Apresentamos abaixo os principais resultados deste capítulo. Apesar destes resultados não necessitarem de todas as hipóteses sobre a não-linearidade f, os pressupostos não requisitados aqui serão necessários para o Capítulo 4, onde garantiremos a multiplicidade de solução para o problema (P_λ).

Teorema 3.7 *Se a não-linearidade f satisfaz (A1), (A2), (A3)-(1) e (A3)-(2), então existe $\lambda_0 > 0$ (ver (3.18)) tal que, para qualquer $\lambda \in (0, \lambda_0)$, o problema (P_λ) possui uma única solução, digamos u_λ, com a propriedade $\|u_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \leq t_*$.*

Teorema 3.8 *Suponha que f satisfaz (A1), (A2), (A3)-(1), (A3)-(2), (A4)-(1), (A4)-(2) e (A6). Então, existe $\Lambda \in (0, \infty)$ tal que*

(i) *(P_λ) possui pelo menos uma solução, digamos u_λ, para $\lambda \in (0, \Lambda)$;*

(ii) *(P_Λ) possui solução u_Λ;*

(iii) *(P_λ) não possui solução, para $\lambda > \Lambda$.*

3.1 Formulação Variacional

Para uma melhor compreensão da definição a seguir, aconselhamos a leitura do Apêndice A, onde detalhamos como foi formulada a obordagem fraca no que diz respeito a solução do problema (P_λ).

Definição 3.9 *Diremos que $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ é uma solução fraca de (P_λ) se*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{N-2}\nabla u \nabla \phi - \lambda \int_\Omega f(u)\phi = 0, \quad \textit{para todo } \phi \in W_0^{1,N}(\Omega).$$

Considere o funcional $J_\lambda : W_0^{1,N}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{N}\int_\Omega |\nabla u|^N - \lambda \int_\Omega F(u).$$

Dessa forma (ver Apêndice A), J_λ está bem definido, é de classe C^1 em $W_0^{1,N}(\Omega)$ e sua derivada é dada por

$$J'_\lambda(u)\phi = \int_\Omega |\nabla u|^{N-2}\nabla u \nabla \phi - \lambda \int_\Omega f(u)\phi, \quad u, \phi \in W_0^{1,N}(\Omega).$$

Portanto, como os pontos críticos de J_λ são necessariamente positivos, segue que pontos críticos não-triviais de J_λ são, precisamente, as soluções fracas de (P_λ).

3.2 Existência de Mínimo Local para J_λ

Nesta seção, iremos provar a existência de um mínimo local para J_λ em uma pequena vizinhança da origem em $W_0^{1,N}(\Omega)$. Para isto, precisaremos de alguns lemas.

Lema 3.10 *Suponha que h satisfaça (A1) e (A4)-(2). Para todo $\varepsilon > 0$, existe $C = C(\varepsilon) > 0$ tal que, para todo $t \in \mathbb{R}$,*

$$h(t) \leq Ce^{\varepsilon |t|^{\frac{N}{N-1}}}.$$

Prova: Dados $\varepsilon, \gamma > 0$, por (A4)-(2), existe $R_\gamma > 0$ tal que

$$\frac{h(t)}{e^{\varepsilon |t|^{\frac{N}{N-1}}}} \leq \gamma, \quad \text{para todo } t \geq R_\gamma$$

e, consequentemente,

$$h(t) \leq \gamma e^{\varepsilon |t|^{\frac{N}{N-1}}}, \quad \text{para todo } t \geq R_\gamma. \tag{3.2}$$

Por outro lado, considerando a restrição de h ao compacto $[0, R_\gamma]$ e sendo h contínua, existe $M > 0$ tal que $|h(t)| \leq M$, para todo $t \in [0, R_\gamma]$. Como $e^{\varepsilon |t|^{\frac{N}{N-1}}}$ é crescente, podemos escolher C_1 de modo que

$$|h(t)| \leq C_1 e^{\varepsilon |t|^{\frac{N}{N-1}}}, \quad \text{para todo } t \in [0, R_\gamma]. \tag{3.3}$$

Tomando $C = \max\{\gamma, C_1\}$, por (3.2) e (3.3), segue o resultado. ∎

O seguinte corolário é imediato do lema acima, visto que f é da forma $f(t) = h(t)e^{|t|^{N/(N-1)}}$.

Corolário 3.11 *Suponha que h satisfaça (A1) e (A4)-(2). Para todo $\beta > 0$, existe $C = C(\beta) > 0$ tal que, para todo $t \in \mathbb{R}$,*

$$f(t) \leq Ce^{\beta|t|^{\frac{N}{N-1}}}.$$

Lema 3.12 *Se f satisfaz (A1), (A2) e (A4)-(2), então existem $\lambda_0 > 0$, $R_0 \in (0, \alpha_N^{\frac{N-1}{N}}/2)$ e $\delta > 0$ tais que $J_\lambda(u) \geq \delta$, quaisquer que sejam $\|u\| = R_0$ e $\lambda \in (0, \lambda_0)$.*

Prova: Temos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega F(u) &= \int_\Omega \left(\int_0^u h(t)e^{|t|^{\frac{N}{N-1}}} dt \right) \\
&= \int_{\Omega \cap \{u \leq 0\}} \left(\int_0^u h(t)e^{|t|^{\frac{N}{N-1}}} dt \right) + \int_{\Omega \cap \{t_* \leq u \leq \frac{1}{t_*}\}} \left(\int_0^u h(t)e^{|t|^{\frac{N}{N-1}}} dt \right) \\
&\quad + \int_{\Omega \cap \{0 < u < t_* \text{ ou } u > \frac{1}{t_*}\}} \left(\int_0^u h(t)e^{|t|^{\frac{N}{N-1}}} dt \right) \\
&=: X + Y + Z.
\end{aligned}$$

Como $h(t) = 0$, para todo $t \leq 0$ (hipótese (A1)), segue, claramente, que

$$X = 0. \tag{3.4}$$

Agora, sabendo que $[0, 1/t_*]$ é compacto e que $f(t) = h(t)e^{|t|^{\frac{N}{N-1}}}$ é contínua, concluímos que

$$\begin{aligned}
Y &= \int_{\Omega \cap \{t_* \leq u \leq \frac{1}{t_*}\}} \left(\int_0^u h(t)e^{|t|^{\frac{N}{N-1}}} dt \right) \\
&\leq \frac{M_*}{t_*}|\Omega|,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

onde $M_* = \max_{t \in [0,1/t_*]} f(t)$. Por último, como $t \mapsto f(t)$ é não-decrescente em $(0, t_*) \cup (1/t_*, \infty)$ (hipótese (A2)),

$$Z \leq \int_\Omega h(u)|u|e^{|u|^{\frac{N}{N-1}}}. \tag{3.6}$$

Dessa forma, de (3.4), (3.5) e (3.6), podemos concluir que

$$\int_\Omega F(u) \leq \frac{M_*}{t_*}|\Omega| + \int_\Omega h(u)|u|e^{|u|^{\frac{N}{N-1}}}. \tag{3.7}$$

Entretanto, tomando $\varepsilon = 2^{N/(N-1)} - 2$ no Lema 3.10, existe $C_1 > 0$ tal que

$$h(u)|u| \leq C_1|u|e^{(2^{N/(N-1)}-2)|u|^{N/(N-1)}}.$$

Como

$$s \leq e^{s^{\frac{N}{N-1}}}, \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R},$$

obtemos que

$$h(u)|u| \leq C_1 e^{((2|u|)^{N/(N-1)} - |u|^{N/(N-1)})}.$$

Portanto,

$$\int_\Omega h(u)|u|e^{|u|^{\frac{N}{N-1}}} \leq C_1 \int_\Omega e^{(2|u|)^{N/(N-1)}}, \quad \text{para todo } u \in W_0^{1,N}(\Omega). \tag{3.8}$$

Substituindo (3.8) em (3.7), concluímos que

$$\int_\Omega F(u) \quad \leq \quad \frac{M_*}{t_*}|\Omega| + C_1 \int_\Omega e^{(2|u|)^{\frac{N}{N-1}}}. \tag{3.9}$$

Desde que

$$R_0 < \frac{\alpha_N^{\frac{N-1}{N}}}{2},$$

temos

$$2^{\frac{N}{N-1}} R_0^{\frac{N}{N-1}} < \alpha_N.$$

Logo, se $\|u\| = R_0$, Pela Desigualdade de Trudinger-Moser (Teorema 3.2), temos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega e^{(2|u|)^{\frac{N}{N-1}}} &= \int_\Omega e^{2^{\frac{N}{N-1}} \|u\|^{\frac{N}{N-1}} \left(\frac{|u|}{\|u\|}\right)^{\frac{N}{N-1}}} \\ &= \int_\Omega e^{2^{\frac{N}{N-1}} R_0^{\frac{N}{N-1}} \left(\frac{|u|}{\|u\|}\right)^{\frac{N}{N-1}}} \\ &\leq C_2|\Omega|, \end{aligned} \tag{3.10}$$

onde $C_2 = C_2(N)$. Portanto, substituindo a expressão acima em (3.9), se $\|u\| = R_0$,

$$\int_\Omega F(u) \leq \frac{M_*}{t_*}|\Omega| + C_3|\Omega| = \left(\frac{M_*}{t_*} + C_3\right)|\Omega| \tag{3.11}$$

e, consequentemente,

$$\sup_{\|u\|=R_0} \int_\Omega F(u) \leq C, \quad \text{para algum } C > 0.,$$

donde

$$-\sup_{\|u\|=R_0} \int_\Omega F(u) \geq -C.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\inf_{\|u\|=R_0} J_\lambda(u) &= \inf_{\|u\|=R_0} \left\{ \frac{1}{N}\|u\| - \lambda \int_\Omega F(u) \right\} \\
&\geq \frac{R_0^N}{N} + \lambda \inf_{\|u\|=R_0} \left\{ - \int_\Omega F(u) \right\} \\
&= \frac{R_0^N}{N} - \lambda \sup_{\|u\|=R_0} \left\{ \int_\Omega F(u) \right\} \\
&\geq \frac{R_0^N}{N} - \lambda C.
\end{aligned}$$

Assim, para $\lambda_0 = R_0^N/2CN$, obtemos que

$$\inf_{\|u\|=R_0} J_\lambda(u) \geq \frac{R_0^N}{2N} = \delta > 0,$$

para todo $\lambda \in (0, \lambda_0)$. ∎

O lema a seguir será essencial para demonstrarmos o Lema 3.14, que é o principal resultado desta seção.

Lema 3.13 *Se a não-linearidade f satisfaz (A1) e (A3)-(1), então, para todo $\lambda > 0$, temos que $J_\lambda(tu) < 0$, para $t > 0$ suficientemente pequeno e $u \in W_0^{1,N}(\Omega)\backslash\{0\}$.*

Prova: Temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} J_\lambda(tu) &= t^{N-1}\|u\|^N - \lambda \int_\Omega f(tu)u \\
&= t^{N-1}\|u\|^N - \lambda \int_\Omega h(tu) e^{|tu|^{\frac{N}{N-1}}} u.
\end{aligned}$$

Como $h(t) = 0$, para todo $t \leq 0$ (hipótese (A1)), segue que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} J_\lambda(tu) &= t^{N-1}\|u\|^N - \lambda \int_{\Omega\cap\{u>0\}} h(tu) e^{|tu|^{\frac{N}{N-1}}} u \\
&= t^{N-1}\|u\|^N - \lambda t^\alpha \int_{\Omega\cap\{u>0\}} \frac{h(tu)}{(tu)^\alpha} e^{|tu|^{\frac{N}{N-1}}} u^{\alpha+1}.
\end{aligned}$$

Por (A3)-(1), $\lim_{t\to 0^+} h(tu)/(tu)^\alpha > 0$ e, portanto, para $t > 0$ pequeno e $u \in W_0^{1,N}(\Omega)\backslash\{0\}$, a integral da expressão acima é positiva e limitada. Logo, usando que $\alpha < N-1$, obtemos que $d/dt(J_\lambda(tu)) < 0$, quaisquer que sejam $t > 0$ pequeno e $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ não-nula. Assim, a aplicação $t \mapsto J_\lambda(tu)$ é decrescente e sendo $J_\lambda(0) = 0$, obtemos que $J_\lambda(tu) < 0$ para $t > 0$ suficientemente pequeno e qualquer $u \in W_0^{1,N}(\Omega)\backslash\{0\}$.

∎

Lema 3.14 *Se f satisfaz (A1), (A2), (A3)-(1), (A4)-(2) e (A6), então, para todo $\lambda \in (0, \lambda_0)$, J_λ possui mínimo local não-trivial próximo a origem em $W_0^{1,N}(\Omega)$.*

Prova: Considere R_0, λ_0 e δ do Lema 3.12 e fixe $\lambda \in (0, \lambda_0)$. Pelo Lema 3.13, segue que

$$\inf_{\|u\| \leq R_0} J_\lambda(u) < 0$$

e, em virtude do Lema 3.12, se tal ínfimo for atingido em algum u_λ, então $\|u_\lambda\| < R_0$. Portanto, u_λ será mínimo local de J_λ.

Mostremos que, de fato, tal ínfimo é atingido: seja $\{u_n\} \subset \{\|u\| \leq R_0\}$ tal que $J_\lambda(u_n) \to \inf_{\|u\| \leq R_0} J_\lambda(u)$. Como $\{u_n\}$ é limitada, existe $u_\lambda \in W_0^{1,N}(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u_\lambda$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$. Assim, pelo Teorema 1.15,

$$\|u_\lambda\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\| \leq R_0 \tag{3.12}$$

e, consequentemente,

$$\frac{1}{N}\|u_\lambda\|^N \leq \frac{1}{N}(\liminf_{n\to\infty} \|u_n\|)^N,$$

donde

$$\frac{1}{N}\|u_\lambda\|^N \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{N}\|u_n\|^N. \tag{3.13}$$

Além disso, provemos ainda que

$$\int_\Omega F(u_n) \to \int_\Omega F(u_\lambda). \tag{3.14}$$

Para isto, iremos utilizar o Teorema de Vitali (Teorema 1.8). Como $u_n \rightharpoonup u_\lambda$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$, então (a menos de subsequência) $u_n \to u_\lambda$ q.t.p. em Ω, donde $F(u_n) \to F(u_\lambda)$ q.t.p. em Ω. Ademais, por (A6), temos que $F(s) \leq Cf(s)$ para todo $s \geq R$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |F(u_n)u_n| &= \int_{\{0 \leq u_n \leq R\}} |F(u_n)u_n| + \int_{\{u_n > R\}} |F(u_n)u_n| \\
&\leq C_1 + C\int_{\{u_n > R\}} f(u_n)|u_n| \\
&= C_1 + C\int_{\{u_n > R\}} h(u_n)|u_n|e^{|u_n|^{\frac{N}{N-1}}} \\
&\leq C_1 + C\int_\Omega h(u_n)|u_n|e^{|u_n|^{\frac{N}{N-1}}},
\end{aligned}$$

onde, na primeira desigualdade, usamos também o fato de ser $F(t)t$ uma função contínua. Agora, utilizando (3.8) e (3.10), concluímos que a última integral da expressão acima é limitada e, portanto, que existe $\tilde{C} > 0$ tal que

$$\sup_n \int_\Omega |F(u_n)u_n| = \tilde{C} < \infty.$$

Desta forma, dado $\varepsilon > 0$, defina

$$\mu_\varepsilon = sup_{|t| \leq \frac{2\tilde{C}}{\varepsilon}} |F(t)|.$$

Assim, tomando $\delta = \varepsilon/(2\mu_\varepsilon)$, temos que, para qualquer $E \subset \Omega$ tal que $|E| \leq \delta$,

$$\begin{aligned}
\int_E |F(u_n)| &\leq \int_{E \cap \{|u_n| \geq \frac{2\tilde{C}}{\varepsilon}\}} \frac{|F(u_n)u_n|}{|u_n|} + \int_{E \cap \{|u_n| \leq \frac{2\tilde{C}}{\varepsilon}\}} |F(u_n)| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2\tilde{C}} \int_{E \cap \{|u_n| \geq \frac{2\tilde{C}}{\varepsilon}\}} |F(u_n)u_n| + \mu_\varepsilon \int_{E \cap \{|u_n| \geq \frac{2\tilde{C}}{\varepsilon}\}} 1 \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2\tilde{C}} \tilde{C} + \mu_\varepsilon \int_E 1 \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \mu_\varepsilon |E| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto $\{F(u_n)\}$ é uma família equi-integrável em $L^1(\Omega)$ e, consequentemente, pelo Teorema de Vitali, $(F(u_n))$ converge para $F(u_\lambda)$ em $L^1(\Omega)$, ou seja,

$$\int_\Omega F(u_n) \to \int_\Omega F(u_\lambda),$$

como queríamos provar. Logo, por (3.13) e (3.14) e por propriedades de limites

$$\begin{aligned}
J_\lambda(u_\lambda) &= \frac{1}{N} \|u_\lambda\|^N - \lambda \int_\Omega F(u_\lambda) \\
&\leq \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{N} \int_\Omega |\nabla u_n|^N + \liminf_{n \to \infty} \left(-\lambda \int_\Omega F(u_n) \right) \\
&\leq \liminf_{n \to \infty} \left(\frac{1}{N} \int_\Omega |\nabla u_n|^N - \lambda \int_\Omega F(u_n) \right) \\
&= \liminf_{n \to \infty} J_\lambda(u_n) \\
&= \inf_{\|u\| \leq R_0} J_\lambda(u).
\end{aligned}$$

Por (3.12), $\|u_\lambda\| \leq R_0$ e, claramente, $\inf_{\|u\| \leq R_0} J_\lambda(u) \leq J_\lambda(u_\lambda)$. Logo,

$$J_\lambda(u_\lambda) = \inf_{\|u\| \leq R_0} J_\lambda(u)$$

e, portanto, u_λ é mínimo de J_λ em $\{\|u\| \leq R_0\}$, para todo $\lambda \in (0, \lambda_0)$. Sendo $J(tu) < 0$ para todo $t > 0$ pequeno e $u \in W_0^{1,N}(\Omega)\backslash\{0\}$, segue que u_λ é não-trivial, o que completa a demonstração do resultado. ■

3.3 Prova do Teorema 3.7

Iremos mostrar nesta seção que, para λ pequeno o suficiente, (P_λ) admite uma única solução u_λ com $\|u_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)}$ suficientemente pequena. Para isto, vamos considerar um problema modificado.

3.3.1 O Problema Modificado

Nesta subseção, consideraremos a função $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), & \text{se} \quad t < t_*, \\ f(t_*), & \text{se} \quad t_* \leq t \end{cases}$$

e o problema

$$\begin{cases} -\Delta_N u &= \lambda \tilde{f}(u), & \text{em} & \Omega \\ u &> 0, & \text{em} & \Omega \\ u &= 0, & \text{sobre} & \partial\Omega. \end{cases} \qquad (\widetilde{P}_\lambda)$$

Lema 3.15 *Se f satisfaz (A1), (A2), (A3)-(1) e (A3)-(2), o problema $(\widetilde{P}_\lambda)$ possui uma única solução $\tilde{u_\lambda}$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$.*

Prova: Usando (A2), temos que $\tilde{f}(t) \leq \tilde{f}(t_*)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim, considerando

$$\tilde{F}(u) = \int_0^u \tilde{f}(t)dt,$$

segue que $\tilde{F}(u) \leq \tilde{f}(t_*)|u|$. Pelo Teorema 1.17, existe $C_1 > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^1(\Omega)} \leq C_1\|u\|.$$

Assim,

$$\int_\Omega \tilde{F}(u) \leq \tilde{f}(t_*) \int_\Omega |u| \leq C_1 \tilde{f}(t_*)\|u\| = C_2\|u\|$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\tilde{J}(u) &= \frac{1}{N}\|u\|^N - \lambda \int_\Omega \tilde{F}(u) \\ &\geq \frac{1}{N}\|u\|^N - \lambda C_2 \|u\| \\ &\to \infty, \quad \text{quando} \quad \|u\| \to \infty,\end{aligned}$$

ou seja, $\tilde{J}$ é coercivo. De maneira análoga ao que fizemos na demonstração do Teorema 1.29, mostra-se também que $\tilde{J}$ é fracamente semicontínuo inferiormente. Assim, o Método Direto do Cálculo das Variações (Teorema 1.24) nos garante que existe $\tilde{u_\lambda} \in W_0^{1,N}(\Omega)$ tal que

$$J(\tilde{u_\lambda}) = \inf_{W_0^{1,N}(\Omega)} J(u).$$

Além disso, pelo Lema 3.13, obtemos que $\tilde{u_\lambda} > 0$ e, portanto, $\tilde{u_\lambda}$ é solução fraca de $(\widetilde{P}_\lambda)$.

Note, por (A3)-(2), que $t \mapsto t^{1-N}\tilde{f}(t)$ é não-crescente. Logo, diretamente do Lema 1.31, tal solução é única. ∎

Usando o mesmo argumento da prova do lema anterior, provaremos que o problema

$$\begin{cases} -\Delta_N w = w^\alpha, & \text{em} \quad \Omega \\ w > 0, & \text{em} \quad \Omega \\ w = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.15}$$

onde $\alpha \in (0, N-1)$ é dado nas hipóteses da não-linearidade f, também admite única solução $w \in W_0^{1,N}(\Omega)$. Com efeito, o funcional associado ao problema (3.15) é dado por

$$I(w) = \frac{1}{N}\|w\|^N - \int_\Omega \left(\int_0^w t^\alpha dt \right).$$

Além disso, temos que I é fracamente semicontínuo inferiormente (a prova é feita de forma análoga ao que fizemos na demonstração do Teorema 1.29) e coercivo, pois

$$\begin{aligned} I(w) &= \frac{1}{N}\|w\|^N - \int_\Omega \left(\int_0^w t^\alpha dt \right) \\ &= \frac{1}{N}\|w\|^N - \frac{1}{\alpha+1}\int_\Omega w^{\alpha+1} \\ &\geq \frac{1}{N}\|w\|^N - C\|w\|^{\alpha+1} \qquad \text{(Teorema 1.17)} \\ &\to \infty, \qquad \text{quando } \|w\| \to \infty. \qquad \text{(pois } \alpha < N-1). \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema 1.24, (3.15) possui solução $w \in W_0^{1,N}(\Omega)$. A unicidade da solução $w \in W_0^{1,N}(\Omega)$ é obtida ao tomarmos $\rho(t) = t^\alpha$ no Lema 1.31, pois, desta forma, temos que

$$\frac{\rho(t)}{t^{N-1}} = \frac{t^\alpha}{t^{N-1}} = \frac{1}{t^{N-1-\alpha}}$$

é decrescente e, portanto, pelo Lema 1.31, segue o desejado.

Observação 3.16 *Se f satisfaz (A1), (A2) e (A3)-2, podemos escolher uma constante $\xi > 0$ tal que $\tilde{f}(t) \leq \xi t^\alpha$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Este resultado é imediato quando $t \in (-\infty, 0]$, pois $\tilde{f}(t) \equiv 0$. Por outro lado, por (A2), sabemos que $\tilde{f}(t) \leq \tilde{f}(t_*)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo, se $t \geq t_*$,*

$$\tilde{f}(t) \leq \frac{\tilde{f}(t_*)}{t_*^\alpha} t^\alpha. \tag{3.16}$$

Já no intervalo $(0, t_*)$, temos que $\tilde{f}(t)/t^{N-1}$ não cresce (hipótese (A3)-2) e, consequentemente, dado $t_0 > 0$, temos

$$\frac{\tilde{f}(t)}{t^{N-1}} \leq \frac{\tilde{f}(t_0)}{t_0^{N-1}} = \xi_0, \qquad \textit{sempre que } t \in [t_0, t_*).$$

Como $t^\alpha \geq t^{N-1}$ no intervalo $[t_0, t_*]$, obtemos que

$$\tilde{f}(t) \leq \xi_0 t^\alpha. \tag{3.17}$$

Assim, combinando (3.16) e (3.17), obtemos $\xi > 0$ tal que $\tilde{f}(t) \leq \xi t^\alpha$, para todo $t > 0$.

3.3.2 Prova do Teorema 3.7

Agora, de posse dos resultados apresentados anteriormente e considerando o número

$$\lambda_0 = \xi^{-1}(t_* \|w\|_{L^\infty(\Omega)}^{-1})^{N-\alpha-1}, \tag{3.18}$$

estamos prontos para provar o Teorema 3.7.

Prova do Teorema 3.7: Seja $\lambda_0 = \xi^{-1}(t_* \|w\|_{L^\infty(\Omega)}^{-1})^{N-\alpha-1}$. Queremos mostrar que, para qualquer $\lambda \in (0, \lambda_0)$, o problema (P_λ) possui apenas uma solução u_λ com a propriedade $\|u_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \leq t_*$. De fato, seja v_λ a única solução (garantimos tal fato de forma semelhante ao que foi feito anteriormente para (3.15)) do problema

$$\begin{cases} -\Delta_N v_\lambda &= \lambda \xi v_\lambda^\alpha, \quad \text{em} \quad \Omega \\ v_\lambda &> 0, \quad \text{em} \quad \Omega \\ v_\lambda &= 0, \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.19}$$

Considere $C = (\lambda\xi)^{\frac{1}{\alpha+1-N}}$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
-\Delta_N [Cv_\lambda] &= -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla[Cv_\lambda]|^{N-2}\frac{\partial [Cv_\lambda]}{\partial x_i}\right)\\
&= -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(C^{N-2}|\nabla v_\lambda|^{N-2}C\frac{\partial v_\lambda}{\partial x_i}\right)\\
&= -C^{N-1}\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla v_\lambda|^{N-2}\frac{\partial v_\lambda}{\partial x_i}\right)\\
&= -C^{N-1}\Delta_N v_\lambda\\
&= C^{N-1}\lambda\xi v_\lambda^\alpha\\
&= C^\alpha v_\lambda^\alpha\\
&= (Cv_\lambda)^\alpha,
\end{aligned}$$

ou seja, $(\lambda\xi)^{\frac{1}{\alpha+1-N}}v_\lambda$ soluciona (3.15), donde obtemos $w = (\lambda\xi)^{\frac{1}{\alpha+1-N}}v_\lambda$. Logo,

$$\begin{aligned}
\|v_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} &= \|(\lambda\xi)^{\frac{1}{N-\alpha-1}}w\|_{L^\infty(\Omega)}\\
&= t_*\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^{\frac{1}{N-\alpha-1}}\\
&\leq t_*, \quad \text{para todo } \lambda \in (0,\lambda_0).
\end{aligned}$$

Como ξ foi escolhido de forma que $\tilde{f}(t) \leq \xi t^\alpha$, para todo $t \in \mathbb{R}$, segue que

$$-\Delta_N v_\lambda = \lambda\xi v_\lambda^\alpha \geq \lambda\tilde{f}(v_\lambda), \quad \text{em } \Omega,$$

isto é, v_λ é uma supersolução de $(\widetilde{P}_\lambda)$. Logo, pelo Lema 1.31, sendo $\tilde{u}_\lambda$ a única solução do problema $(\widetilde{P}_\lambda)$ obtida no Lema 3.15, obtemos $\|\tilde{u_\lambda}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|v_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \leq t_*$, para todo $\lambda \in (0,\lambda_0)$.

A conclusão do resultado segue diretamente se provarmos que $\tilde{u_\lambda}$ é solução de (P_λ). De fato, como $\|\tilde{u_\lambda}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq t_*$, segue que $\tilde{u_\lambda} \leq t_*$ q.t.p. em Ω e, portanto, pela própria definição de $\tilde{f}$, $\tilde{f}(\tilde{u_\lambda}) = f(\tilde{u_\lambda})$ q.t.p. em Ω, donde, claramente, concluímos que $\tilde{u_\lambda}$ soluciona (P_λ), como queríamos demonstrar. ∎

3.3.3 Um Resultado de Depêndencia Contínua

Mostremos, agora, o seguite resultado de dependência contínua:

Lema 3.17 *Usando o Teorema 3.7, para qualquer $\lambda \in (0, \lambda_0)$, escolha a única solução de (P_λ) com a propriedade $\|u_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \leq t_*$. Então, para qualquer $x \in \Omega$, a aplicação $\lambda \mapsto u_\lambda(x)$ é contínua em $(0, \lambda_0)$.*

Prova: Suponha, por absurdo, que existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\lambda \mapsto u_\lambda(x_0)$ não seja contínua em $(0, \lambda_0)$. Assim, existe uma sequência $\{\lambda_n\} \subset (0, \lambda_0)$ tal que $\lambda_n \to \lambda \in (0, \lambda_0)$, sem que $u_{\lambda_n}(x_0)$ convirja à $u_\lambda(x_0)$. Desde que $\|u_{\lambda_n}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq t_*$, para todo $n \in \mathbb{N}$, pelo Teorema 1.19, segue que $u_{\lambda_n} \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$, para algum $\gamma \in (0,1)$, e, como $C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega})$ compactamente (Teorema 1.20), obtemos que existe $u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ tal que, a menos de subsequência, $u_{\lambda_n} \to u_0$ uniformemente em $C^1(\overline{\Omega})$ e, consequentemente, u_0 é solução de (P_λ). Como $u_{\lambda_n}(x_0)$ não converge à $u_\lambda(x_0)$ e $u_{\lambda_n} \to u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$, segue que $u_\lambda \neq u_0$. Isto contraria a unicidade do Teorema 3.7, ficando, portanto, provado o resultado. ∎

3.4 Prova do Teorema 3.8

3.4.1 Não-Existência de Solução de (P_λ), para λ Suficientemente Grande

Agora, consideremos o problema de autovalor

$$\begin{cases} -\Delta_N \phi_1 = \lambda \phi_1^{N-1}, & \text{em} \quad \Omega \\ \phi_1 > 0, & \text{em} \quad \Omega \\ \phi_1 = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.20}$$

Usando resultados de Anane [6] é sabido que existe λ_1 o primeiro autovalor de $-\Delta_N$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$ e sua correspondente auto função normalizada ϕ_1, com $\lambda_1 > 0$ e isolado, isto é, existe $\delta > 0$ tal que o intervalo $(\lambda_1, \lambda_1 + \delta)$ não possui outro autovalor.

Lema 3.18 *Se f satisfaz (A1), (A3)-(2) e (A4)-(1), então, dado $\varepsilon \in (0,1)$, existe $\lambda_* > 0$ tal que $\lambda f(t) > (\lambda_1 + \varepsilon)t^{N-1}$, quaisquer que sejam $\lambda > \lambda_*$ e $t > 0$.*

Prova: Fixe $\varepsilon \in (0,1)$. Seja $\lambda' > 0$ tal que $t_*^{1-N} f(t_*) > \frac{\lambda_1 + \varepsilon}{\lambda'}$. Dessa forma, por (A3)-(2),

$$\lambda f(t) > (\lambda_1 + \varepsilon)t^{N-1}, \qquad \text{para todo } \lambda > \lambda', t \in (0, t_*). \tag{3.21}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\liminf_{t\to\infty} t^{1-N} f(t) &= \liminf_{t\to\infty} h(t) e^{t^{\frac{N}{N-1}}} t^{1-N} \\ &= \liminf_{t\to\infty} h(t) e^{\varepsilon t^{\frac{N}{N-1}}} e^{(1-\varepsilon) t^{\frac{N}{N-1}}} t^{1-N}.\end{aligned} \tag{3.22}$$

Obviamente, sabemos que

$$\liminf_{t\to\infty} e^{(1-\varepsilon)t^{\frac{N}{N-1}}} t^{1-N} = \infty.$$

Além disso, por (A4)-(1), temos que

$$\liminf_{t\to\infty} h(t) e^{\varepsilon t^{\frac{N}{N-1}}} = \infty.$$

Logo, retornando à (3.22), concluímos que

$$\liminf_{t\to\infty} t^{1-N} f(t) = \infty$$

e, portando, existe $\tilde{t} > 0$ tal que

$$t^{1-N} f(t) > t_*^{1-N} f(t_*), \qquad \text{para todo } t > \tilde{t}. \tag{3.23}$$

Finalmente, sendo $[t_*, \tilde{t}\,]$ compacto e $t^{1-N} f(t)$ contínua, existem $t_0 \in [t_*, \tilde{t}\,]$ e λ'' tais que

$$\frac{\lambda_1 + \varepsilon}{\lambda''} < t_0^{1-N} f(t_0) = \inf_{t_* \le t \le \tilde{t}} t^{1-N} f(t) \tag{3.24}$$

Logo, por (3.21), (3.23) e (3.24), tomando $\lambda_* = \max\{\lambda', \lambda''\} > 0$ concluímos a prova do lema. ■

Lema 3.19 *Se $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ é solução de (P_λ) e ϕ_1 é a auto função correspondente ao autovalor λ_1, então existe $\mu > 0$ tal que $\mu\phi_1 \le u$ em Ω.*

Prova: Observe inicialmente que, pelos Teoremas 1.19 e 1.20, $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Assim, pelo princípio do máximo forte de Vázquez (Teorema 1.34), segue que

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} < 0 \qquad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Agora, como $u \in C^1(\overline{\Omega})$ e $\partial\Omega$ é compacto, existe uma vizinhança V_u em $\overline{\Omega}$ onde

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} < 0 \qquad \text{em } V_u.$$

De maneira semelhante, existe V_{ϕ_1}, vizinhança de $\overline{\Omega}$, tal que

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \nu} < 0 \qquad \text{em } V_{\phi_1}.$$

Tome $V = V_u \cap V_{\phi_1}$. Sem perda de generalidade, podemos supor que

$$V = V_\delta = \{x \in \overline{\Omega}; \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) \le \delta\}, \qquad \text{para algum } \delta > 0,$$

ou seja, V é uma vizinhaça de $\partial\Omega$ tal que

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}, \frac{\partial \phi_1}{\partial \nu} < 0 \qquad \text{em } V.$$

Dessa forma, podemos tomar $\mu_1 > 0$ de tal forma que

$$\mu_1 \min_V \frac{\partial \phi_1}{\partial \nu} \ge \max_V \frac{\partial u}{\partial \nu}.$$

Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial \nu}(u - \mu_1 \phi_1) \le 0 \qquad \text{em } V.$$

Logo, para quaisquer $y \in \partial\Omega$ e $t \in [-\delta, 0)$, pelo Teorema do Valor Médio, temos que

$$\begin{aligned}(u - \mu_1\phi_1)(y) - (u - \mu_1\phi_1)(y + t\nu(y)) &= \int_t^0 [\nabla(u - \mu_1\phi_1)(y + \tau\nu(y)) \cdot \nu(y)] d\tau \\ &\le 0,\end{aligned}$$

pois $y + t\nu(y) \in V$, para todo $t \in [-\delta, 0)$. Logo, $(u - \mu_1\phi_1)(x) \ge 0$, para todo $x \in V \cap \Omega$.

Considere agora $\Omega_0 = \Omega \backslash (\Omega \cap V)$. Dessa forma, como $u, \phi_1 > 0$ em $\overline{\Omega_0}$ e $u, \phi_1 \in C^1(\overline{\Omega})$, existe $\mu_2 > 0$ tal que

$$\min_{\overline{\Omega_0}} u \ge \mu_2 \max_{\overline{\Omega_0}} \phi_1,$$

donde $\mu_2\phi_1 \le u$ em $\overline{\Omega_0}$.

Tomando $\mu = \min\{\mu_1, \mu_2\}$, concluimos que $\mu\phi_1 \le u$ em Ω, como queríamos demonstrar. ■

Agora, provaremos o principal resultado desta subseção. Para isto, definamos

$$\Lambda := \sup\{\lambda > 0; (P_\lambda) \ \text{ tem solução}\}.$$

Lema 3.20 *Se f satisfaz (A1), (A2), (A3)-(1), (A3)-(2), (A4)-(1), (A4)-(2) e (A6), então $0 < \Lambda < +\infty$.*

Prova: Segue diretamente do Lema 3.14 que $\Lambda > 0$. Usaremos um argumento de contradição para provar que $\Lambda < +\infty$. Suponha que existe uma sequência $\lambda_n \to \infty$ para a qual (P_{λ_n}) admite solução u_{λ_n}, isto é,

$$\begin{cases} -\Delta_N u_{\lambda_n} = \lambda_n f(u_{\lambda_n}), & \text{em} \quad \Omega \\ u_{\lambda_n} > 0, & \text{em} \quad \Omega \\ u_{\lambda_n} = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.25}$$

Para $\varepsilon \in (0,1)$, o Lema 3.18 nos garante que existe $\lambda_* > 0$ tal que $\lambda f(t) > (\lambda_1+\varepsilon)t^{N-1}$, para todo $\lambda > \lambda_*$ e $t > 0$. Logo, escolhendo $\lambda_n > \lambda_*$, segue que $-\Delta_N u_{\lambda_n} = \lambda_n f(u_{\lambda_n}) > (\lambda_1+\varepsilon)u_{\lambda_n}^{N-1}$, ou seja, u_{λ_n} é supersolução de

$$\begin{cases} -\Delta_N u = (\lambda_1+\varepsilon)u^{N-1}, & \text{em} \quad \Omega \\ u > 0, & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.26}$$

Notemos agora que, para todo $\mu > 0$, $\mu\phi_1$ é subsolução do problema (3.26). De fato, dada $\varphi \in W_0^{1,N}(\Omega)\backslash\{0\}$, segue que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla(\mu\phi_1)|^{N-2}\nabla(\mu\phi_1)\nabla\varphi &= \mu^{N-1}\int_\Omega |\nabla\phi_1|^{N-2}\nabla\phi_1\nabla\varphi \\ &= \mu^{N-1}\lambda_1\int_\Omega \phi_1^{N-1}\varphi \\ &= \lambda_1\int_\Omega (\mu\phi_1)^{N-1}\varphi \\ &\le (\lambda_1+\varepsilon)\int_\Omega (\mu\phi_1)^{N-1}\varphi. \end{aligned}$$

Pelo Lema 3.19, para cada $\varepsilon_n = 1/2n$, é possível tomarmos $\mu_n > 0$ pequeno o suficiente tal que $\mu_n\phi_1 \le u_{\lambda_n}$ em Ω. Assim, pelo Teorema 1.29 (Método de sub e supersolução), para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\phi_{\varepsilon_n} > 0$ solução do problema (3.26). Desta forma $\{\overline{\lambda_n}\}$, onde $\overline{\lambda_n} = \lambda_1 + 1/2n$, seria uma sequência de autovalores tal que $\overline{\lambda_n} \to \lambda_1$, o que contradiz o fato de λ_1 ser isolado. Assim, devemos ter $\Lambda < \infty$ e o lema está provado. ■

3.4.2 Existência de Mínimo Local para J_λ, $\lambda \in (0,\Lambda)$

Sejam $\mathcal{C}_0(\overline{\Omega}) = \{u \in C(\overline{\Omega}); u = 0 \text{ em } \partial\Omega\}$ e $\mathcal{C} = C^1(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}_0(\overline{\Omega})$. Para $u \in \mathcal{C}$, consideremos $\|u\|_{\mathcal{C}} = \|u\|_{C^1(\overline{\Omega})}$. Enunciemos e provemos o seguinte princípio de comparação forte:

Lema 3.21 *Sejam* $u, v \in C^{1,\theta}(\overline{\Omega})$, $\theta \in (0,1)$, *tais que* $0 \leq u \leq v$, $u \neq 0$ *e*

$$\begin{aligned} -\Delta_N u + Cu &= \rho_u, \\ -\Delta_N v + Cv &= \ \rho_v, \end{aligned} \tag{3.27}$$

com $u = v = 0$ *sobre* $\partial\Omega$, *onde* $C \geq 0$ *e* $\rho_u, \rho_v \in C(\overline{\Omega})$ *são localmente lipschitzianas tais que* $0 < \rho_u \leq \rho_v$ *em* Ω *e* $\rho_u \neq \rho_v$ *em qualquer pequena vizinhança de* $\partial\Omega$. *Então,*

$$0 < u < v \quad em \ \ \Omega \quad e \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} < \frac{\partial u}{\partial \nu} < 0 \quad sobre \ \ \partial\Omega. \tag{3.28}$$

Prova: Pelo Princípio do Máximo de Vázquez (Teorema 1.34) temos que

$$u, v > 0 \quad \text{em } \Omega \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}, \frac{\partial v}{\partial \nu} < 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \tag{3.29}$$

onde ν é o vetor normal exterior a $\partial\Omega$. Portanto, resta provarmos que

$$u < v \quad \text{em } \Omega \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} < \frac{\partial u}{\partial \nu} \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Para isto, iremos utilizar o Lema 1.32, onde, neste caso, temos

$$\mathbf{a}(x, \eta) = \mathbf{a}(\eta) = |\eta|^{N-2}\eta = |\eta|^{N-2}(\eta_1, ..., \eta_N)$$

e

$$b(x, u) = b(u) = Cu.$$

As condições $(a6)$ e (b1) são facilmente verificadas. Provemos as condições $(a1)$-$(a5)$ introduzidas no Capítulo 1: Para cada $C \geq 0$, considere $\Gamma = \max\{C, N^2(N-1)\}$. Considere ainda $\gamma = 1$ e $\kappa = 0$. Dessa forma, temos que $\kappa \in [0,1]$ e $\gamma, \Gamma \in (0, \infty)$. Além disso,

$(a1)$ Para todo $i = 1, ..., N$, $a_i(0) = |0|^{N-2}0 = 0$;

$(a2)$ Um cálculo simples mostra que

$$\frac{\partial a_i}{\partial \eta_j}(\eta) = \begin{cases} (N-2)|\eta|^{N-4}\eta_i\eta_j, & \text{se } i \neq j \\ (N-2)|\eta|^{N-4}\eta_i^2 + |\eta|^{N-2}, & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial a_i}{\partial \eta_j}(\eta)\xi_i\xi_j &= \sum_{i=1}^{N}\left((N-2)|\eta|^{N-4}\eta_i^2\xi_i^2 + |\eta|^{N-2}\xi_i^2 + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}(N-2)|\eta|^{N-4}\eta_i\eta_j\xi_i\xi_j\right)\\
&= (N-2)|\eta|^{N-4}\sum_{i=1}^{N}\eta_i^2\xi_i^2 + |\eta|^{N-2}|\xi|^2\\
&\quad +(N-2)|\eta|^{N-4}\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\eta_i\eta_j\xi_i\xi_j\right)\\
&= (N-2)|\eta|^{N-4}\sum_{i,j=1}^{N}\eta_i\eta_j\xi_i\xi_j + |\eta|^{N-2}|\xi|^2\\
&= (N-2)|\eta|^{N-4}\left(\sum_{i=1}^{N}\eta_i\xi_j\right)\left(\sum_{j=1}^{N}\eta_j\xi_j\right) + |\eta|^{N-2}|\xi|^2\\
&= (N-2)|\eta|^{N-4}|\eta\cdot\xi|^2 + |\eta|^{N-2}|\xi|^2\\
&\geq |\eta|^{N-2}|\xi|^2\\
&= \gamma(\kappa+|\eta|)^{N-2}|\xi|^2
\end{aligned}$$

$(a3)$ Desde que

$$\frac{\partial a_i}{\partial \eta_j}(\eta) = \begin{cases} (N-2)|\eta|^{N-4}\eta_i\eta_j, & \text{se } i\neq j\\ (N-2)|\eta|^{N-4}\eta_i^2 + |\eta|^{N-2}, & \text{se } i=j,\end{cases}$$

segue que, para todos $1\leq i,j\leq N$,

$$\left|\frac{\partial a_i}{\partial \eta_j}(\eta)\right| \leq (N-2)|\eta|^{N-2} + |\eta|^{N-2} = (N-1)|\eta|^{N-2},$$

donde

$$\sum_{i,j=1}^{N}\left|\frac{\partial a_i}{\partial \eta_j}(\eta)\right| \leq N^2(N-1)|\eta|^{N-2} \leq \Gamma(\kappa+|\eta|)^{N-2}.$$

$(a4)$ Temos que

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j}(\eta) = 0$$

e, portanto,

$$\sum_{i,j=1}^{N}\left|\frac{\partial a_i}{\partial x_j}(\eta)\right| = 0 \leq \Gamma(\kappa+|\eta|)^{N-2}|\eta|.$$

$(a5)$ $|b(x,u)| = |b(u)| = C|u| \leq C|u|^{N-1} \leq \Gamma(\kappa+|u|)^{N-2}|u|.$

Logo, pelo Lema 1.32, temos

$$u < v \quad \text{em } \Omega \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} < \frac{\partial u}{\partial \nu} \quad \text{sobre } \partial\Omega,$$

que, juntamente com (3.29), nos garante que

$$0 < u < v \quad \text{em } \Omega \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} < \frac{\partial u}{\partial \nu} \quad \text{sobre } \partial\Omega,$$

como queríamos demonstrar. ■

Lema 3.22 *A restrição de J_λ à $\mathcal{C}$, $J_\lambda|_{\mathcal{C}}$, possui um mínimo local para todo $\lambda \in (0, \Lambda)$.*

Prova: Fixe $\lambda \in (0, \Lambda)$ e escolha $\overline{\lambda} \in (\lambda, \Lambda)$ tal que $(P_{\overline{\lambda}})$ possua solução, digamos $\overline{u}$ (tal $\overline{\lambda}$ existe pela própria definição de Λ). Por outro lado, seja

$$\underline{\lambda} := \lambda \inf_{t>0} f(t) t^{\alpha}.$$

Dessa forma, por (A3)-(A4), temos que $\underline{\lambda} > 0$. Seja $\underline{u}$ a única solução (a existência e unicidade de tal solução é garantida, novamente, pelo Método Direto do Cálculo das Variações e pelo Lema 1.31) do problema

$$\begin{cases} -\Delta_N \underline{u} &= \underline{\lambda}\ \underline{u}^{\alpha}, \quad \text{em} \quad \Omega \\ \underline{u} &> 0, \quad \text{em} \quad \Omega \\ \underline{u} &= 0, \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.30}$$

Observe que no sentido fraco

$$-\Delta_N \overline{u} = \overline{\lambda} f(\overline{u}) = \overline{\lambda} f(\overline{u}) \overline{u}^{-\alpha} \overline{u}^{\alpha} \geq \lambda \inf_{t>0} f(t) t^{-\alpha} \overline{u}^{\alpha} = \underline{\lambda} \overline{u}^{\alpha}$$

e, portanto, $\overline{u}$ é supersolução de (3.30). Como

$$t^{1-N} \underline{\lambda} t^{\alpha} = \underline{\lambda} \frac{t^{\alpha}}{t^{N-1}}$$

e $\alpha \in (0, N-1)$, segue que $t^{1-N}\underline{\lambda} t^{\alpha}$ é não-crescente e, portanto, pelo Lema 1.31, $\underline{u} \leq \overline{u}$. Além disso, desde que

$$-\Delta_N \underline{u} = \underline{\lambda}\ \underline{u}^{\alpha} =: \rho_{\underline{u}}$$
$$-\Delta_N \overline{u} = \overline{\lambda} f(\overline{u}) =: \rho_{\overline{u}}$$

e

$$\overline{\lambda} f(\overline{u}) \geq \underline{\lambda u}^{\alpha} \quad \text{em } \Omega,$$

segue (Lema 3.21, com $C = 0$) que

$$\underline{u} < \overline{u} \quad \text{em } \Omega \quad \text{e} \quad \frac{\partial \overline{u}}{\partial \nu} < \frac{\partial \underline{u}}{\partial \nu} < 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Para completarmos a demonstração, precisamos da seguinte observação:

Observação 3.23 *Existe $K > 0$ de tal forma que $t \mapsto f(t) + Kt$ seja não-decrescente, para todo $t \in \mathbb{R}$.*

De fato, sendo f de classe C^1 em $(0, \infty)$ (hipótese (A1)), existe $m \in \mathbb{R}$ tal que

$$f'(t) \geq m, \qquad \text{para todo } t \in \left[t_*, \frac{1}{t_*}\right].$$

Assim, se $m \geq 0$, podemos tomar $K > 0$ qualquer. Por outro lado, se $m < 0$, basta tomarmos $K > -m$, pois

$$(f(t) + Kt)' = f'(t) + K \geq m + K > 0.$$

Além disso, pela hipótese (A2), temos que $t \mapsto f(t)$ é não-decrescente em $(0, t_*) \cup (1/t_*, \infty)$. Logo, para todo $K \geq 0$, $t \mapsto f(t) + Kt$ é não-decrescente em $(0, t_*) \cup (1/t_*, \infty)$. Em qualquer caso, tomando $K > |m|$, segue que $t \mapsto f(t) + Kt$ é não-decrescente para todo $t \in \mathbb{R}$.

Dessa forma, para $x \in \Omega$ e $t \in \mathbb{R}$, defina a não-linearidade de corte (ou "cut-off")

$$g(x,t) = \begin{cases} f(\overline{u}(x)) + K\overline{u}(x), & \text{se } t > \overline{u}(x) \\ f(t) + Kt, & \text{se } \underline{u}(x) \leq t \leq \overline{u}(x) \\ f(\underline{u}(x)) + K\underline{u}(x), & \text{se } t < \underline{u}(x). \end{cases} \tag{3.31}$$

Observe que

$$f(\underline{u}(x)) + K\underline{u}(x) \leq g(x,t) \leq f(\overline{u}(x)) + K\overline{u}(x), \quad \text{para todo } (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}. \tag{3.32}$$

Considere

$$G(x,u) = \int_0^u g(x,t)dt$$

e defina o funcional $I_\lambda : W_0^{1,N}(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{N}\int_\Omega |\nabla u|^N + \frac{\lambda K}{2}\int_\Omega |u|^2 - \lambda \int_\Omega G(x,u). \tag{3.33}$$

De forma semelhante ao que já fizemos neste capítulo, mostra-se que I_λ está bem definido e é fracamente semicontínuo inferiormente. Além disso, usando que

(i) $W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $1 \le q < \infty$;

(ii) $f(\underline{u}(x)) + K\underline{u}(x) \le g(x,t)$, para todo $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$ (Expressão 3.32);

(iii) $f(t) + Kt$ é não-decrescente para todo $t \in \mathbb{R}$,

obtemos, claramente, que I_λ é limitado. Logo, I_λ possui mínimo global u_λ. Observe ainda que, sendo $\mathcal{A} = \{v \in W_0^{1,N}(\Omega); \underline{u} \le v \le \overline{u} \text{ em } \Omega\}$, obtemos

$$\begin{aligned}
I_\lambda|_{\mathcal{A}}(v) &= \frac{1}{N}\int_\Omega |\nabla v|^N + \frac{\lambda K}{2}\int_\Omega |v|^2 - \lambda\int_\Omega G(x,v) \\
&= \frac{1}{N}\int_\Omega |\nabla v|^N + \frac{\lambda K}{2}\int_\Omega |v|^2 - \lambda\int_\Omega\int_0^v g(x,t)dt \\
&= \frac{1}{N}\int_\Omega |\nabla v|^N + \frac{\lambda K}{2}\int_\Omega |v|^2 - \lambda\int_\Omega\int_0^v (f(t)+Kt)dt \\
&= \frac{1}{N}\int_\Omega |\nabla v|^N + \frac{\lambda K}{2}\int_\Omega |v|^2 - \lambda\int_\Omega F(v) - \frac{\lambda K}{2}\int_\Omega |v|^2 \\
&= \frac{1}{N}\int_\Omega |\nabla v|^N - \lambda\int_\Omega F(v) \\
&= J_\lambda|_{\mathcal{A}}(v),
\end{aligned} \tag{3.34}$$

ou seja, $J_\lambda \equiv I_\lambda$ em $\mathcal{A}$.

Agora, mostremos que

$$\underline{u} < u_\lambda < \overline{u} \quad \text{em } \Omega$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \nu}(u_\lambda - \underline{u}) < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \nu}(\overline{u} - u_\lambda) < 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Para isto, iremos utilizar o Lema 3.21 duas vezes. Como u_λ é mínimo global de I_λ, observe inicialmente que $-\Delta_N u_\lambda + \lambda K u_\lambda = \lambda g(x, u_\lambda)$ em Ω, donde, pelo Teorema 1.19, $u_\lambda \in C^{1,\theta}(\overline{\Omega})$, para algum $\theta \in (0,1)$.

Afirmação 1: $\underline{u} < u_\lambda$ em Ω e $\dfrac{\partial}{\partial \nu}(u_\lambda - \underline{u}) < 0$ sobre $\partial\Omega$.

De fato, por (3.32) e pela definição de $\underline{\lambda}$, segue que

$$\begin{aligned}
-\Delta_N u_\lambda + \lambda K u_\lambda &= \lambda g(x, u_\lambda) \\
&\ge \lambda f(\underline{u}) + \lambda K \underline{u} \\
&\ge \underline{\lambda}\ \underline{u}^\alpha + \lambda K \underline{u} \\
&= -\Delta_N \underline{u} + \lambda K \underline{u}.
\end{aligned}$$

Assim, pelo Lema 1.33, obtemos que $\underline{u} \leq u_\lambda$ em Ω. Além disso,

$$\rho_{u_\lambda} := \lambda g(x, u_\lambda) \geq \underline{\lambda}\ \underline{u}^\alpha + \lambda K \underline{u} =: \rho_{\underline{u}}.$$

Logo, pelo Princípio Forte de Comparação (Lema 3.21), obtemos que

$$\underline{u} < u_\lambda \qquad \text{em } \Omega$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \nu}(u_\lambda - \underline{u}) < 0 \qquad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Afirmação 2: $u_\lambda < \overline{u}$ em Ω e $\dfrac{\partial}{\partial \nu}(\overline{u} - u_\lambda) < 0$ sobre $\partial\Omega$.

Com efeito, por (3.32) e sendo $\lambda < \overline{\lambda}$,

$$\begin{aligned} -\Delta_N u_\lambda + \lambda K u_\lambda &= \lambda g(x, u_\lambda) \\ &\leq \lambda f(\overline{u}) + \lambda K \overline{u} \\ &\leq \overline{\lambda} f(\overline{u}) + \lambda K \overline{u}. \end{aligned}$$

Dessa forma, usando novamente o Lema 1.33, obtemos que $u_\lambda \leq \overline{u}$ em Ω. Além disso,

$$\rho_{\overline{u}} := \overline{\lambda} f(\overline{u}) + \lambda K \overline{u} \leq \lambda g(x, u_\lambda) =: \rho_{u_\lambda}.$$

Assim, pelo Princípio Forte de Comparação (Lema 3.21), obtemos que

$$u_\lambda < \overline{u} \qquad \text{em } \Omega$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \nu}(\overline{u} - u_\lambda) < 0 \qquad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Pelas afirmações anteriores, concluímos que

$$\underline{u} < u_\lambda < \overline{u} \qquad \text{em } \Omega$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \nu}(u_\lambda - \underline{u}) < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \nu}(\overline{u} - u_\lambda) < 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega,$$

donde, usando que $I_\lambda = J_\lambda$ em $\mathcal{A}$, segue que u_λ soluciona (P_λ). Além disso, para $r > 0$, consideremos

$$\Omega_{-r} = \{x \in \Omega; \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > r\},$$

$$\delta_1 = \min_{x \in \overline{\Omega_{-r}}} \{u_\lambda - \underline{u}\} > 0$$

e

$$\delta_2 = \min_{x \in \overline{\Omega_{-r}}} \{\overline{u} - u_\lambda\} > 0.$$

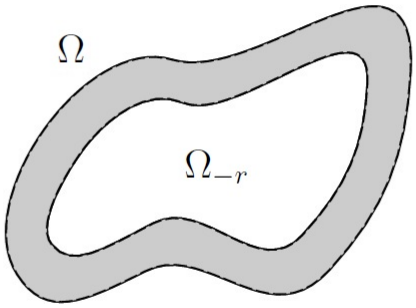

Figura 3.2: Ω_{-r}

Assim, tomando

$$\delta = \frac{1}{2}\min\{\delta_1, \delta_2\},$$

temos que, se $\|v - u_\lambda\|_{\mathcal{C}} < \delta$, então

$$\begin{aligned} \delta > \|v - u_\lambda\|_{\mathcal{C}} &= \sup_{x\in\overline{\Omega}} |u_\lambda - v| + \sum_{i=1}^{N} \sup_{x\in\overline{\Omega}} \left| \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| \\ &\geq \sup_{x\in\overline{\Omega}} |v - u_\lambda|, \end{aligned}$$

donde $|v - u_\lambda| < \delta$, para todo $x \in \overline{\Omega}$, ou seja, $-\delta < v - u_\lambda < \delta$, para todo $x \in \overline{\Omega}$. Entretanto, para $x \in \overline{\Omega_{-r}}$, temos

$$\begin{aligned} \overline{u} - v &= \overline{u} - u_l + u_l - v \\ &> \delta_2 - \delta \\ &\geq 2\delta - \delta \\ &= \delta > 0 \end{aligned}$$

e, consequentemente, $\overline{u} > v$ em $\overline{\Omega_{-r}}$. Para mostrarmos que $\overline{u} > v$ em Ω, dado $x \in \Omega$, basta tomar $r > 0$ pequeno o suficiente de modo que $x \in \overline{\Omega_{-r}}$ e usar o que acabamos de mostrar. Analogamente, conclui-se que, para $v \in \mathcal{C}$ tal que $\|v - u_\lambda\|_{\mathcal{C}} < \delta$, temos $\underline{u} < v$ em Ω.

Logo, podemos tomar $\delta > 0$ suficientemente pequeno de modo que, se $v \in \mathcal{C}$ e $\|v - u_\lambda\|_{\mathcal{C}} < \delta$, então $\underline{u} < v < \overline{u}$ em Ω. Isto é, se $v \in W_0^{1,N}(\Omega) \cap \mathcal{C}$ está próximo o suficiente de u_λ em $\mathcal{C}$, então $I_\lambda(v) = J_\lambda(v)$ (pois $I_\lambda = J_\lambda$ em $\mathcal{A}$), ou seja, u_λ é mínimo local para $J_\lambda|_{\mathcal{C}}$. ∎

Lema 3.24 *Para todo $\lambda \in (0, \Lambda)$, u_λ é mínimo local para J_λ em $W_0^{1,N}(\Omega)$.*

Antes de provarmos o lema acima, demonstremos os seguintes resultados auxiliares:

Afirmação 1: Para cada $\varepsilon > 0$, existe R_ε tal que se $s \geq R_\varepsilon$ então $F(s) \leq \varepsilon f(s)s$.

Com efeito, desde $F(s) \leq Cf(s)$ para todo $s \geq R$ (Hipótese (A6)), segue que

$$\frac{1}{\varepsilon}F(s) \leq \frac{1}{\varepsilon}Cf(s),$$

para todo $s \geq R$. Assim, tomando $R_\varepsilon := \max\{C/\varepsilon, R\}$, se $s \geq R_\varepsilon$, temos que

$$sf(s) \geq R_\varepsilon f(s) \geq \frac{1}{\varepsilon}Cf(s) \geq \frac{1}{\varepsilon}F(s),$$

pois $R_\varepsilon \geq R$. Logo,

$$F(s) \leq \varepsilon f(s)s, \quad \text{para todo } s \geq R_\varepsilon,$$

como desejávamos.

Afirmação 2: Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno,

(i) $v \mapsto J_\lambda(u_\lambda + v)$ é limitada em $\{\|v\| \leq \varepsilon\}$.

(ii) $\inf_{\|v\| \leq \varepsilon} J_\lambda(u_\lambda + v)$ é atingido, digamos, em $v_{\lambda,\varepsilon}$.

Realmente, utilizando a Afirmação 1, é possível obtermos uma constante $C_0 > 0$ tal que

$$F(u_\lambda + v) \leq C_0 f(u_\lambda + v)(u_\lambda + v), \qquad \text{para todo } v \in W_0^{1,N}(\Omega).$$

Assim, pelo Lema 3.10 e pelo fato de

$$s \leq e^{s^{N/(N-1)}}, \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R},$$

concluimos que existe $C_1 > 0$ tal que

$$F(u_\lambda + v) \leq C_0 f(u_\lambda + v)(u_\lambda + v) \leq C_1 e^{3|u_\lambda + v|^{\frac{N}{N-1}}}, \quad \text{para todo } v \in W_0^{1,N}(\Omega).$$

Dessa forma, como $u_\lambda \in C^{1,\theta}(\overline{\Omega})$ para algum $\theta \in (0,1)$ (ver demonstração do Lema 3.22), e $C^{1,\theta}(\overline{\Omega}) \subset C^1(\overline{\Omega})$, é possível obtermos uma constante $C_2 > 0$ tal que

$$F(u_\lambda + v) \leq C_1 e^{|C_2 v|^{\frac{N}{N-1}}}, \qquad \text{para todo } v \in W_0^{1,N}(\Omega).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_\Omega F(u_\lambda + v) &\leq C_1 \int_\Omega e^{|C_2 v|^{\frac{N}{N-1}}} \\ &= C_1 \int_\Omega e^{(C_2\|v\|)^{\frac{N}{N-1}}\left(\frac{|v|}{\|v\|}\right)^{\frac{N}{N-1}}}.\end{aligned}$$

Considere, portanto, $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$C_2^{\frac{N}{N-1}} \varepsilon_0^{\frac{N}{N-1}} \leq \alpha_N$$

e escolha $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Dessa forma, pelo Teorema 3.2 (Desigualdade de Trudinger-Moser) e pela desigualdade acima, deduzimos que

$$\sup_{\|v\| \leq \varepsilon} \int_\Omega F(u_\lambda + v) < \infty, \tag{3.35}$$

donde concluímos o item (i). Para provar (ii), considere $\{v_n\}$ uma sequência tal que

$$J_\lambda(u_\lambda + v_n) \to \inf_{\|v\| \leq \varepsilon} J_\lambda(u_\lambda + v).$$

Sendo $\{v_n\}$ limitada em $W_0^{1,N}(\Omega)$, existe $v_{\lambda,\varepsilon} \in W_0^{1,N}(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência, $v_n \rightharpoonup v_{\lambda,\varepsilon}$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$. Consequentemente, pelo Teorema 1.15, $\|v_{\lambda,\varepsilon}\| \leq \varepsilon$ e, portanto,

$$\inf_{\|v\| \leq \varepsilon} J_\lambda(u_\lambda + v) \leq J_\lambda(u_\lambda + v_{\lambda,\varepsilon}). \tag{3.36}$$

Como $v_n \rightharpoonup v_{\lambda,\varepsilon}$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$, então (a menos de subsequência) $v_n \to v_{\lambda,\varepsilon}$ q.t.p. em Ω, donde $F(u_\lambda + v_n) \to F(u_\lambda + v_{\lambda,\varepsilon})$ q.t.p. em Ω. Assim, procedendo de forma análoga ao que fizemos na demonstração de (3.14), obtemos, pelo Teorema de Vitali (Teorema 1.8), que $(F(u_\lambda + v_n))$ converge para $F(u_\lambda + v_{\lambda,\varepsilon})$ em $L^1(\Omega)$, isto é,

$$\int_\Omega F(u_\lambda + v_n) \to \int_\Omega F(u_\lambda + v_{\lambda,\varepsilon}).$$

Poratanto, utilizando a convergência acima e o Teorema 1.15, obtemos que

$$\begin{aligned}
J_\lambda(u_\lambda + v_{\lambda,\varepsilon}) &= \frac{1}{N}\|u_\lambda + v_{\lambda,\varepsilon}\|^N - \lambda\int_\Omega F(u_\lambda + v_{\lambda,\varepsilon}) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{N}\|u_\lambda + v_n\|^N + \liminf_{n\to\infty}\left(-\lambda\int_\Omega F(u_\lambda + v_n)\right) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{N}\|u_\lambda + v_n\|^N - \lambda\int_\Omega F(u_\lambda + v_n)\right) \\
&= \liminf_{n\to\infty} J_\lambda(u_\lambda + v_n) \\
&= \inf_{\|v\|\leq\varepsilon} J_\lambda(u_\lambda + v). \qquad (3.37)
\end{aligned}$$

Logo, por (3.36) e (3.37), segue o resultado.

Prova do Lema 3.24: Suponha que a conclusão do lema seja falsa. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $w_{\lambda,\varepsilon} \in \{\|v\| \leq \varepsilon\}$ tal que

$$J_\lambda(u_\lambda + w_{\lambda,\varepsilon}) < J(u_\lambda).$$

Devido a Afirmação 2 acima, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, existe $v_{\lambda,\varepsilon}$ tal que $\|v_{\lambda,\varepsilon}\| \leq \varepsilon$ e

$$J_\lambda(u_\lambda + v_{\lambda,\varepsilon}) = \inf_{\|v\|\leq\varepsilon} J_\lambda(u_\lambda + v). \qquad (3.38)$$

Assim, temos que

$$J_\lambda(u_\lambda + v_{\lambda,\varepsilon}) \leq J_\lambda(u_\lambda + w_{\lambda,\varepsilon}) < J_\lambda(u_\lambda), \qquad (3.39)$$

donde concluímos que

$$\|v_{\lambda,\varepsilon}\| =: \delta_{\lambda,\varepsilon} > 0.$$

Agora, sejam

$$\begin{aligned}
J_\lambda(u_\lambda + \cdot) : \ W_0^{1,N}(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\
v &\longmapsto J_\lambda(u_\lambda + v),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi : \ W_0^{1,N}(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\
v &\longmapsto \frac{1}{N}\int_\Omega |\nabla v|^N
\end{aligned}$$

e

$$M = \left\{ v \in W_0^{1,N}(\Omega); \Psi(v) = \frac{1}{N}\delta_{\lambda,\varepsilon}^N \right\}.$$

Como J_λ e Ψ são de classe C^1 em $W_0^{1,N}(\Omega)$ e $v_{\lambda,\varepsilon}$ é mínimo local de $J_\lambda|_M$ e $\Psi'(v_{\lambda,\varepsilon}) \neq 0$, então, pelo Método dos Multiplicadores de Lagrange (Teorema 1.11), existe $\mu_\varepsilon \in \mathbb{R}$ tal que

$$J'_\lambda(u_\lambda + v_{\lambda,\varepsilon})\phi = \mu_\varepsilon \Psi'(v_{\lambda,\varepsilon})\phi, \quad \text{para todo } \phi \in W_0^{1,N}(\Omega)$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla(u_\lambda + v_{\lambda,\varepsilon})|^{N-2}\nabla(u_\lambda + v_{\lambda,\varepsilon})\nabla\phi - \lambda\int_\Omega f(u_\lambda + v_{\lambda,\varepsilon})\phi \\ = \mu_\varepsilon \int_\Omega |\nabla v_{\lambda,\varepsilon}|^{N-2}\nabla v_{\lambda,\varepsilon}\nabla\phi, \quad \text{para todo } \phi \in W_0^{1,N}(\Omega).\end{aligned}$$

Observe que a expressão acima, no sentido fraco, pode ser escrita como

$$-\Delta_N(u_\lambda + v_{\lambda,\varepsilon}) - \lambda f(u_\lambda + v_{\lambda,\varepsilon}) = -\mu_\varepsilon \Delta_N v_{\lambda,\varepsilon}. \tag{3.40}$$

Definindo as aplicações $A_\varepsilon : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ e $b : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, respectivamente, por

$$A_\varepsilon(x,p) = |\nabla u_\lambda(x) + p|^{N-2}(\nabla u_\lambda(x) + p) - |\nabla u_\lambda(x)|^{N-2}\nabla u_\lambda(x) - \mu_\varepsilon |p|^{N-2}p$$

e

$$b(x,p) = \lambda f(u_\lambda(x) + p) - \lambda f(u_\lambda(x)),$$

temos que

$$\begin{aligned}&-\mathrm{div}(A_\varepsilon(x,\nabla v_{\lambda,\varepsilon})) \\ &\quad = -\mathrm{div}[|\nabla u_\lambda + \nabla v_{\lambda,\varepsilon}|^{N-2}(\nabla u_\lambda + \nabla v_{\lambda,\varepsilon}) - |\nabla u_\lambda|^{N-2}\nabla u_\lambda - \mu_\varepsilon|\nabla v_{\lambda,\varepsilon}|^{N-2}\nabla v_{\lambda,\varepsilon}] \\ &\quad = -\mathrm{div}[|\nabla(u_\lambda + v_{\lambda,\varepsilon})|^{N-2}\nabla(u_\lambda + v_{\lambda,\varepsilon}) - |\nabla u_\lambda|^{N-2}\nabla u_\lambda - \mu_\varepsilon|\nabla v_{\lambda,\varepsilon}|^{N-2}\nabla v_{\lambda,\varepsilon}] \\ &\quad = -\Delta_N(u_\lambda + v_{\lambda,\varepsilon}) + \Delta_N u_\lambda + \mu_\varepsilon \Delta_N v_{\lambda,\varepsilon}.\end{aligned}$$

Portanto, sendo u_λ mínimo de $J_\lambda|_{\mathcal{C}}$, segue que (3.40) pode ser escrito como

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\mathrm{div}(A_\varepsilon(x,\nabla v_{\lambda,\varepsilon})) & = & b(x, v_{\lambda,\varepsilon}), & \text{em} \quad \Omega \\ v_{\lambda,\varepsilon} & = & 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{3.41}$$

Afirmação: $\mu_\varepsilon \leq 0$.

De fato, temos que

$$J'_\lambda(u_\lambda + v_{\lambda,\varepsilon})v_{\lambda,\varepsilon} = \mu_\varepsilon \|v_{\lambda,\varepsilon}\|^N \tag{3.42}$$

e

$$J'_\lambda(u_\lambda + v_{\lambda,\varepsilon})v_{\lambda,\varepsilon} = \lim_{t\to 0^-} \frac{J_\lambda(u_\lambda + (1+t)v_{\lambda,\varepsilon}) - J_\lambda(u_\lambda + v_{\lambda,\varepsilon})}{t}. \tag{3.43}$$

Para $-1 < t < 0$, $(1+t)v_{\lambda,\varepsilon} \in \{v \in W_0^{1,N}(\Omega); \|v\| \leq \varepsilon\}$, pois $\|(1+t)v_{\lambda,\varepsilon}\| = (1+t)\|v_{\lambda,\varepsilon}\| \leq \|v_{\lambda,\varepsilon}\| \leq \varepsilon$. Assim, usando que $v_{\lambda,\varepsilon}$ é mínimo de $J_\lambda(u_\lambda + \cdot)$ em $\{\|v\| \leq \varepsilon\}$, obtemos que, para $-1 < t < 0$,

$$J_\lambda(u_\lambda + (1+t)v_{\lambda,\varepsilon}) - J_\lambda(u_\lambda + v_{\lambda,\varepsilon}) \leq 0.$$

Logo, utilizando esta desigualdade em (3.43), obtemos

$$J'_\lambda(u_\lambda + v_{\lambda,\varepsilon})v_{\lambda,\varepsilon} \leq 0.$$

Consequentemente, por (3.42), segue que $\mu_\varepsilon \leq 0$, como queríamos demonstrar.

Dessa forma, segue, para $(x,p) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$, que

$$\begin{aligned}
\frac{\langle A_\varepsilon(x,p), p\rangle}{|p|^N} &= \frac{\langle |\nabla u_\lambda(x) + p|^{N-2}(\nabla u_\lambda(x) + p) - |\nabla u_\lambda(x)|^{N-2}\nabla u_\lambda(x) - \mu_\varepsilon |p|^{N-2}p, p\rangle}{|p|^N} \\
&= \frac{\langle |\nabla u_\lambda(x) + p|^{N-2}(\nabla u_\lambda(x) + p) - |\nabla u_\lambda(x)|^{N-2}\nabla u_\lambda(x), p\rangle}{|p|^N} - \mu_\varepsilon \\
&\geq \frac{\langle |\nabla u_\lambda(x) + p|^{N-2}(\nabla u_\lambda(x) + p) - |\nabla u_\lambda(x)|^{N-2}\nabla u_\lambda(x), p\rangle}{|p|^N}.
\end{aligned}$$

Logo, pelo Lema 1.28, concluímos que

$$\frac{\langle A_\varepsilon(x,p), p\rangle}{|p|^N} \geq c_N > 0,$$

onde c_N é uma constante que depende de N. Assim, obtemos que

$$\rho = \inf_{(x,p)\in\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^N\backslash\{0\}} \frac{\langle A_\varepsilon(x,p), p\rangle}{|p|^N} > 0$$

e, portanto, podemos aplicar a técnica de iteração de Moser (ver Teorema 15.7 em [27]) para concluir que existe $\beta \in (0,1)$ tal que

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \|v_{\lambda,\varepsilon}\|_{C^{0,\beta}(\overline{\Omega})} < \infty.$$

Desde que b é uma função de p localmente Hölder contínua, segue de resultados de regularidade de [19, 40] que

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \|v_{\lambda,\varepsilon}\|_{C^{1,\beta}(\overline{\Omega})} < \infty, \qquad \beta \in (0,1).$$

Desde que $\|v_{\lambda,\varepsilon}\| \leq \varepsilon$ e pela imersão compacta $W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^N(\Omega)$ (Teorema 1.17), obtemos que $v_{\lambda,\varepsilon} \to 0$ em $L^N(\Omega)$ e $\frac{\partial v_{\lambda,\varepsilon}}{\partial x_i} \to 0$, $i = 1, ..., N$, em $L^N(\Omega)$. Logo, $v_{\lambda,\varepsilon} \to 0$ q.t.p. em Ω e $\frac{\partial v_{\lambda,\varepsilon}}{\partial x_i} \to 0$, $i = 1, ..., N$, q.t.p. em Ω. Como $v_{\lambda,\varepsilon}$ e $\frac{\partial v_{\lambda,\varepsilon}}{\partial x_i}$ são contínuas (pois $C^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega})$ (Teorema 1.20)), segue que $v_{\lambda,\varepsilon} \to 0$ e $\frac{\partial v_{\lambda,\varepsilon}}{\partial x_i} \to 0$ pontualmente em $\overline{\Omega}$. Sendo $\overline{\Omega}$ compacto, tais convergências são uniformes e, portanto, $v_{\lambda,\varepsilon} \to 0$ em $C^1(\overline{\Omega})$. Este fato contraria (3.39), visto que u_λ é mínimo global de J_λ em $\mathcal{C}$. ∎

3.4.3 Existência de Solução para (P_Λ)

Aqui, mostraremos que (P_λ) possui solução quando $\lambda = \Lambda$.

Lema 3.25 *Existe solução u_Λ para (P_Λ)*

Prova: Como u_λ é mínimo global de I_λ e $I_\lambda \equiv J_\lambda$ em $\mathcal{A}$ (ver (3.34)), obtemos que

$$J_\lambda(u_\lambda) = I_\lambda(u_\lambda) \leq I_\lambda(v), \quad \text{para todo } v \in W_0^{1,N}(\Omega). \tag{3.44}$$

Seja $v_0 \in C_c^\infty(\Omega), v_0 > 0$. Dessa forma, usando (3.32), obtemos que

$$\begin{aligned} I_\lambda(tv_0) &= \frac{1}{N}\int_\Omega |\nabla(tv_0)|^N + \frac{\lambda K}{2}\int_\Omega |tv_0|^2 - \lambda\int_\Omega G(x, tv_0) \\ &\leq \frac{t^N}{N}\|v_0\|^N + \frac{t^2\lambda K}{2}\|v_0\|_2^2 - t\lambda\int_\Omega [f(\underline{u}) + K\underline{u}]v_0. \end{aligned}$$

Assim, como $v_0 > 0$ e $f(\underline{u}) + K\underline{u} > 0$, para $t > 0$ suficientemente pequeno, temos que

$$I_\lambda(tv_0) < 0.$$

Logo, por (3.44), segue que

$$J_\lambda(u_\lambda) \leq I_\lambda(tv_0) < 0. \tag{3.45}$$

Agora, considere $\{\lambda_n\}$ uma sequência tal que $\lambda_n \to \Lambda$ e seja u_{λ_n} a correspondente solução de (P_{λ_n}) obtida nos Lemas 3.22 e 3.24. Dessa forma, por (3.45) e pelo fato de u_{λ_n} ser solução de (P_{λ_n}), temos que

$$J_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) < 0 \qquad \text{e} \qquad J'_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) = 0. \tag{3.46}$$

Afirmação: $\|u_{\lambda_n}\| \leq C$, para algum $C > 0$.

De fato, na Afirmação 1 do Lema 3.24, provamos que para cada $\varepsilon > 0$, existe $R_\varepsilon > 0$ tal que, se $s \geq R_\varepsilon$, então $F(s) \leq \varepsilon f(s)s$. Assim, escolhendo $\sigma > N$, existe R_σ tal que

$$\sigma F(s) \leq f(s)s, \quad \text{para todo } s \geq R_\sigma. \tag{3.47}$$

Logo, combinando este fato com (3.46), obtemos que

$$\begin{aligned}
0 &> J_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) + \frac{1}{\sigma} J'_{\lambda_n}(u_{\lambda_n})u_{\lambda_n} \\
&= \frac{1}{N}\|u_{\lambda_n}\|^N - \lambda_n \int_\Omega F(u_{\lambda_n}) + \frac{1}{\sigma}\left(\|u_{\lambda_n}\|^N - \lambda_n \int_\Omega f(u_{\lambda_n})u_{\lambda_n}\right) \\
&= \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{\sigma}\right)\|u_{\lambda_n}\|^N - \frac{\lambda_n}{\sigma}\int_\Omega (\sigma F(u_{\lambda_n}) - f(u_{\lambda_n})u_{\lambda_n}) \\
&= \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{\sigma}\right)\|u_{\lambda_n}\|^N + \frac{\lambda_n}{\sigma}\int_{\{u_{\lambda_n} \geq R_\sigma\}} (f(u_{\lambda_n})u_{\lambda_n} - \sigma F(u_{\lambda_n})) \\
&\quad + \frac{\lambda_n}{\sigma}\int_{\{u_{\lambda_n} < R_\sigma\}} (f(u_{\lambda_n})u_{\lambda_n} - \sigma F(u_{\lambda_n})) \\
&\geq \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{\sigma}\right)\|u_{\lambda_n}\|^N + \frac{\lambda_n}{\sigma}\int_{\{u_{\lambda_n} < R_\sigma\}} (f(u_{\lambda_n})u_{\lambda_n} - \sigma F(u_{\lambda_n}))
\end{aligned}$$

Como a última integral do lado direito e a sequência $\{\lambda_n\}$ são limitadas, segue que existe $C_1 > 0$ tal que

$$\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{\sigma}\right)\|u_{\lambda_n}\|^N - C_1 < 0.$$

Sendo $\sigma > N$, temos que

$$\frac{1}{N} - \frac{1}{\sigma} > 0$$

e, portanto, escolhendo

$$C = \left(\frac{C_1 \sigma N}{\sigma - N}\right)^{\frac{1}{N}},$$

segue que $\|u_{\lambda_n}\| \leq C$, como queríamos demonstrar.

Devido a afirmação acima, existe $u_\Lambda \in W_0^{1,N}(\Omega)$ tal que $u_{\lambda_n} \rightharpoonup u_\Lambda$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$. Mostremos que u_Λ é solução fraca de (P_Λ). Com efeito, como $u_{\lambda_n} \rightharpoonup u_\Lambda$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$, então, a menos de subsequência, $u_{\lambda_n} \to u_\Lambda$ q.t.p. em Ω, donde $F(u_{\lambda_n}) \to F(u_\Lambda)$ q.t.p. em Ω. Portanto, de forma análoga ao que fizemos na prova de (3.14), concluímos pelo Teorema de Vitali (Teorema 1.8) que $(F(u_{\lambda_n}))$ converge para $F(u_\Lambda)$ em $L^1(\Omega)$, ou seja,

$$\int_\Omega F(u_{\lambda_n}) \to \int_\Omega F(u_\Lambda).$$

Assim, pela convergência acima e pelo Teorema 1.15,

$$\begin{aligned} J_\Lambda(u_\Lambda) &= \frac{1}{N}\|u_\Lambda\|^N - \Lambda \int_\Omega F(u_\Lambda) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{N}\int_\Omega |\nabla u_{\lambda_n}|^N + \liminf_{n\to\infty}\left(-\Lambda \int_\Omega F(u_{\lambda_n})\right) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{N}\int_\Omega |\nabla u_{\lambda_n}|^N - \Lambda \int_\Omega F(u_{\lambda_n})\right) \\ &= \liminf_{n\to\infty} J_\Lambda(u_{\lambda_n}) \\ &= \inf_{\|u\|\leq C} J_\Lambda(u). \end{aligned}$$

Novamente pelo Teorema 1.15, $\|u_\Lambda\| \leq C$, donde, obviamente, $\inf_{\|u\|\leq C} J_\Lambda(u) \leq J_\Lambda(u_\Lambda)$. Logo,

$$J_\Lambda(u_\Lambda) = \inf_{\|u\|\leq C} J_\Lambda(u)$$

e, portanto, u_Λ é mínimo de J_Λ em $\{\|u\| \leq C\}$. ■

Observação 3.26 *A condição (3.47) é conhecida como a condição de Ambrosetti-Rabinowitz e, na literatura, denotada por* (AR).

3.4.4 Prova do Teorema 3.8

Prova do Teorema 3.8: O item (i) segue do Lema 3.24, o item (ii) segue do Lema 3.25 e o item (iii) segue do Lema 3.20. ■

Capítulo 4

Solução via Passo da Montanha

Neste capítulo, iremos demonstrar o principal resultado desta dissertação, o qual enunciamos abaixo:

Teorema 4.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, um domínio limitado com fronteira suave. Suponha que $f(t) = h(t)e^{t^{N/(N-1)}}$, $t \geq 0$, satisfaz as hipóteses (A1)-(A6). Então,*

(i) existe $\Lambda > 0$ tal que (P_λ) admite, pelo menos, duas soluções, digamos u_λ e v_λ, para todo $\lambda \in (0, \Lambda)$, uma solução para $\lambda = \Lambda$ e nenhuma solução para $\lambda > \Lambda$;

(ii) quando $\lambda \to 0$, $u_\lambda \to 0$ em $C^1(\overline{\Omega})$.

Para isto, assumiremos aqui, sem perda de generalidade, que $0 \in \Omega$ e usaremos uma versão generalizada do Teorema do Passo da Montanha, para um funcional modificado $\tilde{J}_\lambda$, para mostrar a existência de uma segunda solução de (P_λ). Usando (A2), sabemos que existe $K > 0$ de tal forma que $t \mapsto f(t) + Kt$ seja não-decrescente (ver Observação 3.23), para todo $t \in \mathbb{R}$. Para $x \in \Omega$ e $s \in \mathbb{R}$, defina

$$\tilde{f}(x,s) = \begin{cases} f(s) + Ks, & \text{se } s > \underline{u}(x), \\ f(\underline{u}(x)) + K\underline{u}(x), & \text{se } s \leq \underline{u}(x) \end{cases}$$

e considere

$$\tilde{F}(x,s) = \int_0^s \tilde{f}(x,t)dt$$

e o funcional $\tilde{J}_\lambda : W_0^{1,N}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$\tilde{J}_\lambda(u) = \frac{1}{N}\int_\Omega |\nabla u|^N + \frac{\lambda K}{2}\int_\Omega |u|^2 - \lambda \int_\Omega \tilde{F}(x,u).$$

Definindo g e I_λ como em (3.31) e (3.33), segue que $\tilde{f}(x,s) = g(x,s)$, para todo $s \leq \overline{u}(x)$ e, portanto, $I_\lambda \equiv \tilde{J}_\lambda$ no conjunto $\{v \in W_0^{1,N}(\Omega); v \leq \overline{u} \text{ em } \Omega\}$. De forma análoga ao que fizemos na demonstração do Lema 3.22, é possível obter $\delta > 0$ suficientemente pequeno de modo que se $v \in \mathcal{C}$ e $\|v - u_\lambda\|_{\mathcal{C}} < \delta$, então $v < \overline{u}$ em Ω. Assim, para $v \in W_0^{1,N}(\Omega) \cap \mathcal{C}$ próximo o bastante de u_λ em $\mathcal{C}$, temos que $I_\lambda(v) = \tilde{J}_\lambda(v)$, ou seja, u_λ é mínimo local para $\tilde{J}_\lambda|_{\mathcal{C}}$. Com argumentos similares aos do Lema 3.24, concluímos que u_λ é mínimo local para $\tilde{J}_\lambda$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$.

Por outro lado, se v_λ é ponto crítico de $\tilde{J}_\lambda$, então v_λ é solução da equação

$$-\Delta_N v_\lambda + \lambda K v_\lambda = \lambda \tilde{f}(x, v_\lambda)$$

e, portanto, por argumentos análogos aos da prova do Lema 3.22, concluímos que $v_\lambda \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$, para algum $\gamma \in (0,1)$, donde, pelo Princípio de Comparação Forte (Lema 3.21), obtemos que

$$v_\lambda > \underline{u} \qquad \text{em } \Omega. \tag{4.1}$$

Sendo $\mathcal{B} = \{v \in W_0^{1,N}(\Omega); v > \underline{u} \text{ em } \Omega\}$, temos

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_\lambda|_{\mathcal{B}}(v) &= \frac{1}{N}\int_\Omega |\nabla v|^N + \frac{\lambda K}{2}\int_\Omega |v|^2 - \lambda \int_\Omega \tilde{F}(x,v) \\
&= \frac{1}{N}\int_\Omega |\nabla v|^N + \frac{\lambda K}{2}\int_\Omega |v|^2 - \lambda \int_\Omega \int_0^v \tilde{f}(x,t)dt \\
&= \frac{1}{N}\int_\Omega |\nabla v|^N + \frac{\lambda K}{2}\int_\Omega |v|^2 - \lambda \int_\Omega \int_0^v (f(t) + Kt)dt \\
&= \frac{1}{N}\int_\Omega |\nabla v|^N + \frac{\lambda K}{2}\int_\Omega |v|^2 - \lambda \int_\Omega F(v) - \frac{\lambda K}{2}\int_\Omega |v|^2 \\
&= \frac{1}{N}\int_\Omega |\nabla v|^N - \lambda \int_\Omega F(v) \\
&= J_\lambda|_{\mathcal{B}}(v),
\end{aligned} \tag{4.2}$$

ou seja, $J_\lambda \equiv \tilde{J}_\lambda$ em $\mathcal{B}$. Como v_λ é ponto crítico de $\tilde{J}_\lambda$ e, por (4.1), temos $v_\lambda \in \mathcal{B}$, segue que v_λ é solução de (P_λ).

4.1 Definição e Propriedades de Sequências $(\mathrm{PS})_{\mathcal{F},\rho}$

Assumiremos, a menos de translação de eixos, que $0 \in \Omega$.

Definição 4.2 ([26]) *Seja $\mathcal{F} \subseteq W_0^{1,N}(\Omega)$ fechado. Dizemos que uma sequência $\{u_n\} \subset W_0^{1,N}(\Omega)$ é uma sequência Palais-Smale para $\tilde{J}_\lambda$ no nível ρ em torno de $\mathcal{F}$ (ou, simplesmente, sequência (PS)$_{\mathcal{F},\rho}$) se*

$$\lim_{n\to\infty} dist(u_n, \mathcal{F}) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \tilde{J}_\lambda(u_n) = \rho \quad e \quad \lim_{n\to\infty} \|\tilde{J}_\lambda{}'(u_n)\|_{W^{-1,\frac{N}{N-1}}(\Omega)} = 0.$$

Lema 4.3 *Sejam $\mathcal{F} \subseteq W_0^{1,N}(\Omega)$ um fechado e $\rho \in \mathbb{R}$. Se $\{u_n\} \subset W_0^{1,N}(\Omega)$ é uma sequência (PS)$_{\mathcal{F},\rho}$ para $\tilde{J}_\lambda$, então, a menos de subsequência, existe $u_0 \in W_0^{1,N}(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u_0$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$ e*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \tilde{F}(x, u_n) = \int_\Omega \tilde{F}(x, u_0).$$

Prova: Sendo $\{u_n\} \subset W_0^{1,N}(\Omega)$ uma sequência (PS)$_{\mathcal{F},\rho}$ para $\tilde{J}_\lambda$, temos as seguintes relações quando $n \to \infty$:

$$\frac{1}{N}\int_\Omega |\nabla u_n|^N + \frac{\lambda K}{2}\int_\Omega |u_n|^2 - \lambda \int_\Omega \tilde{F}(x, u_n) = \rho + o_n(1) \tag{4.3}$$

$$\left| \int_\Omega |\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n \cdot \nabla\phi + \lambda K \int_\Omega u_n\phi - \lambda \int_\Omega \tilde{f}(x, u_n)\phi \right| \leq o_n(1)\|\phi\|, \tag{4.4}$$

para toda $\phi \in W_0^{1,N}(\Omega)$.

Dividimos a demonstração em duas etapas:

Etapa 1. $\sup_n \|u_n\| < \infty$ e $\sup_n \int_\Omega \tilde{f}(x, u_n)u_n < \infty$.

Provemos inicialmente que, dado $\varepsilon > 0$, existe $s_\varepsilon > 0$ tal que

$$\frac{Ks^2}{2} + \tilde{F}(x, s) \leq \varepsilon \tilde{f}(x, s)s, \qquad \text{para todo } |s| \geq s_\varepsilon.$$

Com efeito, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{Ks^2}{2} + \widetilde{F}(x, s) &= \frac{Ks^2}{2} + \int_0^s \widetilde{f}(x, t)dt \\
&= \frac{Ks^2}{2} + \int_0^{\underline{u}(x)} \widetilde{f}(x, t)dt + \int_{\underline{u}(x)}^s \widetilde{f}(x, t)dt \\
&= \frac{Ks^2}{2} + [f(\underline{u}(x)) + K\underline{u}(x)]\underline{u}(x) + \int_{\underline{u}(x)}^s f(t)dt + \frac{Ks^2}{2} - \frac{K(\underline{u}(x))^2}{2} \\
&= Ks^2 + F(s) + [f(\underline{u}(x)) + K\underline{u}(x)]\underline{u}(x) - F(\underline{u}(x)) - \frac{K(\underline{u}(x))^2}{2}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\frac{\frac{Ks^2}{2} + \widetilde{F}(x,s)}{f(s)s + Ks^2} &= \frac{Ks^2}{f(s)s + Ks^2} + \frac{F(s)}{f(s)s + Ks^2} \\
&\quad + \frac{[f(\underline{u}(x)) + K\underline{u}(x)]\underline{u}(x) - F(\underline{u}(x)) - \frac{K(\underline{u}(x))^2}{2}}{f(s)s + Ks^2} \\
&=: X + Y + Z.
\end{aligned}
$$

É fácil ver que

$$X \to 0 \qquad \text{quando } s \to \infty. \tag{4.5}$$

Além disso, pela Afirmação 1 do Lema 3.24, conclui-se que

$$Y \to 0 \qquad \text{quando } s \to \infty. \tag{4.6}$$

Finalmente, como o numerador de Z não depende de s, segue que

$$Z \to 0 \qquad \text{quando } s \to \infty. \tag{4.7}$$

Assim, por (4.5), (4.6) e (4.7), obtemos que

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\dfrac{Ks^2}{2} + \widetilde{F}(x,s)}{f(s)s + Ks^2} = 0.$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $s_\varepsilon \geq \max\{\underline{u}(x); x \in \overline{\Omega}\} > 0$ tal que

$$\frac{\dfrac{Ks^2}{2} + \widetilde{F}(x,s)}{f(s)s + Ks^2} \leq \varepsilon, \qquad \text{para todo } s \geq s_\varepsilon.$$

Como a propriedade é claramente satisfeita para $s \leq 0$ e $\widetilde{f}(x,s)s = f(s)s + Ks^2$, para $s \geq \underline{u}(x)$, temos que

$$\frac{Ks^2}{2} + \tilde{F}(x,s) \leq \varepsilon \widetilde{f}(x,s)s, \qquad \text{para todo } |s| \geq s_\varepsilon,$$

como era desejado provar.

Assim, usando (4.3) juntamente com esta relação, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N}\int_\Omega |\nabla u_n|^N &= -\frac{\lambda K}{2}\int_\Omega |u_n|^2 + \lambda\int_\Omega \tilde{F}(x,u_n) + \rho + o_n(1)\\
&\leq \frac{\lambda K}{2}\int_\Omega |u_n|^2 + \lambda\int_\Omega \tilde{F}(x,u_n) + \rho + o_n(1)\\
&= \frac{\lambda K}{2}\int_{\{|u_n|\leq s_\varepsilon\}} |u_n|^2 + \frac{\lambda K}{2}\int_{\{|u_n|\geq s_\varepsilon\}} |u_n|^2 + \lambda\int_{\{|u_n|\leq s_\varepsilon\}} \tilde{F}(x,u_n)\\
&\quad +\lambda\int_{\{|u_n|\geq s_\varepsilon\}} \tilde{F}(x,u_n) + \rho + o_n(1)\\
&\leq \frac{\lambda K}{2}\int_{\{|u_n|\leq s_\varepsilon\}} |u_n|^2 + \frac{\lambda K}{2}\int_{\{|u_n|\geq s_\varepsilon\}} |u_n|^2 + \lambda\int_{\{|u_n|\leq s_\varepsilon\}} \tilde{F}(x,u_n)\\
&\quad +\lambda\varepsilon\int_{\{|u_n|\geq s_\varepsilon\}} \tilde{f}(x,u_n)u_n - \frac{\lambda K}{2}\int_{\{|u_n|\geq s_\varepsilon\}} |u_n|^2 + \rho + o_n(1)\\
&= \frac{\lambda K}{2}\int_{\{|u_n|\leq s_\varepsilon\}} |u_n|^2 + \lambda\int_{\{|u_n|\leq s_\varepsilon\}} \tilde{F}(x,u_n) + \lambda\varepsilon\int_{|u_n|\geq s_\varepsilon} \tilde{f}(x,u_n)u_n\\
&\quad +\rho + o_n(1)\\
&\leq C_\varepsilon + \lambda\varepsilon\int_\Omega \tilde{f}(x,u_n)u_n. \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

Agora, tomando $\phi = u_n$ em (4.4), segue que

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^N + \lambda K\int_\Omega |u_n|^2 - \lambda\int_\Omega \tilde{f}(x,u_n)u_n \geq -o_n(1)\|u_n\|$$

e, portanto,

$$\lambda\int_\Omega \tilde{f}(x,u_n)u_n \leq \int_\Omega |\nabla u_n|^N + \lambda K\int_\Omega |u_n|^2 + o_n(1)\|u_n\|. \qquad (4.9)$$

Todavia, usando a imersão $W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ (Teorema 1.17 (Rellich-Kondrachov)), temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u_n|^N + \lambda K\int_\Omega |u_n|^2 &= \int_\Omega |\nabla u_n|^N + \lambda K\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&\leq \int_\Omega |\nabla u_n|^N + \lambda KC\|u_n\|^2\\
&= \int_\Omega |\nabla u_n|^N + \lambda KC\left(\int_\Omega |\nabla u_n|^N\right)^{\frac{2}{N}}\\
&\leq \int_\Omega |\nabla u_n|^N + \lambda KC\int_\Omega |\nabla u_n|^N\\
&= (1+\lambda KC)\int_\Omega |\nabla u_n|^N\\
&=: C_K\int_\Omega |\nabla u_n|^N.
\end{aligned}$$

Logo, substituindo a desigualdade acima em (4.9), podemos concluir que

$$\lambda \int_\Omega \tilde{f}(x,u_n)u_n \leq C_K \int_\Omega |\nabla u_n|^N + o_n(1)\|u_n\| \tag{4.10}$$

e, consequentemente, utilizando a expressão (4.10) em (4.8), obtemos

$$\left(\frac{1}{N} - \varepsilon C_K\right) \|u_n\|^N \leq C_\varepsilon + \varepsilon o_n(1)\|u_n\|.$$

Assim,

$$\|u_n\|^N \leq \frac{NC_\varepsilon}{1 - N\varepsilon C_K} + \frac{\varepsilon N}{1 - N\varepsilon C_K} o_n(1)\|u_n\|.$$

Tomando $\varepsilon \leq 1/(N + NC_K)$, segue que $\varepsilon N/(1 - N\varepsilon C_K) \leq 1$ e, portanto,

$$\|u_n\|^N \leq \frac{NC_\varepsilon}{1 - N\varepsilon C_K} + o_n(1)\|u_n\|, \tag{4.11}$$

de onde concluímos que $\{u_n\}$ é limitada ou, equivalentemente, que

$$\sup_n \|u_n\| < \infty.$$

Agora, de posse da limitação de $\{u_n\}$, para finalizar a prova da Etapa 1, basta utilizarmos esta limitação na expressão (4.10) para concluir que

$$\sup_n \int_\Omega \tilde{f}(x,u_n)u_n < \infty,$$

como queríamos provar.

Desde que $\{u_n\} \subset W_0^{1,N}(\Omega)$ é limitada, existe $u_0 \in W_0^{1,N}(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u_0$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$.

Etapa 2. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega \tilde{f}(x,u_n) = \int_\Omega \tilde{f}(x,u_0)$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega \tilde{F}(x,u_n) = \int_\Omega \tilde{F}(x,u_0)$.

Mostremos inicialmente que $\{\tilde{f}(x,u_n)\}$ é uma família equi-integrável em $L^1(\Omega)$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, defina

$$\mu_\varepsilon = \sup_{x\in\Omega, |s|\leq \frac{2\tilde{C}}{\varepsilon}} |\tilde{f}(x,s)|,$$

onde $\tilde{C} = \sup_n \int_\Omega |\tilde{f}(x,u_n)u_n|$ (observe que, devido a Etapa 1, $\tilde{C} < \infty$). Assim, tomando

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2\mu_\varepsilon},$$

temos que, para qualquer $E \subset \Omega$ tal que $|E| \leq \delta$,

$$\begin{aligned}
\int_E |\tilde{f}(x,u_n)| &\leq \int_{E\cap\{|u_n|\geq \frac{2\tilde{C}}{\varepsilon}\}} \frac{|\tilde{f}(x,u_n)u_n|}{|u_n|} + \int_{E\cap\{|u_n|\leq \frac{2\tilde{C}}{\varepsilon}\}} |\tilde{f}(x,u_n)| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2\tilde{C}} \int_{E\cap\{|u_n|\geq \frac{2\tilde{C}}{\varepsilon}\}} |\tilde{f}(x,u_n)u_n| + \mu_\varepsilon \int_{E\cap\{|u_n|\leq \frac{2\tilde{C}}{\varepsilon}\}} 1 \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2\tilde{C}} \int_\Omega |\tilde{f}(x,u_n)u_n| + \mu_\varepsilon \int_E 1 \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2\tilde{C}} \tilde{C} + \mu_\varepsilon |E| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \mu_\varepsilon \frac{\varepsilon}{2\mu_\varepsilon} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Logo, $\{\tilde{f}(x,u_n)\}$ é uma família equi-integrável em $L^1(\Omega)$ e, portanto, pelo Teorema da Convergência de Vitali (Teorema 1.8),

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \tilde{f}(x,u_n) = \int_\Omega \tilde{f}(x,u_0), \tag{4.12}$$

ficando, dessa forma, provado a primeira parte da Etapa 2.

Para completarmos a demonstração, lembre que

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(x,s) &\leq \varepsilon \tilde{f}(x,s)s - \frac{Ks^2}{2} \\
&\leq \varepsilon \tilde{f}(x,s)s, \quad \text{para todo } |s| \geq s_\varepsilon, \qquad (4.13)
\end{aligned}$$

quaisquer que sejam $\varepsilon > 0$ e $x \in \Omega$. Além disso, como $[-s_\varepsilon, s_\varepsilon]$ é compacto, segue que $\tilde{F}(x,\cdot)$ e $\tilde{f}(x,\cdot)$ são limitadas em $[-s_\varepsilon, s_\varepsilon]$, donde garantimos a existência de $C_1 > 0$ tal que

$$\tilde{F}(x,s) \leq C_1 \tilde{f}(x,s)s, \quad \text{para todo } s \in [-s_\varepsilon, s_\varepsilon], x \in \Omega. \tag{4.14}$$

Logo, considerando $C = \max\{\varepsilon, C_1\}$, obtemos de (4.13) e (4.14) que

$$\widetilde{F}(x,s) \leq C \tilde{f}(x,s)s, \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}, x \in \Omega. \tag{4.15}$$

Pela Etapa 1, sabemos que

$$\int_\Omega \tilde{f}(x,u_n)u_n < \infty.$$

Assim, por (4.15), segue que $\{\widetilde{F}(x,u_n)\}$ é uma sequência de funções mensuráveis em $L^1(\Omega)$. Portanto, semelhantemente ao que fizemos na demonstração de (3.14), pelo Teorema 1.8 (Teorema de Vitali) concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \widetilde{F}(x,u_n) = \int_\Omega \widetilde{F}(x,u_0).$$

e o Lema 4.3 está provado. ■

4.2 O Nível do Passo da Montanha

Comecemos esta seção mostrando a veracidade de um lema que usaremos mais adiante para provarmos que $\tilde{J}_\lambda$ satisfaz a propriedade $\tilde{J}_\lambda(u_\lambda + tv) \to -\infty$ quando $t \to \infty$, para toda $v \in C(\Omega)\backslash\{0\}$, $v \geq 0$.

Lema 4.4 *Para $\sigma > N$, existem constantes positivas c_1 e c_2 tais que, para todo $s \geq 0$,*

$$F(s) \geq c_1 s^\sigma - c_2.$$

Prova: Para $s = 0$ o lema é facilmente demonstrado. Provemos para $s > 0$. Já vimos que da hipótese (A6) é possível obtermos a condição (AR) (ver Observação 3.26). Assim, para $\sigma > N$, obtemos que

$$0 < \frac{\sigma}{s} \leq \frac{f(s)}{F(s)}, \qquad s \geq R_\sigma,$$

o que implica

$$\int_{R_\sigma}^{s} \frac{\sigma}{t} dt \leq \int_{R_\sigma}^{s} \frac{f(t)}{F(t)} dt.$$

Assim,

$$\ln \left(\frac{s}{R_\sigma} \right)^\sigma \leq \ln \frac{F(s)}{F(R_\sigma)}, \qquad s \geq R_\sigma,$$

donde concluimos que

$$F(s) \geq \frac{F(R_\sigma)}{R_\sigma^\sigma} s^\sigma, \quad \text{para todo } s \geq R_\sigma.$$

Portanto, tomando $c_1 = F(R_\sigma)/R_\sigma^\sigma$, temos que

$$F(s) \geq c_1 s^\sigma \geq c_1 s^\sigma - d, \quad \text{quaisquer que sejam } s \geq R_\sigma \text{ e } d > 0. \tag{4.16}$$

Para $s \in [0, R_\sigma]$, temos que

$$\min_{s \in [0, R_\sigma]} F(s) \qquad \text{e} \qquad \max_{s \in [0, R_\sigma]} c_1 s^\sigma$$

são atingidos. Consequentemente, para $s \in [0, R_\sigma]$, existe $c_2 > 0$ tal que

$$F(s) \geq \min_{s \in [0, R_\sigma]} F(s) \geq \max_{s \in [0, R_\sigma]} c_1 s^\sigma - c_2 \geq c_1 s^\sigma - c_2. \tag{4.17}$$

De (4.16) e (4.17) obtemos o resultado. ■

Provemos agora que $\tilde{J}_\lambda$ satisfaz a condição $\tilde{J}_\lambda(u_\lambda + tv) \to -\infty$ quando $t \to \infty$, para toda $v \in C(\Omega)\backslash\{0\}$, $v \geq 0$. De fato, lembrando que

$$\tilde{f}(x,s) = \begin{cases} f(s) + Ks, & \text{se } s > \underline{u}(x), \\ f(\underline{u}(x)) + K\underline{u}(x), & \text{se } s \leq \underline{u}(x), \end{cases}$$

segue que

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x,s) &= \int_0^s \tilde{f}(x,t)dt \\ &= \begin{cases} \displaystyle\int_0^s (f(\underline{u}(x)) + K\underline{u}(x))dt, & \text{se } s \leq \underline{u}(x), \\ \displaystyle\int_0^{\underline{u}(x)} (f(\underline{u}(x)) + K\underline{u}(x))dt + \int_{\underline{u}(x)}^s (f(t) + Kt)dt, & \text{se } s > \underline{u}(x), \end{cases} \\ &= \begin{cases} (f(\underline{u}(x)) + K\underline{u}(x))s, & \text{se } s \leq \underline{u}(x), \\ (f(\underline{u}(x)) + K\underline{u}(x))\underline{u}(x) + F(s) - F(\underline{u}(x)) & \\ \qquad\qquad + \dfrac{Ks^2}{2} - \dfrac{K(\underline{u}(x))^2}{2}, & \text{se } s > \underline{u}(x), \end{cases} \\ &= \begin{cases} (f(\underline{u}(x)) + K\underline{u}(x))s, & \text{se } s \leq \underline{u}(x), \\ f(\underline{u}(x))\underline{u}(x) + \dfrac{K(\underline{u}(x))^2}{2} + F(s) - F(\underline{u}(x)) + \dfrac{Ks^2}{2}, & \text{se } s > \underline{u}(x), \end{cases} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\tilde{F}(x,s) = \begin{cases} (f(\underline{u}(x)) + K\underline{u}(x))s, & \text{se } s \leq \underline{u}(x), \\ f(\underline{u}(x))\underline{u}(x) + \dfrac{K(\underline{u}(x))^2}{2} + F(s) - F(\underline{u}(x)) + \dfrac{Ks^2}{2}, & \text{se } s > \underline{u}(x), \end{cases} \tag{4.18}$$

Desta forma, sendo

$$\mathcal{A} := \{x \in \Omega; u_\lambda(x) + tv(x) \leq \underline{u}(x)\}$$

e

$$\mathcal{B} := \{x \in \Omega; u_\lambda(x) + tv(x) > \underline{u}(x)\},$$

para $v \in C(\Omega)\backslash\{0\}$, $v \geq 0$, temos que

$$\begin{aligned} \tilde{J}_\lambda(u_\lambda + tv) &= \frac{1}{N}\|u_\lambda + tv\|^N + \frac{\lambda K}{2}\int_\Omega |u_\lambda + tv|^2 - \lambda\int_\Omega \tilde{F}(x, u_\lambda + tv) \\ &\leq \frac{2^{N-1}}{N}\|u_\lambda\|^N + \frac{2^{N-1}t^N}{N}\|v\|^N + \frac{\lambda K}{2}\int_\Omega |u_\lambda|^2 + t\lambda K\int_\Omega u_\lambda v \\ &\quad + \frac{t^2\lambda K}{2}\int_\Omega v^2 - \int_{\mathcal{A}} \tilde{F}(x, u_\lambda + tv) - \int_{\mathcal{B}} \tilde{F}(x, u_\lambda + tv). \end{aligned}$$

Por (4.18), sabemos que

$$\int_{\mathcal{A}} \tilde{F}(x, u_\lambda + tv) \geq 0$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_\lambda(u_\lambda + tv) &\leq \frac{2^{N-1}}{N}\|u_\lambda\|^N + \frac{2^{N-1}t^N}{N}\|v\|^N + \frac{\lambda K}{2}\int_\Omega |u_\lambda|^2 + t\lambda K \int_\Omega u_\lambda v \\
&\quad + \frac{t^2\lambda K}{2}\int_\Omega v^2 - \int_{\mathcal{B}} \tilde{F}(x, u_\lambda + tv) \\
&= \frac{2^{N-1}}{N}\|u_\lambda\|^N + \frac{2^{N-1}t^N}{N}\|v\|^N + \frac{\lambda K}{2}\int_\Omega |u_\lambda|^2 + t\lambda K \int_\Omega u_\lambda v \\
&\quad + \frac{t^2\lambda K}{2}\int_\Omega v^2 - \int_{\mathcal{B}} \Big[f(\underline{u}(x))\underline{u}(x) + \frac{K(\underline{u}(x))^2}{2} \\
&\quad + F(u_\lambda(x) + tv(x)) - F(\underline{u}(x)) + \frac{K(u_\lambda(x) + tv(x))^2}{2} \Big].
\end{aligned}$$

Como

$$\int_{\mathcal{B}} f(\underline{u}(x))\underline{u}(x) \geq 0, \int_{\mathcal{B}} \frac{K(\underline{u}(x))^2}{2} \geq 0 \ \text{ e } \ \int_{\mathcal{B}} \frac{K(u_\lambda(x) + tv(x))^2}{2} \geq 0,$$

obtemos que

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_\lambda(u_\lambda + tv) &\leq \frac{2^{N-1}}{N}\|u_\lambda\|^N + \frac{2^{N-1}t^N}{N}\|v\|^N + \frac{\lambda K}{2}\int_\Omega |u_\lambda|^2 + t\lambda K \int_\Omega u_\lambda v \\
&\quad + \frac{t^2\lambda K}{2}\int_\Omega v^2 + \int_{\mathcal{B}} F(\underline{u}(x)) - \int_{\mathcal{B}} F(u_\lambda(x) + tv(x)).
\end{aligned}$$

Pelo Lema 4.4, para $\sigma > N$, obtemos constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_\lambda(u_\lambda + tv) &\leq \frac{2^{N-1}}{N}\|u_\lambda\|^N + \frac{2^{N-1}t^N}{N}\|v\|^N + \frac{\lambda K}{2}\int_\Omega |u_\lambda|^2 + t\lambda K \int_\Omega u_\lambda v \\
&\quad + \frac{t^2\lambda K}{2}\int_\Omega v^2 + \int_{\mathcal{B}} F(\underline{u}(x)) - c_1 \int_{\mathcal{B}} (u_\lambda + tv)^\sigma + c_2|\Omega| \\
&= \frac{2^{N-1}}{N}\|u_\lambda\|^N + \frac{2^{N-1}t^N}{N}\|v\|^N + \frac{\lambda K}{2}\int_\Omega |u_\lambda|^2 + t\lambda K \int_\Omega u_\lambda v \\
&\quad + \frac{t^2\lambda K}{2}\int_\Omega v^2 + \int_{\mathcal{B}} F(\underline{u}(x)) + c_2|\Omega| - c_1 t^\sigma \int_{\mathcal{B}} \Big(\frac{u_\lambda}{t} + v\Big)^\sigma \\
&= t^N \Big[\frac{2^{N-1}}{t^N N}\|u_\lambda\|^N + \frac{2^{N-1}}{N}\|v\|^N + \frac{\lambda K}{2t^N}\int_\Omega |u_\lambda|^2 + \frac{\lambda K}{t^{N-1}}\int_\Omega u_\lambda v \\
&\quad + \frac{\lambda K}{2t^{N-2}}\int_\Omega v^2 + \frac{1}{t^N}\int_{\mathcal{B}} F(\underline{u}(x)) + \frac{c_2|\Omega|}{t^N} \\
&\quad - c_1 t^{\sigma - N}\int_{\mathcal{B}} \Big(\frac{u_\lambda}{t} + v\Big)^\sigma \Big]. \qquad (4.19)
\end{aligned}$$

Sabemos que a última integral da expressão acima é não-negativa, isto é,

$$\int_{\mathcal{B}} \left(\frac{u_\lambda}{t} + v\right)^\sigma \geq 0.$$

Se mostrarmos que

$$\int_{\mathcal{B}} \left(\frac{u_\lambda}{t} + v\right)^\sigma \nrightarrow 0 \qquad \text{quando } t \to \infty,$$

podemos concluir que a expressão entre colchetes de (4.19) converge à $-\infty$ e, portanto, $\tilde{J}_\lambda(u_\lambda + tv) \to -\infty$. Realmente, seja $\mathcal{D} := \{x \in \mathcal{B}; v(x) > 0\}$. Quando $t \to \infty$, $v^\sigma \mathcal{X}_{\mathcal{D}} \to v^\sigma$ q.t.p. em Ω, pois $\mathcal{B} = \mathcal{D}$ quando $t \to \infty$. Assim, como

$$\int_{\mathcal{B}} \left(\frac{u_\lambda}{t} + v\right)^\sigma \geq \int_{\mathcal{B}} v^\sigma = \int_{\mathcal{D}} v^\sigma = \int_{\Omega} v^\sigma \mathcal{X}_{\mathcal{C}},$$

pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\int_{\mathcal{B}} \left(\frac{u_\lambda}{t} + v\right)^\sigma \geq \int_{\Omega} v^\sigma \mathcal{X}_{\mathcal{C}} \to \int_{\Omega} v^\sigma > 0, \qquad \text{quando } t \to \infty,$$

como queríamos demonstrar. Logo, quando $t \to \infty$, $\tilde{J}_\lambda(u_\lambda + tv) \to -\infty$.

Como u_λ é mínimo local de $\tilde{J}_\lambda$, consideremos $R_0 > 0$ o raio da maior bola aberta em $W_0^{1,N}(\Omega)$ de centro em u_λ, onde u_λ é mínimo de $\tilde{J}_\lambda$ em tal bola, isto é,

$$R_0 = \max\{R > 0; \tilde{J}_\lambda(u_\lambda) < \tilde{J}_\lambda(v), \text{ para todo } v \in W_0^{1,N}(\Omega) \text{ tal que } 0 < \|v - u_\lambda\| < R\}.$$

Dessa forma, usando que $\tilde{J}_\lambda(u_\lambda + tv) \to -\infty$, existe $e := u_\lambda + t_0 v_0 \in \{v \in W_0^{1,N}(\Omega); \|v - u_\lambda\| = R_0\}$ tal que

$$\tilde{J}_\lambda(e) < \tilde{J}_\lambda(u_\lambda).$$

Considere $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], W_0^{1,N}(\Omega)); \gamma(0) = u_\lambda \text{ e } \gamma(1) = e\}$ e defina o *nível passo da montanha* por

$$\rho_0 = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} \tilde{J}_\lambda(\gamma(t)).$$

Assim, usando que $\tilde{J}_\lambda(u_\lambda) = \tilde{J}_\lambda(\gamma(0)) \leq \sup_{t \in [0,1]} \tilde{J}_\lambda(\gamma(t))$, para todo $\gamma \in \Gamma$, segue que

$$\tilde{J}_\lambda(u_\lambda) \leq \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} \tilde{J}_\lambda(\gamma(t)) = \rho_0,$$

ou seja,

$$\rho_0 \geq \tilde{J}_\lambda(u_\lambda). \tag{4.20}$$

A expressão (4.20) nos dá duas possibilidades para o número ρ_0: ou $\rho_0 = \tilde{J}_\lambda(u_\lambda)$ ou $\rho_0 > \tilde{J}_\lambda(u_\lambda)$. No caso em que $\rho_0 = \tilde{J}_\lambda(u_\lambda)$, a seguinte propriedade é satisfeita:

Lema 4.5 *Se* $\rho_0 = \tilde{J}_\lambda(u_\lambda)$, *então*

$$\inf_{\|v-u_\lambda\|=R} \tilde{J}_\lambda(v) = \rho_0, \quad \textit{para todo } R \in (0, R_0).$$

Prova: Seja $R \in (0, R_0)$. Mostremos inicialmente que

$$\inf_{\|v-u_\lambda\|=R} \tilde{J}_\lambda(v) \leq \rho_0.$$

Com efeito, para todo $\gamma \in \Gamma$, pelo Teorema do Valor Intermediário (Teorema 1.9), existe $t_\gamma \in (0,1)$ tal que $\gamma(t_\gamma) \in \{\|v - u_\lambda\| = R\}$. Entretanto,

$$\sup_{t\in(0,1)} \tilde{J}_\lambda(\gamma(t)) \geq \tilde{J}_\lambda(\gamma(t_\gamma)) \geq \inf_{\|v-u_\lambda\|} \tilde{J}_\lambda(v),$$

donde obtemos que

$$\inf_{\|v-u_\lambda\|=R} \tilde{J}_\lambda(v) \leq \rho_0,$$

como queríamos inicialmente. Agora, suponha por absurdo que

$$\inf_{\|v-u_\lambda\|=R} \tilde{J}_\lambda(v) < \rho_0.$$

Dessa forma, obtemos, por hipótese, que

$$\inf_{\|v-u_\lambda\|=R} \tilde{J}_\lambda(v) < \rho_0 \equiv \tilde{J}_\lambda(u_\lambda). \tag{4.21}$$

Entretanto, como $R \in (0, R_0)$ e u_λ é mínimo de $\tilde{J}_\lambda$ em $\{\|v - u_\lambda\| < R_0\}$, segue, em particular, que

$$\tilde{J}_\lambda(u_\lambda) \leq \inf_{\|v-u_\lambda\|=R} \tilde{J}_\lambda(v),$$

o que contraria (4.21). Logo, concluímos que

$$\inf_{\|v-u_\lambda\|=R} \tilde{J}_\lambda(v) = \rho_0.$$

Como R foi tomado arbitrariamente, segue o resultado. ∎

Desejando garantir uma limitação superior para ρ_0, iremos considerar a sequência $(\tilde{\phi}_n)$ de funções não-negativas (ver [36]):

$$\tilde{\phi}_n(x) = \frac{1}{\omega_{N-1}^{\frac{1}{N}}} \begin{cases} (\log n)^{\frac{N-1}{N}}, & 0 \leq |x| \leq \dfrac{1}{n}, \\ \dfrac{\log \dfrac{1}{|x|}}{(\log n)^{\frac{1}{N}}}, & \dfrac{1}{n} \leq |x| \leq 1, \\ 0 & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Proposição 4.6 *Sejam $r > 0$ tal que $B_r(0) \subset \Omega$ e*

$$\phi_n(x) = \tilde{\phi}_n\left(\frac{x}{r}\right).$$

Então, $\phi_n \in W_0^{1,N}(\Omega)$, $supp(\phi_n) \subseteq B_r(0)$ e $\|\phi_n\| = 1$.

Prova: De fato, seja $x \in B_r(0)$. Dessa forma, temos que

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\omega_{N-1}^{\frac{1}{N}}} \begin{cases} (\log n)^{\frac{N-1}{N}}, & 0 \leq |x| \leq \dfrac{r}{n}, \\ \dfrac{\log \frac{r}{|x|}}{(\log n)^{\frac{1}{N}}}, & \dfrac{r}{n} \leq |x| \leq r, \\ 0 & |x| \geq r. \end{cases}$$

Consequentemente, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\frac{\partial \phi_n(x)}{\partial x_i} = -\frac{1}{(\omega_{N-1} \log n)^{\frac{1}{N}}} \begin{cases} 0, & 0 \leq |x| \leq \dfrac{r}{n}, \\ \dfrac{x_i}{|x|^2}, & \dfrac{r}{n} \leq |x| \leq r, \\ 0 & |x| \geq r. \end{cases} \tag{4.22}$$

Assim, se $\frac{r}{n} \leq x \leq r$, obtemos que

$$|\nabla \phi_n(x)| = \frac{1}{(\omega_{N-1} \log n)^{\frac{1}{N}}} \left(\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{x_i}{|x|^2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{(\omega_{N-1} \log n)^{\frac{1}{N}}} \frac{1}{|x|}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|\phi_n\| &= \left(\int_\Omega |\nabla \phi_n(x)|^N \right)^{\frac{1}{N}} \\ &= \left(\frac{1}{\omega_{N-1} \log n} \int_{\frac{r}{n} \leq |x| \leq r} \frac{1}{|x|^N} \right)^{\frac{1}{N}}. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Usando coordenadas esféricas, temos que

$$\int_{\frac{r}{n} \leq |x| \leq r} \frac{1}{|x|^N} = \omega_{N-1} \int_{\frac{r}{n} \leq \rho \leq r} \frac{\rho^{N-1}}{\rho^N} d\rho = \omega_{N-1} \int_{\frac{r}{n} \leq \rho \leq r} \frac{d\rho}{\rho},$$

donde

$$\int_{\frac{r}{n} \leq |x| \leq r} \frac{1}{|x|^N} = \omega_{N-1}[\log r - \log \frac{r}{n}] = \omega_{N-1}[\log r - \log r + \log n],$$

ou seja,

$$\int_{\frac{r}{n}\leq|x|\leq r} \frac{1}{|x|^N} = \omega_{N-1}\log n.$$

Substituindo esta última expressão em (4.23), obtemos que $\|\phi_n(x)\| = 1$. ■

Vale a seguinte estimativa para o número ρ_0:

Lema 4.7 $\rho_0 < \tilde{J}_\lambda(u_\lambda) + \frac{1}{N}\alpha_N^{N-1}$.

Prova: Seja (δ_n) uma sequência tal que $\delta_n > 0$ e $B_{\delta_n}(0) \subset \Omega$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\delta_n \to 0$, quando $n \to \infty$. Considerando

$$\phi_n(x) = \tilde{\phi}_n\left(\frac{x}{\delta_n}\right),$$

pela Proposição 4.6, segue que $\mathrm{supp}(\phi_n) \subset B_{\delta_n}(0)$ e $\|\phi_n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Provaremos o lema por um argumento de contradição. Entretanto, observe que para provarmos que $\rho_0 < \tilde{J}_\lambda(u_\lambda) + \frac{1}{N}\alpha_N^{N-1}$, é suficiente mostrarmos que

$$\sup_{t>0} \widetilde{J}_\lambda(u_\lambda + t\phi_n) < \widetilde{J}_\lambda(u_\lambda) + \frac{1}{N}\alpha_N^{N-1}, \quad \text{para algum } n \in \mathbb{N}.$$

Suponha, portanto, que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $t_n > 0$ tal que

$$\sup_{t>0} \widetilde{J}_\lambda(u_\lambda + t\phi_n) =: \widetilde{J}_\lambda(u_\lambda + t_n\phi_n) \geq \widetilde{J}_\lambda(u_\lambda) + \frac{1}{N}\alpha_N^{N-1}. \tag{4.24}$$

Afirmação 1: $\{t_n\}$ é limitada.

De fato, se $\{t_n\}$ não fosse limitada, então teríamos que $\widetilde{J}_\lambda(u_\lambda + t_n\phi_n) \to -\infty$, quando $n \to \infty$. Assim, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$, deveríamos ter que

$$\widetilde{J}_\lambda(u_\lambda + t_{n_0}\phi_{n_0}) < \widetilde{J}_\lambda(u_\lambda) + \frac{1}{N}\alpha_N^{N-1},$$

o que contraria (4.24). Logo, $\{t_n\}$ deve ser uma sequência limitada.

Afirmação 2: $\widetilde{J}_\lambda(u_\lambda + t_n\phi_n) \leq \dfrac{t_n^N}{N} + \widetilde{J}_\lambda(u_\lambda) + t_n^2 O\left(\dfrac{\delta_n^{N-2}}{(\log n)^{\frac{2}{N}}}\right) + t_n^{N-1} O\left(\dfrac{\delta_n}{(\log n)^{\frac{N-1}{N}}}\right)$.

Desde que

$$|\nabla(u_\lambda + t\phi_n)|^N = \left(|\nabla u_\lambda|^2 + 2t\nabla u_\lambda \nabla\phi_n + t^2|\nabla\phi_n|^2\right)^{\frac{N}{2}}, \tag{4.25}$$

temos que

$$\begin{aligned}
\widetilde{J}_\lambda(t_n\phi_n+u_\lambda) &= \frac{1}{N}\int_\Omega |\nabla(t_n\phi_n+u_\lambda)|^N+\frac{\lambda K}{2}\int_\Omega |t_n\phi_n+u_\lambda|^2-\lambda\int_\Omega \widetilde{F}(x,t_n\phi_n+u_\lambda)\\
&= \frac{1}{N}\int_\Omega \left(|\nabla u_\lambda|^2+2t_n\nabla u_\lambda\nabla\phi_n+t_n^2|\nabla\phi_n|^2\right)^{\frac{N}{2}}+\frac{\lambda K}{2}\int_\Omega |t_n\phi_n+u_\lambda|^2\\
&\quad -\lambda\int_\Omega \widetilde{F}(x,t_n\phi_n+u_\lambda)\\
&= \frac{1}{N}\int_\Omega \left(|\nabla u_\lambda|^2+2t_n|\nabla u_\lambda||\nabla\phi_n|\cos\beta_n+t_n^2|\nabla\phi_n|^2\right)^{\frac{N}{2}}\\
&\quad +\frac{\lambda K}{2}\int_\Omega |t_n\phi_n+u_\lambda|^2-\lambda\int_\Omega \widetilde{F}(x,t_n\phi_n+u_\lambda),
\end{aligned}$$

onde β_n é o ângulo entre $\overrightarrow{\nabla u_\lambda}$ e $\overrightarrow{\nabla\phi_n}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\widetilde{J}_\lambda(t_n\phi_n+u_\lambda) &= \frac{1}{N}\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^N\left(1+2t_n\frac{|\nabla\phi_n|}{|\nabla u_\lambda|}\cos\beta_n+t_n^2\frac{|\nabla\phi_n|^2}{|\nabla u_\lambda|^2}\right)^{\frac{N}{2}}\\
&\quad +\frac{\lambda K}{2}\int_\Omega |t_n\phi_n+u_\lambda|^2-\lambda\int_\Omega \widetilde{F}(x,t_n\phi_n+u_\lambda).
\end{aligned}$$

Agora, usando a inequação

$$(1+t^2+2t\cos\theta)^{N/2}\le 1+t^N+Nt\cos\theta+C(t^2+t^{N-1}),\quad t\ge 0$$

e considerando

$$\bar{t}_n=t_n\frac{|\nabla\phi_n|}{|\nabla u_\lambda|},$$

segue que

$$\begin{aligned}
\widetilde{J}_\lambda(t_n\phi_n+u_\lambda) &= \frac{1}{N}\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^N\left(1+\bar{t}_n^{\,2}+2\bar{t}_n\cos\beta_n\right)^{\frac{N}{2}}\\
&\quad +\frac{\lambda K}{2}\int_\Omega |t_n\phi_n+u_\lambda|^2-\lambda\int_\Omega \widetilde{F}(x,t_n\phi_n+u_\lambda)\\
&\le \frac{1}{N}\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^N\left(1+\bar{t}_n^{\,N}+N\bar{t}_n\cos\beta_n+C(\bar{t}_n^{\,2}+\bar{t}_n^{\,N-1})\right)\\
&\quad +\frac{\lambda K}{2}\int_\Omega |t_n\phi_n+u_\lambda|^2-\lambda\int_\Omega \widetilde{F}(x,t_n\phi_n+u_\lambda)\\
&= \frac{1}{N}\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^N+\frac{t_n^N}{N}\int_\Omega |\nabla\phi_n|^N+t_n\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^{N-2}\nabla u_\lambda\nabla\phi_n\\
&\quad +\frac{Ct_n^2}{N}\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^{N-2}|\nabla\phi_n|^2+\frac{Ct_n^{N-1}}{N}\int_\Omega |\nabla u_\lambda||\nabla\phi_n|^{N-1}\\
&\quad +\frac{\lambda K}{2}\int_\Omega |t_n\phi_n+u_\lambda|^2-\lambda\int_\Omega \widetilde{F}(x,t_n\phi_n+u_\lambda)
\end{aligned}$$

Como $\nabla u_\lambda \in L^\infty(\Omega)$ (pois $u_\lambda \in C^{1,\theta}(\overline{\Omega})$, para algum $\theta \in (0,1)$), obtemos que

$$\begin{aligned}\frac{Ct_n^2}{N}\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^{N-2}|\nabla\phi_n|^2 + \frac{Ct_n^{N-1}}{N}\int_\Omega |\nabla u_\lambda||\nabla\phi_n|^{N-1} \\ \le \overline{C}\left(t_n^2\int_\Omega|\nabla\phi_n|^2 + t_n^{N-1}\int_\Omega|\nabla\phi_n|^{N-1}\right),\end{aligned}$$

onde $\overline{C}$ é uma constante que depende de C e de $\|\nabla u_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)}$. Ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{Ct_n^2}{N}\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^{N-2}|\nabla\phi_n|^2 + \frac{Ct_n^{N-1}}{N}\int_\Omega |\nabla u_\lambda||\nabla\phi_n|^{N-1} \\ = O\left(t_n^2\textstyle\int_\Omega|\nabla\phi_n|^2 + t_n^{N-1}\int_\Omega|\nabla\phi_n|^{N-1}\right).\end{aligned}$$

Portanto, usando que $\|\phi_n\| = 1$, segue

$$\begin{aligned}\widetilde{J}_\lambda(t_n\phi_n + u_\lambda) &\le \frac{t_n^N}{N} + \frac{1}{N}\int_\Omega|\nabla u_\lambda|^N + t_n\int_\Omega|\nabla u_\lambda|^{N-2}\nabla u_\lambda\nabla\phi_n \\ &\quad + O\left(t_n^2\int_\Omega|\nabla\phi_n|^2 + t_n^{N-1}\int_\Omega|\nabla\phi_n|^{N-1}\right) \\ &\quad + \frac{\lambda K}{2}\int_\Omega|t_n\phi_n + u_\lambda|^2 - \lambda\int_\Omega\widetilde{F}(x, t_n\phi_n + u_\lambda) \\ &= \frac{t_n^N}{N} + \frac{1}{N}\int_\Omega|\nabla u_\lambda|^N + \frac{\lambda K}{2}\int_\Omega|u_\lambda|^2 - \lambda\int_\Omega\widetilde{F}(x,u_\lambda) \\ &\quad + O\left(t_n^2\int_\Omega|\nabla\phi_n|^2 + t_n^{N-1}\int_\Omega|\nabla\phi_n|^{N-1}\right) + t_n\int_\Omega|\nabla u_\lambda|^{N-2}\nabla u_\lambda\nabla\phi_n \\ &\quad + \lambda\int_\Omega\widetilde{F}(x,u_\lambda) + \lambda K\int_\Omega t_n u_\lambda\phi_n + \frac{\lambda K}{2}\int_\Omega t_n^2\phi_n^2 - \lambda\int_\Omega\widetilde{F}(x, u_\lambda + t_n\phi_n) \\ &= \frac{t_n^N}{N} + \widetilde{J}_\lambda(u_\lambda) + O\left(t_n^2\left[\int_\Omega|\nabla\phi_n|^2 + \int_\Omega|\phi_n|^2\right] + t_n^{N-1}\int_\Omega|\nabla\phi_n|^{N-1}\right) \\ &\quad + t_n\int_\Omega|\nabla u_\lambda|^{N-2}\nabla u_\lambda\nabla\phi_n + \lambda\int_\Omega\widetilde{F}(x,u_\lambda) + \lambda K\int_\Omega t_n u_\lambda\phi_n \\ &\quad - \lambda\int_\Omega\widetilde{F}(x, u_\lambda + t_n\phi_n).\end{aligned}$$

Entretanto, como u_λ é solução de (P_λ), temos que

$$\int_\Omega|\nabla u_\lambda|^{N-2}\nabla u_\lambda\nabla\phi = \int_\Omega f(u_\lambda)\phi, \quad \text{para todo } \phi \in W_0^{1,N}(\Omega).$$

Em particular,

$$\begin{aligned}
\widetilde{J}_\lambda(t_n\phi_n+u_\lambda) &\leq \frac{t_n^N}{N}+\widetilde{J}_\lambda(u_\lambda)+O\left(t_n^2\left[\int_\Omega|\nabla\phi_n|^2+\int_\Omega|\phi_n|^2\right]+t_n^{N-1}\int_\Omega|\nabla\phi_n|^{N-1}\right)\\
&\quad -\lambda\int_\Omega[\widetilde{F}(x,u_\lambda+t_n\phi_n)-\widetilde{F}(x,u_\lambda)-t_n(f(u_\lambda)+Ku_\lambda)\phi_n]\\
&= \frac{t_n^N}{N}+\widetilde{J}_\lambda(u_\lambda)+O\left(t_n^2\left[\int_\Omega|\nabla\phi_n|^2+\int_\Omega|\phi_n|^2\right]+t_n^{N-1}\int_\Omega|\nabla\phi_n|^{N-1}\right)\\
&\quad -\lambda\left(\int_\Omega[\widetilde{F}(x,u_\lambda+t_n\phi_n)-\widetilde{F}(x,u_\lambda)-t_n\widetilde{f}(x,u_\lambda)\phi_n]\right.\\
&\quad\quad \left.+t_n\int_\Omega[\widetilde{f}(x,u_\lambda)-f(u_\lambda)-Ku_\lambda]\phi_n\right). \qquad (4.26)
\end{aligned}$$

Mostremos agora que

$$\widetilde{J}_\lambda(t_n\phi_n+u_\lambda)\leq\frac{t_n^N}{N}+\widetilde{J}_\lambda(u_\lambda)+O\left(t_n^2\left[\int_\Omega|\nabla\phi_n|^2+\int_\Omega|\phi_n|^2\right]+t_n^{N-1}\int_\Omega|\nabla\phi_n|^{N-1}\right).$$

Para isto, é suficiente provarmos que

$$\int_\Omega[\widetilde{F}(x,u_\lambda+t_n\phi_n)-\widetilde{F}(x,u_\lambda)-t_n\widetilde{f}(x,u_\lambda)\phi_n]+t_n\int_\Omega[\widetilde{f}(x,u_\lambda)-f(u_\lambda)-Ku_\lambda]\phi_n\geq 0.$$

De fato, como $u_\lambda>\underline{u}$ (ver Afirmação 1 da demonstração do Lema 3.22), obtemos, pela própria definição de $\widetilde{f}$, que

$$\widetilde{f}(x,u_\lambda)-f(u_\lambda)-Ku_\lambda=0.$$

Além disso, pelo Teorema do Valor Médio de Lagrange (Teorema 1.10), temos que, para algum $\theta\in(0,1)$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}(x,u_\lambda+t_n\phi_n)-\widetilde{F}(x,u_\lambda)-t_n\widetilde{f}(x,u_\lambda)\phi_n &= \widetilde{f}(x,u_\lambda+\theta t_n\phi_n)t_n\phi_n-\widetilde{f}(x,u_\lambda)t_n\phi_n\\
&= [\widetilde{f}(x,u_\lambda+\theta t_n\phi_n)-\widetilde{f}(x,u_\lambda)]t_n\phi_n\\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

pois $\tilde{f}(x,\cdot)$ é não-decrescente. Logo,

$$\int_\Omega[\widetilde{F}(x,u_\lambda+t_n\phi_n)-\widetilde{F}(x,u_\lambda)-t_n\widetilde{f}(x,u_\lambda)\phi_n]+t_n\int_\Omega[\widetilde{f}(x,u_\lambda)-f(u_\lambda)-Ku_\lambda]\phi_n\geq 0,$$

donde, de (4.26), conclui-se que

$$\widetilde{J}_\lambda(t_n\phi_n+u_\lambda)\leq\frac{t_n^N}{N}+\widetilde{J}_\lambda(u_\lambda)+O\left(t_n^2\left[\int_\Omega|\nabla\phi_n|^2+\int_\Omega|\phi_n|^2\right]+t_n^{N-1}\int_\Omega|\nabla\phi_n|^{N-1}\right),$$

como era desejado.

Para completarmos a prova da Afirmação 2, resta mostrarmos que

$$t_n^2\left[\int_\Omega |\nabla\phi_n|^2+\int_\Omega |\phi_n|^2\right]+t_n^{N-1}\int_\Omega |\nabla\phi_n|^{N-1} = t_n^2 O\left(\frac{\delta_n^{N-2}}{(\log n)^{\frac{2}{N}}}\right)+t_n^{N-1}O\left(\frac{\delta_n}{(\log n)^{\frac{N-1}{N}}}\right). \tag{4.27}$$

Com efeito, utilizando coordenadas polares (ver Teorema 1.13), observe que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla\phi_n|^{N-1} &= \int_{\frac{\delta_n}{n}\le|x|\le\delta_n} |\nabla\phi_n|^{N-1}\\ &= \frac{1}{(\omega_{N-1}\log n)^{\frac{N-1}{N}}}\int_{\frac{\delta_n}{n}\le|x|\le\delta_n}\frac{1}{|x|^{N-1}}\\ &= \frac{\omega_{N-1}}{(\omega_{N-1}\log n)^{\frac{N-1}{N}}}\int_{\frac{\delta_n}{n}}^{\delta_n} dr\\ &= \omega_{N-1}\frac{n-1}{n}\frac{\delta_n}{(\log n)^{\frac{N-1}{N}}}\\ &\le C_{N,1}\frac{\delta_n}{(\log n)^{\frac{N-1}{N}}}\end{aligned}$$

e, de forma análoga,

$$\int_\Omega |\nabla\phi_n|^2+\int_\Omega |\phi_n|^2 \le C_{N,2}\frac{\delta_n^{N-2}}{(\log n)^{\frac{2}{N}}},$$

onde $C_{N,1}, C_{N,2}$ são constantes positivas que dependem de N. Assim, conclui-se (4.27) e, consequentemente, a Afirmação 2.

Usando a Afirmação 2 juntamente com (4.24) e o fato de $\{t_n\}$ ser uma sequência limitada (ver Afirmação 1), obtemos que, para algum $C > 0$,

$$t_n^N \ge \alpha_N^{N-1} - C\left(\frac{\delta_n^{N-2}}{(\log n)^{\frac{2}{N}}}+\frac{\delta_n}{(\log n)^{\frac{N-1}{N}}}\right),\quad C>0. \tag{4.28}$$

Agora, pela definição de t_n, isto é,

$$\widetilde{J}_\lambda(u_\lambda+t_n\phi_n)=\sup_{t>0}\widetilde{J}_\lambda(u_\lambda+t\phi_n),$$

temos que

$$\frac{d}{dt}\widetilde{J}_\lambda(u_\lambda+t\phi_n)|_{t=t_n}=0,$$

ou seja,

$$\int_\Omega |\nabla(u_\lambda+t_n\phi_n)|^{N-2}\nabla(u_\lambda+t_n\phi_n)\nabla\phi_n+\lambda K\int_\Omega u_\lambda\phi_n=\lambda\int_\Omega \widetilde{f}(x,u_\lambda+t_n\phi_n)\phi_n.$$

Desta última expressão é fácil concluirmos que, quando $n \to \infty$,

$$\int_\Omega \widetilde{f}(x, u_\lambda + t_n\phi_n)\phi_n < \infty. \tag{4.29}$$

Afirmação 3: $\displaystyle\int_\Omega \widetilde{f}(x, u_\lambda + t_n\phi_n)\phi_n \geq h(t_n\phi_n(0))t_n\phi_n(0)e^{\frac{\eta}{2(\log n)^{1/N}}}$, para algum $\eta > 0$.

Realmente, sendo $c_n = \min_{|x|\leq\delta_n/n} u_\lambda(x)$, segue que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \tilde{f}(x, u_\lambda + t_n\phi_n)\phi_n &\geq \int_{\{x\in\Omega;|x|\leq\delta_n/n\}} h(t_n\phi_n(0))\phi_n(0)e^{(c_n+t_n\phi_n(0))^{\frac{N}{N-1}}} \\ &= \left(\frac{\delta_n}{n}\right)^N h(t_n\phi_n(0))\phi_n(0)e^{(c_n+t_n\phi_n(0))^{\frac{N}{N-1}}}.\end{aligned} \tag{4.30}$$

Usando expansão em série de Taylor, segue, claramente, que

$$(c_n + t_n\phi_n(0))^{\frac{N}{N-1}} \geq (t_n\phi_n(0))^{\frac{N}{N-1}} + \frac{c_nN}{N-1}(t_n\phi_n(0))^{\frac{1}{N-1}}.$$

Assim, usando (4.28), o fato de que $c_n \to u_\lambda(0)$ quando $n \to \infty$ e que

$$\phi_n(0) = \tilde{\phi}_n(0) = \frac{1}{\omega_{N-1}^{1/N}}(\log n)^{\frac{N-1}{N}},$$

concluímos que existem constantes $C, K_0 > 0$ tais que

$$(c_n + t_n\phi_n(0))^{\frac{N}{N-1}} \geq N\left(1 - C\left(\frac{\delta_n^{N-2}}{(\log n)^{\frac{2}{N}}} + \frac{\delta_n}{(\log n)^{\frac{N-1}{N}}}\right)\right)\log n + K_0(\log n)^{\frac{1}{N}}.$$

Tomando

$$\delta_n = \frac{1}{(\log n)^{\frac{1}{N}}}$$

e substituindo esta última expressão em (4.30), segue que, para algum $\eta > 0$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \tilde{f}(x, u_\lambda + t_n\phi_n)\phi_n &\geq \left(\frac{1}{n(\log n)^{\frac{1}{N}}}\right)^N h(t_n\phi_n(0))\phi_n(0)e^{N\log n+\eta(\log n)^{1/N}} \\ &= \frac{1}{t_n\log n}h(t_n\phi_n(0))t_n\phi_n(0)e^{\eta(\log n)^{1/N}} \\ &\geq h(t_n\phi_n(0))t_n\phi_n(0)e^{\frac{\eta}{2(\log n)^{1/N}}},\end{aligned}$$

o que prova a Afirmação 3.

Pela Hipótese (A5), vemos que

$$h(t_n\phi_n(0))t_n\phi_n(0)e^{\frac{\eta}{2(\log n)^{1/N}}} \to \infty \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Portanto, pela Afirmação 3, temos que

$$\int_\Omega \widetilde{f}(x, u_\lambda + t_n\phi_n)\phi_n \to \infty \quad \text{quando } n \to \infty. \tag{4.31}$$

De (4.29) e (4.31) obtemos a contradição esperada, concluindo a prova do Lema 4.7. ■

4.3 Existência de Solução para (P_λ), $\lambda \in (0, \Lambda)$, via Passo da Montanha

Nosso objetivo, agora, será mostrar a existência de uma segunda solução para (P_λ), $\lambda \in (0, \Lambda)$. Para isto, iremos utilizar o Princípio de Concentração de Compacidade de P.-L. Lions visto no Capítulo 2. Mais precisamente, iremos utilizar o Teorema 2.16.

Relembremos tal resultado:

Teorema 4.8 (P.-L. Lions) *Sejam $N \geq 2$ e Ω um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^N$. Se $\{u_n\} \subset W_0^{1,N}(\Omega)$ e $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ são tais que*

$$\|u_n\| \leq 1, \quad u_n \rightharpoonup u \text{ em } W_0^{1,N}(\Omega) \quad e \quad u_n \to u \text{ q.t.p. em } W_0^{1,N}(\Omega),$$

então, para todo

$$p < \frac{1}{(1 - \|u\|^N)^{\frac{1}{N-1}}},$$

temos que

$$\sup_n \int_\Omega e^{p\alpha_N |u_n|^{\frac{N}{N-1}}} < \infty. \tag{4.32}$$

Agora, lembrando de (4.20) que $\rho_0 \geq \tilde{J}_\lambda(u_\lambda)$, consideraremos

$$\mathcal{F} = W_0^{1,N}(\Omega), \quad \text{se } \rho_0 > \tilde{J}_\lambda(u_\lambda) \tag{4.33}$$

e

$$\mathcal{F} = \left\{ v \in W_0^{1,N}(\Omega); \|v - u_\lambda\| = \frac{R_0}{2} \right\}, \qquad \text{se } \rho_0 = \tilde{J}_\lambda(u_\lambda). \tag{4.34}$$

Lema 4.9 *Seja u_λ o mínimo local para $\tilde{J}_\lambda$ obtido no Lema 3.24. Então, (P_λ) admite outra solução $v_\lambda \in W_0^{1,N}(\Omega)$.*

Prova: Pelo Teorema 1.26, existe $\{v_n\} \subset W_0^{1,N}(\Omega)$ uma sequência $(PS)_{\mathcal{F},\rho_0}$. Então, pelo Lema 4.3, existe v_λ tal que

$$v_n \rightharpoonup v_\lambda \text{ em } W_0^{1,N}(\Omega) \tag{4.35}$$

$$\int_\Omega \tilde{f}(x, v_n) \to \int_\Omega \tilde{f}(x, v_\lambda) \tag{4.36}$$

$$\int_\Omega \tilde{F}(x, v_n) \to \int_\Omega \tilde{F}(x, v_\lambda). \tag{4.37}$$

Como $v_n \rightharpoonup v_\lambda$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$, segue que $\|v_n\| \le C$, para algum $C > 0$. Além disso, $\|v_\lambda\| \le \liminf_{n\to\infty} \|v_n\| \le C$. Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_\lambda(v_\lambda) &= \frac{1}{N}\|v_\lambda\|^N + \frac{\lambda K}{2}\int_\Omega |v_\lambda|^2 - \lambda\int_\Omega \tilde{F}(x,v_\lambda) \\
&\le \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{N}\|v_n\|^N + \liminf_{n\to\infty}\left(\frac{\lambda K}{2}\int_\Omega |v_n|^2\right) + \liminf_{n\to\infty}\left(-\lambda\int_\Omega \tilde{F}(x,v_n)\right) \\
&\le \liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{N}\|v_n\|^N + \frac{\lambda K}{2}\int_\Omega |v_n|^2 - \lambda\int_\Omega \tilde{F}(x,v_n)\right) \\
&= \liminf_{n\to\infty} \tilde{J}_\lambda(v_n) \\
&= \inf_{\|v\|\le C} J_\lambda(v). \qquad (4.38)
\end{aligned}$$

Como $\|v_\lambda\| \le C$, obtemos que $\inf_{\|v\|\le C} J_\lambda(v) \le \tilde{J}_\lambda(v_\lambda)$ e, portanto, que v_λ é ponto crítico de $\tilde{J}_\lambda$. Consequentemente, como já foi observado no início deste capítulo, v_λ é solução de (P_λ). Resta então provarmos que $v_\lambda \neq u_\lambda$. A prova será por contradição e, para isto, iremos considerar dois casos:

Caso 1. $\rho_0 = \tilde{J}_\lambda(u_\lambda)$ e $v_\lambda \equiv u_\lambda$.

Lembremos de (4.34) que, para $\rho_0 = \tilde{J}_\lambda(u_\lambda)$,

$$\mathcal{F} = \left\{ v \in W_0^{1,N}(\Omega); \|v - u_\lambda\| = \frac{R_0}{2} \right\}.$$

Além disso, observe que

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_\lambda(u_\lambda) &= \rho_0 \\
&= \lim_{n\to\infty} \tilde{J}_\lambda(v_n) \qquad \text{(pois } (v_n) \text{ é uma sequência } (PS)_{\mathcal{F},\rho_0}) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{N}\int_\Omega |\nabla v_n|^N + \frac{\lambda K}{2}\int_\Omega |v_n|^2 - \lambda\int_\Omega \tilde{F}(x,v_n)\right) \\
&= \frac{1}{N}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |\nabla v_n|^N + \frac{\lambda K}{2}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |v_n|^2 - \lambda\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \tilde{F}(x,v_n) \\
&= \frac{1}{N}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |\nabla v_n|^N + \frac{\lambda K}{2}\int_\Omega |u_\lambda|^2 - \lambda\int_\Omega \tilde{F}(x,u_\lambda) \\
&= \frac{1}{N}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |\nabla v_n|^N + \tilde{J}_\lambda(u_\lambda) - \frac{1}{N}\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^N,
\end{aligned}$$

donde

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |\nabla v_n|^N = \int_\Omega |\nabla u_\lambda|^N,$$

ou seja, $v_n \to u_\lambda$ fortemente em $W_0^{1,N}(\Omega)$. Todavia, tal fato não poderia ocorrer, pois, se $\{v_n\}$ é uma sequência $(PS)_{\mathcal{F},\rho_0}$, então

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n - f_0\| = 0, \quad \text{para algum } f_0 \in \mathcal{F}.$$

Mas, se $f_0 \in \mathcal{F}$,

$$\|f_0 - u_\lambda\| = \frac{R_0}{2}$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|v_n - u_\lambda\| &\geq \lim_{n\to\infty} (\|f_0 - u_\lambda\| - \|v_n - f_0\|) \\
&= \lim_{n\to\infty} \|f_0 - u_\lambda\| - \lim_{n\to\infty} \|v_n - f_0\| \\
&= \frac{R_0}{2} \\
&> 0,
\end{aligned}$$

donde concluímos que $\{v_n\}$ não converge forte para u_λ em $W_0^{1,N}(\Omega)$, como queríamos demonstrar.

Caso 2. $\rho_0 > \tilde{J}_\lambda(u_\lambda)$ e $v_\lambda \equiv u_\lambda$.

Mostremos inicialmente que

$$\int_\Omega \tilde{f}(x, v_n)v_n \to \int_\Omega \tilde{f}(x, u_\lambda)u_\lambda. \tag{4.39}$$

De fato, pelo Lema 4.7, temos que

$$\rho_0 < \tilde{J}_\lambda(u_\lambda) + \frac{1}{N}\alpha_N^{N-1}.$$

Portanto, existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$0 < (\rho_0 - \tilde{J}_\lambda(u_\lambda))(1+\varepsilon)^{N-1} < \frac{1}{N}\alpha_N^{N-1}. \tag{4.40}$$

Como $\{v_n\}$ é uma sequência $(PS)_{\mathcal{F},\rho_0}$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{J}_\lambda(v_n) = \rho_0$$

e, consequentemente,

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n\|^N = N\left(\lim_{n\to\infty}\left(\lambda\int_\Omega \tilde{F}(x, v_n) - \frac{\lambda K}{2}\int_\Omega |v_n|^2\right) + \rho_0\right). \tag{4.41}$$

Agora, considerando
$$\beta_0 := \lambda \int_\Omega \tilde{F}(x, u_\lambda) - \frac{\lambda K}{2} \int_\Omega |u_\lambda|^2$$
e usando que $v_n \rightharpoonup v_\lambda \equiv u_\lambda$, de (4.41), obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n\|^N = N(\beta_0 + \rho_0). \tag{4.42}$$

Consequentemente,
$$\frac{v_n}{\|v_n\|} \rightharpoonup \frac{u_\lambda}{(N(\beta_0 + \rho_0))^{1/N}}$$
e, portanto, escolhendo

$$1 < p < \left(1 - \frac{\|u_\lambda\|^N}{N(\beta_0 + \rho_0)}\right)^{-\frac{1}{N-1}},$$

pelo Teorema 4.8 (P.-L. Lions), segue que

$$\sup_n \int_\Omega e^{p\alpha_N\left(\frac{v_n}{\|v_n\|}\right)^{\frac{N}{N-1}}} < \infty. \tag{4.43}$$

Afirmação: Existe $q > 1$ tal que $\displaystyle\int_\Omega |\tilde{f}(x, v_n)v_n|^q < \infty$.

Com efeito, observe inicialmente que

$$\begin{aligned}
\rho_0 < \tilde{J}_\lambda(u_\lambda) + \frac{1}{N}\alpha_N^{N-1} \quad &\Rightarrow \quad \rho_0 < \frac{1}{N}\|u_\lambda\|^N - \beta_0 + \frac{1}{N}\alpha_N^{N-1} \\
&\Rightarrow \quad N(\rho_0 + \beta_0) < \alpha_N^{N-1} + \|u_\lambda\|^N \\
&\Rightarrow \quad 1 < \frac{\alpha_N^{N-1}}{N(\rho_0 + \beta_0) - \|u_\lambda\|^N} \\
&\Rightarrow \quad N(\rho_0 + \beta_0) < \frac{\alpha_N^{N-1} N(\rho_0 + \beta_0)}{N(\rho_0 + \beta_0) - \|u_\lambda\|^N} \\
&\Rightarrow \quad N(\rho_0 + \beta_0) < \frac{\alpha_N^{N-1}}{1 - \frac{\|u_\lambda\|^N}{N(\beta_0 + \rho_0)}}.
\end{aligned}$$

Assim, como $\|v_n\|^N \to N(\rho_0 + \beta_0)$, segue, para n suficientemente grande, que

$$\|v_n\|^{\frac{N}{N-1}} < \frac{\alpha_N}{\left(1 - \frac{\|u_\lambda\|^N}{N(\beta_0 + \rho_0)}\right)^{\frac{1}{N-1}}}.$$

Assim, para $\beta, q > 1$ próximos o suficiente de 1, temos

$$\beta q \|v_n\|^{\frac{N}{N-1}} < \frac{\alpha_N}{\left(1 - \frac{\|u_\lambda\|^N}{N(\beta_0 + \rho_0)}\right)^{\frac{1}{N-1}}}. \tag{4.44}$$

Por outro lado, para $s \leq \underline{u}(x)$, obtemos

$$\tilde{f}(x,s)s = [\tilde{f}(\underline{u}(x)) + K\underline{u}(x)]s \leq [\tilde{f}(\underline{u}(x)) + K\underline{u}(x)]\underline{u}(x) \leq C_1$$

e, para $s > \underline{u}(x)$, pelo Corolário 3.11, segue que

$$\tilde{f}(x,s)s = [\tilde{f}(s) + Ks]s \leq C_2 e^{\beta s^{\frac{N}{N-1}}} s + Ks^2.$$

Logo, para todo $s \in \mathbb{R}$ e todo $x \in \Omega$,

$$|\tilde{f}(x,s)s| \leq C_1 + C_2 e^{\beta |s|^{\frac{N}{N-1}}} + Ks^2,$$

donde

$$\int_\Omega |\tilde{f}(x,v_n)v_n|^q \leq C_q \left[C_1^q|\Omega| + K\int_\Omega |v_n|^{2q} + C_2 \int_\Omega e^{\beta q |v_n|^{\frac{N}{N-1}}} \right]. \tag{4.45}$$

Pela imersão de Sobolev $W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$, para todo $1 \leq s < \infty$, obtemos

$$\int_\Omega |v_n|^{2q} < \infty. \tag{4.46}$$

Além disso,

$$\int_\Omega e^{\beta q |v_n|^{\frac{N}{N-1}}} = \int_\Omega e^{\beta q \|v_n\|^{\frac{N}{N-1}} \left(\frac{|v_n|}{\|v_n\|}\right)^{\frac{N}{N-1}}}.$$

Assim, tomando

$$p = \frac{\beta q \|v_n\|^{\frac{N}{N-1}}}{\alpha_N},$$

por (4.44), temos

$$p < \frac{1}{\left(1 - \frac{\|u_\lambda\|^N}{N(\beta_0 + \rho_0)}\right)^{\frac{1}{N-1}}}$$

e, portanto, por (4.43),

$$\int_\Omega e^{\beta q |v_n|^{\frac{N}{N-1}}} < \infty. \tag{4.47}$$

Logo, usando (4.46) e (4.47) em (4.45), obtemos que

$$\int_\Omega |\tilde{f}(x,v_n)v_n|^q < \infty,$$

como tínhamos afirmado.

Assim, como $q > 1$, temos que $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, e, portanto, $\{\tilde{f}(x,v_n)v_n\}$ é uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ que converge q.t.p. para $\tilde{f}(x,u_\lambda)u_\lambda$. Logo, pelo Teorema de Vitali, concluímos, de forma análoga a (3.14) e (4.12), a veracidade de (4.39).

Para finalizar, note que

$$\begin{aligned}
\rho_0 &= \lim_{n\to\infty}\left[\widetilde{J}_\lambda(v_n) - \frac{1}{N}\widetilde{J}_\lambda{}'(v_n)v_n\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\lambda}{N}\int_\Omega \tilde{f}(x,v_n)v_n - \lambda\int_\Omega \tilde{F}(x,v_n) + \frac{\lambda K(N-2)}{2N}\int_\Omega v_n^2\right] \\
&= \frac{\lambda}{N}\int_\Omega \tilde{f}(x,u_\lambda)u_\lambda - \lambda\int_\Omega \tilde{F}(x,u_\lambda) + \frac{\lambda K(N-2)}{2N}\int_\Omega u_\lambda^2 \\
&= \widetilde{J}_\lambda(u_\lambda) - \frac{1}{N}\widetilde{J}_\lambda{}'(u_\lambda)u_\lambda \\
&= \widetilde{J}_\lambda(u_\lambda),
\end{aligned}$$

contrariando o fato de $\rho_0 > \widetilde{J}_\lambda(u_\lambda)$. Como a suposição $u_\lambda \equiv v_\lambda$ gera uma contradição tanto no Caso 1 como no Caso 2, segue que $u_\lambda \neq v_\lambda$, provando, assim, o que queríamos. ■

4.4 Prova do Teorema 4.1

Prova do Teorema 4.1: O item (i) segue diretamente do Teorema 3.8 e do Lema 4.9.

Quanto ao item (ii), desde que $\|u_\lambda\| \to 0$ quando $\lambda \to 0$, pela imersão compacta $W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^N(\Omega)$ (Teorema 1.17), obtemos que $u_\lambda \to 0$ em $L^N(\Omega)$ e $\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_i} \to 0$, $i = 1, ..., N$, em $L^N(\Omega)$. Logo, $u_\lambda \to 0$ q.t.p. em Ω e $\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_i} \to 0$, $i = 1, ..., N$, q.t.p. em Ω. Como u_λ e $\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_i}$ são contínuas (pois $C^{1,\theta}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega})$ (Teorema 1.20)), segue que $u_\lambda \to 0$ e $\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_i} \to 0$ pontualmente em $\overline{\Omega}$. Sendo $\overline{\Omega}$ compacto, então tais convergências são uniformes e, portanto, $u_\lambda \to 0$ em $C^1(\overline{\Omega})$. ■

Apêndice A

Estudo do Funcional Associado a (P_λ)

Neste apêndice, nosso objetivo é obter a formulação variacional do problema (P_λ), abordado nos Capítulos 3 e 4, ou seja,

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta_N u &=& \lambda f(u), & \text{em} \quad \Omega \\ u &>& 0, & \text{em} \quad \Omega \\ u &=& 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{array}\right. \qquad (P_\lambda)$$

onde $\Delta_N u = \mathrm{div}(|\nabla u|^{N-2}\nabla u)$ é o operador $N-$laplaciano.

Antes, definamos e enunciemos alguns conceitos importantes para o estudo do funcional associado a (P_λ).

Definição A.1 *Considere um funcional $I : E \to \mathbb{R}$, onde E é um espaço de Banach. O funcional I é dito Fréchet diferenciável (ou, simplesmente, diferenciável) em $u \in E$ se existir um funcional linear contínuo $I'(u) : E \to \mathbb{R}$ verificando*

$$\lim_{\|\varphi\|\to 0} \frac{|I(u+\varphi) - I(u) - I'(u)\varphi|}{\|\varphi\|} = 0.$$

Dizemos que o funcional I é de classe $C^1(E)$ se a derivada de Fréchet I' de I existir e for contínua.

Definição A.2 *Sejam E um espaço de Banach, $I : E \to \mathbb{R}$ e $u \in E$. Dizemos que I é Gâteaux diferenciável em $u \in E$ ao longo de $h \in E$, se existir um funcional linear contínuo $I'_G(u) : E \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\lim_{t\to 0} \frac{I(u+th) - I(u)}{t} = I'_G(u)h.$$

Observação A.3 *Note que se* I *é Fréchet diferenciável em* $u \in E$, *então* I *é Gâteaux diferenciável em* u *e a derivada de Gâteaux de* I *coincide com a derivada de Fréchet de* I, *ou seja,*

$$I'_G(u)v = I'(u)v, \qquad \textit{para todo} v \in E.$$

Teorema A.4 ([29], Proposição 13.4, p. 54) *Sejam* E *um espaço vetorial normado,* $I : E \to \mathbb{R}$ *um funcional. Suponha que* I *é Gâteaux diferenciável em todos os pontos de* E *e que a derivada de Gâteaux* I'_G *de* I *é contínua. Então,* I *é Fréchet diferenciável e, portanto,* I *é de classe* C^1 *em* E.

Agora, para obtermos a formulação variacional desejada, façamos o seguinte: Multiplicando o problema (P_λ) por uma função teste $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, obtemos

$$-\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(|\nabla u|^{N-2}\frac{\partial u}{\partial x_i})\phi = \lambda f(u)\phi$$

e, integrando em Ω,

$$-\int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(|\nabla u|^{N-2}\frac{\partial u}{\partial x_i})\phi = \lambda \int_\Omega f(u)\phi. \tag{A.1}$$

Entretanto, temos que

$$-\int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(|\nabla u|^{N-2}\frac{\partial u}{\partial x_i})\phi = -\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{N-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\phi$$

e, usando integração por partes (Teorema 1.12) juntamente com o fato de ser $u = 0$ sobre $\partial\Omega$, obtemos

$$-\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{N-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\phi = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \left(|\nabla u|^{N-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(|\nabla u|^{N-2}\frac{\partial u}{\partial x_i})\phi &= \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \left(|\nabla u|^{N-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \\ &= \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \left(|\nabla u|^{N-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^{N-2}\nabla u \nabla \phi. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Portanto, substituindo (A.2) em (A.1), segue que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{N-2}\nabla u \nabla \phi - \lambda \int_\Omega f(u)\phi = 0, \qquad \text{para todo } \ \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Por densidade, obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u|^{N-2}\nabla u \nabla \phi - \lambda \int_\Omega f(u)\phi = 0, \quad \text{para todo } \ \phi \in W_0^{1,N}(\Omega).$$

Dessa forma, definamos o funcional $J_\lambda : W_0^{1,N}(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{N}\int_\Omega |\nabla u|^N - \lambda \int_\Omega F(u),$$

onde $F(u) = \int_0^u f(t)dt$.

A seguinte proposição é o principal resultade deste apêndice.

Proposição A.5 *O funcional* J_λ *é de classe* C^1 *em* $W_0^{1,N}(\Omega)$*, com derivada de Fréchet dada por*

$$J'_\lambda(u)\phi = \int_\Omega |\nabla u|^{N-2}\nabla u \nabla \phi - \lambda \int_\Omega f(u)\phi, \quad \textit{para todo } \ \phi \in W_0^{1,N}(\Omega).$$

Esta proposição será demonstrada no fim deste apêndice e sua prova será baseada nos seguintes resultados:

Lema A.6 *Se* $p \in [2,\infty)$*, então*

$$||z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y| \le \beta |z-y|(|z|+|y|)^{p-2}, \quad \textit{para algum } \beta \in \mathbb{R} \textit{ e para todo } y, z \in \mathbb{R}^N.$$

Prova: Observe inicialmente que o caso $p = 2$ é imediato. Provemos o caso $p > 2$. Para isto, consideremos a função $g : [0,1] \to \mathbb{R}^N$ definida por

$$g(t) = |y + t(z-y)|^{p-2}(y + t(z-y)), \qquad p > 2.$$

É sabido que

$$|f(1) - f(0)| \le \int_0^1 |f'(t)|dt.$$

Além disso, para $t \in [0,1]$, vale que

$$|y + t(z-y)| \le |y| + t|z-y| \le |y| + |z-y| \le |y| + |z| + |y| \le 2(|z|+|y|).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&||z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y| \\
&\leq |z-y| \int_0^1 |y+t(z-y)|^{p-2} dt \\
&\quad +(p-2)|z-y| \int_0^1 |y+t(z-y)|^{p-4} |(y+t(z-y))(y+t(z-y))| dt \\
&= (p-1)|z-y| \int_0^1 |y+t(z-y)|^{p-2} dt \\
&\leq (p-1)|z-y| \int_0^1 [2(|z|+|y|)]^{p-2} dt \\
&= 2^{p-2}(p-1)|z-y|(|z|+|y|)^{p-2}.
\end{aligned}$$

Assim, tomando $\beta = 2^{p-2}(p-1)$, obtemos

$$||z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y| \leq 2^{p-2}(p-1)|z-y|(|z|+|y|)^{p-2} = \beta|z-y|(|z|+|y|)^{p-2},$$

como queríamos demonstrar. ■

Lema A.7 *O funcional* $J_{\lambda,1} : W_0^{1,N}(\Omega) \to \mathbb{R}$, *definido por* $J_{\lambda,1}(u) = \|u\|^N$ *é de classe* C^1 *em* $W_0^{1,N}(\Omega)$ *e, para toda* $\phi \in W_0^{1,N}(\Omega)$,

$$J'_{\lambda,1}(u)\phi = N \int_\Omega |\nabla u|^{N-1} \nabla u \nabla \phi.$$

Prova: Observe que $J_{\lambda,1}$ está bem definido, pois corresponde a norma do espaço de Sobolev $W_0^{1,N}(\Omega)$. Iremos utilizar o Teorema A.4 para garantirmos que $J_{\lambda,1}$ é de classe C^1 em $W_0^{1,N}(\Omega)$. Para isto, precisamos provar que $J_{\lambda,1}$ é Gâteaux diferencível e que a derivada de Gâteaux $J'_{\lambda,1,G}$ é contínua.

Afirmação 1: $J_{\lambda,1}$ é Gâteaux diferenciável

De fato, sejam $u, \phi \in W_0^{1,N}(\Omega)$. Definindo

$$\begin{aligned} g \ : \ (0,1) &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto g(t) = |\nabla u + t\nabla\phi|^N, \end{aligned}$$

temos que g é diferenciável e, portanto, pelo Teorema do Valor Médio de Lagrange (Teorema 1.10), existe $t_0 \in (0,1)$ tal que

$$g(t) - g(0) = g'(t_0)t, \tag{A.3}$$

com $t_0 = \varepsilon t$, para algum $\varepsilon \in (0,1)$. Notemos que

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N}(u_{x_i} + t\phi_{x_1})^2\right)^{\frac{N}{2}} \\ &= \frac{N}{2}\left(\sum_{i=1}^{N}(u_{x_i} + t\phi_{x_i})^2\right)^{\frac{N-2}{2}} 2\left(\sum_{i=1}^{N}(u_{x_i} + t\phi_{x_i})\right)\phi_{x_i} \\ &= N|\nabla u + t\nabla\phi|^{N-2}(\nabla u + t\nabla\phi)\nabla\phi. \end{aligned} \tag{A.4}$$

Assim, por (A.3), obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{||\nabla u + t\nabla\phi|^N - |\nabla u|^N|}{|t|} &= N|\nabla u + \varepsilon t\nabla\phi|^{N-2}|(\nabla u + \varepsilon t\nabla\phi)\nabla\phi| \\ &\leq N(|\nabla u| + |\nabla\phi|)^{N-2}(|\nabla u| + |\nabla\phi|)|\nabla\phi| \\ &= N(|\nabla u| + |\nabla\phi|)^{N-1}|\nabla\phi|. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder, com $1/N + (N-1)/N = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} N\int_\Omega (|\nabla u| + |\nabla\phi|)^{N-1}|\nabla\phi| &\leq N\left(\int_\Omega (|\nabla u| + |\nabla\phi|)^N\right)^{\frac{N-1}{N}}\left(\int_\Omega |\nabla\phi|^N\right)^{\frac{1}{N}} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e por (A.4), temos

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0}\frac{J_{\lambda,1}(u+t\phi) - J_{\lambda,1}(u)}{t} &= \lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{|\nabla u + t\nabla\phi|^N - |\nabla u|^N}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\int_\Omega N|\nabla u + \varepsilon t\nabla\phi|^{N-2}(\nabla u + \varepsilon t\nabla\phi)\nabla\phi \\ &= N\int_\Omega |\nabla u|^{N-2}\nabla u\nabla\phi. \end{aligned}$$

Escrevendo

$$J'_{\lambda,1,G}(u)\phi = \lim_{t\to 0}\frac{J_{\lambda,1}(u+t\phi) - J_{\lambda,1}(u)}{t},$$

temos que $J'_{\lambda,1,G}(u) : W_0^{1,N}(\Omega) \to \mathbb{R}$ é linear e limitado, pois

$$|J'_{\lambda,1,G}(u)\phi| \leq N\|u\|^{N-1}\|\phi\|, \quad \text{para todo} \quad \phi \in W_0^{1,N}(\Omega).$$

Assim, $J_{\lambda,1}$ é Gâteaux diferenciável, como tínhamos afirmado.

Afirmação 2: A derivada de Gâteaux $J'_{\lambda,1,G}$ de $J_{\lambda,1}$ é contínua.

Com efeito, consideremos o espaço

$$\mathcal{X} = \prod_{i=1}^{N} L^{\frac{N}{N-1}}(\Omega)$$

munido da norma

$$\|\gamma\|_{\mathcal{X}} = \left(\sum_{i=1}^{N} \|\gamma_i\|_{\frac{N}{N-1}}^{\frac{N}{N-1}} \right)^{\frac{N-1}{N}}, \qquad \gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_N) \in \mathcal{X}.$$

Definamos a aplicação

$$\begin{array}{rcccl} h = (h_1, ..., h_N) & : & W_0^{1,N}(\Omega) & \to & \mathcal{X} \\ & & u & \mapsto & h(u) = |\nabla u|^{N-2}\nabla u. \end{array}$$

Esta aplicação está bem definida e é limitada, isto é, aplica conjuntos limitados de $W_0^{1,N}(\Omega)$ em conjuntos limitados de $\mathcal{X}$. De fato, para $i = 1, ..., N$, temos

$$\|h_i(u)\|_{\frac{N}{N-1}}^{\frac{N}{N-1}} = \int_\Omega \left| |\nabla u|^{N-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{\frac{N}{N-1}} \leq \int_\Omega |\nabla u|^N = \|u\|^N.$$

Provemos agora que h é contínua. Realmente, pela equivalência de normas em $\mathbb{R}^N$, podemos encontrar $C_1 > 0$ tal que, para toda $\gamma \in \mathcal{X}$,

$$\|\gamma\|_{\mathcal{X}}^{\frac{N}{N-1}} \leq C_1 \int_\Omega |\gamma|^{\frac{N}{N-1}}.$$

Como $N \geq 2$, para $u, v \in W_0^{1,N}(\Omega)$, pelo Lema A.6, temos que

$$\begin{aligned} \|h(u) - h(v)\|_{\mathcal{X}}^{\frac{N}{N-1}} &\leq C_1 \int_\Omega |h(u) - h(v)|^{\frac{N}{N-1}} \\ &= C_1 \int_\Omega \left| |\nabla u|^{N-2}\nabla u - |\nabla v|^{N-2}\nabla v \right|^{\frac{N}{N-1}} \\ &\leq C_1 \beta^{\frac{N}{N-1}} \int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^{\frac{N}{N-1}} (|\nabla u| + |\nabla v|)^{\frac{N}{N-1}(N-2)}. \end{aligned}$$

Desde que $|\nabla u - \nabla v|^{\frac{N}{N-1}} \in L^{N-1}(\Omega)$ e $(|\nabla u| + |\nabla v|)^{\frac{N}{N-1}(N-2)} \in L^{(N-1)/(N-2)}(\Omega)$ (no caso em que $N = 2$, $(|\nabla u| + |\nabla v|)^{\frac{N}{N-1}(N-2)} = 1 \in L^\infty(\Omega)$), pela Desigualdade de Hölder, segue que

$$\begin{aligned} &\|h(u) - h(v)\|_{\mathcal{X}}^{\frac{N}{N-1}} \\ &\leq C_1 \beta^{\frac{N}{N-1}} \left(\int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^{\frac{N}{N-1}(N-1)} \right)^{\frac{1}{N-1}} \left(\int_\Omega (|\nabla u| + |\nabla v|)^{\frac{N}{N-1}(N-2)\frac{N-1}{N-2}} \right)^{\frac{N-2}{N-1}} \\ &=: C_2 \|u - v\|^{\frac{N}{N-1}} \||\nabla u| + |\nabla v|\|_N^{\frac{N}{N-1}(N-2)}, \end{aligned}$$

onde C_2 é uma constante positiva que independe de u e v. Agora, pela Desigualdade de Minkowski, obtemos que

$$\|h(u) - h(v)\|_{\mathcal{X}}^{\frac{N}{N-1}} \leq C_2 \|u - v\|^{\frac{N}{N-1}} \left(\|\nabla u\|_N + \|\nabla v\|_N \right)^{\frac{N}{N-1}(N-2)}.$$

Assim,

$$\|h(u)-h(v)\|_{\mathcal{X}} \le C_2^{\frac{N-1}{N}}\|u-v\|(\|u\|+\|v\|)^{N-2},$$

donde concluimos a continuidade de h.

De posse da continuidade de h, para mostrarmos que $J'_{\lambda,1,G}$ é contínua, basta provarmos que

$$\|J'_{\lambda,1,G}(u)-J'_{\lambda,1,G}(v)\|_{W^{-1,\frac{N}{N-1}}(\Omega)} \le C\|h(u)-h(v)\|_{\mathcal{X}},$$

onde C é uma constante positiva que independe de $u,v\in W_0^{1,N}(\Omega)$.

De fato,

$$\begin{aligned}
\left|\left(J'_{\lambda,1,G}(u)-J'_{\lambda,1,G}(v)\right)\cdot w\right| &= N\left|\int_\Omega |\nabla u|^{N-2}\nabla u\nabla w-\int_\Omega |\nabla v|^{N-2}\nabla v\nabla w\right|\\
&\le N\int_\Omega \left|\left(|\nabla u|^{N-2}\nabla u-|\nabla v|^{N-2}\nabla v\right)\right||\nabla w|\\
&= N\int_\Omega |h(u)-h(v)||\nabla w|.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder e pela equivalência de normas em $\mathbb{R}^N$, segue que

$$\begin{aligned}
\left|\left(J'_{\lambda,1,G}(u)-J'_{\lambda,1,G}(v)\right)\cdot w\right| &\le N\left(\int_\Omega |h(u)-h(v)|^{\frac{N}{N-1}}\right)^{\frac{N-1}{N}}\left(\int_\Omega |\nabla w|^N\right)^{\frac{1}{N}}\\
&\le DN\left(\sum_{i=1}^N \|h_i(u)-h_i(v)\|_{\frac{N}{N-1}}^{\frac{N}{N-1}}\right)^{\frac{N-1}{N}}\|\nabla w\|_N\\
&= DN\|h(u)-h(v)\|_{\mathcal{X}}\|w\|.
\end{aligned}$$

Tomando $C=DN$, segue que, para todo $u,v\in W_0^{1,N}(\Omega)$,

$$\left|\left(J'_{\lambda,1,G}(u)-J'_{\lambda,1,G}(v)\right)\cdot w\right| \le C\|h(u)-h(v)\|_{\mathcal{X}}\|w\|,$$

donde

$$\|J'_{\lambda,1,G}(u)-J'_{\lambda,1,G}(v)\|_{W^{-1,\frac{N}{N-1}}(\Omega)} \le C\|h(u)-h(v)\|_{\mathcal{X}},$$

como era desejado provar. Logo, $J'_{\lambda,1,G}$ é contínuo.

Pelas Afirmações 1 e 2 e pelo Teorema A.4, concluimos que o funcional $J_{\lambda,1}$ é de classe C^1 em $W_0^{1,N}(\Omega)$. ■

Corolário A.8 *O funcional* $J_{\lambda,2}: W_0^{1,N}(\Omega)\to\mathbb{R}$ *definido por*

$$J_{\lambda,2}(u)=\frac{1}{N}\|u\|^N$$

é de classe C^1 *em* $W_0^{1,N}(\Omega)$ *e, para toda* $\phi \in W_0^{1,N}(\Omega)$,

$$J'_{\lambda,2}(u)\phi = \int_\Omega |\nabla u|^{N-2}\nabla u \nabla \phi.$$

Lema A.9 *O funcional* $J_{\lambda,3} : W_0^{1,N}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *definido por*

$$J_{\lambda,3}(u) = \int_\Omega F(u)$$

é de classe C^1 *em* $W_0^{1,N}(\Omega)$ *e, para toda* $\phi \in W_0^{1,N}(\Omega)$,

$$J'_{\lambda,3}(u)\phi = \int_\Omega f(u)\phi.$$

Prova: Com o intuito de utilizarmos novamente o Teorema A.4, mostremos inicialmente que $J_{\lambda,3}$ é Gâteaux diferenciável. Com efeito, sejam $u, v \in W_0^{1,N}(\Omega), x \in \Omega$ e $0 < t < 1$. Então,

$$J_{\lambda,3}(u+tv) - J_{\lambda,3}(u) = \int_\Omega [F(u+tv) - F(u)].$$

Pelo Teorema do Valor Médio de Lagrange (Teorema 1.10), existe $\theta \in [0,1]$ tal que

$$\begin{aligned}\int_\Omega [F(u+tv) - F(u)] &= \int_\Omega F'(u+\theta tv)tv \\ &= \int_\Omega f(u+\theta tv)tv.\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{J_{\lambda,3}(u+tv) - J_{\lambda,3}(u)}{t} = \int_\Omega f(u+\theta tv)v, \qquad \text{para algum } \theta \in [0,1],$$

donde

$$\lim_{t\to 0} \frac{J_{\lambda,3}(u+tv) - J_{\lambda,3}(u)}{t} = \lim_{t\to 0} \int_\Omega f(u+\theta tv)v. \tag{A.5}$$

Mostremos que podemos comutar o limite com a integral na expressão acima. De fato, observe inicialmente que $u + \theta tv \to u$ q.t.p. em Ω quando $t \to 0$ e, pelo fato de f ser contínua, temos que

$$f(u+\theta tv)v \to f(u)v \;\text{ q.t.p. em } \Omega. \tag{A.6}$$

Como f é uma não-linearidade com crescimento crítico no infinito em $\beta_0 = 1$ (ver Definição 3.1 e Observação 3.3), pelo Corolário 3.11, é possível obtermos constantes $C > 0$ e $\beta > 1$ tais que

$$|f(s)| \leq Ce^{\beta |s|^{\frac{N}{N-1}}}. \tag{A.7}$$

Agora, como $\|u+\theta tv-u\| = \theta t\|v\| \to 0$, quando $t \to 0$, segue que $u+\theta tv \to u$ fortemente em $W_0^{1,N}(\Omega)$, quando $t \to 0$. Assim, existe $g \in W_0^{1,N}(\Omega)$ (veja, por exemplo, Proposição 1 de [20]) tal que

$$|u+\theta tv| \leq g \quad \text{q.t.p. em } \Omega. \tag{A.8}$$

Portanto, por (A.7) e (A.8), segue que

$$\begin{aligned} |f(u+\theta tv)v| &\leq |f(u+\theta tv)||v| \\ &\leq Ce^{\beta|u+\theta tv|^{\frac{N}{N-1}}}|v| \\ &\leq Ce^{\beta g^{\frac{N}{N-1}}}|v|. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Trudinger-Moser (Teorema 3.2), temos que $Ce^{\beta g^{\frac{N}{N-1}}}|v| \in L^1(\Omega)$, donde, juntamente com (A.6), nos possibilita usarmos o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue em (A.5) para concluirmos que

$$\lim_{t\to 0} \frac{J_{\lambda,3}(u+tv) - J_{\lambda,3}(u)}{t} = \int_\Omega f(u)v.$$

O lado direito da expressão acima é claramente linear e, além disso, limitado, pois, usando a desigualdade de Hölder, temos

$$\left|\int_\Omega f(u)v\right| \leq \int_\Omega |f(u)v| \leq \|f(u)\|_p\|v\|_q, \quad \text{com } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Agora, pela desigualdade de Trudinger-Moser e pela imersão de Sobolev $W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1,\infty)$ (Teorema 1.17), obtemos

$$\left|\int_\Omega f(u)v\right| \leq C\|v\|.$$

Portanto, $J_{\lambda,3}$ é Gâteaux diferenciável e, para toda $\phi \in W_0^{1,N}(\Omega)$, a derivada de Gâteaux $J'_{\lambda,3,G}(u)$ em $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ é dada por

$$J'_{\lambda,3,G}(u)\phi = \int_\Omega f(u)\phi.$$

Mostremos agora que a derivada de Gâteaux $J'_{\lambda,3,G}$ de $J_{\lambda,3}$ é contínua. Realmente, seja $\{u_n\} \subset W_0^{1,N}(\Omega)$ uma sequência tal que $u_n \to u \in W_0^{1,N}(\Omega)$. Assim,

$$\begin{aligned} \|J'_{\lambda,3,G}(u_n) - J'_{\lambda,3,G}(u)\|_{W^{-1,\frac{N}{N-1}}(\Omega)} &= \sup_{\|\phi\|}\left|\int_\Omega (f(u_n)-f(u))\,\phi\right| \\ &\leq \sup_{\|\phi\|}\int_\Omega |(f(u_n)-f(u))\,\phi| \\ &\leq C\|f(u_n)-f(u)\|_r\|\phi\|_s, \end{aligned}$$

onde na última passagem utilizamos a desigualdade de Hölder com $1/r+1/s=1$. Agora, pelas imersões de Sobolev, obtemos

$$\|J'_{\lambda,3,G}(u_n)-J'_{\lambda,3,G}(u)\|_{W^{-1,\frac{N}{N-1}}(\Omega)} \leq C\|f(u_n)-f(u)\|_r,$$

de onde, utilizando novamente a desigualdade de Trudinger-Moser e procedendo de forma análoga aos cálculos feitos anteriormente, obtemos que

$$\|J'_{\lambda,3,G}(u_n)-J'_{\lambda,3,G}(u)\|_{W^{-1,\frac{N}{N-1}}(\Omega)} \to 0, \quad \text{quando } n\to\infty.$$

Portanto, $J'_{\lambda,3,G}$ é contínuo e, assim, pelo Teorema A.4, segue que $J_{\lambda,3}\in C^1(W_0^{1,N}(\Omega))$, com derivada de Fréchet dada por

$$J'_{\lambda,3}(u)\phi=\int_\Omega f(u)\phi,$$

como queríamos demonstrar. ■

Prova do Proposição A.5: Do Corolário A.8 e do Lema A.9, obtemos que os funcionais $J_{\lambda,2}:W_0^{1,N}(\Omega)\to\mathbb{R}$ e $J_{\lambda,3}:W_0^{1,N}(\Omega)\to\mathbb{R}$, definidos por

$$J_{\lambda,2}(u)=\frac{1}{N}\|u\|^N$$

e

$$J_{\lambda,3}(u)=\int_\Omega F(u)$$

são de classe C^1 em $W_0^{1,N}(\Omega)$, com derivadas de Fréchet dadas por

$$J'_{\lambda,2}(u)\phi=\int_\Omega|\nabla u|^{N-2}\nabla u\nabla\phi$$

e

$$J'_{\lambda,3}(u)\phi=\int_\Omega f(u)\phi.$$

Como $J_\lambda=J_{\lambda,2}-\lambda J_{\lambda,3}$, segue que J_λ é de classe C^1 em $W_0^{1,N}(\Omega)$, com derivada de Fréchet dada por

$$\begin{aligned} J'_\lambda(u)\phi &= J'_{\lambda,2}(u)\phi-\lambda J'_{\lambda,3}(u)\phi\\ &= \int_\Omega|\nabla u|^{N-2}\nabla u\nabla\phi-\lambda\int_\Omega f(u)\phi, \end{aligned}$$

para toda $\phi\in W_0^{1,N}(\Omega)$. ■

Referências Bibliográficas

[1] **ABDELLAOUI, B.; PERAL, I.**, *Existence and nonexistence results for quasilinear elliptic equations involving the p-laplacian with a critical potential*, Annali di Matematica 182, 247-270 (2003).

[2] **ADAMS, R. A.**, *Sobolev spaces*, Academic Press, New York (1975).

[3] **ADIMURTHI**, *Existence of positive solutios of the semilinear Dirichlet problem with critical growth for the n-Laplacian*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 17, 393-413 (1990).

[4] **ALLEGRETTO, W.; HUANG, Y. X.**, *A Picone's identy for p-Laplacian and applications*, Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. 32, 819-830 (1998).

[5] **AMBROSETTI, A.; BRÉZIS, H.; CERAMI, G.**, *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*, J. Funct. Anal. 122, 519-543 (1994).

[6] **ANANE, A.**, *Simplicité et isolation de la première valeur propre du p-laplacien avec poids*, C.R. Acad. Sci. Paris. t. 305, Série I, 725-728 (1987).

[7] **ARIS, R.**, *The Mathematical Theory of Diffusion and Reaction in Permeable Catalyst*, Vol. I, II, Clarendon Press, Oxford (1975).

[8] **AZORERO, G.; PERAL, I.**, *Some results about the existence of second positive solution in a quasilinear critical problem*, Indiana Univ. Math. J. 43, 941-957 (1994.

[9] **AZORERO, G.; MANFREDI, J.; PERAL, I.**, *Sobolev versus Hölder local minimizers and global multiplicity for some quasilinear elliptic equations*, Comm. Contemp. Math. 2 (3) 385-404 (2000).

[10] **BARTLE, R. G.**, *The elements of integration*, John Wiley & Sons, Nova York (1966).

[11] **BOGNAR, G.**, *Numerical and Analytic Investigation of Some Nonlinear Problems in Fluid Mechanics*, Computer and Simulation in Modern Science, Vol. II, WSEAS Press, 172-179 (2008).

[12] **BRÉZIS, H.**, *Analyse fonctionelle, théorie et applications*, Masson, Paris (1987).

[13] **BRÉZIS, H.**, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Rutgers University (2010).

[14] **BRÉZIS, H.; NIRENBERG, L.**, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents,* Communs pure and appl. Math. XXXVI (1983).

[15] **BROTHERES, J.; ZIEMER, W.**, *Minimal rearrangements of Sobolev functions*, J. Reine. Angew. Math. 384, 153-179 (1988).

[16] *Č***ERNÝ, R.; CIANCHI, A.; HENCL, S.**, *Concentration-compactness principles for Moser-Trudinger inequalities: new results and proofs*, Annali di Matematica, DOI 10.1007/s10231-011-0220-3 (2011).

[17] **COSTA, D. G.**, *Tópicos em análise não linear e aplicações às equações diferenciais*, VIII Escola Latino-Americana de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro (1986).

[18] **CUESTA, M.; TAKÁ***Č***, P.**, *A strong comparison principle for positive solutions of degenerate elliptic equation*, Differential Integral Equations 13, (4-6) 721-746 (2000).

[19] **DIBENEDETTO, E.**, *$C^{1,\alpha}$-local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations*, Nonlinear Anal. 7, 827-850 (1983).

[20] **do Ó, J. M.; MEDEIROS, E.; SEVERO, U.**, *On a quasilinear nonhomogeneous elliptic equation with critical growth in $\mathbb{R}^N$*, J. Differential Equation 246, 1363-1383 (2009).

[21] **EVANS, L. C.**, *Partial differential equations*, Graduate studies in mathematics, American math. society, vol. 19 (2000).

[22] **FERONE, A.; VOLPICELLI, R.**, *Convex rearrangement: equality cases in Pólya-Szegö inequality*, Calc. Var. Partial Differ. Equ. 21, 259-272 (2004).

[23] **FIGUEIREDO, D.**, *Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours*, Springer-Verlag, New York (1989).

[24] **FOLLAND, G. B.**, *Real Analysis*, John Wiley & Sons, New York (1984).

[25] **GHOUSSOUB, N.; PREISS, D.**, *A general mountain pass principle for lacating and classifying critical points*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Lineaire 6, (5), 321-330 (1989).

[26] **GIACOMONI, J.; PRASHANTH, S.; SREENADH, K.**, *A global multiplicity result for N-Laplacian with critical nonlinearity of concave-convex type*, Journal of Differential Equations 232, 544-572 (2007).

[27] **GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S.**, *Elliptic Partial Diferential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, New York, (1983).

[28] **GLOWINSKI, R; RAPPAZ, J.**, *Approximation of Nonlinear Elliptic Problem Arising in a Non-Newtonian Fluid Flow Model in Glaciology*, Math. Model. Numer. Anal. 37, 175-186 (2003).

[29] **KAVIAN, O.**, *Introduction à la théorie des Points Critiques et applications aux problèmes elliptiques*, Mathématiques & Applications (Berlin), Springer-Verlag, Paris (1993).

[30] **KESAVAN, S.**, *Symmetrization and applications*, World Scientific Series in Analysis, Vol. 3 (2008).

[31] **KESAVAN, S.**, *Topics in Functional Analysis and Applications*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.

[32] **LIEBERMANN, G. M.**, *Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations*, Nonlinear Analysis, TMA 12, 1203-1219 (1988).

[33] **LIMA, E. L.**, *Curso de análise, vol. 2*, IMPA, Projeto Euclides, 4ª ed., Rio de Janeiro (1981).

[34] **LIONS, P. L.**, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case, part I*, Rev. Mat. Iberoamericana 1(1), 145-201 (1985).

[35] **MASTORAKIS, N. E.; FATHABADI, H.**, *On the Solution of p-Laplacian for Non-Newtonian Fluid Flow*, Wseas Trans. on Math. 8, 238-245 (2009).

[36] **MOSER, J.**, *A sharp form of an inequality by N. Trudinger*, Indiana Univ. Math. J. 20, (11) 1077-1092 (1971).

[37] **PERAL, I.**, *Multiplicity of solutions for the p-laplacian*, Universidad Autonoma de Madrid (1997).

[38] **RABINOWITZ, P. H.**, *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Diferential Equations*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 65. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI (1986).

[39] **STRUWE, M.**, *Variational methods*, Springer, fourth edition (2008).

[40] **TOLKSDORF, P.**, *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations*, Journal of Differential Equations 51, 126-150 (1984).

[41] **VÁZQUEZ, J. L.**, *A strong maximun principle for some quasilinear elliptic equation* Appl. Math. Optim. 12, (3) 191-202 (1984).

[42] **WILLEM, M.**, *Minimax Theorems*, Birkhauser, Boston, Basel, Berlim (1996).