Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Teoremas Tipo Liouville e Desigualdades Tipo Harnack para Equações Elípticas Semilineares via Método Moving Spheres[1]

por

Jalman Alves de Lima

sob orientação do

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

[1]O presente trabalho foi realizado com apoio do CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - Brasil".

João Pessoa - Paraíba
Maio, 2011

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Teoremas Tipo Liouville e Desigualdades Tipo Harnack para Equações Elípticas Semilineares via Método Moving Spheres

por

Jalman Alves de Lima

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Emerson Alves Mendonça de Abreu - UFMG

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves - UFCG

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros(Suplente)

Agradecimentos

Este trabalho encerra um ciclo.

E ao final de um ciclo, olhamos para trás e vemos tudo aquilo que passamos, os desafios, os obstáculos, as conquistas, as perdas, os sacrifícios, as lágrimas, mesmo que estas tenham sido de forma figurativa ou não. As pessoas que passaram por nossas vidas, as que foram fundamentais para continuarmos caminhando, as que nos apoiaram (mesmo que de longe, da sua maneira) e as que não desistiram de você. Reservo este espaço para agradecer a todos que estão não só nestas palavras acima, como as que me acompanharam por todo um ciclo.

Agradeço primeiramente a oportunidade de vivenciar grandes experiências como esta. Agradeço aos meus pais, Francisco José de Lima e Maria José Alves de Lima, pois estes me proporcionaram vivenciar tais experiências. Agradeço ainda aos meus amigos, em especial a Márcio Amorim, Ellen Costa, Dani Lopes, Edjane Oliveira, Carlos Eduardo, bem como outros que sempre estiveram ao meu lado, torcendo por mim e por serem sempre meu porto seguro nos momentos difíceis.

Ao meu orientador, Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó, pelo vários desafios colocados por ele. Desafios estes que serviram de um aprendizado incomensurável. Aos professores da Pós-Graduação e Graduação em Matemática da UFPB. Em especial, aos professores Everaldo Souto de Medeiros, Marivaldo Pereira Matos, Antônio de Andrade e Silva, Rogéria Galdêncio do Rêgo, Flávia Jerônimo, Roberto Callejas Bedregal pela contribuição em minha formação matemática e pelos exemplos não só demonstrados em sala de aula que irão contribuir por toda minha vida. Agradeço a meus colegas do ensino fundamental e médio por terem contribuído na minha escolha, a Matemática, bem como aos meus colegas de gradução e mestrado e ao programa de Graduação e Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba.

Agradeço a banca examinadora de defesa de dissertação: Prof. Dr. Emerson Alves Mendonça de Abreu, Prof. Dr. Claudionor de Oliveira Alves e o Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros pelos conselhos dados.

A Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), pelas disponibilidade de artigos-chave para a conclusão do deste trabalho.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

E por fim, a todos que de forma direta ou indireta contribuiram para a realização desse trabalho.

Criação, dedicação e desafio.

ABSTRACT

In this work, we will do some applications of the Moving Spheres method, a variant of the method of Moving Planes, in order to obtain some Liouville-type theorems and some Harnack-type inequalities in $\mathbb{R}^n$, as well as in the Euclidian half space $\mathbb{R}^n_+$. Our study focuses on, mostly, in the article written by Yan Yan Li and Lei Zhan [32], as well as some references of the same article. We concentrate in studying some properties of positive solutions of some semilinear elliptic partial differential equations with critical exponent and giving different proofs, improvements, and extensions of some previously established Liouville-type theorems and Harnack-type inequalities.

SUMÁRIO

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{R}^n$	Espaço euclidiano n-dimensional $n \geqslant 2$, com $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$.
$\mathbb{R}^n_+$	Semi-espaço em $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$. Em nosso trabalho, faremos também uso da notação $(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)$, ou ainda (x', t), onde $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $t > 0$ para representar um elemento do $\mathbb{R}^n_+$.
$\partial\Omega'$	Fronteira do conjunto de pontos Ω'.
Ω	Um conjunto aberto do $\mathbb{R}^n$, não necessariamente limitado; Ω é um *domínio* se também é conexo.
$D_i u = \partial u / \partial x_i$,	Derivada parcial da função u com relação a variável x_i
$\nabla u = (D_1 u, \ldots, D_n u)$	Gradiente da função u
$B_R(y)$ (B_R)	Bola aberta no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ centrada em y (na origem) e raio $R > 0$, i.e., $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < R\}$.
$B^+_R(y)$	Bola aberta no semi-espaço $\mathbb{R}^n_+$ centrada em y e raio $R > 0$, i.e., $\{x \in \mathbb{R}^n_+ \mid \|x - y\| < r\}$.
$B^T_R(y)$	$B_R(y) \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > T\}$

$\partial' B_R^T(y)$	$\partial B_R(y) \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = t\}$. No caso particular, quando $T = 0$ denotaremos por $\partial' B_R^+$
$\partial'' B_R^T(y)$	$\partial B_R(y) \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > T\}$. No caso particular, quando $T = 0$ denotaremos por $\partial'' B_R^+$
$C^0(\Omega)$	Conjunto de funções contínuas em Ω.
$C^k(\Omega)$	Conjunto de funções com derivadas parciais de ordem menor ou igual a k contínuas em Ω.
$u(x) = o(g(x))$	$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\lvert u(x)\rvert}{\lvert g(x)\rvert} = 0.$
$u(x) = O(g(x))$	$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\lvert u(x)\rvert}{\lvert g(x)\rvert} \leqslant C$ para algum $C > 0$.
$I_x^\lambda(y)$	$x + \dfrac{\lambda^2(y-x)}{\lvert y-x\rvert^2}$ denota a reflexão de y em relação a $B_\lambda(x)$.
$C = C(*, \ldots, *)$	denota uma constante dependendo apenas das quantidades que surgem nos parênteses. Em um mesmo contexto, a mesma letra C poderá (eventualmente) ser usada denotando diferentes constantes dependendo do mesmo conjunto de argumentos.

RESUMO

Neste trabalho, faremos algumas aplicações do método *Moving Spheres*, uma variante do método *Moving Planes*, na obtenção de alguns teoremas tipo Liouville e de algumas desigualdades tipo Harnack em $\mathbb{R}^n$, bem como no semi-espaço euclidiano $\mathbb{R}^n_+$. Nosso estudo se concentra, marjoritariamente, no artigo do Yan Yan Li e Lei Zhang [32], bem como algumas referências do mesmo. Nos concentramos em estudar propriedades de soluções positivas de algumas equações diferenciais parciais elípticas semilineares com expoente crítico e dar provas diversificadas, refinamentos e extensões de alguns Teoremas tipo Liouville e desigualdades tipo Harnack já estabelecidos.

ABSTRACT

In this work, we will do some applications of the Moving Spheres method, a variant of the method of Moving Planes, in order to obtain some Liouville-type theorems and some Harnack-type inequalities in $\mathbb{R}^n$, as well as in the Euclidian half space $\mathbb{R}^n_+$. Our study focuses on, mostly, in the article written by Yan Yan Li and Lei Zhan [32], as well as some references of the same article. We concentrate in studying some properties of positive solutions of some semilinear elliptic partial differential equations with critical exponent and giving different proofs, improvements, and extensions of some previously established Liouville-type theorems and Harnack-type inequalities.

INTRODUÇÃO

Sente-se e espere o café.

Em nosso trabalho, estudaremos propriedades de soluções positivas de Equações Elípticas Semilineares com expoente crítico. Daremos diferentes provas e extensões para alguns teoremas do tipo Liouville e desigualdades tipo Harnack. Nossas demonstrações foram baseadas no artigo do Yan Yan Li e Lei Zhang [32], bem como algumas referências do artigo supracitado.

No primeiro capítulo, introduzimos conceitos básicos para a leitura, tais como: operadores elípticos, funções harmônicas, super-harmônicas e sub-harmônicas. Enunciamos alguns resultados referente ao Princípio do Máximo e o Lema de Hopf, resultados importantes para o desenvolvimento da leitura deste trabalho..

No segundo capítulo, estudamos teoremas tipo Liouville em $\mathbb{R}^n$. Consideremos o seguinte problema

$$-\Delta u = n(n-2)u^{\frac{n+2}{n-2}}, \quad u > 0, \quad \text{em } \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Por um lado, para $\mu > 0$, $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, a função

$$u(x) = \left(\frac{\mu}{1 + \mu^2 |x - \overline{x}|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \tag{2}$$

satisfaz (1). Todavia, o que apresentamos foi mais do que isto, as únicas soluções continuamente diferenciáveis do problema (1) possuem a configuração da função definida em (2).

Mais precisamente, apresentamos uma demonstração do seguinte Teorema Tipo Liouville estabelecido por Caffarelli, Gidas e Spruck

Teorema [L. Caffarelli, B. Gidas and J. Spruck, 1989] Uma solução de classe C^2 de (1) é da forma (2).

No terceiro e quarto capítulo, consideramos respectivamente os seguintes problemas envolvendo equações semilineares mais gerais:

$$-\Delta u = g(u), \quad u > 0, \quad \text{em } \mathbb{R}^n, n \geqslant 3 \tag{3}$$

e

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u & = & g(u), \quad u > 0 & \text{em} \quad \mathbb{R}^n_+ \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} & = & h(u) & t = 0, n \geqslant 3. \end{array} \right. \tag{4}$$

Estes problemas têm sido estudado em [25], [17], [9], [16], [19], [33] e em suas respectivas referências.

No terceiro capítulo, apresentaremos uma prova do seguinte teorema tipo Liouville

Teorema Suponhamos que g satisfaça

$(g1)$ g é localmente limitada em $(0, \infty)$;

$(g2)$ $g(s)s^{-(n+2)/(n-2)}$ é não-crescente em $(0, \infty)$.

e que u seja uma solução continuamente diferenciável de (3). Então uma das seguintes alternativas é satisfeita:

i) Para algum $b, \mu > 0$, $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$,

$$bu(x) = \left(\frac{\mu}{1 + \mu^2 |x - \overline{x}|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}}$$

e

$$g(s)s^{-(n+2)/(n-2)} \equiv n(n-2)b^{4/(n-2)}, \quad \text{em} \quad (0, \max_{\mathbb{R}^n} u];$$

ou

ii) $u \equiv a$ para alguma constante $a > 0$, tal que $g(a) = 0$.

No quarto capítulo, apresentamos maiores detalhes da prova encontrada no artigo do Yan Yan Li e Lei Zhang [32], uma prova diferente para este resultado já estabelecido, a desigualdade tipo Harnack devido a R. Schöen [39], sem fazer uso do Teorema tipo Liouville de Caffarelli-Gidas-Spruck.

Desigualdades tipo Harnack desta natureza em dimensão $n = 2$ foram estabelecidos por Brezis, Li e Shafrir [11], Chen and Lin [15] and Li [30]. Para $n \geqslant 3$, Chen e Li [13], [14] estabeleceram tais desigualdades tipo Harnack para funções mais gerais,

$g(x,u)$. Em particular, estabeleceram uma versão mais fraca do seguinte teorema.

No quinto capítulo, sob hipóteses adicionais a presentamos uma desigualdade tipo Harnack para problemas semilineares elípticos com nãolinearidades mais geral, bem como sua prova, baseada no artigo supracitado, i.e.,

Teorema Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaça as seguintes propriedades

(g2) $g(s)s^{-(n+2)/(n-2)}$ é não-crescente em $(0,\infty)$;

(g3) g é contínua e positiva em $(0,\infty)$ e $\sup_{0<s\leqslant t} g(s) < \infty$, para todo $t > 0$;

(g4) $\lim\limits_{s\to\infty} s^{-\frac{n+2}{n-2}} g(s)$ existe e o limite pertence ao intervalo $(0,\infty)$.

e u uma solução (contínua) de

$$-\Delta u = g(u), \quad u > 0, \qquad \text{em } B_{3R},$$

com

$$\max_{\overline{B}_R} u \geqslant 1.$$

Então

$$(\max_{\overline{B}_R} u)(\min_{\overline{B}_{2R}} u) \leqslant C(n,g)R^{2-n}.$$

Sob hipóteses que g é localmente lipschitzianas em $(0,\infty)$, o mesmo resultado foi estabelecido por Chen e Li (Teorema 1.2 em [13]).

No último capítulo, abordamos uma desigualdade tipo Harnack no semi-espaço euclidiano $\mathbb{R}^n_+$, sob condições naturais de fronteira.

Teorema Para $n \geqslant 3$, $c \in \mathbb{R}$, seja $u \in C^1(\overline{B^+_{3r}}) \cap C^2(B^+_{3r})$ uma solução de

$$\begin{cases} -\Delta u &= n(n-2)u^{\frac{n+2}{n-2}}, \quad u > 0 \qquad \text{sobre } B^+_{3R} \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} &= cu^{\frac{n}{n-2}}, \qquad\qquad\qquad \text{sobre } \partial' B^+_{3R}. \end{cases}$$

Então para alguma constante $C = C(n,c)$,

$$(\max_{\overline{B^+_R}} u)(\min_{\overline{\partial B^+_{2R}}} u) \leqslant CR^{2-n}.$$

CAPÍTULO 1

RESULTADOS ELEMENTARES

Neste capítulo, enunciaremos definições básicas para o entendimento do nosso trabalho, bem como resultados elementares, contudo fundamentais para a leitura deste trabalho de dissertação, tais como: Lema de Hopf, Princípio do Máximo, propriedades da transformada de Kelvin, propriedades de funções localmente limitadas e a existência da função de Green para certos domínios.

1.1 Equações Diferenciais Parciais Elípticas de Segunda Ordem

Nesta seção, daremos a definição de operador elíptico, uniformemente elíptico e estritamente elíptico, bem como alguns exemplos. Enunciaremos também alguns Princípios do Máximo para o operador Laplaciano. No decorrer deste capítulo, Ω será um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ e u será uma função real duas vezes diferenciável em Ω.

Definição 1 (Operador Elíptico) *Um operador L é elíptico, se é da forma*

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) D_{ij}u + \sum_{j=1}^{n} b^j(x) D_j u + c(x)u, \quad a^{ij} = a^{ji},$$

onde x pertence a um domínio Ω do $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$ e a matriz coeficiente $(a^{ij}(x))$ é positiva. Em outras palavras, se $\lambda(x), \Lambda(x)$ denotam, respectivamente, o autovalor *mínimo e máximo de* $(a^{ij}(x))$*, então*

$$0 < \lambda(x)|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda(x)|\xi|^2,$$

para todo $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$*. Dizemos ainda que* L *é estritamente elíptico se* $\lambda \geqslant \lambda_0 > 0$ *para alguma constante* $\lambda_0 > 0$*. Se* Λ/λ *é limitada em* Ω*, dizemos que* L *é uniformemente elíptico em* Ω*.*

O conceito de operadores elípticos, estritamente elíptico e uniformemente elípticos podem depender da região Ω, como podemos observar nos seguintes exemplos.

Exemplo 1 *Seja* u *uma função de classe* $C^2(\mathbb{R}^2)$*, o operador* $D_{11} + x_2 D_{22}$ *é elíptico no semiplano* $\mathbb{R}^2_+$*, mas não é uniformemente elíptico no mesmo espaço. Por outro lado, o mesmo operador o é no domínio* $(\alpha, \beta) \times \mathbb{R}$*, com* $0 < \alpha < \beta < \infty$*.*

Exemplo 2 ***(Operador Laplaciano)*** *Seja* Ω *um subconjunto aberto do* $\mathbb{R}^n$ *e* u *uma função de classe* $C^2(\Omega)$*. O operador laplaciano de* u*, denotado por* Δu *é definido como*

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{n} D_{jj} u = divDu$$

É facil mostrar que o operador laplaciano é um operador uniformemente elíptico em Ω*.*

Uma função u é dita ser harmônica (*sub-harmônica*, *super-harmônica*) em Ω se satisfaz

$$\Delta u = 0 \quad (\geqslant 0, \leqslant 0).$$

1.1.1 Lema de Hopf e Princípio do Máximo

Nesta seção, enunciaremos o Lema de Hopf e alguns Princípios do Máximo (e do Mínimo) para o operador Laplaciano, o qual faremos uso ao longo de nosso texto. O próximo lema (Lema de Hopf) é usado também na demonstração de um princípio do Máximo forte para operadores estritamente elípticos, mas é de grande importância por si só. Seja Ω um subconjunto do $\mathbb{R}^n$, dizemos que Ω satisfaz a condição da esfera interior (exterior) se para cada $y_0 \in \partial\Omega$, existem $r > 0$, $y_i \in \Omega$ ($y_e \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$) satisfazendo as seguintes condições

$$B_r(y_i) \subset \Omega \quad e \quad \partial B_r(y_i) \cap \partial\Omega = \{y_0\}, \qquad \text{(esfera interior)}$$

$$B_r(y_e) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega} \quad e \quad \partial B_r(y_e) \cap \partial\Omega = \{y_0\}, \qquad \text{(esfera exterior)}\ .$$

Quando um ponto $x_0 \in \partial\Omega$ é um ponto de máximo para uma certa função e $\partial\Omega \in C^2$, sabemos que

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \geqslant 0,$$

onde ν é o vetor unitário normal exterior em x_0.

O Lema de Hopf diz que se u é uma subsolução, então vale a desigualdade estrita, sob certas hipóteses.

Lema 1.1 (Lema de Hopf) *Sejam Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ e L um operador estritamente elíptico. Suponha que u satisfaz $Lu \geqslant 0$, em Ω. Seja $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $\partial\Omega$ satisfaz a condição da esfera interior em x_0 e que u seja contínua em x_0, com $u(x_0) > u(x)$ para todo $x \in \Omega$. Suponha que, pelo menos, uma das hipóteses a seguir seja satisfeita:*

i. $c = 0$;

ii. $c \leqslant 0$ *e* $u(x_0) \geqslant 0$

iii. $u(x_0) = 0$.

Então, se existir a derivada normal em x_0, teremos que

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0,$$

onde ν é o vetor normal unitário exterior em x_0.

Demonstração: Ver [22], página 330.

Teorema 1 (Princípio do Máximo Forte para o Operador Laplaciano) *Suponha $\Delta u \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ em Ω e que exista $y_0 \in \Omega$, tal que $u(y_0) = \sup_\Omega u$ $(\inf_\Omega u)$. Então u é constante.*

Demonstração: Ver [26], página 15.

O Princípio do Máximo e do Mínimo Forte implicam imediatamente em estimativas globais, chamadas princípios do máximo e do mínimo fraco.

Corolário 1.1 (Princípio do Máximo Fraco) *Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ com $\Delta u \geqslant 0 (\leqslant 0)$ em Ω. Então, se Ω é limitado,*

$$\sup_{\overline{\Omega}} u = \sup_{\partial\Omega} u, \quad \left(\inf_{\overline{\Omega}} u = \inf_{\partial\Omega} u\right).$$

1.2 Transformada de Kelvin e suas Propriedades

Definição 2 *Dados $x \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda > 0$, vamos definir a reflexão de y com respeito a $B_\lambda(x)$ como sendo o ponto $x + \dfrac{\lambda^2(y-x)}{|y-x|^2}$, também denotado por $I_x^\lambda(y)$.*

Tal ponto possui uma propriedade geométrica interessante. Dados $x \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda > 0$, a reflexão de qualquer ponto fora (dentro) da bola $B_\lambda(x)$ será um elemento dentro (fora) da bola supracitada e os elementos pertencentes à fronteira dessa bola, permanecerão inalterados, quando sofrerem a ação desta reflexão (como mostra a figura)

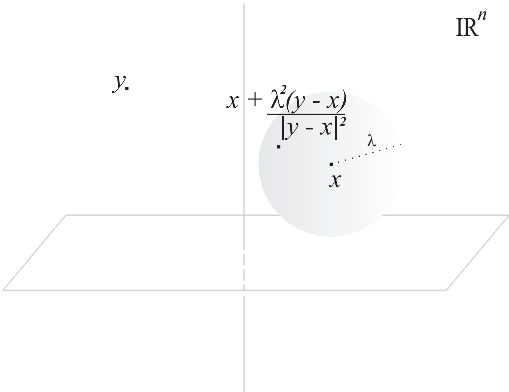

Figura 1.1: Reflexão de um ponto y com respeito a $B_\lambda(x)$.

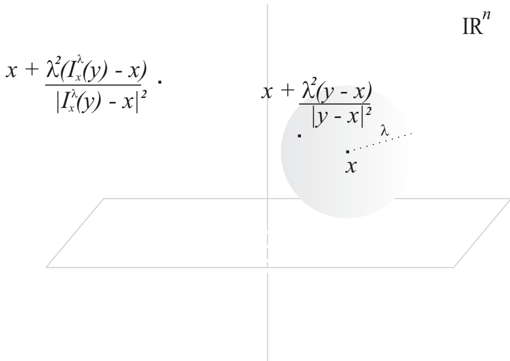

Figura 1.2: Reflexão da reflexão de um ponto y com respeito a $B_\lambda(x)$.

Outra propriedade que iremos utilizar será a seguinte proposição

Proposição 1.1 *Sejam $\lambda > 0$ e $y \in \mathbb{R}^n$, com $y \neq 0$ e $y \notin \partial B_\lambda(0)$, então*

$$\frac{|z-y|}{\left|z - \dfrac{\lambda^2 y}{|y|^2}\right|} = \frac{|y|}{\lambda}, \qquad \textit{para todo } |z| = \lambda.$$

Além disso, se $|z| \geqslant \lambda$, então

$$\frac{|z-y|}{\left|z - \dfrac{\lambda^2 y}{|y|^2}\right|} \geqslant \frac{y}{\lambda}, \qquad \textit{para todo } 0 < |y| < \lambda.$$

$$\frac{|z-y|}{\left|z - \dfrac{\lambda^2 y}{|y|^2}\right|} \leqslant \frac{y}{\lambda}, \qquad \textit{para todo } |y| > \lambda$$

Prova: A demonstração desses fatos pode ser obtida de forma elementar, a partir da seguinte expressão

$$\frac{|z-y|^2}{\left|z-\dfrac{\lambda^2 y}{|y|^2}\right|^2}=\frac{|z|^2-2(z,y)+|y|^2}{|z|^2-2\dfrac{\lambda^2}{|y|^2}(y,x)+\dfrac{\lambda^4}{|y|^2}}=\frac{|y|^2}{\lambda^2}\left(\frac{|z|^2-2(y,x)+|y|^2}{\dfrac{|z|^2}{\lambda^2}|y|^2-2(y,x)+\lambda^2}\right).$$

Se $|z|=\lambda$, então obtemos a primeira identidade. As outras duas relações são consequências diretas de

$$\left(|z|^2+|y|^2\right)-\left(\frac{|z|^2}{\lambda^2|y|^2+\lambda^2}\right)=\left(|z|^2-\lambda^2\right)\left(1-\frac{|y|^2}{\lambda^2}\right).$$

■

Sejam $x\in\mathbb{R}^n$ e $\lambda>0$, definimos a Transformada de Kelvin de u com respeito a $B_\lambda(x)$, denotada por $u_{x,\lambda}$ como sendo

$$u_{x,\lambda}(y)=\left(\frac{\lambda}{|y-x|}\right)^{n-2}u\left(x+\frac{\lambda^2(y-x)}{|y-x|^2}\right),\quad y\in\mathbb{R}^n\setminus\{x\}.$$

1.3 Lema do Raio de Coincidência

O seguinte lema, que terá grande importância no nosso trabalho, garante para cada x a existência de um raio, que evidentemente, dependerá do ponto x, tal que a função função u coincide com sua transformada de Kelvin.

Lema 1.2 (Lema do raio de coincidência) *Sejam $u\in C^1(\mathbb{R}^n)$, $n\geqslant 3$. Suponhamos que para cada $x\in\mathbb{R}^n$, exista $\lambda(x)>0$ tal que*

$$u(y)=u_{x,\lambda(x)}(y),\qquad \textit{para todo } y\in\mathbb{R}^n\setminus\{x\}. \tag{1.1}$$

Então existem $\alpha\geqslant 0$, $\beta>0$, $\overline{x}\in\mathbb{R}^n$, tais que

$$u(x)=\pm\left(\frac{\alpha}{\beta+|x-\overline{x}|^2}\right)^{(n-2)/2}.$$

Na literatura podemos encontrar o Lema 1.2 em uma forma mais geral

Lema 1.3 *Sejam $u\in C^1(\mathbb{R}^n)$, $n\geqslant 1$, $\nu>0$. Suponhamos que para cada $x\in\mathbb{R}^n$, exista $\lambda(x)>0$ tal que*

$$u(y)=\left(\frac{\lambda(x)}{|y-x|}\right)^{\nu}u\left(x+\frac{\lambda(x)^2(y-x)}{|y-x|^2}\right),\quad y\in\mathbb{R}^n\setminus\{x\}. \tag{1.2}$$

Então existem $\alpha \geqslant 0$, $\beta > 0$, $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, tais que

$$u(x) = \pm \left(\frac{\alpha}{\beta + |x - \overline{x}|^2} \right)^{\nu/2}.$$

Provaremos o Lema 1.3. O Lema 1.2 segue como caso particular, com $\nu = n-2$.
Prova: Uma vez que (1.2) é válido para todo x, podemos notar que

$$\left(\frac{\lambda(x')}{|y - x'|} \right)^{\nu} u \left(x' + \frac{\lambda(x')^2 (y - x')}{|y - x'|^2} \right) = u(y) = \left(\frac{\lambda(x)}{|y - x|} \right)^{\nu} u \left(x + \frac{\lambda(x)^2 (y - x)}{|y - x|^2} \right)$$

Segue da equação (1.2) que

$$\Lambda := \lim_{|y|\to\infty} |y|^{\nu} u(y) = \lim_{|y|\to\infty} |y|^{\nu} \left(\frac{\lambda(x)}{|y - x|} \right)^{\nu} u \left(x + \frac{\lambda^2(x)(y - x)}{|y - x|^2} \right) = \lambda^{\nu}(x) u(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Note que Λ não depende da escolha do x, pela própria definição do Λ. Se $\Lambda = 0$, então $u \equiv 0$. Caso contrário, então a função u não muda de sinal. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\Lambda = 1$ e $u(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Com efeito, basta fazer as mesmas operações com a função $w = u/\Lambda$ e verificar que as demais identidades são asseguradas para a nova função. De (1.2), observamos que $u(y) \to 0$, quando $|y| \to \infty$ e que u é uma função contínua e positiva, u possui um ponto de máximo. Para efeito de simplificação, assumiremos que u possui um ponto de máximo na origem.

Para $x \in \mathbb{R}^n$, temos para $|y|$ suficientemente grande

$$|y|^{\nu} u(y) = \lambda(x)^{\nu} \left(\frac{|y|}{|y - x|} \right)^{\nu} u \left(x + \frac{\lambda(x)^2 (y - x)}{|y - x|^2} \right)$$

Usando a fórmula de Taylor para a função $g(t) = \left(\frac{|y|}{|y - tx|} \right)^{\nu}$, temos que

$$|y|^{\nu} u(y) = \lambda(x)^{\nu} \left(1 + \frac{\nu x \cdot y}{|y|^2} + O(|y|^{-2}) \right) u \left(x + \frac{\lambda(x)^2 (y - x)}{|y - x|^2} \right).$$

Observe que

$$g(0) = 1 \quad g'(0) = \nu \frac{y \cdot x}{|y|^3} \frac{|y|^{\nu}}{|y|^{\nu - 1}} = \nu \frac{y \cdot x}{|y|^2}.$$

E como $\Lambda = \lim_{|y|\to\infty} |y|^{\nu} u(y)$, com $\Lambda = 1$,

$$\begin{aligned} |y|\left(|y|^{\nu}u(y)-1\right) &= |y|\lambda(x)^{\nu}\left(u\left(x+\frac{\lambda(x)^2(y-x)}{|y-x|^2}\right)-u(x)\right)+ \\ &+\left(\frac{\lambda(x)^{\nu}\nu x\cdot y}{|y|}+O(|y|^{-1})\right)u\left(x+\frac{\lambda(x)^2(y-x)}{|y-x|^2}\right).(1.3) \end{aligned}$$

Tomando $x = 0$ na equação acima e usando o fato de que u possui um ponto máximo na origem, obtemos que

$$\limsup_{|y|\to\infty} |y|\left(|y|^{\nu}u(y)-1\right) \leqslant 0. \tag{1.4}$$

Afirmação: Para qualquer $\epsilon > 0$, existe M_ϵ tal que para qualquer $|y| \geqslant M_\epsilon$, existe $\widetilde{x} = \widetilde{x}(y)$, satisfazendo

$$\widetilde{x} + \frac{\lambda(\widetilde{x})^2(y-\widetilde{x})}{|y-\widetilde{x}|^2} = 0 \quad \text{ e } |\widetilde{x}| \leqslant \epsilon. \tag{1.5}$$

Com efeito, sabemos que $\lambda(x) = u(x)^{-1/\nu}$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Para qualquer $\epsilon \in (0,1)$, seja $M_\epsilon > 1$ tal que

$$(M_\epsilon - 1)^{-1} \max_{|x|\leqslant\epsilon} u(x)^{-2/\nu} < \frac{\epsilon}{2},$$

então, para todo $|y| \geqslant M_\epsilon$,

$$\max_{|x|\leqslant\epsilon}\left|\frac{\lambda(x)^2(y-x)}{|y-x|^2}\right| = \max_{|x|\leqslant\epsilon}|y-x|^{-1}u(x)^{-2/\nu} \leqslant (M_\epsilon-\epsilon)^{-1}\max_{|x|\leqslant\epsilon}u(x)^{-2/\nu} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Dessa forma, por um argumento do grau usando a continuidade de u, existe $\widetilde{x} = \widetilde{x}(y)$, satisfazendo (1.5). Com $x = \widetilde{x}(y)$ em (1.3), obtemos

$$\liminf_{|y|\to\infty} |y|\left(|y|^{\nu}u(y)-1\right) \geqslant -\epsilon\nu u(0)\max_{|z|\leqslant\epsilon} u(z)^{-1/\nu}.$$

Fazendo $\epsilon \to 0$, temos

$$\liminf_{|y|\to\infty} |y|\left(|y|^{\nu}u(y)-1\right) \geqslant 0. \tag{1.6}$$

Em virtude de (1.4) e (1.6), temos

$$\lim_{|y|\to\infty} |y|\left(|y|^{\nu}u(y)-1\right) = 0. \tag{1.7}$$

Seja $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$. Para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$, $1 \leqslant i \leqslant n$ e $t \in \mathbb{R}$, seja $y = y(x, t, i) \in \mathbb{R}^n$ definido de forma que

$$te_i = \frac{\lambda(x)^2(y - x)}{|y - x|^2}.$$

Tomando este y em (1.3) e mandando $t \to 0$, obtemos, em vista de (1.7),

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{u(x + te_i) - u(x)}{t} = -\frac{\nu x \cdot e_i u(x)}{\lambda(x)^2} = -\nu x_i u(x)^{1+\frac{2}{\nu}}.$$

Observemos que a igualdade acima é válida para qualquer $x \in \mathbb{R}?n$. A partir desta observação, segue que

$$u(0)^{-1-\frac{2}{\nu}} \frac{\partial u}{\partial y_i}(0) = u(x)^{-1-\frac{2}{\nu}} \frac{\partial u}{\partial y_i}(x) + \nu x_i.$$

Assim, podemos ver o seguinte sistema de equações diferenciais parciais,

$$\frac{u(x)^{-2/\nu} - \frac{\nu}{2}|x|^2}{\partial x_i} = 0m \quad i = 1, \ldots, n.$$

Integrando com relação a i-ésima coordenanda, obtemos

$$\int_{x_i^0}^{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big(u(x)^{-2/\nu} - \frac{\nu}{2}|x|^2 \Big) = g_i(x_1, \ldots, x_{j-1}, \hat{x_j}, x_{j+1}, \ldots, x_n),$$

onde $g_i(x_1, \ldots, x_{j-1}, \hat{x_j}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ é uma função que independe da variável x_j. Dessa forma, para $x^{0,i} = (x_1, \ldots, x_i^0, \ldots, x_n^0)$, obtemos

$$u(x)^{-2/\nu} - u(x^{0,i}) - |x - x^{0,i}|^2 = g_i(x_1, \ldots, x_{j-1}, \hat{x_j}, x_{j+1}, \ldots, x_n).$$

Seja $\bar{x} = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, assim obtemos

$$u(x)^{-2/\nu} - u(\bar{x}) - |x - \bar{x}|^2 = g_1(\bar{x_1}, \ldots, x_n) = g_n(x_1, \ldots, \bar{x_n})$$

o que significa, já que as funções g_i não dependem da variável x_i

$$u(x)^{-2/\nu} - u(\bar{x}) - |x - \bar{x}|^2 = d,$$

onde d é uma constante. Logo,

$$u(x)^{-2/\nu} = |x - \overline{x}| + d.$$

■

Lema 1.4 *Sejam $u \in C^2(\Omega)$ e $\lambda > 0$, a Transformada de Kelvin de u definida por*

$$u_{x,\lambda}(y) = \left(\frac{\lambda}{|y-x|}\right)^{n-2} u\left(x + \frac{\lambda^2(y-x)}{|y-x|^2}\right), \qquad \textit{para todo } x + \frac{\lambda^2(y-x)}{|y-x|^2} \in \Omega$$

satisfaz a seguinte equação

$$\Delta u_{x,\lambda}(y) = \left(\frac{\lambda}{|y-x|}\right)^{n+2} \Delta u\left(x + \frac{\lambda^2(y-x)}{|y-x|^2}\right).$$

Prova: Podemos supor, sem perda de generalidade, que $x = 0$, uma vez que o operador laplaciano é invariante por translações. Denotaremos $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e

$$\xi = \left(\frac{\lambda^2 y}{|y|^2}\right) = \left(\frac{\lambda^2 y_1}{|y|^2}, \ldots, \frac{\lambda^2 y_n}{|y|^2}\right)$$

a reflexão de y com respeito a bola B_λ. Denotando por ξ_i, a i-ésima coordenada de ξ, obtemos fazendo alguns cálculos simples:

$$\frac{\partial \xi_j}{\partial y_k} = \frac{\lambda^2}{|y|^2}\left(\delta_{jk} - 2\frac{y_j y_k}{|y|^2}\right)$$

e

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \xi_j}{\partial y_l}\frac{\partial \xi_l}{\partial y_k} = \frac{\lambda^4}{|y|^4}\delta_{jk}.$$

Dessa forma,

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial y_l}{\partial \xi_j}\frac{\partial y_l}{\partial \xi_k} = \frac{1}{|\xi|^4}\delta_{jk}.$$

Pensemos ξ como um sistema de coordenadas curvilíneas ortogonal para y, deduzimos que o tensor métrico do espaço Euclidiano em coordenadas curvilineas

$$g_{j,k}(\xi_j, \xi_k) = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial y_l}{\partial \xi_j}\frac{\partial y_l}{\partial \xi_k} = \frac{1}{|\xi|^4}\delta_{jk}.$$

Isto implica que os coeficientes de Lame é

$$h_j = \sqrt{g_{j,j}(\xi_j, \xi_j)} = \frac{1}{|\xi|^2}.$$

Então o laplaciano de uma função pode ser calculado

$$\Delta u = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{\prod_{k=1}^{n} h_k}{h_j^2}\frac{\partial u}{\partial \xi_j}\right)$$

que implica que

$$\Delta u(y) = |\xi|^{2n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\frac{1}{|\xi|^{2n-4}} \frac{\partial u}{\partial \xi_j} \right).$$

Usando a fórmula

$$\Delta(uv) = v\Delta u + 2\nabla u \cdot \nabla v + u\Delta v,$$

obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\xi|^{2-n}} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\frac{1}{|\xi|^{2n-4}} \frac{\partial u}{\partial \xi_j} \right) &= 2\frac{\partial u}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\xi_j} \left(\frac{1}{|\xi|^{n-2}} \right) + \frac{1}{|\xi|^{n-2}} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_j^2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial \xi_j^2} \left(\frac{1}{|\xi|^{n-2}} u \right) - u \frac{\partial^2}{\partial \xi_j^2} \left(\frac{1}{|\xi|^{n-2}} \right). \end{aligned}$$

Com isso concluímos, juntamente com a identidade

$$\Delta \left(\frac{1}{|\xi|^{n-2}} \right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial \xi_j^2} \left(\frac{1}{|\xi|^{n-2}} \right) = 0$$

que

$$\begin{aligned} \Delta u(y) &= |\xi|^{n+2} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial \xi_j^2} \left(\frac{1}{|\xi|^{n-2}} u \right) = \frac{\lambda^{n+2}}{|y|^{n+2}} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial \xi_j^2} \\ &= \frac{\lambda^{n+2}}{|y|^{n+2}} \Delta u_\lambda(\xi) = \frac{\lambda^{n+2}}{|y|^{n+2}} \Delta u_\lambda(y_\lambda). \end{aligned}$$

E assim,

$$\Delta u \left(\frac{\lambda^2}{|y|^2} y \right) = \left(\frac{\lambda}{|y|} \right)^{n+2} \Delta u_\lambda(y).$$

■

Lema 1.5 *Seja u uma função de classe $C^2(\mathbb{R}^n)$, tal que $\Delta u \leqslant 0$, em $\mathbb{R}^n$. Então para cada $\lambda > 0$*

$$\min_{\partial B_\lambda(x)} u \leqslant \left(\frac{|y-x|}{\lambda} \right)^{n-2} u(y), \qquad \textit{para todo } |y-x| \geqslant \lambda.$$

Prova: Pelo Lema 1.4, temos que

$$-\Delta u_{x,\lambda}(y) = -\left(\frac{\lambda}{|y-x|} \right)^{n+2} \Delta u \left(x + \frac{\lambda^2 (y-x)}{|y-x|^2} \right) \geqslant 0.$$

ou seja, $u_{x,\lambda}$ é uma função super-harmônica. Pelo Princípio do Máximo, temos que

$$
\begin{aligned}
\min\{u(y)\ :\ |y-x|=\lambda\} &= \min\left\{u\left(x+\frac{\lambda^2(y-x)}{|y-x|^2}\right)\ :\ |y-x|=\lambda\right\}\\
&= \min\left\{\left(\frac{\lambda}{|y-x|}\right)^{n-2} u\left(x+\frac{\lambda^2(y-x)}{|y-x|^2}\right)\ :\ |y-x|=\lambda\right\}\\
&= \min\left\{\left(\frac{\lambda}{|y-x|}\right)^{n-2} u\left(x+\frac{\lambda^2(y-x)}{|y-x|^2}\right)\ :\ |y-x|\leqslant\lambda\right\}
\end{aligned}
$$

Utilizando argumentos de reflexão em relação a bola de centro x e raio λ, obtemos que

$$
\begin{aligned}
\min\{u(y)\ :\ |y-x|=\lambda\} &= \min\left\{\left(\frac{\lambda}{|y-x|}\right)^{n-2} u\left(x+\frac{\lambda^2(y-x)}{|y-x|^2}\right)\ :\ |y-x|\leqslant\lambda\right\}\\
&= \min\left\{\left(\frac{|y-x|}{\lambda}\right)^{n-2} u(y)\ :\ |y-x|\geqslant\lambda\right\}\\
&\leqslant \left(\frac{|y-x|}{\lambda}\right)^{n-2} u(y), \qquad \text{para todo } |y-x|\geqslant\lambda.
\end{aligned}
$$

■

A seguir, provaremos que se para qualquer bola, a transformada de Kelivn de uma função é dominada pela mesma, no exterior da bola, então esta é constante, mais precisamente:

Lema 1.6 *Seja $u\in C^1(\mathbb{R}^n)$, $n\geqslant 1$ e $\nu>0$. Assuma que*

$$\left(\frac{\lambda}{|y-x|}\right)^{\nu} u\left(x+\frac{\lambda^2(y-x)}{|y-x|^2}\right)\leqslant u(y), \qquad \textit{para todo } \lambda>0, x\in\mathbb{R}^n, |y-x|\geqslant\lambda.$$

Então

$$u\equiv \textit{ constante.}$$

Prova: Para $x\in\mathbb{R}^n$, $\lambda>0$ defina a seguinte função

$$v_{x,\lambda}(z)=u(x+z)-\left(\frac{\lambda}{|z|}\right)^{\nu} u\left(x+\frac{\lambda^2}{|z|^2}z\right), \quad |z|\geqslant\lambda.$$

Note que sobre a esfera $|z|=\lambda$ a função $v_{x,\lambda}$ é identicamente nula, mais precisamente

$$v_{x,|z|}(z)=u(x+z)-\left(\frac{|z|}{|z|}\right)^{\nu} u\left(x+\frac{|z|^2}{|z|^2}z\right)=0 \tag{1.8}$$

Usando (1.8) $y = x + rz$, $\lambda = |z|$, obtemos

$$\frac{|z|}{|rz|} u\left(x + \frac{|z|^2 rz}{|rz|^2}\right) \leqslant u\left(x + rz\right), \qquad \text{para todo } r \geqslant 1.$$

Consequentemente,

$$v_{x,|z|}(rz) \geqslant 0, \qquad \text{para todo } r \geqslant 1. \tag{1.9}$$

Por (1.8) e (1.9), segue que

$$\frac{d}{dr}\left(v_{x,|z|}(rz)\right) \geqslant 0, \qquad \text{para todo } r \geqslant 1.$$

Fazendo os cálculos, usando o quociente de Newton e fazendo o limite lateral quando r tende a 1, com valores superiores a 1, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr}\left(v_{x,|z|}(rz)\right)\Big|_{r=1} &= \frac{d}{dr}\left(u\left(x + rz\right) - \left(\frac{1}{r}\right)^{\nu} u\left(x + \frac{z}{r}\right)\right) \\
&= \left\{\nabla u(x + rz) \cdot z + \nu \left(\frac{1}{r}\right)^{\nu - 1} \frac{1}{r^2} u\left(x + \frac{z}{r}\right) + \left(\frac{1}{r}\right)^{\nu} \nabla u\left(x + \frac{z}{r}\right) \cdot \frac{z}{r^2}\right\}\Big|_{r=1} \\
&= 2\nabla u(x + z) \cdot z + \nu u(x + z) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Desde que z e x são arbitrários, por mudança de variáveis $z = y - x$, temos

$$2\nabla u(y) \cdot (y - x) + \nu u(y) = 2\nabla u(y) \cdot y - 2\nabla u(y) \cdot x + \nu u(y) \geqslant 0.$$

Dividindo a desigualdade acima por $|x|$ e fazendo $|x| \to \infty$, temos

$$\nabla u(y) \cdot \theta \leqslant 0, \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad \theta \in S^{n-1}.$$

Segue que

$$\nabla u \equiv 0.$$

■

Lema 1.7 *Sejam $u \in C^1(\mathbb{R}^n_+)$, $n \geqslant 2$ e $\nu > 0$. Assuma que*

$$\left(\frac{\lambda}{|y - x|}\right)^{\nu} u\left(x + \frac{\lambda^2 (y - x)}{|y - x|^2}\right) \leqslant u(y),$$

para todo $\lambda > 0, x \in \partial\mathbb{R}^n_+, |y - x| \geqslant \lambda, y \in \mathbb{R}^n_+$. Então

$$u(x) = u(x', t) = u(0, t), \quad x = (x', t) \in \mathbb{R}^n_+.$$

Prova: Seja $x \in \partial\mathbb{R}^n_+$ e $\lambda > 0$ e defina

$$v_{x,\lambda}(z) = u(x+z) - \left(\frac{\lambda}{|z|}\right)^{\nu} u\left(x + \frac{\lambda^2 z}{|z|^2}\right), \quad z \in \mathbb{R}^n_+, |z| \geqslant \lambda.$$

Como no lema anterior, temos

$$2\nabla u(x+z)\cdot z + \nu u(x+z) \geqslant 0, \text{ para } x \in \partial\mathbb{R}^n_+, z \in \mathbb{R}^n_+.$$

Fazendo mudança de variáveis, obtemos

$$2\partial_{y'} u(y',t)\cdot(y'-x') + 2\partial_t u(y',t)\cdot t + \nu u(y',t) \geqslant 0, \text{ para } x', y' \in \mathbb{R}^{n-1}, t > 0.$$

Dividindo acima por $|y'-x'|$ e fazendo $|y'-x'| \to \infty$, temos que

$$\partial_{y'} u(y',t)\cdot\theta \geqslant 0, \qquad \text{para todo}(y',t) \in \mathbb{R}^n_+ \text{ e } \theta \in S^{n-2}.$$

Segue que

$$\partial_{y'} u(y',t) \equiv 0.$$

■

1.4 Funções Localmente Limitadas

Nesta seção, definiremos função localmente limitada, bem como alguns resultados elementares acerca deste assunto.

Definição 3 *Seja Ω um subconjunto do $\mathbb{R}^n$, uma função $g : \Omega \to \mathbb{R}$ é localmente limitada em Ω se para cada $x \in \Omega$, existe uma vizinhança de x, N_x, tal que*

$$\sup\{|g(y)| : y \in N_x\} < \infty.$$

Proposição 1.2 *Seja Ω um subconjunto do $\mathbb{R}^n$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função localmente limitada. Então a função composta $g \circ u$ é uma função localmente limitada em Ω.*

Prova: É suficiente mostrar que u é localmente limitada em cada subconjunto compacto Ω' de Ω. Seja $y \in \Omega'$ e considere a seguinte função

$$u\big|_{\Omega'} : \Omega' \to u(\Omega').$$

Como u é contínua e Ω' é compacto, então $u(\Omega')$ também o é. Para cada $z \in u(\Omega')$, existe uma vizinhança[1] aberta N'_z tal que

$$|g(z)| \leqslant M_z, \qquad \text{para todo } z \in N_z.$$

Observe que $u(\Omega') \subset \cup_{z\in u(\Omega')} N'_z$, então como $u(\Omega')$ é compacto, segue que

$$u(\Omega') \subset \bigcup_{i=1}^{N} N_{z_i}.$$

Denotemos para cada $i = 1, \dots, N$, $N_i = u^{-1}\left(N'_{z_i}\right)$. Como u é contínua temos que $\{N_i\}_{i=1}^N$ é uma cobertura de vizinhanças (abertas) para Ω'. Seja $y_0 \in \Omega'$ e considere N_i uma vizinha que contenha y_0. Para cada $y \in N_i$, temos que $u(y) \in u(u^{-1}(N_i)) = N_i$, pois u é sobrejetiva. Segue que,

$$|g(u(y))| \leqslant M_{z_i}, \qquad \text{para todo } y \in N_i.$$

e o resultado fica provado. ■

Como consequência imediata da demonstração

Proposição 1.3 *Sejam Ω' um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ e $g : \Omega' \to \mathbb{R}$ uma função localmente limitada, então g é limitada.*

1.5 Existência da Função de Green para abertos limitados do $\mathbb{R}^n$

Nesta seção, apresentaremos uma prova da existência da função de Green para abertos limitados do $\mathbb{R}^n$, usando o Teorema de Hanh-Banach. A prova é devida a Peter D. Lax [29].

$$\begin{cases} \Delta u &= 0, & \text{em } \Omega \\ u &= f, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.10}$$

onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$

A função de Green visa obter uma representação integral da solução do problema de Dirichlet (1.10), em termos apenas de f.

Definição 4 (Função de Green) *A função de Green associada ao problema de*

[1] A existência da vizinhança é devido ao fato de que g é localmente limitada.

Dirichlet para a equação de Laplace em Ω é dada por

$$G(x,y) := \vartheta(y-x) - \phi_x(y), \qquad \textit{para todo } x \in \Omega \textit{ e } y \in \overline{\Omega},$$

onde ϑ é a solução fundamental da equação de Laplace em $\mathbb{R}^n$ e $\phi_x(y)$, a parte regular da função de Green , ou seja, satisfaz para cada $x \in \Omega$ o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta_y \phi_x &= 0, & \textit{em } \Omega \\ \phi_x(y) &= \vartheta(y-x), & \textit{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.11}$$

1.5.1 Existência da Função de Green

Neste seção, apresentaremos uma prova curta, devido a Peter D. Lax [29], a qual se obtém devido a um argumento variacional, neste apenas dependência linear e limitada das soluções sobre os valores de fronteira é apresentado. Neste trabalho, apresentaremos a prova para o caso $n > 2$.

Lema 1.8 (Poincaré) *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ [2] satisfaça a condição da esfera interior e exterior. Então, existe a função de Green associada a Ω.*

Prova: Seja B o subespaço vetorial de $C(\partial\Omega)$ formado pelas funções para as quais o problema de Dirichlet admite solução clássica, a qual denotaremos por u_f. Pelo princípio do máximo, para cada $x \in \Omega$, a aplicação

$$\begin{aligned} L_x : \ & B \to \mathbb{R} \\ & f \mapsto u_f(x) \end{aligned}$$

a qual é uma aplicação linear contínua. De fato, seja $f \in B$, então

$$|L_x f| = |u_f(x)| \leqslant \sup_{\overline{\Omega}} u_f = \sup_{\partial\Omega} u_f = \sup_{\partial\Omega} f = \|f\|,$$

onde a antepenúltima igualdade é devido ao Princípio do Máximo, o que implica que a função L_x é monótona crescente.

Dividiremos a demonstração em duas etapas:

1ª etapa. Existe uma extensão linear contínua de L_x em $C(\partial\Omega)$ que é monótona crescente.

Para isso, vamos utilizar a forma analítica do Teorema de Hahn-Banack

Lema 1.9 (Teorema de Hahn-Banach forma analítica) *Seja E um espaço ve-*

[2] Faremos a prova para o caso $n \geq 3$, o caso $n = 2$ é semelhante.

torial normado e $p : E \to \mathbb{R}$ uma função subaditiva e homogênea positiva, ou seja,

$$p(x_1 + x_2) \leqslant p(x_1) + p(x_2), \qquad \text{para todo } x_1, x_2 \in E,$$

$$p(\lambda x) = \lambda p(x), \qquad \text{para todo } x \in E, \quad \lambda > 0.$$

Dados $F \subset E$ um subespaço vetorial e um funcional linear $T : F \to \mathbb{R}$ tal que $T(x) \leqslant p(x)$, para todo $x \in F$, então existe uma extensão linear $\bar{T}$ de T em E tal que $\bar{T}(x) \leqslant p(x)$, para todo $x \in E$.

Para cada $x \in \Omega$, vamos aplicar o Teorema de Hahn-Banach com a função $p_x : C(\partial\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$p_x(g) := \inf_{\substack{f \geqslant g \\ f \in B}} L_x(f)$$

Afirmação: p_x está bem definida.

De fato, toda função $g \in C(\partial\Omega)$ é limitada e para todo $y \in \partial\Omega$, $g(y) \leqslant \sup_{\partial\Omega} g$. Como o problema de Dirichlet tem solução para a função constante $x \in \partial\Omega \mapsto \sup_{\partial\Omega} g$, ela pertence à classe B e assim o ínfimo na definição de p_x é calculado numa classe não-vazia. Além disso,

$$p_x(g) \leqslant \sup_{\partial\Omega} g.$$

Por outro lado, como para todo $y \in \partial\Omega$, $g(y) \geqslant \inf_{\partial\Omega} g$, se $f \in C(\partial\Omega)$ é um função tal que $f \geqslant g$ e $f \in B$, então para todo $y \in \partial\Omega$, $f(y) \geqslant \inf_{\partial\Omega} g$ e segue do princípio do máximo que a solução do problema de Dirichlet com dado de fronteira f é superior a $\inf_{\partial\Omega} g$. Em particular, $L_x(f) \geqslant \inf_{\partial\Omega} g$. Consequentemente, como a função f é arbitrária,

$$p_x(g) \geqslant \inf_{\partial\Omega} g.$$

Segue imediatamente da definição que p_x é homogênea positiva e $L_x(f) = f_x(f)$, para toda $f \in B$. Para verificar a subaditividade de p_x, sejam $g_1, g_2 \in C(\partial\Omega)$. Dado $\epsilon > 0$, sejam $f_1, f_2 \in C(\partial\Omega)$, tais que

$$f_i \geqslant g_i, \quad f_i \in B \quad \text{ e } p_x(g_i) \geqslant L_x(f_i) - \epsilon \quad (i = 1, 2).$$

Ora,

$$f_1 + f_2 \geqslant g_1 + g_2 \quad \text{ e } f_1 + f_2 \in B.$$

Assim, pela definição de $p_x(g_1 + g_2)$,

$$\begin{aligned} p_x(g_1 + g_2) &\leqslant L_x(f_1 + f_2) = L_x(f_1) + L_x(f_2) \\ &\leqslant p_x(g_1) + p_x(g_2) + 2\epsilon. \end{aligned}$$

Como $\epsilon >$ é arbitrário, concluímos que

$$p_x(g_1 + g_2) \leqslant p_x(g_1) + p_x(g_2),$$

ou seja, p_x é subaditiva. Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe um funcional linear $\bar{L}_x : C(\partial\Omega) \to \mathbb{R}$ que estende L_x e tal que

$$\bar{L}_x(g) \leqslant p_x(g), \qquad \text{para todo } g \in C(\partial\Omega).$$

Em particular, $\bar{L}_x$ é monótona crescente, pois $g \leqslant 0$ implica $\bar{L}_x(g) \leqslant p_x(g) \leqslant 0$. Resta mostrar que o funcional $\bar{L}_x$ é contínuo. Ora, para todo $g \in C(\partial\Omega)$, vimos que $p_x(g) \leqslant \sup_{\partial\Omega} g$. Assim,

$$\bar{L}_x(g) \leqslant p_x(g) \leqslant \sup_{\partial\Omega} g.$$

Aplicando esta estimativa para a função $-g$, pela linearidade do funcional $\bar{L}_x$, obtemos

$$-\bar{L}_x(g) \leqslant -\inf_{\partial\Omega} g.$$

Consequentemente,

$$\inf_{\partial\Omega} g \leqslant \bar{L}_x(g) \leqslant \sup_{\partial\Omega} g.$$

de onde temos

$$|\bar{L}_x(g)| \leqslant \|g\|_{C(\partial\Omega)},$$

o que prova que o funcional é contínuo.

2ª etapa. Dado $x \in \Omega$, seja

$$\phi_x(y) := \bar{L}_x(\vartheta_y), \qquad \text{para todo } y \in \mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega,$$

onde $\vartheta_y(z) := \vartheta(y-z)$, para todo $z \in \mathbb{R}^n$. Então, ϕ_x se estende continuamente como uma função em $\mathbb{R}^n$. De fato, dado $y \notin \partial\Omega$, a aplicação $\vartheta_y : z \mapsto \vartheta(z-y)$ pertence a $C(\partial\Omega)$. Logo, ϕ_x está bem definida sobre $\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$. Ainda, se $y \notin \overline{\Omega}$, então $\vartheta_y \in B$, de onde segue que

$$\phi_x(y) = L_x(\vartheta_y) = \vartheta(y-x), \qquad \text{para todo } y \notin \partial\overline{\Omega}. \tag{1.12}$$

Seja $y \in \Omega$, com $h := d(y, \partial\Omega) < r$, onde $r > 0$ satisfaz a condição da esfera exterior e interior. Observe que existe um único ponto na fronteira de Ω,y_0 que minimiza a distância entre y e $\partial\Omega$. De fato, $B_h(y)$ e $B_r(y_1)$, da definição de condição da esfera exterior, devem estar no mesmo subespaço afim determinado pelo plano tangente a $\partial\Omega$ em y_0. Como este plano tangente também tangencia $B_h(y)$ e $B_r(y_1)$ em y_0, e $h < r$, então $B_h(y) \subset B_r(y_1)$. Logo $\overline{B_h(y)} \cap \partial\Omega = \{y_0\}$. Além disso, temos $y \in [y_0, y_1]$, i.e., y está no segmento que liga y_0 a y_1. Como $y \neq y_1$ e $y \neq y_2$, podemos definir y' e y'', as reflexões de y com relação a $\partial B_r(y_1)$ e $\partial B_r(y_2)$, respectivamente.

Nosso objetivo será mostrar que, caso y esteja suficientemente próximo de $\partial\Omega$, então y' e y'' não pertencem a Ω. Isto será feito com o auxílio do seguinte lema.

Lema 1.10 *Se $y \in \Omega$ e $d(y, \partial\Omega) < \frac{2r}{3}$, então $y', y'' \notin \overline{\Omega}$.*

Prova: No caso de y'' não há problema, pois $y \in \Omega$ significa $y \notin \overline{B_r(y_2)}$ e, portanto, $y'' \in B_r(y_2)$. Vamos supor que $y \in \Omega$ e que $d(y, \partial\Omega) < \frac{2r}{3}$. Se y_0 for o ponto que minimiza a distância entre y e $\partial\Omega$, então $y \in [y_0, y_1]$, mais precisamente $y = y_1 + t(y_0 - y_1)$, com $\frac{1}{3} < t < 1$. Logo $y' = y_1 + s(y_0 - y_1)$, com $1 < s < 3$. Em particular, $|y' - y_2| < r$ e $y' \in B_r(y_2)$. ∎

Continuação do Lema de Poincaré. Se $z \in \partial\Omega$, então $z \notin B_r(y_1) \cap B_r(y_2)$. Logo, aplicando a segunda parte da Proposição 1.1, com as devidas modificações de notação, teremos

$$\frac{r}{|y - y_2||y'' - z|} \leqslant \frac{1}{|y - z|} \leqslant \frac{r}{|y - y_1||y' - z|}, \qquad \text{para todo } z \in \partial\Omega,$$

onde estamos supondo $y \in \Omega$ e $d(y, \partial\Omega) < \frac{2r}{3}$. Se $n > 2$, segue da relação acima que

$$\left(\frac{r}{|y - y_2|}\right)^{n-2} \vartheta_{y''}(z) \leqslant \vartheta_y(z) \leqslant \left(\frac{r}{|y - y_1|}\right)^{n-2} \vartheta_{y'}(z), \qquad \text{para todo } z \in \partial\Omega.$$

Como $\bar{L}_x$ é um funcional linear monótono crescente, aplicando esse operador à expressão acima, as desigualdades serão mantidas. Como $y', y'' \notin \overline{\Omega}$, segue de (1.12) que

$$\left(\frac{r}{|y - y_2|}\right)^{n-2} \vartheta(y'' - x) \leqslant \phi_x(y) \leqslant \left(\frac{r}{|y - y_1|}\right)^{n-2} \vartheta(y' - x), \qquad \text{para todo } x \in \Omega. \tag{1.13}$$

Fixado $\bar{y} \in \partial\Omega$, observe que $y \to \bar{y}$ implica que $|y - y_1|, |y - y_2| \to r$ e, portanto, $y', y'' \to \bar{y}$. Em vista de (1.13), teremos

$$\lim_{\substack{y \to \bar{y} \\ y \in \Omega}} \phi_x(y) = \vartheta(\bar{y} - x),$$

para todo $\bar{y} \in \partial\Omega$.

3ª etapa. ϕ_x é a parte regular da função de Green de Ω.

Pela etapa precedente, sabemos que ϕ_x é contínua em $\mathbb{R}^n$ e

$$\phi_x(\bar{y}) = \vartheta(\bar{y} - x), \quad \text{para todo } x \in \Omega, \bar{y} \in \partial\Omega.$$

Sendo $\bar{L}_x$ linear e contínua, teremos

$$\Delta_y \phi_x(y) = \bar{L}_x(\Delta_y \vartheta_y) = 0, \qquad \text{para todo } y \in \Omega,$$

de maneira que ϕ_x é harmônica em Ω. ■

CAPÍTULO 2

TEOREMA TIPO LIOUVILLE DE CAFFARELLI, GIDAS E SPRUCK

Neste capítulo, apresentaremos uma prova devido a YanYan Li e Lei Zhang [32] do teorema de Caffarelli, Gidas e Spruck usando o método *moving spheres*.

Para $\mu > 0$, $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$,

$$u(x) = \left(\frac{\mu}{1 + \mu^2 |x - \overline{x}|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \tag{2.1}$$

satisfaz a equação

$$-\Delta u = n(n-2) u^{\frac{n+2}{n-2}}, \quad u > 0, \quad \text{em } \mathbb{R}^n. \tag{2.2}$$

Todavia, o próximo resultado, teorema principal deste capítulo, nos revela que estas são as únicas soluções de (2.2).

Teorema 2 *Uma solução de classe C^2 de (2.2) é da forma (2.1).*

Este resultado fora estabelecido anteriormente sob algumas hipóteses adicionais, tais como $u(x) = O(|x|^{2-n})$ para $|x|$ suficientemente grande, o resultado foi estabelecido anteriormente por Obata [35] e Gidas, Ni e Nirenberg [23]. A prova de Obata é mais geométrica, enquanto a prova de Gidas, Ni e Nirenberg faz uso do método *moving planes*. A prova de Caffarelli, Gidas e Spruck segue por uma variação "measure theoretic" do método *moving planes*. Tais teoremas tipo Liouville possuem um papel fundamental no estudo de equações elípticas semilineares com expoente crítico, que inclui o problema de Yamabe, bem como o de Nirenberg.

O Teorema 2 é uma consequência dos seguintes lemas:

Lema 2.1 [1] *Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, existe $\lambda_0(x) > 0$, tal que $u_{x,\lambda}(y) \leqslant u(y)$, para todo $0 < \lambda < \lambda_0(x)$ e $|y - x| \geqslant \lambda$.*

Dessa forma, considere para cada $x \in \mathbb{R}^n$

$$\overline{\lambda}(x) = \sup\{\mu > 0 \mid u_{x,\lambda}(y) \leqslant u(y), \text{ para todo } |x - y| \geqslant \lambda, 0 < \lambda \leqslant \mu\}.$$

Pelo Lema 2.1, $\overline{\lambda}(x)$ está bem definido e $0 < \overline{\lambda}(x) \leqslant \infty$, para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Então, mostraremos

Lema 2.2 *Se $\overline{\lambda}(x) < \infty$ para algum $x \in \mathbb{R}^n$, então $u_{x,\overline{\lambda}(x)} \equiv u$ em $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$.*

Lema 2.3 *Se $\overline{\lambda}(\overline{x}) = \infty$, para algum $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, então $\overline{\lambda}(x) = \infty$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.*

Lema 2.4 *$\overline{\lambda}(x) < \infty$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.*

2.1 Início do Método Moving Spheres

Nesta seção, apresentaremos em um primeiro momento a ideia da prova do primeiro lema e após a prova técnica do mesmo.

2.1.1 Ideia da prova do Lema 2.1

Podemos supor sem perda de generalidade, que $x = 0$. Usaremos u_λ para denotar $u_{0,\lambda}$. Queremos mostrar que

$$u_\lambda(y) \leqslant u(y), \qquad \text{para todo } |y| \geqslant \lambda.$$

Para provarmos o presente lema, seguiremos a seguinte ideia. Primeiramente, observaremos que a função $r^{(n-2)/2}u(r,\theta)$ é radialmente crescente para $r > 0$ suficientemente pequeno, ou seja, existe $r_0 > 0$, tal que

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{\frac{n-2}{2}}u(r,\theta)\right) > 0, \qquad \text{para todo } 0 < r < r_0.$$

Dessa forma, usando o fato de que a função $r^{(n-2)/2}u(r,\theta)$ crescente para todo $0 < r < r_0$, então dado $\lambda < r_0$, verificaremos que a desigualdade deseja é válida, para todo $0 < \lambda < |y| < r_0$. Para concluir o resultado, ou seja, restará apenas verificar a desigualdade para $|y| > r_0$. Para tanto, usaremos o fato de que a função u é superharmônica e assim escolheremos um $\lambda_0 > 0$ adequado para concluir o resultado.

[1] Este lema nos afirma que o método das esferas móveis pode ser iniciado.

2.1.2 Prova do Lema 2.1

Primeiramente, afirmamos que existe $r_0 > 0$, tal que

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{\frac{n-2}{2}}u(r,\theta)\right) > 0, \qquad \text{para todo } 0 < r < r_0.$$

Com efeito, como u é uma função positiva continuamente diferenciável, para $r' > 0$ fixado, temos que

$$\inf_{0<|y|\leqslant r'} u > 0 \quad \text{e} \quad \sup_{0<|y|\leqslant r'} |\nabla u| < \infty. \tag{2.3}$$

Calculando a derivada radial em coordenadas polares, para

$$0 < r < r_0 = \min\left\{\frac{(n-2)\inf_{0<|y|<r'} u}{2\sup_{0<|y|<r'}|\nabla u|}, r'\right\}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{\frac{n-2}{2}}u(r,\theta)\right) &= \frac{n-2}{2}r^{\frac{n-4}{2}}u(r,\theta) + r^{\frac{n-2}{2}}\frac{\partial}{\partial r}u(r,\theta)\\
&= r^{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{n-2}{2}u(r,\theta) + r\frac{\partial}{\partial r}u(r,\theta)\right)\\
&\geqslant r^{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{n-2}{2}u(r,\theta) - r\left|\frac{\partial}{\partial r}u(r,\theta)\right|\right)
\end{aligned}$$

Usando o fato de que $r < r'$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{\frac{n-2}{2}}u(r,\theta)\right) &\geqslant r^{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{n-2}{2}u(r,\theta) - r\sup|\nabla u|\right)\\
&\geqslant r^{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{n-2}{2}\inf u - r\sup|\nabla u|\right)
\end{aligned}$$

Usando (2.3), temos que $-r\sup|\nabla u| > -\dfrac{n-2}{2}\inf u$ e daí segue que

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{\frac{n-2}{2}}u(r,\theta)\right) > 0, \qquad \text{para todo } 0 < r < r_0' \text{ e } \theta \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

Consequentemente, desde que u é radialmente crescente, obtemos

$$u_\lambda(y) = \frac{\lambda^{n-2}}{|y|^{n-2}}u\left(\frac{\lambda^2 y}{|y|^2}\right) < u(y), \quad 0 < \lambda < |y| < r_0. \tag{2.4}$$

Pela super-harmonicidade de u, segue do Lema 1.5

$$u(y) \geqslant (\min_{\partial B_{r_0}} u) r_0^{n-2} |y|^{2-n}, \quad \text{para todo } |y| \geqslant r_0. \tag{2.5}$$

Seja

$$\lambda_0 = r_0 \left(\frac{\min_{\partial B_{r_0}} u}{\max_{\overline{B}_{r_0}} u} \right)^{\frac{1}{n-2}} \leqslant r_0.$$

Então para todo $0 < \lambda < \lambda_0$ e $|y| \geqslant r_0$, temos

$$u_\lambda(y) \leqslant \frac{\lambda_0^{n-2}}{|y|^{n-2}} (\max_{\overline{B}_{r_0}} u) \leqslant \frac{r_0^{n-2} \min_{\partial B_{r_0}} u}{|y|^{n-2}}. \tag{2.6}$$

Combinando (2.4), (2.5) e (2.6), segue que para todo $0 < \lambda < \lambda_0$,

$$u_\lambda(y) \leqslant u(y), \quad |y| \geqslant \lambda.$$

2.2 Uma condição suficente para o Lema do raio de coincidência

Neste seção, apresentaremos a prova do Lema 2.2, o qual apresenta para cada $x \in \mathbb{R}^n$ a existência de um raio $\overline{\lambda}(x)$, tal que a função u, solução do nosso problema, coincide com a sua transfomada de Kelvin com respeito a bola centrada em x e raio $\overline{\lambda}$.

2.2.1 Prova do Lema 2.2

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $x = 0$. Desta forma, denotaremos $\overline{\lambda} = \overline{\lambda}(0)$, $u_\lambda = u_{0,\lambda}$ e $\Sigma_\lambda = \{y : |y| > \lambda\}$. Queremos mostrar que $u_{\overline{\lambda}} \equiv u$ em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Claramente, é suficiente mostrar

$$u_{\overline{\lambda}} \equiv u \quad \text{em } \Sigma_{\overline{\lambda}}.$$

De fato, seja $0 < |y| \leqslant \lambda$, então $\dfrac{\overline{\lambda}^2}{|y|^2} y \in \Sigma_\lambda$ e

$$\begin{aligned} u_{\overline{\lambda}}(y) &= \left(\frac{\overline{\lambda}}{|y|}\right)^{n-2} u\left(\frac{\overline{\lambda}^2 y}{|y|^2}\right) \\ &= \left(\frac{\overline{\lambda}}{|y|}\right)^{n-2} u_{\overline{\lambda}}\left(\frac{\overline{\lambda}^2 y}{|y|^2}\right) \\ &= \left(\frac{\overline{\lambda}}{|y|}\right)^{n-2} \left(\frac{\overline{\lambda}}{\left|\frac{\overline{\lambda}^2 y}{|y|^2}\right|}\right)^{n-2} u\left(\frac{\overline{\lambda}^2 \frac{\overline{\lambda}^2 y}{|y|^2}}{\left|\frac{\overline{\lambda}^2 y}{|y|^2}\right|^2}\right) \\ &= u(y). \end{aligned}$$

Da definição de $\overline{\lambda}$, temos que

$$u_{\overline{\lambda}}(y) \leqslant u(y), \qquad \text{para } y \in \Sigma_{\overline{\lambda}}.$$

Por outro lado, pelo Lema 1.4, para cada $\lambda > 0$, o laplaciano da transformada de Kelvin com respeito a bola B_λ satisfaz a seguinte equação

$$\Delta u_\lambda(y) = \left(\frac{\lambda}{|y|}\right)^{n+2} \Delta u\left(\frac{\lambda^2 y}{|y|^2}\right)$$

Sendo u solução de (2.2), temos que

$$-\Delta u_\lambda = n(n-2) u_\lambda^{\frac{n+2}{n-2}}, \quad \lambda > 0.$$

Daí,

$$-\Delta(u - u_{\overline{\lambda}}) = n(n-2)\left(u^{\frac{n+2}{n-2}} - u_{\overline{\lambda}}^{\frac{n+2}{n-2}}\right) \geqslant 0, \qquad \text{em } \Sigma_{\overline{\lambda}}. \tag{2.7}$$

Se $u - u_{\overline{\lambda}} \equiv 0$, em $\Sigma_{\overline{\lambda}}$, obtemos o resultado. Caso contrário, segue da superharmonicidade da função $u - u_{\overline{\lambda}}$ e pelo Princípio do Máximo Forte que

$$u(y) > u_{\overline{\lambda}}(y), \text{ para todo } y \in \Sigma_{\overline{\lambda}}.$$

Seja $\phi(x) = -\left(u - u_{\overline{\lambda}}\right)(x)$. Para cada $x_0 \in \partial B_{\overline{\lambda}}$, temos que $\phi(x_0) = 0 > \phi(x)$, para todo $x \in \Sigma_{\overline{\lambda}}$. Pelo Lema de Hopf, segue que

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\phi(x_0) > 0.$$

onde ν denota o vetor normal exterior a $\partial B_{\overline{\lambda}}$. Daí

$$\begin{aligned}
0<\frac{\partial}{\partial\nu}\phi(x_0) &= \lim_{\xi\to 0}\frac{\phi\left(x_0+\xi\dfrac{-x_0}{|x_0|}\right)-\phi(x_0)}{\xi}\\
&= \lim_{\xi\to 0}\frac{\phi\left(|x_0|-\xi,\dfrac{x_0}{|x_0|}\right)-\phi\left(|x_0|,\dfrac{x_0}{|x_0|}\right)}{\xi}\\
&= -\frac{\partial}{\partial r}\phi\left(|x_0|,\frac{x_0}{|x_0|}\right)\\
&= -\frac{\partial}{\partial r}\phi\left(x_0\right).
\end{aligned}$$

i.e.,

$$\frac{\partial}{\partial r}(u-u_{\overline{\lambda}})(x)>0,\ \text{para todo } x\in\partial B_{\overline{\lambda}}.$$

Pela continuidade do gradiente e pela compacidade de $\partial B_{\overline{\lambda}}$, temos que

$$\frac{\partial}{\partial r}(u-u_{\overline{\lambda}})\Big|_{\partial B_{\overline{\lambda}}}\geqslant b>0. \tag{2.8}$$

Ainda pela continuidade do gradiente de u, existe $R>\overline{\lambda}$, tal que

$$\frac{\partial}{\partial r}(u-u_{\lambda})\geqslant\frac{b}{2}>0,\qquad \text{para todo } \overline{\lambda}\leqslant\lambda\leqslant R,\quad \lambda\leqslant r\leqslant R.$$

Consequentemente, desde que $u-u_{\overline{\lambda}}\equiv 0$ em $\partial B_{\overline{\lambda}}$, temos que

$$u(y)-u_{\lambda}(y)>0,\qquad \text{para todo } \overline{\lambda}\leqslant\lambda<R,\quad \lambda<|y|\leqslant R. \tag{2.9}$$

Seja $c=\min_{\partial B_R}(u-u_{\overline{\lambda}})>0$. Combinando a super-harmonicidade de $u-u_{\overline{\lambda}}$ e o lema 1.5, obtemos que

$$u(y)-u_{\overline{\lambda}}(y)\geqslant\frac{cR^{n-2}}{|y|^{n-2}},\qquad \text{para } |y|\geqslant R. \tag{2.10}$$

Dessa forma, da inequação (2.9), obtemos

$$u(y)-u_{\lambda}(y)\geqslant\frac{cR^{n-2}}{|y|^{n-2}}-(u_{\lambda}(y)-u_{\overline{\lambda}}(y)),\qquad \text{para } |y|\geqslant R. \tag{2.11}$$

Pela continuidade uniforme de u em $\overline{B}_R$, existe $0 < \epsilon < R - \overline{\lambda}$ tal que para todo $\overline{\lambda} \leqslant \lambda \leqslant \overline{\lambda} + \epsilon$,

$$\left| \lambda^{n-2} u\left(\frac{\lambda^2 y}{|y|^2}\right) - \overline{\lambda}^{n-2} u\left(\frac{\overline{\lambda}^2 y}{|y|^2}\right) \right| < \frac{cR}{2}, \qquad \text{para } |y| \geqslant R.$$

Segue de (2.11) e da desigualdade acima que

$$u(y) - u_\lambda(y) > 0, \qquad \text{para } \overline{\lambda} \leqslant \lambda \leqslant \overline{\lambda} + \epsilon, \quad |y| \geqslant R. \tag{2.12}$$

As estimativas (2.9) e (2.12) violam a definição de $\overline{\lambda}$.

2.2.2 Prova do Lema 2.3

Desde que $\overline{\lambda}(\overline{x}) = \infty$, temos que

$$u_{\overline{x},\lambda}(y) \leqslant u(y), \qquad \text{para todo } \lambda > 0 \text{ e } |y - \overline{x}| \geqslant \lambda.$$

Afirmamos que

$$\lim_{|y|\to\infty} |y|^{n-2} u(y) = \infty.$$

De fato, sejam $\lambda > 0$, então para todo $|y - \overline{x}| \geqslant \lambda$

$$|y|^{n-2} \left(\frac{\lambda}{|y - \overline{x}|}\right)^{n-2} u\left(\overline{x} + \frac{\lambda^2 (y - \overline{x})}{|y - x|^2}\right) \leqslant |y|^{n-2} u(y).$$

Daí

$$\lambda^{n-2} \liminf_{|y|\to\infty} \left(\frac{|y|}{|y - \overline{x}|}\right)^{n-2} \min_{B_\lambda(\overline{x})} u \leqslant \liminf_{|y|\to\infty} |y|^{n-2} u(y).$$

Como $\lambda > 0$ é arbitrário, segue a afirmação. Por outro lado, se $\overline{\lambda}(x) < \infty$ para algum $x \in \mathbb{R}^n$, pelo Lema 2.2,

$$\lim_{|y|\to\infty} |y|^{n-2} u(y) = \lim_{|y|\to\infty} |y|^{n-2} u_{x,\overline{\lambda}(x)}(y) = \overline{\lambda}(x)^{n-2} u(x) < \infty,$$

o que é uma contradição.

2.2.3 Prova do Lema 2.4

Provaremos o Lema 2.4 por argumento de contradição. Suponha que para algum $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, tenhamos $\overline{\lambda}(\overline{x}) = \infty$. Dessa forma, se $\overline{\lambda}(\overline{x}) = \infty$, para algum $\overline{x}$, então pelo lema anterior $\overline{\lambda}(x) = \infty$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, i.e.,

$$u_{x,\lambda}(y) \leqslant u(y), \qquad \text{para todo } \lambda > 0 \text{ e } x \in \mathbb{R}^n, |y - x| \geqslant \lambda.$$

Pelo Lemma 1.6, isto implica dizer que $u \equiv$ constante, uma contradição, já que u é solução de (2.2).

2.3 Prova do Teorema 1

Pelo Lema 2.4, temos que $\overline{\lambda}(x) < \infty$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Dessa forma, pelo Lema 2.1, $u_{x,\overline{\lambda}(x)} \equiv u$ em $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Isto nos garante a condição 1.2 do Lema 1.2, com $\nu = n - 2$. Como consequência do mesmo lema e sabendo que u é uma solução positiva de (2.2), segue que existem $\alpha, \beta > 0$ e $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, tais que

$$u(x) = \left(\frac{\alpha}{\beta + |x - \overline{x}|^2} \right)^{(n-2)/2}.$$

CAPÍTULO 3

ALTERNATIVA PARA SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES COM NÃO-LINEARIDADE

Neste capítulo, estudaremos as soluções positivas de um teorema tipo Liouville para equações semilineares com não-linearidade mais gerais, ou seja, as soluções de

$$-\Delta u = g(u), \quad u > 0, \quad \text{em } \mathbb{R}^n, \tag{3.1}$$

com hipóteses adicionais sobre a função g.

Teorema 3 *Suponhamos que g satisfaça as seguintes condições:*

$(g1)$ g é localmente limitada em $(0, \infty)$;

$(g2)$ $g(s)s^{-(n+2)/(n-2)}$ é não-crescente em $(0, \infty)$.

e que u seja uma solução (contínua) de (3.1). Então teremos uma das seguintes alternativas

i. Para algum $b, \mu > 0$, $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$,

$$bu(x) = \left(\frac{\mu}{1 + \mu^2 |x - \overline{x}|^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}$$

e

$$g(s)s^{-(n+2)/(n-2)} \equiv n(n-2)b^{4/(n-2)}, \quad em \quad (0, \max_{\mathbb{R}^n} u];$$

ou

ii. $u \equiv a$ *para alguma constante* $a > 0$*, tal que* $g(a) = 0$.

Notemos que o Teorema estabelece que a solução do problema em questão possui simetria radial. Esta foi estabelecida, sob hipóteses adicionais, por Caffarelli, Gidas e Spruck em [12]. Neste artigo, a função g era uma função positiva e localmente lipschitziana em $(0, \infty)$, o Teorema 3 foi estabelecido por Chen e Lin [13] e por Bianchi [9]. A exigência sobre g em ser localmente lipschitziana foi enfraquecida por localmente limitada por Chen e Lin em [16]. A prova que exibiremos neste capítulo, devido a Yan Yan Li e Lei Zhang [32], tem em sua essência a prova de alguns lemas já provados no capítulo anterior, fazendo as adaptações necessárias em alguns argumentos.

3.1 Início do Método Moving Spheres

O próximo lema permitir-nos-á iniciar o método moving spheres sob as condições do Teorema 3.

Lema 3.1 *Para todo* $x \in \mathbb{R}^n$*, existe* $\lambda_0(x) > 0$*, tal que* $u_{x,\lambda}(y) \leqslant u(y)$*, para todo* $0 < \lambda < \lambda_0(x)$ *e* $|y - x| \geqslant \lambda$.

Desde que não podemos usar a super-hamonicidade de u, pois g não é necessariamente positiva, necessitamos provar que

$$\liminf_{|y|\to\infty} \left(|y|^{n-2}u(y)\right) > 0. \tag{3.2}$$

Com efeito, uma vez provado (3.2), temos ao invés de (2.5), a seguinte expressão

$$u(y) \geqslant c_0|y|^{2-n}, \text{ para algum } c_0 > 0 \text{ e } |y| \geqslant r'. \tag{3.3}$$

Por outro lado, sabemos também que existe $0 < r_0 < \min\left\{1, \dfrac{(n-2)\inf_{0<|y|<1} u}{2\sup_{0<|y|<1} \nabla u}\right\}$, tal que

$$u_\lambda(y) \leqslant u(y), \text{ para todo } 0 < \lambda < |y| < r_0. \tag{3.4}$$

Seja

$$\lambda_0 = \min\left\{ r_0 \left(\frac{\min_{\overline{B}_{r'}\setminus B_{r_0}} u}{\max_{\overline{B}_{r_0}} u}\right)^{\frac{1}{n-2}}, \left(\frac{c_0}{\max_{\overline{B}_{r_0}} u}\right)^{\frac{1}{n-2}} \right\},$$

onde $c_0 > 0$ é o mesmo expresso em (3.3). Então

$$u_\lambda(y) = \left(\frac{\lambda}{|y|}\right)^{n-2} u\left(\frac{\lambda^2 y}{|y|^2}\right) \leqslant \frac{\lambda_0^{n-2}}{|y|^{n-2}} \max_{\overline{B}_{r_0}} u \leqslant \frac{{r_0}^{n-2}}{|y|^{n-2}} \min_{\overline{B}_{r'}\setminus B_{r_0}} u \leqslant u(y), \tag{3.5}$$

para todo $0 < \lambda < \lambda_0$ e $r_0 \leqslant |y| \leqslant r'$. Por outro lado , para todo $0 < \lambda < \lambda_0$ e $r' \leqslant |y|$, temos

$$u_\lambda(y) = \left(\frac{\lambda}{|y|}\right)^{n-2} u\left(\frac{\lambda^2 y}{|y|^2}\right) \leqslant \frac{\lambda_0^{n-2}}{|y|^{n-2}} \max_{\overline{B}_{r_0}} u \leqslant c_0|y|^{2-n} \leqslant u(y). \tag{3.6}$$

Combinando (3.4), (3.5) e (3.6) obtemos a expressão (3.2). Como segue, estabeleceremos a desigualdade (3.2). Seja

$$O = \{y : u(y) < |y|^{2-n}\}.$$

Se O for vazio, então o resultado segue. Caso contrário, por (g2),

$$u(y)^{-\frac{n+2}{n-2}} g(u(y)) \geqslant \left(|y|^{2-n}\right)^{-\frac{n+2}{n-2}} g\left(|y|^{2-n}\right) \geqslant g(1), \quad y \in O \setminus B_1.$$

Segue que

$$\frac{g(u(y))}{u(y)} \geqslant g(1)u(y)^{\frac{4}{n-2}} \geqslant \frac{\min\{0, g(1)\}}{|y|^4}, \text{ para todo } y \in O \setminus B_1.$$

e dessa forma

$$-\Delta u(y) + \frac{C}{|y|^4} u(y) \geqslant 0, y \in O \setminus B_1,$$

onde $C = \max\{0, -g(1)\} \geqslant 0$. Seja

$$\xi(y) = |y|^{2-n} + |y|^{1-n}. \tag{3.7}$$

Calculando o laplaciano da função acima, obtemos

$$-\Delta\xi(y) + \frac{C}{|y|^4}\xi(y) = -(n-1)|y|^{-n-1} + C\left(|y|^{-n-2} + |y|^{-n-3}\right).$$

Por conseguinte, para $\overline{R}$ suficientemente grande

$$-\Delta\xi(y) + \frac{C}{|y|^4}\xi(y) \leqslant 0, \qquad \text{para todo } |y| \geqslant \overline{R}.$$

Escolha $\overline{\epsilon} = \dfrac{\overline{R}}{1+\overline{R}} > 0$, então

$$u(y) \geqslant \overline{\epsilon}\xi(y), \text{ para } |y| = \overline{R}$$

e

$$u(y) \geqslant \overline{\epsilon}\xi(y), \text{ para } y \in \partial O.$$

Como resultado, $u - \overline{\epsilon}\xi$ satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta\left(u-\overline{\epsilon}\xi\right)+\dfrac{C}{|y|^4}\left(u-\overline{\epsilon}\xi\right) & \geqslant & 0, & \text{em } O\setminus B_{\overline{R}}, \\ u-\overline{\epsilon}\xi & \geqslant & 0, & \text{sobre } \partial(O\setminus B_{\overline{R}}). \end{cases} \tag{3.8}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \liminf_{|y|\to\infty}\left(u(y)-\overline{\epsilon}\xi(y)\right) &\geqslant \liminf_{|y|\to\infty}u(y)-\limsup_{|y|\to\infty}\overline{\epsilon}\xi(y) \\ &\geqslant -\overline{\epsilon}\lim_{|y|\to\infty}\xi(y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pelo Princípio do Máximo, $u - \overline{\epsilon}\xi \geqslant 0$, em $\overline{O\setminus B_{\overline{R}}}$, e dessa forma

$$\liminf_{\substack{y\in O \\ |y|\to\infty}}\left(|y|^{n-2}u(y)\right)\geqslant \liminf_{\substack{y\in\overline{O} \\ |y|\to\infty}}\left(\overline{\epsilon}|y|^{n-2}\xi(y)\right)>0.$$

Estimativa (3.2) segue imediatamente.

3.2 Condição Lema do Raio de Coincidência

Seguindo as etapas do teorema do capítulo anterior anterior, definamos para cada $x \in \mathbb{R}^n$

$$\overline{\lambda}(x)=\sup\{\mu>0: u_{x,\lambda}(y)\leqslant u(y),\ \text{para todo } |y-x|\geqslant\lambda, 0<\lambda<\mu\}.$$

Pelo lema anterior, $\overline{\lambda}(x)$ está bem definido e $0 < \overline{\lambda}(x) \leqslant \infty$, para cada $x \in \mathbb{R}^n$.

Lema 3.2 *Se $\overline{\lambda}(x) < \infty$, para algum $x \in \mathbb{R}^n$, então $u_{x,\overline{\lambda}(x)} \equiv u$ em $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$.*

3.2.1 Prova do Lema 3.2

Seguiremos a prova do Lema 2.2 e apenas faremos as modificações necessárias. A transformada de Kelvin da função u, u_λ satisfaz a seguinte equação

$$\begin{aligned} -\Delta u_\lambda(y) &= -\left(\frac{\lambda}{|y|}\right)^{n+2}\Delta u\left(\frac{\lambda^2 y}{|y|^2}\right) \\ &= \left(\frac{\lambda}{|y|}\right)^{n+2} g\left(u\left(\frac{\lambda^2 y}{|y|^2}\right)\right) \\ &= \left(\frac{\lambda}{|y|}\right)^{n+2} g\left(\left(\frac{|y|}{\lambda}\right)^{n-2}u_\lambda(y)\right), \quad y\in\Sigma_\lambda. \end{aligned}$$

Seja
$$O := \left\{ y \in \Sigma_{\overline{\lambda}} : u(y) < \min \left\{ \left(\frac{|y|}{\overline{\lambda}} \right)^{n-2}, 2 \right\} u_{\overline{\lambda}}(y) \right\}.$$
Por (g2),
$$u(y)^{-\frac{n+2}{n-2}} g(u(y)) \geqslant u_{\overline{\lambda}}(y)^{-\frac{n+2}{n-2}} \left(\frac{\overline{\lambda}}{|y|} \right)^{n+2} g\left(\left(\frac{|y|}{\overline{\lambda}} \right)^{n-2} u_{\overline{\lambda}}(y) \right), \quad \text{em } O.$$
Então, ao invés de (2.7), temos
$$u^{-\frac{n+2}{n-2}} \Delta u \leqslant u_{\overline{\lambda}}^{-\frac{n+2}{n-2}} \Delta u_{\overline{\lambda}}, \quad \text{em } O. \tag{3.9}$$
Escrevendo $\phi_s(y) = su(y) + (1-s)u_{\overline{\lambda}}(y)$, temos por (3.9) que
$$\begin{aligned} 0 &\geqslant \int_0^1 \frac{d}{ds} \left(\phi_s(y)^{-\frac{n+2}{n-2}} \Delta \phi_s(y) \right) ds \qquad (3.10) \\ &= \left(\int_0^1 \phi_s^{-\frac{n+2}{n-2}} ds \right) \Delta(u - u_{\overline{\lambda}}) - \frac{n+2}{n-2} \left(\int_0^1 \phi_s^{-\frac{2n}{n-2}} \Delta \phi_s ds \right) (u - u_{\overline{\lambda}}), \text{ em } O. \end{aligned}$$
Estabelecemos (2.8) da seguinte forma, para $y_0 \in \partial B_{\overline{\lambda}}$,

1. Se
$$\frac{\partial}{\partial r} (u - u_{\overline{\lambda}})(y_0) \geqslant (n-2)u(y),$$
então como u é uma função positiva, segue que
$$\frac{\partial}{\partial r}(u - u_{\overline{\lambda}})(y_0) > 0.$$

2. Se
$$\frac{\partial}{\partial r} (u - u_{\overline{\lambda}})(y_0) < (n-2)u(y_0),$$
então
$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\left(\frac{|y|}{\overline{\lambda}} \right)^{n-2} u_{\overline{\lambda}}(y) - u(y) \right) \Bigg|_{y=y_0} = (n-2)u(y_0) - \frac{\partial}{\partial r} (u - u_{\overline{\lambda}})(y_0) > 0.$$

Em qualquer caso, temos que a função
$$\left(|y|/\overline{\lambda}\right)^{n-2} u_{\overline{\lambda}}(y) - u(y)$$

é radialmente crescente para $\overline{\lambda} < |y| \leqslant \overline{\lambda} + \epsilon$. Daí,

$$\left(\frac{|y|}{\overline{\lambda}}\right)^{n-2} u_{\overline{\lambda}}(y) - u(y) > 0,$$

para $\overline{\lambda} < |y| \leqslant \overline{\lambda} + \epsilon$, já que $\left(|y|/\overline{\lambda}\right)^{n-2} u_{\overline{\lambda}}(y) - u(y) \equiv 0$, em $\partial\Sigma_{\overline{\lambda}}$. Então para algum $\overline{\delta} > 0$, $B_{\overline{\delta}}(y_0) \cap \Sigma_{\overline{\lambda}} \subset O$. Pelo Lema de Hopf, (veja 3.10)

$$\frac{\partial}{\partial r}(u - u_{\overline{\lambda}})(y_0) > 0$$

e pela compacidade de $\partial B_{\overline{\lambda}}$, temos

$$\frac{\partial}{\partial r}(u - u_{\overline{\lambda}})\Big|_{\partial B_{\overline{\lambda}}} \geqslant b > 0. \tag{3.11}$$

Pela continuidade do gradiente de u, existe $R > \overline{\lambda}$, tal que

$$\frac{\partial}{\partial r}(u - u_{\overline{\lambda}}) \geqslant \frac{b}{2} > 0, \quad \text{para todo } \overline{\lambda} \leqslant \lambda \leqslant R, \quad \lambda \leqslant r \leqslant R.$$

Consequentemente, desde que $u - u_{\overline{\lambda}} = 0$ em ∂B_{λ}, temos que

$$u(y) - u_{\lambda}(y) > 0, \quad \text{para todo } \overline{\lambda} \leqslant \lambda < R, \quad \lambda < |y| \leqslant R. \tag{3.12}$$

Agora, ao invés de (2.10), estabeleceremos a seguinte estimativa

$$\liminf_{|y|\to\infty} |y|^{n-2}(u - u_{\overline{\lambda}})(y) > 0. \tag{3.13}$$

Uma vez que (3.13) estiver demonstrado, o resto da prova do Lema 3.2 segue de forma análoga ao Lema 2.2. Notemos que $u \geqslant \min\{(R/\overline{\lambda})^{n-2}, 2\}u_{\overline{\lambda}}$, em $\Sigma_{\overline{\lambda}} \setminus (O \cup B_R)$, onde $\min\{(R/\overline{\lambda})^{n-2}, 2\} > 1$. Além disso, por (3.10) e princípio do máximo forte, $u - u_{\overline{\lambda}} > 0$, em O. Para provar (3.13), observe que para $\overline{R}$ suficientemente grande, temos

$$u_{\overline{\lambda}}(y) \leqslant u(y) \leqslant 2u_{\overline{\lambda}}(y) \leqslant C|y|^{2-n} < 1, \quad \text{para } y \in O \setminus B_{\overline{R}}. \tag{3.14}$$

Com efeito, para que a primeira desigualdade seja satisfeita, basta tomar $\overline{R} > \overline{\lambda}$. A segunda desigualdade, segue imediatamente do fato que $y \in O$. Finalmente, para que a última desigualdade seja satisfeita, basta escolher $\overline{R} > \max\{1, 2\overline{\lambda}^{n-2} \max_{\overline{B}_{\overline{\lambda}}} u\}$, então

$$2u_{\overline{\lambda}}(y) = 2\left(\frac{\overline{\lambda}}{|y|}\right)^{n-2} u\left(\frac{\overline{\lambda}^2 y}{|y|^2}\right) \leqslant 2|y|^{2-n}\overline{\lambda}^{n-2} \max_{\overline{B}_{\overline{\lambda}}} u \leqslant \overline{R}^{n-2}|y|^{2-n}.$$

Segue por (g2) e do fato que u é solução de (3.1) que

$$\Delta u = -g(u) \leqslant -g(1)u^{\frac{n+2}{n-2}} \leqslant \frac{C}{|y|^{n+2}}, \quad \text{em } O \setminus B_{\overline{R}}.$$

Por outro lado, por (3.14) temos que $(|y|/\overline{\lambda})^{n-2}u_{\overline{\lambda}}(y)$ e $(|y|/\overline{\lambda})^{n-2}u(y)$ estão em um subconjunto compacto de $(0,\infty)$

$$\frac{1}{C|y|^{n-2}} \leqslant u_s(y) \leqslant \frac{C}{|y|^{n-2}}, \quad y \in O \setminus B_{\overline{\lambda}}, 0 \leqslant s \leqslant 1$$

e pela equação de $u_{\overline{\lambda}}$,

$$|\Delta u_{\overline{\lambda}}| \leqslant \frac{C}{|y|^{n+2}}, \text{ em } O \setminus B_{\overline{R}}.$$

Por (3.10) a as estimativa acima, temos, para alguma constante positiva C

$$-\Delta(u - u_{\overline{\lambda}}) + \frac{C}{|y|^4}(u - u_{\overline{\lambda}}) \geqslant 0 \text{ em } O \setminus B_{\overline{R}}.$$

Seja ξ dado em (3.7). Então para $\overline{R}$ suficientemente grande,

$$-\Delta\xi(y) + \frac{C}{|y|^4}\xi(y) \leqslant 0, \quad \text{para } |y| \geqslant \overline{R}.$$

Desde que $u - u_{\overline{\lambda}} > 0$ em O e

$$(u - u_{\overline{\lambda}})(y) \geqslant u_{\overline{\lambda}}(y) \geqslant \frac{\overline{\lambda}^{n-2}\min_{\overline{B}_{\overline{\lambda}}} u}{|y|^{n-2}}, \quad \text{em } O \setminus B_{\overline{R}},$$

existe $\overline{\epsilon} > 0$, tal que

$$(u - u_{\overline{\lambda}} - \overline{\epsilon}\xi)(y) \geqslant 0, \quad \text{sobre } \partial(O \setminus B_{2\overline{R}}).$$

Pelo princípio do máximo,

$$(u - u_{\overline{\lambda}} - \overline{\epsilon})(y) \geqslant 0, \quad \text{em } O \setminus B_{2\overline{R}}.$$

Segue que

$$\liminf_{\substack{y \in \overline{O} \\ |y| \to \infty}} |y|^{n-2}(u - u_{\overline{\lambda}})(y) \geqslant \overline{\epsilon} > 0.$$

Por outro lado, para algum $\epsilon_0 > 0$,

$$\liminf_{\substack{y \in \mathbb{R}^n \\ |y| \to \infty}} |y|^{n-2}(u - u_{\overline{\lambda}})(y) \geqslant \epsilon_0 \lim_{|y| \to \infty} |y|^{n-2}u_{\overline{\lambda}}(y) > 0.$$

Estimativa (3.13) está estabelecida.

Lema 3.3 *Se* $\overline{\lambda}(\overline{x}) = \infty$ *para algum* $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$*, então* $\overline{\lambda}(x) = \infty$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^n$*.*

Ressaltamos que a demonstração do Lema (2.4) também é válido sob as condições do Teorema 3.

3.3 Prova do Teorema 3

Segue do Lema 3.1 e 3.3 que $\overline{\lambda}(x) = \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, ou $0 < \overline{\lambda}(x) < \infty$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. No primeiro caso, $u \equiv$ *constante*, pelo Lema 1.6. No segundo caso, segue do Lema 3.2 que $u_{x,\overline{\lambda}(x)} \equiv u$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Consequentemente, pelo Lema 1.2,

$$u(x) = \left(\frac{\alpha}{\beta + |x - \overline{x}|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}},$$

com $\alpha, \beta > 0$. Então para alguma constante $c > 0$,

$$-\Delta u = c u^{\frac{n+2}{n-2}} = g(u),$$

donde segue o Teorema 3.

CAPÍTULO 4

DESIGUALDADE TIPO HARNACK DE R. SCHOEN

Neste capítulo, apresentaremos uma prova diferente da desigualdade tipo Harnack de R. Schöen, devido a Yan Yan Li e Lei Zhang [32]. Apresentaremos maiores detalhes desta prova, a qual é baseada no artigo do Yan Yan Li e Lei Zhang no artigo supracitado. Anteriormente a Yan Yan Li, este resultado foi provado fazendo uso do Teorema Tipo Liouville de Caffarelli, Gidas e Spruck (Teorema 1). Ao invés disso, utilizaremos o método *moving spheres*, usando um argumento de contradição.

Teorema 4 ([39]) *Para $n \geqslant 3$, seja $u \in C^2(B_{3R})$ uma solução positiva de*

$$-\Delta u = n(n-2)u^{\frac{n+2}{n-2}}, \qquad \text{em } B_{3R}. \tag{4.1}$$

Então

$$(\max_{\overline{B}_R} u)(\min_{\overline{B}_{2R}} u) \leqslant C(n)R^{2-n}. \tag{4.2}$$

4.1 Prova do Teorema 4

A prova será feita usando argumento por contradição. É suficiente provar o Teorema 4 para o caso particular $R = 1$. O caso geral segue trabalhando com a função $\hat{u}(y) = R^{-(n-2)/2}u(R^{-1}y)$.

Suponha que para cada inteiro $j = 1, 2\ldots$ existam soluções u_j, tais que

$$u_j(\overline{x}_j)\min_{\overline{B}_2} u_j > j, \tag{4.3}$$

onde $u_j(\overline{x}_j) = \max_{\overline{B}_1} u_j$. Aplicando o Lema A.1 para a função $u = u_j(\,\cdot + \overline{x}_j)$, a qual é contínua em B_1, com $a = (n-2)/2$, encontramos $\widetilde{x}_j \in B_1$, tal que

$$u_j\left(\overline{x}_j + \widetilde{x}_j\right) \geqslant 2^{\frac{2-n}{2}} \max\left\{u_j\left(\overline{x}_j + y\right) : y \in B_{\sigma_j}(\widetilde{x}_j)\right\}, \tag{4.4}$$

onde $\sigma_j = \dfrac{1}{2}(1 - |\widetilde{x}_j|)$. Seja $x_j = \widetilde{x}_j + \overline{x}_j$, então temos da equação (4.4) que existe $x_j \in B_1(\overline{x}_j)$, tal que

$$u_j(x_j) \geqslant 2^{\frac{n-2}{2}} \max\left\{u_j(y) \mid y \in B_{\sigma_j}(x_j)\right\}.$$

e

$$(\sigma_j)^{\frac{2-n}{2}} u_j(x_j) \geqslant 2^{\frac{2-n}{2}} u_j(\overline{x}_j), \tag{4.5}$$

onde ressaltamos que

$$\sigma_j = \frac{1}{2}(1 - |\widetilde{x}_j|) = \frac{1}{2}\left(1 - |x_j - \overline{x}_j|\right) \leqslant \frac{1}{2}. \tag{4.6}$$

Combinando (4.5) e (4.6), obtemos

$$\frac{1}{2^{\frac{n-2}{2}}} u_j(x_j) \geqslant \sigma_j^{\frac{n-2}{2}} u_j(x_j) \geqslant 2^{\frac{2-n}{2}} u_j(x_j)$$

o que implica dizer

$$u_j(x_j) \geqslant u_j(\overline{x}_j). \tag{4.7}$$

Definamos $\gamma_j := u_j(x_j)^{\frac{2}{n-2}}$, segue da expressão (4.5), obtemos

$$\begin{aligned}
\gamma_j := u_j(x_j)^{\frac{2}{n-2}} \sigma_j &\geqslant \frac{1}{2} u_j(\overline{x}_j)^{\frac{2}{n-2}} \\
&\geqslant \frac{1}{2}\left(u_j(\overline{x}_j) \min_{\overline{B}_2} u_j\right)^{\frac{1}{n-2}} \\
&\geqslant \frac{1}{2} j^{\frac{1}{n-2}}. \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

Definamos

$$w_j(y) = \frac{1}{u_j(x_j)} u_j\left(x_j + \frac{y}{u_j(x_j)^{\frac{2}{n-2}}}\right), \quad |y| < \Gamma_j$$

onde $\Gamma_j := u_j(x_j)^{\frac{2}{n-2}}$.
Para cada $y \in B_{\Gamma_j}$, temos

$$\left|x_j + \frac{y}{u_j(x_j)^{\frac{2}{n-2}}}\right| \leqslant |x_j - \overline{x}_j| + |\overline{x}_j| + \frac{|y|}{u_j(x_j)^{\frac{2}{n-2}}} < 3.$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
-\Delta w_j(y) &= -\Delta\left(\frac{1}{u_j(x_j)}u_j\left(x_j+\frac{y}{u_j(x_j)^{\frac{2}{n-2}}}\right)\right)\\
&= -\frac{1}{u_j(x_j)}\left\{-\Delta\left(u_j\left(x_j+\frac{y}{u_j(x_j)^{\frac{2}{n-2}}}\right)\right)\right\}\\
&= -\frac{1}{u_j(x_j)^{\frac{n+2}{n-2}}}\Delta u_j\left(x_j+\frac{y}{u_j(x_j)^{\frac{2}{n-2}}}\right)
\end{aligned}
$$

Como u é solução de (4.1), temos que

$$
-\Delta w_j(y) = n(n-2)\frac{1}{u_j(x_j)^{\frac{n+2}{n-2}}}u_j\left(x_j+\frac{y}{u_j(x_j)^{\frac{2}{n-2}}}\right)^{\frac{n+2}{n-2}}
$$

e portanto,

$$
-\Delta w_j = n(n-2)w_j^{\frac{n+2}{n-2}}, \quad w_j>0 \quad \text{em} \quad B_{\Gamma_j}. \tag{4.9}
$$

Temos também que

$$
\begin{aligned}
u_j(x_j) &\geqslant 2^{\frac{2-n}{2}}\max\left\{u_j(x) \mid x\in B_{\sigma_j}(x_j)\right\}\\
&\geqslant 2^{\frac{2-n}{2}}\max\left\{u_j\left(x_j+\frac{x}{u_j(x_j)^{\frac{2}{n-2}}}\right) \mid x\in B_{\sigma_j u_j(x_j)^{\frac{2}{n-2}}}\right\}\\
&= 2^{\frac{2-n}{2}}\max\left\{u_j\left(x_j+\frac{x}{u_j(x_j)^{\frac{2}{n-2}}}\right) \mid x\in B_{\gamma_j}\right\}.
\end{aligned}
$$

Dessa forma,

$$
1 = w_j(0) \geqslant 2^{\frac{2-n}{2}}\max\left\{w_j(x) \mid x\in B_{\gamma_j}\right\}.
$$

Para $|y|=\Gamma_j$, temos por (4.5) e (4.7)

$$
\begin{aligned}
\min_{\partial B_{\Gamma_j}} w_j &= \frac{1}{u_j(x_j)}\min\left\{u_j\left(x_j+\frac{y}{u_j(x_j)^{\frac{2}{n-2}}}\right) \ : \ y\in\partial B_{\Gamma_j}\right\}\\
&= \frac{1}{u_j(x_j)}\min\left\{u_j\left(\frac{y}{u_j(x_j)^{\frac{2}{n-2}}}\right) \ : \ y\in\partial B_{\Gamma_j}(x_j)\right\}\\
&= \frac{1}{u_j(x_j)}\min\left\{u_j\left(y\right) \ : \ y\in\partial B_1({\Gamma_j}^{-1}x_j)\right\}
\end{aligned}
$$

Observe que $\partial B_1(\Gamma_j^{-1}x_j) \subset \overline{B}_2$. Com efeito,

$$|\Gamma_j^{-1}x_j| \leqslant \Gamma_j^{-1}|\overline{x}_j + \widetilde{x}_j| = \frac{1}{u_j(x_j)^{\frac{2}{n-2}}}|\overline{x}_j + \widetilde{x}_j|,$$

Mas por (4.8), temos

$$u_j(x_j)^{\frac{2}{n-2}} \geqslant 2\gamma_j \geqslant j^{\frac{1}{n-2}} \geqslant 1,$$

donde concluímos.

Segue que

$$\begin{aligned} \min_{\partial B_{\Gamma_j}} w_j &\geqslant \frac{1}{u_j(x_j)} \min_{\overline{B}_2} u_j \\ &> \frac{j}{u_j(\overline{x}_j)u_j(x_j)} \\ &> \frac{j}{u_j(x_j)^2} \\ &= j\Gamma_j^{2-n}. \end{aligned}$$

Em síntese, temos

$$\begin{cases} -\Delta w_j = n(n-2)w_j^{\frac{n+2}{n-2}}, & \text{em } B_{\Gamma_j} \\ w_j \leqslant 2^{\frac{n-2}{2}}, & \text{em } B_{\gamma_j} \\ w_j > j\Gamma_j^{2-n}, & \text{em } B_{\Gamma_j} \\ w_j(0) = 1. \end{cases} \tag{4.10}$$

4.1.1 Limitação uniforme da sequência de soluções $\{w_j\}$

Até então, construímos soluções $\{w_j\}$ da equação (4.1) que estão definidas em bolas de raio suficientemente grande. O próximo passo é mostrar que esta sequência possui uma subsequência convergente na norma C^2 em qualquer subconjunto compacto do $\mathbb{R}^n$. Este resultado será deduzido pelo seguinte lema

Lema 4.1 *Seja w_j definido como em (4.10), então*

$$\|w_j\|_{C^2\left(B_{\gamma_j/4}\right)} \leqslant C,$$

onde C é uma constante independente do índice j.

Prova: Em B_{γ_j}, temos

$$\begin{aligned} |\Delta w_j| &= n(n-2)w^{\frac{n+2}{n-2}} \\ &\leqslant \underbrace{n(n-2)2^{\frac{n+2}{2}}}_{C(n)}, \end{aligned}$$

Consequentemente para todo $p \geqslant 1$, temos

$$\Delta w_j \in L^p(B_{\gamma_j}).$$

Pela regularidade dos espaços L^p, temos que para qualquer subconjunto aberto $\Omega \subset\subset B_{\gamma_j}$

$$w_j \in W^{2,p}(\Omega).$$

Pelo Teorema de Morrey e por (4.9), segue que $w_j \in C^{0,\alpha}\left(B_{\gamma_j/2}\right)$, implica que

$$\Delta w_j \in C^{0,\alpha}\left(B_{\gamma_j/2}\right), \quad \text{onde } 0 < \alpha < 1.$$

Dessa forma, pela regularidade dos espaços C^2, obtemos que $w_j \in C^{2,\alpha}$ e

$$\begin{aligned} \|w_j\|_{C^{2,\alpha}\left(B_{\gamma_j/4}\right)} &\leqslant C\left(\|\Delta w_j\|_{C^{0,\alpha}\left(B_{\gamma_j/2}\right)} + \|w_j\|_{L^2\left(B_{\gamma_j/2}\right)}\right) \\ &\leqslant C^*. \end{aligned}$$

■

Pelo Lema (4.1), vemos que $\{w_j\}$ é uma sequência uniformemente limitada em $C^{2,\alpha}\left(B_{\gamma_j/4}\right)$, que significa que as funções w_j e suas primeiras e segundas derivadas são equicontínuas. Dessa forma, pelo critério de compacidade de Arzelá-Ascoli, obtemos uma subsequência que denotaremos por $\{w_j\}$ que converge uniformemente para alguma $w \in C^2(\Omega)$, onde $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ e w é uma solução positiva de (4.1).

4.1.2 Transformada de Kelvin para o operador laplaciano

Para $x \in \mathbb{R}^n$, denotaremos por $w_{j,x,\lambda}$ a Transformada de Kelvin de w_j com respeito a $B_\lambda(x)$, i.e.

$$w_{j,x,\lambda} = \left(\frac{\lambda}{|y-x|}\right)^{n-2} w_j\left(x + \frac{\lambda^2(y-x)}{|y-x|^2}\right), \quad y \in B_{\Gamma_j(x)\setminus\overline{B_\lambda(x)}}.$$

Pelo Lema 1.4 e o fato que de w_j é solução de (4.1)

$$\begin{aligned} -\Delta w_{j,x,\lambda}(y) &= \left(\frac{\lambda}{|x-y|}\right)^{n+2}\left\{-\Delta w_j\left(x+\frac{\lambda^2(x-y)}{|x-y|^2}\right)\right\} \\ &= \left(\frac{\lambda}{|x-y|}\right)^{n+2} n(n-2)w_j^{\frac{n+2}{n-2}}\left(x+\frac{\lambda^2(x-y)}{|x-y|^2}\right) \\ &= n(n-2)w_{j,x,\lambda}^{\frac{n+2}{n-2}}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Queremos comparar, para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$, w_j com $w_{j,x,\lambda}$. Para $0 < \lambda < \frac{1}{2}\Gamma_j$, seja $\sum_{j,x,\lambda} := B_{\Gamma_j}(x) \setminus \overline{B}_\lambda(x)$. Notemos que para $x \neq 0$, tem-se que $B_{\frac{1}{2}\Gamma_j}(x) \subset B_{\Gamma_j}$ para j suficientemente grande. Isto se deve ao fato de que $\Gamma_j \to \infty$, quando $j \to \infty$. Para cada $y \in \sum_{j,x,\lambda}$, definamos a seguinte função

$$\zeta_{j,x,\lambda}(y) = w_j(y) - w_{j,x,\lambda}(y).$$

Então por (4.10) e (4.11), obtemos

$$-\Delta\zeta_{j,x,\lambda} = n(n-2)\left(w_j^{\frac{n+2}{n-2}} - w_{j,x,\lambda}^{\frac{n+2}{n-2}}\right), \qquad \text{em } \Sigma_{j,x,\lambda}.$$

Podemos supor sem perda de generalidade que $x = 0$. Para $x \neq 0$, os argumentos são análogos. Com a finalidade de simplicar a notação, usaremos a notação $w_{j,\lambda}$ para denotar $w_{j,0,\lambda}$, ou seja,

$$w_{j,\lambda}(y) = \left(\frac{\lambda}{|y|}\right)^{n-2} w_j\left(\frac{\lambda^2 y}{|y|^2}\right).$$

Assim, usaremos as notações $\zeta_{j,\lambda}, w_{j,\lambda}$ e $\Sigma_{j,\lambda}$ para denotar $\zeta_{j,0,\lambda}, w_{j,0,\lambda}$ e $\Sigma_{j,0,\lambda}$, respectivamente.

Início do Método Moving Spheres

O próximo lema diz que podemos iniciar o Método Moving Spheres.

Lema 4.2 *Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, existe $\lambda_{j,x} > 0$ suficientemente pequeno, tal que*

$$\zeta_{j,x,\lambda} \geqslant 0, \qquad \textit{para todo} \quad 0 < \lambda < \lambda_{j,x} \text{ e } \lambda \leqslant |y-x| \leqslant \Gamma_j.$$

Prova: Podemos supor sem perde de generalidade que $x = 0$. A prova do presente lema será feita com base nas seguintes afirmações. Mostraremos que a desigualdade é válida para $|y| < R_j$, com R_j suficientemente pequeno, depois mostraremos que a desigualdade é ainda válida para $|y| \geqslant R_j$, como segue

Afirmação 1 *Existe* $R_j < \Gamma_j$, *tal que para* $\lambda < |y| < R_j$, *temos* $\zeta_{j,x} \geqslant 0$.

Pelo fato de que w_j é uma função positiva e continuamente diferenciável, temos que

$$\inf_{0<|y|<1} w_j > 0 \text{ e } \sup_{0<|y|<1} |\nabla w_j| < \infty.$$

Definamos a função $h_j(r,\theta) = r^{\frac{n-2}{2}} w_j(r,\theta)$, calculando a derivada radial em coordenadas polares, obtemos para $0 < r < R_j = \min\left\{1, \dfrac{(n-2)\inf_{0<|y|<1} w_j}{2\sup_{0<|y|<1} |\nabla w_j|}\right\}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}\left(h_j(r,\theta)\right) &= \frac{n-2}{2} r^{\frac{n-4}{2}} w_j(r,\theta) + r^{\frac{n-2}{2}} \frac{\partial}{\partial r} w_j(r,\theta) \\
&= r^{\frac{n-4}{2}} \left(\frac{n-2}{2} w_j(r,\theta) + r\frac{\partial}{\partial r} w_j(r,\theta)\right) \\
&\geqslant r^{\frac{n-4}{2}} \left(\frac{n-2}{2} w_j(r,\theta) - r\left|\frac{\partial}{\partial r} w_j(r,\theta)\right|\right) \\
&\geqslant r^{\frac{n-4}{2}} \left(\frac{n-2}{2} w_j(r,\theta) - r\sup|\nabla w_j|\right) \\
&\geqslant r^{\frac{n-4}{2}} \left(\frac{n-2}{2} \inf w_j - r\sup|\nabla w_j|\right) \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Portanto, temos que para $0 < \lambda < |y| < R_j$, que $\zeta_{j,\lambda}(y) \geqslant 0$. Com efeito, desde que a função $h_j(r,\omega)$ é radialmente crescente para $0 < r < R_j$, então para $0 < \lambda < |y| < R_j$, temos que

$$\left(\frac{\lambda^2}{|y|}\right)^{\frac{n-2}{2}} w_j\left(\frac{\lambda^2 y}{|y|^2}\right) = h\left(\frac{\lambda^2}{|y|}, \frac{y}{|y|}\right) \leqslant h\left(|y|, \frac{y}{|y|}\right) = |y|^{\frac{n-2}{2}} w_j(y).$$

ou seja,

$$\left(\frac{\lambda^2}{|y|^2}\right)^{\frac{n-2}{2}} w_j\left(\frac{\lambda^2 y}{|y|^2}\right) \leqslant w_j(y)$$

Portanto,

$$w_{j,\lambda}(y) = \left(\frac{\lambda}{|y|}\right)^{n-2} w_j\left(\frac{\lambda^2 y}{|y|^2}\right) \leqslant w_j(y).$$

Afirmação 2 *Existe* $0 < \lambda_j \leqslant R_j$, *tal que para* $0 < \lambda \leqslant \lambda_j$, *temos*

$$\zeta_{j,\lambda}(y) \geqslant 0, \qquad \textit{para todo } R_j \leqslant |y| \leqslant \Gamma_j.$$

Seja

$$\lambda_j := R_j \left(\frac{\min_{\overline{B}_{\Gamma_j} \setminus B_{R_j}} w_j}{\max_{\overline{B}_{R_j}} w_j} \right)^{\frac{1}{n-2}} \leqslant R_j.$$

Então

$$\left(\frac{\lambda_j}{R_j} \right)^{n-2} \max_{\overline{B}_{R_j}} w_j = \min_{\overline{B}_{\Gamma_j} \setminus B_{R_j}} w_j.$$

Então para todo $0 < \lambda \leqslant \lambda_j$ e $|y| \geqslant R_j$, temos

$$\begin{aligned} w_{j,\lambda}(y) &= \left(\frac{\lambda}{|y|} \right)^{n-2} w_j \left(\frac{\lambda^2 y}{|y|^2} \right) \\ &\leqslant \left(\frac{\lambda_j}{R_j} \right)^{n-2} \max \left\{ w_j \left(\frac{\lambda^2 y}{|y|^2} \right) : |y| \geqslant R_j \right\} \\ &\leqslant \left(\frac{\lambda_j}{R_j} \right)^{n-2} \max_{\overline{B}_{R_j}} w_j \\ &= \min_{\overline{B}_{\Gamma_j} \setminus B_{R_j}} w_j \\ &\leqslant w_j(y). \end{aligned}$$

Combinando as duas afirmações anteriores, obtemos que

$$\zeta_{j,\lambda} \geqslant 0, \text{ para todo } 0 < \lambda \leqslant \lambda_j \text{ e } \lambda \leqslant |y| \leqslant \Gamma_j.$$

■

Dessa forma, definamos

$$\overline{\lambda}_j(x) := \sup\{0 < \mu < \Gamma_j; w_{j,x,\lambda}(y) \leqslant w_j(y), \text{ para todo } y \in \overline{\Sigma}_{j,x,\lambda} \text{ e } 0 < \lambda < \mu\}.$$

Mostramos agora que $\overline{\lambda}_j(x)$ é ilimitado para todo $x \in \mathbb{R}^n$ para j suficientemente grande. Isto será obtido por uma aplicação do Princípio do Máximo Forte e o Lema de Hopf.

Lema 4.3 *Para todo* $x \in \mathbb{R}^n$*,*

$$\lim_{j \to \infty} \overline{\lambda}_j(x) = \infty.$$

Prova: Sem perda de generalidade, podemos provar apenas para o caso $x = 0$. Esta prova será feita com argumento de contradição. Suponha que (a menos de uma subsequência) exista $C > 0$, tal que

$$\overline{\lambda}_j \leqslant C < \gamma_j, \qquad \text{para todo } j \in \mathbb{N} \tag{4.12}$$

onde C é uma constante que independe do índice j. Aqui estamos usando o fato de que $\gamma_j \to \infty$, quando $j \to \infty$. Para obtermos uma contradição, necessitaremos apenas mostrar que

$$\zeta_{j,\overline{\lambda}_j}(y) > 0, \quad y \in \overline{\Sigma_{\overline{\lambda}} \setminus \partial B_{\overline{\lambda}_j}}. \tag{4.13}$$

e

$$\frac{\partial \zeta_{j,\overline{\lambda}_j}}{\partial r}(y) > 0, \qquad \text{para todo } y \in \partial B_{\overline{\lambda}_j} \tag{4.14}$$

De fato, da equação (4.14), da compacidade de $\partial B_{\overline{\lambda}_j}$ e da continuidade do gradiente da função $\zeta_{j,\overline{\lambda}_j}$, existe $\overline{\lambda}_j < \overline{R}_j < \Gamma_j$, tal que

$$\frac{\partial}{\partial r}\zeta_{j,\lambda}(r,\theta) > 0, \quad \overline{\lambda}_j \leqslant \lambda \leqslant \overline{R}_j, \quad \lambda \leqslant r \leqslant \overline{R}_j.$$

Consequentemente, desde que $\zeta_{j,\lambda} \equiv 0$, em ∂B_λ, temos que

$$\zeta_{j,\lambda}(y) > 0, \qquad \text{para } \overline{\lambda}_j \leqslant \lambda < \overline{R}_j, \quad \lambda < |y| \leqslant \overline{R}_j. \tag{4.15}$$

Por (4.13) e pela super-harmonicidade de $\zeta_{j,\lambda}$, podemos encontrar $c_j > 0$ tal que

$$w_j(y) - w_{j,\overline{\lambda}_j}(y) \geqslant c_j \frac{\overline{R}_j^{\,n-2}}{|y|^{n-2}}, \qquad \text{para todo } |y| \geqslant \overline{R}_j.$$

Dessa forma, para todo $|y| \geqslant \overline{R}_j$.

$$w_j(y) - w_{j,\lambda}(y) \geqslant \frac{c_j \overline{R}_j^{n-2}}{|y|^{n-2}} - \Big(w_{j,\lambda}(y) - w_{j,\overline{\lambda}_j}(y)\Big). \tag{4.16}$$

Pela continuidade uniforme de w_j em $\overline{B}_{R_j}$, existe $0 < \epsilon_j < R_j - \overline{\lambda}_j$, tal que para todo $\overline{\lambda}_j \leqslant \lambda \leqslant \overline{\lambda}_j + \epsilon_j$ e $|y| \geqslant \overline{R}_j$, temos

$$\begin{aligned}
\left|\lambda^{n-2} w_j\left(\frac{\lambda^2 y}{|y|^2}\right) - \overline{\lambda}_j^{n-2} w_j\left(\frac{\overline{\lambda}_j^2 y}{|y|^2}\right)\right| &\leqslant R^{n-2}\epsilon_j + \left|\left(\lambda^{n-2} - \overline{\lambda}_j^{n-2}\right) w_j\left(\frac{\overline{\lambda}_j^2 y}{|y|^2}\right)\right| \\
&\leqslant R^{n-2}\epsilon_j + \left|(\lambda - \overline{\lambda}_j)\sum_{k=0}^{n-3} \lambda^k \overline{\lambda}_j^{n-3-k}\right| w_j\left(\frac{\overline{\lambda}_j^2 y}{|y|^2}\right) \\
&\leqslant R^{n-2}\epsilon_j + o(R^{n-2}\epsilon_j).
\end{aligned}$$

Escolhamos ϵ_j apropriado de forma que

$$R^{n-2}\epsilon_j + o(R^{n-2}\epsilon_j) < \frac{c_j R^{n-2}}{2}.$$

Por conseguinte, por (4.16)

$$w_j(y) - w_{j,\lambda}(y) > 0, \quad \text{para todo } \overline{\lambda}_j \leqslant \lambda \leqslant \overline{\lambda}_j + \epsilon_j, \quad R_j \leqslant |y| \leqslant \Gamma_j.$$

A expressão (4.15) e (4.16) contradizem a definição de $\overline{\lambda}_j$.

De agora em diante, tentaremos estabelecer (4.13) e (4.14). Pela definição de $\overline{\lambda}_j$,

$$w_{j,\overline{\lambda}_j} \leqslant w_j, \quad \text{em } \Sigma_{\overline{\lambda}_j}.$$

Por (4.10) e (4.11), obtemos que

$$-\Delta(w_j - w_{j,\overline{\lambda}_j}) = n(n-2)\left(w_j^{\frac{n+2}{n-2}} - w_{j,\overline{\lambda}_j}^{\frac{n+2}{n-2}}\right) \geqslant 0, \quad \text{em } \Sigma_{\overline{\lambda}_j}. \tag{4.17}$$

Temos ainda que

$$\max_{\partial B_{\Gamma_j}} w_{j,\overline{\lambda}_j} = \max\left\{\left(\frac{\overline{\lambda}_j}{|y|}\right)^{n-2} w_j\left(\frac{\overline{\lambda}_j^2 y}{\Gamma_j^2}\right) : y \in \partial B_{\Gamma_j}\right\}.$$

Então por (4.15), obtemos

$$\max_{\partial B_{\Gamma_j}} w_{j,\overline{\lambda}_j} \leqslant \left(\frac{C}{\Gamma_j}\right)^{n-2} \max_{\partial B_{\Gamma_j}}\left\{w_j\left(\frac{\overline{\lambda}_j^2 y}{|y|^2}\right) : y \in \partial B_{\Gamma_j}\right\}.$$

Usando (4.16), deduzimos que

$$\max_{\partial B_{\Gamma_j}} w_{j,\overline{\lambda}_j} \leqslant D\Gamma_j^{2-n}, \tag{4.18}$$

onde D é uma constante independente de j. Dessa forma, por (4.17) e (4.18), para j suficientemente grande, obtemos

$$\min_{\partial B_{\Gamma_j}}\left(w_j - w_{j,\overline{\lambda}_j}\right) \geqslant \min_{\partial B_{\Gamma_j}} w_j - \max_{\partial B_{\Gamma_j}} w_{j,\overline{\lambda}_j} > \left(\frac{j}{2^{n-2}} - D\right)\Gamma_j^{2-n} > 0.$$

Recordemos que

$$w_j - w_{j,\overline{\lambda}_j} = 0, \quad \text{em } \partial B_{\overline{\lambda}}.$$

Portanto, temos

$$\begin{cases} -\Delta\zeta_{j,\overline{\lambda}_j} & \geqslant & 0, & \text{em} & \Sigma_{\overline{\lambda}_j} \\ \zeta_{j,\overline{\lambda}} & > & 0, & \text{sobre} & \partial B_{\Gamma_j} \\ \zeta_{j,\overline{\lambda}} & = & 0, & \text{sobre} & \partial B_{\overline{\lambda}_j}. \end{cases} \tag{4.19}$$

Aplicando o Princípio do Máximo e o Lema de Hopf, obtemos as estimativas (4.13) e (4.14).

Pelo Lema 4.1, a menos de uma subsequência que

$$w_j \to w, \qquad \text{em } C^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$$

para alguma solução w de

$$\begin{aligned} -\Delta w &= n(n-2)w^{\frac{n+2}{n-2}}, \quad \text{em } \mathbb{R}^n \\ w(0) &= 1. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Pela convergência de w_j a w e o fato de que $\overline{\lambda}_j(x) \to \infty$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, temos

$$w_{x,\lambda}(y) \leqslant w(y), \qquad \text{para todo } |y-x| \geqslant \lambda.$$

Segue do Lema 1.6, que $w \equiv w(0) \equiv 1$, o que é uma contradição em razão de (4.20). ■

4.2 Corolário 4.1

Como consequência, temos a seguinte estimativa de energia.

Corolário 4.1 *Seja u como no Teorema 4. Então*

$$\int_{B_R} \left(|\nabla u|^2 + u^{\frac{2n}{n-2}} \right) \leqslant C(n). \tag{4.21}$$

Prova: Usando os mesmos argumentos de translação usados no Teorema 4, vemos que precisamos apenas estabelecer o resultado para $R = 1$. Pelo Lema de Poincaré (Lema 1.8), seja $G(x, y)$ a função de Green com condição de fronteira em B_3, ou seja,

$$\begin{cases} -\Delta G(x, \cdot) = \delta_x, & \text{em } B_3 \\ G(x, \cdot) = 0, & \text{sobre } \partial B_3 \end{cases}$$

Pelo Princípio do Máximo que existe uma constante $C \geqslant 1$, tal que para todo y e $\eta \in B_2$, temos

$$G(y, \eta) \geqslant C^{-1} \tag{4.22}$$

e pelo Lema de Hopf para todo $y \in B_3$ fixado e $s \in \partial B_3$

$$\frac{\partial G(y, s)}{\partial \nu} < 0, \tag{4.23}$$

onde ν é o vetor normal unitário de ∂B_3. Seja ainda $x_1 \in \partial \overline{B}_2$, tal que

$$u(x_1) := \min_{\overline{B}_2} u.$$

Então segue das propriedades da Função de Green, de (4.22) e de (4.23)

$$\begin{aligned} u(x_1) &= -\int_{B_3} G(x_1, y)\Delta u(y)dy - \int_{B_3} \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu} u(y)dy \\ &\geqslant n(n-2)\int_{B_3} G(x_1,y)u^{\frac{n+2}{n-2}}(y)dy \\ &\geqslant n(n-2)C^{-1}\int_{B_1} u(y)^{\frac{n+2}{n-2}}dy. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Por outro lado, aplicando o Teorema 4 e por (4.24), temos que

$$C_n\int_{B_1} u^{\frac{2n}{n-2}}dy = C_n\int_{B_1} uu^{\frac{n+2}{n-2}}dy \leqslant C_n \max_{\overline{B}_1} u \int_{B_1} u^{\frac{n+2}{n-2}}dy \leqslant u(x_1)\max_{\overline{B}_1} u \leqslant C, \tag{4.25}$$

onde $C_n = n(n-2)C^{-1}$.

Seja $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe suave, radial tal que $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, $\varphi(x) = 1$, se $0 \leqslant |x| \leqslant 1$ e $\varphi(|x|) = 0$, se $|x| \geqslant 2$. Além disso, $|\partial\varphi/\partial r| \leqslant C$. Multiplicando (4.1) por $\varphi^2 u$, obtemos

$$\int_{B_1} |\nabla u|^2 \leqslant \int_{B_2} |\nabla u|^2\varphi^2 dx \leqslant \int_{B_2} u^{\frac{2n}{n-2}} + C^2\int_{B_2} u^2 dx.$$

Pela Desigualdade de Hölder,

$$\int_{B_2} u^2 \leqslant \left(\int_{B_2} u^{\frac{2n}{n-2}}\right)^{\frac{n-2}{2}} \leqslant n(n-2)\left(\int_{B_2} u^{\frac{2n}{n-2}}\right)^{\frac{n-2}{2}}, \quad n \geqslant 3.$$

Dessa forma,

$$\int_{B_1} |\nabla u|^2 dx \leqslant C_1. \tag{4.26}$$

Combinando (4.25) e (4.26), obtemos o resultado. ■

CAPÍTULO 5

DESIGUALDADE TIPO HARNACK PARA EQUAÇÕES COM NÃO-LINEARIDADE

Neste capítulo, apresentaremos uma prova de uma desigualdade tipo Harnack para equações elípticas semilineares com não-linearidade mais geral

$$-\Delta u = g(u), \quad u > 0, \qquad \text{em } B_{3R}$$

devido a Yan Yan Li e Lei Zhang [32], utilizando o método *moving spheres*. Este resultado foi estabelecido por Chen e Li (Teorema 1.2 em [13]), quando assumido g localmente lipschitzianas em $(0, \infty)$.

Aqui, assumiremos que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaça

(g2) $g(s)s^{-(n+2)/(n-2)}$ é não-crescente em $(0, \infty)$;

(g3) g é contínua e positiva em $(0, \infty)$ e $\sup_{0<s\leqslant t} g(s) < \infty$, para todo $t > 0$;

(g4) $\lim\limits_{s\to\infty} s^{-\frac{n+2}{n-2}} g(s)$ existe e o limite pertence ao intervalo $(0, \infty)$.

Teorema 5 *Sejam $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaça (g2) - (g4) e u uma solução (contínua) de*

$$-\Delta u = g(u), \quad u > 0, \qquad \text{em } B_{3R}, \tag{5.1}$$

com

$$\max_{\overline{B}_R} u \geqslant 1.$$

Então

$$(\max_{\overline{B}_R} u)(\min_{\overline{B}_{2R}} u) \leqslant C(n,g)R^{2-n}.$$

Observação: Observamos que $\liminf g(s)s^{-\frac{n+2}{n-2}} > 0$, pois caso contrário o resultado não necessariamente é assegurado. Por exemplo, seja $g(s) = \frac{1}{4}(s+1)^{-3}$, então g satisfaz $(g2)$, $(g3)$ e $\liminf g(s)s^{-\frac{n+2}{n-2}} = 0$. Entretanto, $u_j(x) = (x_1+j)^{1/2}-1$ satisfaz $-\Delta u_j = g(u_j)$, em B_3 e $\min_{\overline{B_2}} u_j \to \infty$.

5.1 Prova do Teorema 5

A prova será feita por argumento de contradição. Dessa forma, suponha que para cada inteiro $j = 1, 2, \ldots$, existam soluções u_j de (5.1), tal que

$$u_j(\overline{x}_j) \min_{\overline{B}_{2R_j}} u_j > \frac{j}{R_j^{n-2}}, \tag{5.2}$$

onde

$$u_j(\overline{x}_j) = \max_{\overline{B}_{R_j}} u_j \geqslant 1 \tag{5.3}$$

Aplicando o Lema A.1 para $u = u_j\left(R_j \cdot + \overline{x}_j\right)$ e $a = \dfrac{n-2}{2}$, podemos encontrar $\widetilde{x}_j \in B_1(\overline{x_j})$, tal que

$$\begin{aligned}
u\left(R_j\widetilde{x}_j + \overline{x}_j\right) &\geqslant 2^{\frac{2-n}{2}} \max\left\{u_j\left(R_j y + \overline{x}_j\right) : y \in B_{\left(\frac{1-|\widetilde{x}_j|}{2}\right)}(\widetilde{x}_j)\right\}\\
&= 2^{\frac{2-n}{2}} \max\left\{u_j\left(y + \overline{x}_j\right) : y \in B_{\left(\frac{R_j - R_j|x_j|}{2}\right)}(R_j\widetilde{x}_j)\right\}\\
&= 2^{\frac{2-n}{2}} \max\left\{u(y) : y \in B_{\left(\frac{R_j - |R_j\widetilde{x}_j + \overline{x}_j|}{2}\right)}\right\}
\end{aligned}$$

Seja $x_j = R_j\widetilde{x}_j + \overline{x}_j \in B_{R_j}(\overline{x}_j)$, então obtemos da desigualdade acima que

$$u_j(x_j) \geqslant 2^{\frac{2-n}{2}} \max_{B_{\left(\frac{R_j - |x_j - \overline{x}_j|}{2}\right)}(x_j)} u_j.$$

Além disso, o Lema A.1 ainda afirma que

$$(\sigma_j)^{\frac{n-2}{2}} u_j(x_j) \geqslant 2^{\frac{n-2}{2}} u_j(\overline{x}_j). \tag{5.4}$$

onde

$$\sigma_j = \frac{1}{2}(1 - |x_j - \overline{x}_j|) \leqslant \frac{1}{2}. \tag{5.5}$$

.

Substituindo (5.5) em (5.4), obtemos

$$u_j(x_j) \geqslant u_j(\overline{x}_j) \geqslant 1. \tag{5.6}$$

Dessa forma, usando (5.2) e que $\max_{\overline{B}_{R_j}} u_j \geqslant \min_{\overline{B}_{2R_j}} u_j$, definimos

$$\begin{aligned}
\gamma_j := u_j(x_j)^{\frac{2}{n-2}}\sigma_j &\geqslant \frac{R_j}{2} u_j(\overline{x}_j)^{\frac{2}{n-2}} \\
&\geqslant \frac{R_j}{2}\left(u_j(\overline{x}_j)\min_{B_{R_j}} u\right)^{\frac{1}{n-2}} \\
&\geqslant \frac{R_j}{2}\left(u_j(\overline{x}_j)\min_{B_{2R_j}} u\right)^{\frac{1}{n-2}} \\
&\geqslant \frac{R_j}{2}\left(\frac{j}{R_j^{n-2}}\right)^{\frac{1}{n-2}} = \frac{1}{2} j^{\frac{1}{n-2}}.
\end{aligned}$$

e

$$\Gamma_j := R_j u_j(x_j)^{\frac{2}{n-2}}.$$

Definamos

$$w_j(y) = \frac{1}{u_j(x_j)} u_j\left(x_j + \frac{y}{u_j(x_j)^{\frac{2}{n-2}}}\right), \quad y \in B_{\Gamma_j}.$$

Observemos que w_j está bem definida, para todo $y \in B_{3\Gamma_j}$. De fato,

$$\left| x_j + \frac{y}{u_j(x_j)^{\frac{2}{n-2}}} \right| \leqslant |x_j - \overline{x}_j| + |\overline{x}_j| + \frac{|y|}{u_j(x_j)^{\frac{2}{n-2}}} < 3R_j.$$

Então

$$-\Delta w_j = u_j(x_j)^{-\frac{n+2}{n-2}} g\left(u_j(x_j) w_j\right), \quad \text{em } B_{\Gamma_j}, \tag{5.7}$$

e

$$\begin{aligned}
u_j(x_j) &\geqslant 2^{\frac{2-n}{2}} \max\left\{u_j(x) \mid x \in B_{\sigma_j}(x_j)\right\} \\
&\geqslant 2^{\frac{2-n}{2}} \max\left\{ u_j\left(x_j + \frac{x}{u_j(x_j)^{\frac{2}{n-2}}}\right) \mid x \in B_{\sigma_j u_j(x_j)^{\frac{2}{n-2}}} \right\} \\
&= 2^{\frac{2-n}{2}} \max\left\{ u_j\left(x_j + \frac{x}{u_j(x_j)^{\frac{2}{n-2}}}\right) \mid x \in B_{\gamma_j} \right\}.
\end{aligned}$$

Então

$$w_j(0) = 1 \geqslant 2^{\frac{2-n}{2}} \max_{B_{\gamma_j}} w_j \tag{5.8}$$

e para todo $|y| = \Gamma_j$, analogamente o que fizemos no Capítulo anterior, temos por (5.2) e (5.3)

$$\min_{\partial B_{\Gamma_j}} w_j \geqslant \frac{1}{u_j(x_j)} \min_{\overline{B}_{2R_j}} u_j > \frac{j}{u_j(x_j)u_j(\overline{x}_j)R_j^{n-2}} \geqslant \frac{j}{u_j(x_j)^2 R_j^{n-2}} = j\Gamma_j^{2-n}.$$

Em resumo, para $j = 1, 2, \ldots$ temos o seguinte quadro

$$\begin{cases} -\Delta w_j &=& u_j(x_j)^{-\frac{n+2}{n-2}} g(u_j(x_j)w_j), & \text{em } B_{\Gamma_j} \\ \\ w_j &\leqslant& 2^{\frac{n-2}{2}}, & \text{em } B_{\gamma_j} \\ \\ w_j &>& j\Gamma_j^{2-n}, & \text{em } B_{\Gamma_j} \\ \\ w_j(0) &=& 1 & . \end{cases} \tag{5.9}$$

Como na prova do Teorema 4, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, podemos encontrar $0 < \lambda_j(x) < 1$ tal que

$$w_{j,x,\lambda}(y) = \left(\frac{\lambda}{|y-x|}\right)^{n-2} w_j\left(x + \frac{\lambda^2(y-x)}{|y-x|^2}\right) \leqslant w_j(y),$$

para todo $y \in B_{\Gamma_j} \setminus B_\lambda(x)$ e $0 < \lambda < \lambda_j(x)$.

5.1.1 Limitação uniforme da sequência de soluções $\{w_j\}$

Nosso primeiro passo está completo e a partir de então podemos procurar por uma sequência convergente. Devido a condição em g, estamos aptos a mostrar que w_j possui uma subsequência convergente em $C^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Isto será deduzido do seguinte lema.

Lema 5.1 *Seja w_j como em (5.9). Então*

$$\|w_j\|_{C^{1,\alpha}(B_{\gamma_j/2})} \leqslant C,$$

onde C é uma constante independente de j.

Prova: Devido a $(g2)$ e $(g3)$, existe uma constante $C > 0$, independente de j tal que

$$g(s) \leqslant C\left(1 + s^{\frac{n+2}{n-2}}\right), \qquad \text{para todo } s > 0.$$

De fato, pela condição $(g2)$, temos que

$$g(s) \leqslant C \leqslant C\left(1+s^{\frac{n+2}{n-2}}\right), \qquad \text{para todo } 0<s\leqslant 1,$$

onde $C=\sup\{g(s): 0<s\leqslant 1\}$. Por outro lado, pela condição $(g3)$, obtemos que

$$g(s)s^{-\frac{n+2}{n-2}} \leqslant g(1), \qquad \text{para todo } s\geqslant 1.$$

Em todo caso, existe $C>0$, tal que

$$g(s) \;\leqslant\; C\left(1+s^{\frac{n+2}{n-2}}\right), \quad \text{para todo } s>0.$$

Dessa forma, em B_{γ_j}

$$\begin{aligned}
|\Delta w_j| &= u_j(x_j)^{-\frac{n+2}{n-2}} g(u_j(x_j w_j))\\
&\leqslant u_j(x_j)^{-\frac{n+2}{n-2}} C\left(1+u_j(x_j)^{\frac{n+2}{n-2}} w_j^{\frac{n+2}{n-2}}\right)\\
&= u_j(x_j)^{-\frac{n+2}{n-2}} C + C w_j^{\frac{n+2}{n-2}}.
\end{aligned}$$

Usando (5.6) e (5.8), obtemos que

$$\begin{aligned}
|\Delta w_j| &\leqslant C+2^{\frac{n+2}{2}}C\\
&\leqslant C^*,
\end{aligned}$$

onde C^* é uma constante que independe do índice j. Consequentemente para todo p

$$\Delta w_j \in L^p\left(B_{\gamma_j}\right).$$

Pela regularidade dos espaços L^p, obtemos que para qualquer subconjunto aberto $\Omega \subset\subset B_{\gamma_j}$ que

$$w_j \in W^{2,p}(\Omega).$$

Por conseguinte, pela regularidade dos espaços C^α, temos que $w_j \in C^{1,\alpha}$, para algum $0<\alpha\leqslant 1$ e

$$\|w_j\|_{C^{1,\alpha}(B_{\gamma_j/2})} \leqslant C\left(\|\Delta w_j\|_{L^p(B_{\gamma_j/2})} + \|w_j\|_{L^p(B_{\gamma_j/2})}\right).$$

■

Desde que $\gamma_j \to \infty$, quando $j\to\infty$, podemos ver pelo ver pelo lema que acabamos de provar e pelo critério de campacidade de Arzela-Ascoli que podemos encontrar uma subsequência (a qual permaneceremos com a mesma notação), tal

que
$$w_j \to w, \quad \text{em } C^1_{loc}(\mathbb{R}^n).$$

5.1.2 Transformada de Kelvin para o operador laplaciano

Estamos em condições de discutir a transformada de Kelvin para o operador de Laplace. Para $x \in \mathbb{R}^n$, seja $w_{j,x,\lambda}$ denota a Transformada de Kelvin de w_j com respeito a $B_\lambda(x)$, i.e.

$$w_{j,x,\lambda} = \left(\frac{\lambda}{|y-x|}\right)^{n-2} w_j\left(x + \frac{\lambda^2(y-x)}{|y-x|^2}\right), \quad y \in B_{3\Gamma_j(x) \setminus \overline{B_\lambda(x)}}.$$

Pelo Lema 1.4 e o fato que de w_j é solução de (5.7)

$$\begin{aligned} -\Delta w_{j,x,\lambda}(y) &= \left(\frac{\lambda}{|y-x|}\right)^{n+2}\left[-\Delta w_j\left(x + \frac{\lambda^2(y-x)}{|y-x|^2}\right)\right] \\ &= \left(\frac{\lambda_j}{|y-x|}\right)^{n+2} u_j(x_j)^{-\frac{n+2}{n-2}} g\left(u_j(x_j)w_j\right) \geqslant 0, \quad \text{em } B_{\Gamma_j}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Devido a condição sobre g, temos que $-\Delta w_{j,x,\lambda} \geqslant 0$. Como no Teorema 2, devemos comparar para $x \in \mathbb{R}^n$ fixado, porém arbitrário, a função w_j com a sua transformada $w_{j,x,\lambda}$. Podemos supor sem perda de generalidade que $x = 0$. Para $x \neq 0$, o argumento segue de forma similar. Para $\lambda > 0$, definamos o seguinte conjunto

$$\Sigma_{j,x,\lambda} := B_{\Gamma_j}(x) \setminus \overline{B}_\lambda(x).$$

A restrição do domínio a B_{Γ_j} é necessário para $x \neq 0$, vendo que teríamos $B_{\frac{1}{2}\Gamma_j}(x) \subset B_{\Gamma_j}$ para j suficientemente grande.

Definimos para cada $y \in \Sigma_{j,x,\lambda}$

$$\zeta_{j,x,\lambda}(y) = w_j(y) - w_{j,x,\lambda}(y).$$

Desde que por (5.9), afirmamos que w_j é positiva em um domínio pequeno limitado, nosso próximo lema pode ser provado com o mesmo argumento do Lema 4.2.

Lema 5.2 *Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, existe $\lambda_{j,x} > 0$ suficientemente pequeno tal que*

$$\zeta_{j,x,\lambda} \geqslant 0. \quad \textit{para todo } 0 < \lambda < \lambda_{j,x} \textit{ e } \lambda \leqslant |y-x| \leqslant \Gamma_j.$$

Dessa forma, definamos

$$\overline{\lambda}_j(x) := \sup\{\mu : w_{j,x,\lambda}(y) \leqslant w_j(y), \text{ para todo } y \in \overline{\Sigma}_{j,x,\lambda}, \quad 0 < \lambda \leqslant \mu\}.$$

A seguir, mostraremos o seguinte lema

Lema 5.3 *Para cada $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$\lim_{j\to\infty} \overline{\lambda}_j(x) = \infty.$$

Prova: *Sem perda de generalidade, podemos apenas considerar o caso em que $x = 0$. Provaremos este lema usando argumento de contradição. Suponha que exista*

$$\overline{\lambda}_j \leqslant C < \gamma_j, \tag{5.11}$$

para alguma constante C independente de j. Aqui usamos o fato que $\gamma_j \to \infty$, quando $j \to \infty$. ■

Precisamos mostrar apenas que

$$\zeta_{j,\overline{\lambda}_j}(y) > 0, \qquad \text{para } y \in \overline{\Sigma}_{\overline{\lambda}} \setminus \partial B_{\overline{\lambda}} \tag{5.12}$$

e

$$\frac{\partial \zeta_{j,\overline{\lambda}_j}}{\partial r}(y) > 0, \qquad \text{para } y \in \partial B_{\overline{\lambda}_j} \tag{5.13}$$

para obter uma contradição. Uma vez que (5.12) e (5.13) estiverem estabelecidos, o resto da prova deste lema segue de forma semelhante ao Lema 4.3. De forma alternativa, podemos provar da seguinte maneira. Assumindo que (5.12) e (5.13) são válidas. Então podemos encontrar $a_j > 0$, tal que

$$\zeta_{j,\overline{\lambda}_j} \geqslant a_j, \qquad \text{para todo } y \in B_{\Gamma_j} \setminus B_{2\overline{\lambda}_j}. \tag{5.14}$$

Pela definição de $\overline{\lambda}_j$ e (5.11) existe para cada índice j fixado uma sequência $\{\lambda_k^j\}_{k=1}^{\infty}$ tal que

$$\lambda_k^j \to \overline{\lambda}_j, \qquad \text{quando } k \to \infty,$$

$$\overline{\lambda}_j < \lambda_k < \Gamma_j,$$

$$\inf_{\Sigma_{j,\lambda_k}} \zeta_{j,\lambda_k} < 0.$$

Não é difícil de ver da equação (5.14), que para cada k suficientemente grande, temos

$$\zeta_{j,\lambda_k}(y) \geqslant \frac{1}{2} a_j, \qquad \text{para } y \in B_{\Gamma_j} \setminus B_{2\overline{\lambda}_j}.$$

Segue que existe $y_k \in B_{2\overline{\lambda}_j} \setminus B_{\lambda_k}$, tal que

$$\zeta_{j,\lambda_k}(y_k) = \min_{\Sigma_{j,\lambda_k}} \zeta_{j,\lambda_k} < 0.$$

Desde que $\zeta_{j,\lambda_k}(y) = 0$, para $|y| = \lambda_k$, temos que

$$\lambda_k < |y_k| < 2\overline{\lambda}_j,$$

$$\nabla\zeta_{j,\lambda_k}(y_k) = 0,$$

$$\Delta\zeta_{j,\lambda_k}(y_k) \geqslant 0.$$

Passando a subsequência (ainda denotada por y_k), temos que $y_k \to y_0$, quando $k \to \infty$. Segue que

$$\zeta_{j,\overline{\lambda}_j}(y_0) = 0, \quad |y_0| = \overline{\lambda}_j$$

e

$$\nabla\zeta_{j,\overline{\lambda}_j}(y_0) = 0, \quad \Delta\zeta_{j,\overline{\lambda}_j}(y_0) \geqslant 0$$

contradizendo (5.13). Portanto, (5.11) não ocorre. Assim, estabeleceremos (5.12) e (5.13). Considere o seguinte conjunto

$$M = \left\{ y \in \Sigma_{\overline{\lambda}_j} : w_j(y) < \left(\frac{|y|}{\overline{\lambda}}\right)^{n-2} w_{j,\overline{\lambda}_j}(y) \right\}.$$

Primeiramente, temos de (5.10), temos

$$-\Delta w_{j,\overline{\lambda}_j}(y) = \left(\frac{\overline{\lambda}_j}{|y|}\right)^{n+2} u_j(x_j)^{-\frac{n+2}{n-2}} g\left(u_j(x_j)\left(\frac{\overline{\lambda}_j}{|y|}\right)^{n-2} w_{j,\overline{\lambda}_j}(y)\right), \quad \text{em } M.$$

Por (g2),

$$(w_j(y)u_j(x_j))^{-\frac{n+2}{n-2}} g(u_j(x_j)w_j(y)) \geqslant \left(w_{j,\overline{\lambda}_j}\left(\frac{\overline{\lambda}_j}{|y|}\right)^{2-n} u_j(x_j)\right)^{-\frac{n+2}{n-2}} g\left(u_j(x_j)\left(\frac{\overline{\lambda}_j}{|y|}\right)^{2-n} w_{j,\overline{\lambda}_j}(y)\right).$$

Dessa forma,

$$-w_j^{-\frac{n+2}{n-2}}\Delta w_j \geqslant -w_{j,\overline{\lambda}_j}^{-\frac{n+2}{n-2}}\Delta w_{j,\overline{\lambda}_j}.$$

Desde que $-\Delta w_j$ e $-\Delta w_{j,\overline{\lambda}_j}$ são positivas em M e $w_j \geqslant w_{j,\overline{\lambda}_j}$, concluimos que

$$-\Delta w_j \geqslant -\Delta w_{j,\overline{\lambda}_j}, \quad \text{em } M.$$

E portanto,

$$-\Delta\zeta_{j,\overline{\lambda}_j} \geqslant 0. \tag{5.15}$$

Mais ainda em $\partial M \setminus \partial B_{\overline{\lambda}_j}$ temos que

$$w_j(y) - w_{j,\overline{\lambda}_j}(y) = w_{j,\overline{\lambda}_j}(y)\left(\left(\frac{|y|}{\overline{\lambda}_j}\right)^{n-2} - 1\right) > 0.$$

Lembremos que

$$w_j - w_{j,\overline{\lambda}_j} \equiv 0, \quad \text{ sobre } \partial B_{\overline{\lambda}_j}.$$

Segue do princípio do máximo que

$$\zeta_{j,\overline{\lambda}_j} > 0, \quad \text{ sobre } \overline{M} \setminus \partial B_{\overline{\lambda}_j}. \tag{5.16}$$

Por outro lado, em $\Sigma_{\overline{\lambda}_j} \setminus \overline{M}$, temos que

$$w_j(y) > \left(\frac{|y|}{\overline{\lambda}_j}\right)^{n-2} w_{j,\overline{\lambda}_j}(y) > w_{j,\overline{\lambda}_j}(y).$$

Dessa forma,

$$\zeta_{j,\overline{\lambda}_j} > 0, \quad \text{ em } \Sigma_{\overline{\lambda}_j} \setminus \overline{M}. \tag{5.17}$$

Todavia, sobre ∂B_{Γ_j}

$$\max_{\partial B_{\Gamma_j}} w_{j,\overline{\lambda}_j} = \max_{\partial B_{\Gamma_j}} \left(\frac{\overline{\lambda}_j}{|y|}\right)^{n-2} w_j\left(\frac{\overline{\lambda}_j}{\Gamma_j^2} y\right).$$

Então por 5.11, obtemos

$$\begin{aligned} \max_{\partial B_{\Gamma_j}} w_{j,\overline{\lambda}_j} &\leqslant \left(\frac{C}{\Gamma_j}\right)^{n-2} \max_{\partial B_{\Gamma_j}} w_j\left(\frac{\overline{\lambda}_j}{|y|^2} y\right) \\ &= C^{n-2}\Gamma_j^{2-n} \max_{\partial B_{\overline{\lambda}_j^2/\Gamma_j}} w_j. \end{aligned}$$

Pelo fato de que $\overline{\lambda}_j^2/\Gamma_j < \gamma_j^2/\Gamma_j = \Gamma_j^2\sigma_j^2/4\Gamma_j = \Gamma_j\sigma_j^2/4 < \Gamma_j\sigma_j/2 = \gamma_j$, segue que

$$\max_{\partial B_{\Gamma_j}} w_{j,\overline{\lambda}_j} \leqslant C^{n-2}\Gamma_j^{2-n} \max_{B_{\gamma_j}} w_j.$$

E usando (5.9), deduzimos que

$$\max_{\partial B_{\Gamma_j}} w_{j,\overline{\lambda}_j} \leqslant D\Gamma_j^{2-n}, \tag{5.18}$$

onde D independe do índice j. Portanto, em vista de (5.18) e (5.9), para j suficientemente grande, temos que

$$\min_{\partial B_{\Gamma_j}}\left(w_j - w_{j,\overline{\lambda}_j}\right) \geqslant \min_{\partial B_{\Gamma_j}} w_j - \max_{\partial B_{\Gamma_j}} w_{j,\overline{\lambda}_j} > \frac{j}{2^{n-2}}\Gamma_j^{2-n} - D\Gamma_j^{2-n} > 0.$$

Então

$$\zeta_{j\overline{\lambda}_j} > 0, \quad \text{sobre } \partial B_{\Gamma_j}.$$

Consequentemente por (5.15), (5.16) e (5.18) deduzimos a estimativa (5.12). Para demonstrar (5.13), observaremos dois casos: Para $y \in \partial B_{\overline{\lambda}_j}$ Se $\frac{d}{dr}\left(w_j - w_{j,\overline{\lambda}_j}\right)(y_0) \geqslant (n-2)w_j(y_0)$. Desde que $n > 2$ e $w_j > 0$, (5.13) segue de forma imediata. Por outro lado, se $\frac{d}{dr}\left(w_j - w_{j,\overline{\lambda}_j}\right)(y_0) < (n-2)w_j(y_0)$, então

$$\frac{d}{dr}\left(\left(\frac{|y|}{\overline{\lambda}_j}\right)^{n-2} w_{j,\overline{\lambda}_j}(y) - w_j(y)\right)\Bigg|_{y=y_0} = (n-2)w_j(y_0) - \frac{d}{dr}\left(w_j - w_{j,\overline{\lambda}_j}\right)(y_0) > 0.$$

Portanto, pela definição de M, podemos encontrar (análogo ao capítulo anterior) $\delta > 0$, tal que

$$B_\delta(y_0) \cap \Sigma_{\overline{\lambda}_j} \subset M.$$

E devido ao Lema de Hopf, concluímos

$$\frac{d}{dr}\left(w_j - w_{j,\overline{\lambda}_j}\right)(y_0) > 0.$$

E estimativa (5.13) está provado. Devido ao Lema 2.2, sabemos que a menos de subsequência,

$$w_j \to w \quad \text{em } C^1_{loc}(\mathbb{R}^n),$$

onde $w \geqslant 0$ e $w(0) = 1$. Pela convergência de w_j para w e o fato de que $\overline{\lambda}_j \to \infty$ quando $j \to \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$w_{x,\lambda}(y) \leqslant w(y), \text{ para todo } |y - x| \geqslant \lambda > 0.$$

Segue ainda do Lema 1.6 $w \equiv w(0) \equiv 1$. Dessa forma, seja

$$c = \liminf_{j\to\infty} u_j(x_j) \geqslant 1.$$

Se $c = \infty$, temos por (5.7), (g4) e a convergência de w_j para w que para $a > 0$,

$$-\Delta w = a w^{\frac{n+2}{n-2}}, \quad w > 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^n.$$

Se $c < \infty$, então

$$-\Delta w = c^{-\frac{n+2}{n-2}} g(cw), \quad w > 0 \quad \text{sobre } \mathbb{R}^n.$$

Nenhum dos casos acima é possível desde que w é identicamente igual a uma função constante.

CAPÍTULO 6

UMA DESIGUALDADE TIPO HARNACK EM BOLAS DO $\mathbb{R}^N_+$

Neste capítulo, daremos uma prova baseado em Yan Yan Li e Lei Zhang [32] de uma desigualdade tipo Harnack nas bolas do semiespaço euclidiano sob condições de fronteiras geometricamente naturais.

Teorema 6 *Sejam $n \geqslant 3$, $c \in \mathbb{R}$ e $u \in C^2(B^+_{3R}) \cap C^1(\overline{B^+_{3R}})$ uma solução de*

$$\begin{cases} -\Delta u = n(n-2)u^{\frac{n+2}{n-2}}, \quad u > 0 & \textit{sobre } B^+_{3R} \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = cu^{\frac{n}{n-2}}, & \textit{sobre } \partial' B^+_{3R}. \end{cases} \tag{6.1}$$

Então para existe uma constante $C = C(n, c)$, tal que

$$\left(\max_{\overline{B}^+_R} u\right)\left(\min_{\partial\overline{B}^+_{2R}} u\right) \leqslant C(n,c)R^{2-n}. \tag{6.2}$$

6.1 Demonstração do Teorema 6

Suponhamos, por argumentos de contradição, se (6.2) não fosse válido, teríamos uma sequência de soluções $\{u_j\}_j$ de (6.1), tais que

$$u_j(x_j) \inf_{\partial B^+_{2R_j}} u_j > jR_j^{2-n}.$$

Notemos que para todo j, devido a super-harmonicidade da função u_j

$$R_j^{\frac{n-2}{2}} \inf_{\partial B^+_{2R_j}} u_j = R_j^{\frac{n-2}{2}} \inf_{B^+_{2R_j}} u_j \leqslant R_j^{\frac{n-2}{2}} \inf_{B^+_{R_j}} u_j \leqslant R_j^{\frac{n-2}{2}} \max_{B^+_{R_j}} u_j = R_j^{\frac{n-2}{2}} u_j(x_j).$$

Consequentemente,

$$R_j^{\frac{n-2}{2}} u_j(x_j) > \frac{j}{R^{\frac{n-2}{2}} \inf_{\partial B^+_{2R_j}} u_j} > \frac{j}{R_j^{\frac{n-2}{2}} u_j(x_j)}.$$

Segue que

$$R_j^{\frac{n-2}{2}} u_j(x_j) \to \infty, \text{ quando } j \to \infty. \tag{6.3}$$

Aplicando o Lema A.2 para a função $u(\cdot) = u_j\left(x_j + R_j \cdot /4\right)$, com $a = (n-2)/2$ e $T_j = 4x_j^{(n)}/R_j$, onde $x_j^{(n)}$ denota a n-ésima coordenada de x_j, encontramos $w_j \in B_1 \cap \{x_n \geqslant -T_j\}$ tal que

$$u\left(x_j + \frac{R_j}{4} w_j\right) \geqslant 2^{-a} u\left(x_j + \frac{R_j}{4} w\right), \qquad \text{para todo } w \in B^{-T_j}_{\sigma_j}(w_j),$$

onde $\sigma_j = \left(1 - |w_j|\right)/2$. Fazendo a substituição $z_j = x_j + \frac{R_j}{4} w_j$, temos que $z_j \in B_{R_j/4}(x_j) \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ e

$$u_j(z_j) \geqslant 2^{\frac{2-n}{2}} u_j(x), \quad x \in B_{\bar{\sigma}_j}(z_j) \cap \overline{\mathbb{R}^n_+}, \tag{6.4}$$

e

$$(2\bar{\sigma}_j)^{\frac{n-2}{2}} u_j(z_j) \geqslant u_j(x_j) \left(\frac{R_j}{4}\right)^{\frac{n-2}{2}}, \tag{6.5}$$

onde $u_j(x_j)\left(\frac{R_j}{4}\right)^{\frac{n-2}{2}} \to \infty$, quando $j \to \infty$ e $\bar{\sigma}_j = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}R_j - |z_j - x_j|\right) \leqslant \frac{1}{8}R_j$.

Seja $\gamma_j := u_j(z_j)^{\frac{2}{n-2}} \bar{\sigma}_j$ e $\Gamma_j := u_j(z_j)^{\frac{2}{n-2}} R_j$. Segue de (6.3), (6.4) e (6.5) que

$$u_j(z_j) \geqslant u_j(x_j). \tag{6.6}$$

Consequentemente,

$$u_j(z_j) \inf_{\partial'' B^+_{2R_j}} u_j \geqslant u(x_j) \inf_{\partial B^+_{2R_j}} u_j > j R_j^{2-n}. \tag{6.7}$$

Seja $T_j := u_j(z_j)^{\frac{2}{n-2}} z_j^{(n)}$, ou seja, a n-ésima coordenada de $u_j(z_j)^{\frac{2}{n-2}} z_j$ e defina

$$w_j(y) = \frac{1}{u_j(z_j)} u_j\left(z_j + \frac{y}{u_j(z_j)^{\frac{2}{n-2}}}\right), \quad y \in \Omega_j$$

onde

$$\Omega_j = \left\{ y : z_j + \frac{y}{u_j(z_j)^{\frac{2}{n-2}}} \in B^+_{2R_j} \right\}.$$

Fazendo cálculos simples, vemos que w_j satisfaz

$$\begin{cases} \Delta w_j + n(n-2) w_j^{\frac{n+2}{n-2}} = 0, & \text{em } \Omega_j, \\ \\ \dfrac{\partial w_j}{\partial t} = c w_j^{\frac{n}{n-2}}, & \text{sobre } t = -T_j, \\ \\ w_j(0) = 1, \quad \text{e} \quad w_j(y) \leqslant 2^{\frac{n-2}{2}} \quad para \quad y \in \Omega_j \text{ e } |y| \leqslant \gamma_j \quad . \end{cases} \tag{6.8}$$

Seja $\partial''\Omega_j = \partial\Omega \cap \{y : y_n > -T_j\}$. Vemos que existe $C > 0$, tal que

$$\frac{1}{C}\Gamma_j \leqslant |y| \leqslant C\Gamma_j, \quad \text{para todo } y \in \partial''\Omega_j, \tag{6.9}$$

para todo j. De fato, dado $|y| \in \partial''\Omega_j$, temos que

$$\begin{aligned} |y| &\leqslant u_j(z_j)^{\frac{2}{n-2}} \left(\left| z_j + \frac{y}{u_j(z_j)^{\frac{2}{n-2}}} \right| + |z_j - x_j| + |x_j| \right) \\ &\leqslant u_j(z_j)^{\frac{2}{n-2}} \left(2R_j + \frac{1}{4}R_j + R_j \right) \\ &\leqslant \frac{13}{4} u_j(z_j)^{\frac{2}{n-2}} R_j \\ &= \frac{13}{4}\Gamma_j. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} 2R_j &\leqslant \frac{|y|}{u_j(z_j)^{\frac{2}{n-2}}} + |z_j - x_j| + |x_j| \\ &\leqslant \frac{|y|}{u_j(z_j)^{\frac{2}{n-2}}} + \frac{1}{4}R_j + R_j. \end{aligned}$$

Segue que,

$$\frac{3}{4}\Gamma_j \leqslant |y|.$$

Por (6.7) e (6.9), segue que

$$
\begin{aligned}
\inf_{y\in\partial''\Omega_j}\left(|y|^{n-2}w_j(y)\right) &\geqslant \inf_{y\in\partial''\Omega_j} w_j(y) \inf_{y\in\partial''\Omega_j}\left(|y|^{n-2}\right)\\
&= \frac{1}{u_j(z_j)}\inf_{y\in\partial''\Omega_j}\left\{u_j\left(z_j+\frac{y}{u_j(z_j)^{\frac{2}{n-2}}}\right)\right\}\inf_{y\in\partial''\Omega_j}\left(|y|^{n-2}\right)
\end{aligned}
$$

Daí

$$
\begin{aligned}
\inf_{y\in\partial''\Omega_j}\left(|y|^{n-2}w_j(y)\right) &\geqslant \frac{u_j(z_j)}{u_j(z_j)^2}\inf_{\partial B^+_{2R_j}} u_j \inf_{y\in\partial''\Omega_j}\left(|y|^{n-2}\right)\\
&\geqslant \frac{jR_j^{2-n}}{u_j(z_j)^2}\inf_{y\in\partial''\Omega_j}\left(|y|^{n-2}\right)\\
&= j\Gamma_j^{2-n}\inf_{y\in\partial''\Omega_j}\left(|y|^{n-2}\right)\\
&\geqslant Cj, \qquad (6.10)
\end{aligned}
$$

a qual se torna suficientemente grande, quando $j\to\infty$. A partir de então, dividiremos o restante da prova do Teorema 6 em dois casos (a menos de subsequências).

6.1.1 Caso 1: $\lim_{j\to\infty} T_j = \infty$

Nesta subseção, iremos encontrar uma contradição para o caso 1. Desde que $\alpha_j = \min\{\gamma_j, T_j\} \to \infty$ quando $j\to\infty$ e $\{w_j\}_j$ é uniformemente limitado em subconjuntos compactos do $\mathbb{R}^n$. Usando o mesmo raciocínio do Teorema 4, encontramos uma sequência de funções $\{w_j\}$ (a menos de subsequência) convergindo na norma C^2 para alguma função positiva w, a qual é solução do problema

$$
-\Delta u = n(n-2)u^{\frac{n+2}{n-2}}, \text{ em } K
$$

para cada K subconjunto compacto do $\mathbb{R}^n$.

Para $x\in\mathbb{R}^n$ e $\lambda < T_j/2$ seja $w^\lambda_{j,x}$ a transformada de Kelvin de w_j com respeito a bola $B_\lambda(x)$, i.e.,

$$
w^\lambda_{j,x} = \left(\frac{\lambda}{|y-x|}\right)^{n-2} w_j\left(x+\frac{\lambda^2(y-x)}{|y-x|^2}\right), \quad y\in\Sigma^\lambda_{j,x} := \Omega_j\setminus\overline{B_\lambda(x)}.
$$

Claramente $w^\lambda_{j,x}$ satisfaz a mesma equação de w_j em $\Sigma^\lambda_{j,x}$. Analogamente a prova do Teorema 4, podemos encontrar $\lambda_{j,x}>0$, tal que

$$
w^\lambda_{j,x}(y)\leqslant w_j(y), \quad \text{para } y\in\Sigma^\lambda_{j,x} \quad \text{e } 0<\lambda\leqslant\lambda_{j,x}.
$$

Dessa forma, definamos

$$\overline{\lambda}_j(x) = \sup\{\mu > 0 : w_{j,x}^{\lambda} \leqslant w_j(y),\ \text{para } y \in \overline{\Sigma_{j,x}^{\lambda}} \text{ e } 0 < \lambda \leqslant \mu\}.$$

Lema 6.1 $\overline{\lambda}_j(x) \to \infty$, *quando* $j \to \infty$.

Prova: Sem perda de generalidade, podemos assumir que $x = 0$. A demonstração para o caso geral, segue de forma análoga. Suponha então que $\overline{\lambda}_j \leqslant C < \gamma_j$, para todo j[1]. Seja $\Lambda_\lambda = w_j - w_j$. Como no Lema 4.3 e Lema 5.3, basta provar que

$$\frac{\partial \Lambda_{\overline{\lambda}_j}}{\partial \nu}(y) > 0, \quad y \in \partial B_{\overline{\lambda}_j} \tag{6.11}$$

e

$$\Lambda_{\overline{\lambda}_j}(y) > 0, \quad y \in \overline{\Sigma_{\overline{\lambda}_j}} \setminus \partial B_{\overline{\lambda}_j}, \tag{6.12}$$

onde ν denota o vetor normal unitário de $\partial B_{\overline{\lambda}_j}$. De fato, de (6.11) e (6.12), usando argumentos semelhantes aos usados nos Lemas 4.3 e 5.3, encontramos $\epsilon > 0$, tal que $w_\lambda \geqslant 0$ em $\overline{\Sigma_\lambda}$ para $\overline{\lambda}_j \leqslant \lambda \leqslant \overline{\lambda}_j + \epsilon$, violando a maximalidade de $\overline{\lambda}_j$. Pela definição de $\overline{\lambda}_j$, temos que

$$\Lambda_{\overline{\lambda}_j} \geqslant 0, \qquad \text{em } \Sigma_{\overline{\lambda}_j}$$

e pela definição de w_j e w_j^{λ} que

$$\Delta \Lambda_{\overline{\lambda}_j}(y) + b_j(y) \Lambda_{\overline{\lambda}_j}(y) = 0 \qquad \text{em } \Sigma_{\overline{\lambda}_j},$$

onde

$$b_j(y) = n(n-2) \frac{w_j(y)^{\frac{n+2}{n-2}} - w_j^{\overline{\lambda}_j}(y)^{\frac{n+2}{n-2}}}{w_j(y) - w_j^{\overline{\lambda}_j}(y)}$$

Ainda temos que

$$\begin{aligned} \max_{\partial'' \Omega_j w_{j,\overline{\lambda}_j}} &= \max \left\{ \left(\frac{\overline{\lambda}_j}{|y|} \right)^{n-2} w_j \left(\frac{\overline{\lambda}_j}{|y|^2} y \right) : y \in \overline{\partial'' \Omega_j} \right\} \\ &\leqslant \max_{\partial'' \Omega_j} \left(\frac{\overline{\lambda}_j}{|y|} \right)^{n-2} \max_{\partial'' \Omega_j} w_j \left(\frac{\overline{\lambda}_j}{|y|^2} y \right) \end{aligned}$$

[1] Aqui estamos usando o fato de que $\gamma_j \to \infty$, quando $j \to \infty$.

e devido a (6.9), temos que

$$\max_{\partial''\Omega_j} w_{j,\overline{\lambda}_j} \leqslant D\Gamma_j^{2-n}, \tag{6.13}$$

para alguma constante $D > 0$ que independe de j. Dessa forma, por (6.13) e (6.10), para j suficientemente grande, obtemos

$$\min_{\partial''\Omega_j} \Lambda_{\overline{\lambda}_j} = \min_{\partial''\Omega_j} \left(w_j - w_{j,\overline{\lambda}_j} \right) \geqslant \min_{\partial''\Omega_j} w_j - \max_{\partial''\Omega_j} w_{j,\overline{\lambda}_j} > j\Gamma_j^{2-n} - D\Gamma_j^{2-n} > 0.$$

Como consequência do princípio do máximo e pelo Lema de Hopf, temos (6.11) e

$$\Lambda_{\overline{\lambda}_j} > 0, \qquad \text{para } y \in \Sigma_{\overline{\lambda}_j}.$$

Para mostrar (6.12), mostraremos que

$$\Lambda_{\overline{\lambda}_j}(y) > 0, \qquad \text{em } \{t = -T_j\} \cap \partial\Omega_j.$$

E este fato segue do seguinte resultado

Lema 6.2 *Suponha que $T_j \to \infty$ e $\{\overline{\lambda}_j\}$ seja limitado. Então para qualquer $N > 0$, existe $j_0 > 1$ tal que para $j > j_0$*

$$\frac{\partial w_j^{\overline{\lambda}_j}}{\partial t}(z) > N w_j^{\overline{\lambda}_j}(x)^{\frac{n}{n-2}}, \qquad \textit{para } z \in \partial\Omega_j \cap \{t = -T_j\}.$$

Com efeito, se para algum com $z_n = -T_j$,

$$\Lambda_{\overline{\lambda}_j}(z) = 0,$$

então z é um ponto de mínimo, e pelo Lema 6.2 e para j suficientemente grande

$$0 \leqslant \frac{\partial \Lambda_{\overline{\lambda}_j}}{\partial t}(z) = c w_j(z)^{\frac{n}{n-2}} - \frac{\partial w_j^{\overline{\lambda}_j}}{\partial t}(z) = c w_j^{\overline{\lambda}_j}(z)^{\frac{n}{n-2}} - \frac{\partial w_j^{\overline{\lambda}_j}}{\partial t}(z) < 0,$$

uma contradição.

Prova do Lema 6.2. Desde que $T_j \to \infty$, $\{\overline{\lambda}_j\}$ é uma sequência limitada e $w_j \to w$ em C^2_{loc} , conseguimos para j suficientemente grande

$$\frac{1}{2} w(0) < w_j \left(\frac{\overline{\lambda}_j^2}{|z|^2} z \right) < 2w(0) \quad \text{e} \quad \left| \nabla w_j \left(\frac{\overline{\lambda}_j}{|z|^2} z \right) \right| < |\nabla w(0)| + 1, \quad \text{para } z \in \{t = -T_j\} \cap \partial\Omega_j.$$

Daí

$$\begin{aligned}\frac{\partial w_j^{\overline{\lambda}_j}}{\partial t}(z) &\geqslant (n-2)\overline{\lambda}_j^{n-2}T_j|z|^{-n}w_j\left(\frac{\overline{\lambda}_j^2}{|z|^2}z\right)-\overline{\lambda}_j^n|z|^{-n}\left|\nabla w_j\left(\frac{\overline{\lambda}_j^2}{|z|^2}z\right)\right|\\ &\geqslant m\overline{\lambda}_j^{n-2}T_j|z|^{-n}>Nw_j^{\overline{\lambda}_j}(z)^{\frac{n}{n-2}},\end{aligned}$$

onde m é uma constante positiva independente de j. E assim provamos o Lema 6.2, bem como o Lema 6.1. ■ Sabemos que a menos de subsequência

$$w_j \to w, \quad \text{em } C^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$$

para alguma solução w de

$$-\Delta w = n(n-2)w^{\frac{n+2}{n-2}}, \quad w>0, \quad \text{em } \mathbb{R}^n \tag{6.14}$$

Pela convergência de w_j para w e o fato de que $\overline{\lambda}_j \to \infty$, quando $j\to\infty$ para todo $x\in\mathbb{R}^n$, temos que

$$w_{x,\lambda}(y) \leqslant w(y), \quad \text{para todo } |y-x|\geqslant \lambda.$$

Segue do Lema 1.6, $w\equiv$ *constante*, o que é impossível já que w é solução de (6.14).

6.1.2 Caso 2: $|T_j|\leqslant C$, para todo j

A menos de subsequência temos que $T_j\to\infty$, seja $\hat{w}_j$ dado por

$$\hat{w}_j(y)=w_j(y-T_je_n), \quad y\in\hat{\Omega}_j,$$

onde $\hat{\Omega}_j=\Omega_j+T_je_n$. Não é difícil ver que

$$\begin{cases}\Delta\hat{w}_j+n(n-2)\hat{w}_j^{\frac{n+2}{n-2}}=0, & \text{em } \widetilde{\Omega}_j\\[2ex] \dfrac{\partial\hat{w}_j}{\partial t}=c\hat{w}_j^{\frac{n}{n-2}}, & \text{sobre } t=0\\[2ex] \hat{w}_j(T_je_n)=1, \text{ e } \hat{w}_j(y)\leqslant 2^{\frac{n-2}{2}}, & \text{para } y\in\widetilde{\Omega}_j \text{ e } |y|\leqslant\gamma_j-T_j.\end{cases}$$

Por outro lado, para cada $y\in\partial''\hat{\Omega}_j\cap\{t>0\}$. Então para alguma constante $C>0$

$$\frac{1}{C}\Gamma_j\leqslant|y|\leqslant C\Gamma_j$$

e

$$\inf_{\partial''\hat{\Omega}_j} \left(|y|^{n-2}\hat{w}_j(y)\right) \to \infty, \quad \text{quando } j \to \infty. \tag{6.15}$$

De fato, para $y \in \partial''\hat{\Omega}_j$, temos que $y - T_j e_n \in \partial''\Omega_j$ e por (6.9) que

$$\frac{1}{C}\Gamma_j - T_j \leqslant |y| \leqslant C\Gamma_j + T_j.$$

Usando o fato de que a sequência $\{T_j\}_j$ é limitada e que Γ_j, podemos encontrar $C_0 > 0$, tal que

$$\frac{1}{C_0}\Gamma_j \leqslant |y| \leqslant C_0\Gamma_j.$$

6.2 Transformada de Kelvin para o operador laplaciano

Para $x \in \partial R^n_+$, seja $\hat{w}^\lambda_{j,x}$ a transformada de Kelvin de $\hat{w}_j$ com respeito a bola $B_\lambda(x)$,

$$\hat{w}^\lambda_{j,x}(y) = \left(\frac{\lambda}{|y-x|}\right)^{n-2} \hat{w}_j\left(x + \frac{\lambda^2(y-x)}{|y-x|^2}\right), \quad y \in \widetilde{\Sigma}_{\lambda,x},$$

onde $\hat{\Sigma}_{\lambda,x} := \hat{\Omega}_j \setminus \overline{B}_\lambda(x)$. Como nos demais capítulo, existe $\lambda_j(x) > 0$, tal que

$$\hat{w}^\lambda_{j,x}(y) \leqslant \hat{w}_j(y), \quad \text{para } y \in \overline{\hat{\Sigma}}_{\lambda,x} \text{ e } 0 < \lambda \leqslant \lambda_{x,j}.$$

E dando continuidade, definamos

$$\overline{\lambda}_j(x) = \sup\{\mu > 0 : \hat{w}^\lambda_{j,x}(y) \leqslant \hat{w}_j(y) \quad \text{para } y \in \overline{\hat{\Sigma}}_{\lambda,x} \text{ e } 0 < \lambda \leqslant \mu\}.$$

Lema 6.3 *Para cada $x \in \mathbb{R}^n_+$, $\overline{\lambda}_j \to \infty$, quando $j \to \infty$.*

Prova: Por simplicidade, faremos a demonstração para $x = 0$. Suponha, por redução ao absurdo, que $\overline{\lambda}_j \leqslant C$, para todo j. Seja $\Lambda_\lambda = \hat{w}_j - \hat{w}^\lambda_j$. Neste caso, $\hat{w}^\lambda_j$ denota $\hat{w}^\lambda_{j,0}$. Para conseguir uma contradição provaremos as seguintes asserções

$$\begin{cases} \Lambda_{\overline{\lambda}_j} > 0 & , \text{ em } \hat{\Sigma}_{\overline{\lambda}_j} \cup \partial'\hat{\Sigma}_{\overline{\lambda}_j} \setminus \overline{B_{\overline{\lambda}_j}}, \\[2ex] \dfrac{\partial \Lambda_{\overline{\lambda}_j}}{\partial \nu} > 0, & \text{sobre } \partial'' B^+_{\overline{\lambda}_j}, \end{cases} \tag{6.16}$$

e
$$\frac{\partial \Lambda_{\overline{\lambda}_j}}{\partial \nu}(y) > 0, \qquad \text{para todo } y \in \partial\mathbb{R}^n_+ \cap \partial B_{\overline{\lambda}_j}, \tag{6.17}$$
onde ν denota o vetor normal unitário exterior da esfera $\partial B_{\overline{\lambda}_j}$. Pela definição de $\overline{\lambda}_j$,
$$\hat{w}_{j,\overline{\lambda}_j} \leqslant \hat{w}_j, \qquad \text{em } \hat{\Sigma}_{\overline{\lambda}_j}.$$
Um cálculo mostra que
$$\begin{aligned} -\Delta \hat{w}_{j,\overline{\lambda}_j}(y) &= -\Delta\left(\left(\frac{\overline{\lambda}_j}{|y|}\right)^{n-2} \hat{w}_j\left(\frac{\overline{\lambda}_j^2}{|y|^2}y\right)\right) \\ &= \left(\frac{\overline{\lambda}_j}{|y|}\right)^{n+2} n(n-2)\hat{w}_j\left(\frac{\overline{\lambda}_j^2}{|y|^2}y\right)^{\frac{n+2}{n-2}} \\ &= n(n-2)\hat{w}_{j,\overline{\lambda}_j}(y)^{\frac{n+2}{n-2}}. \end{aligned}$$
Dessa forma, segue que
$$-\Delta\Lambda_{\overline{\lambda}_j} = -\Delta\left(\hat{w}_j - \hat{w}_{j,\overline{\lambda}_j}\right) = n(n-2)\left(\hat{w}_j^{\frac{n+2}{n-2}} - \hat{w}_{j,\overline{\lambda}_j}^{\frac{n+2}{n-2}}\right) \geqslant 0, \qquad \text{em } \hat{\Sigma}_{\overline{\lambda}_j} \tag{6.18}$$
e
$$\frac{\partial \Lambda_{\overline{\lambda}_j}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\hat{w}_j - \hat{w}_{j,\overline{\lambda}_j}\right) = \frac{cn}{n-2}\xi^{\frac{2}{n-2}}\Lambda_{\overline{\lambda}_j}, \qquad \text{sobre } t = 0, \tag{6.19}$$
onde $\xi(y)$ é dado pelo o teorema do valor intermediário e está entre $\hat{w}_j(y)$ e $\hat{w}_{j,\overline{\lambda}_j}(y)$. É fácil verificar que Λ_λ satisfaz
$$\begin{cases} \Delta\Lambda_\lambda + b_\lambda\Lambda_\lambda = 0 & \text{em } \widetilde{\Sigma}_\lambda \\ \dfrac{\partial\Lambda_\lambda}{\partial t} = \dfrac{cn}{n-2}\xi^{\frac{2}{n-2}}\Lambda_\lambda, & \text{sobre } t = 0 \end{cases}$$
onde $\xi(y)$ é dado pelo teorema do valor médio e está entre $\hat{w}_j(y)$ e $\hat{w}_j^\lambda$ e
$$b_\lambda(y) = n(n-2)\frac{\hat{w}_j(y)^{\frac{n+2}{n-2}} - \hat{w}_j^\lambda(y)^{\frac{n+2}{n-2}}}{\hat{w}_j(y) - \hat{w}_j^\lambda(y)}.$$
Desde que $\{\lambda_j\}$ é limitado e $\hat{w}_j$ converge para $\hat{w}$ uniformemente em subconjuntos compactos, temos que
$$|y|^{n-2}\hat{w}_j^{\overline{\lambda}_j}(y) \leqslant C, \qquad \text{sobre } \partial''\hat{\Omega}_j.$$

Segue de (6.15) que para j suficientemente grande que

$$\int_{\partial''\hat{\Omega}_j} \Lambda_{\overline{\lambda}_j} > 0. \tag{6.20}$$

Estimativa (6.16) e (6.17) segue do Lema A.4 e, portanto, concluímos o Lema 6.3.
■ Pelo Lema 6.3 e a convergência de $\hat{w}_j$ para $\hat{w}$, temos para todo $x \in \partial\mathbb{R}^n_+$,

$$\hat{w}_{x,\lambda}(y) \leqslant \hat{w}(y), \qquad \text{para todo } y \in \mathbb{R}^n_+ \text{ e } |y-x| \geqslant \lambda > 0.$$

Pelo Lema 1.7, $\hat{w}$ depende apenas de t, uma contradição ao Lema reflemmaA.4.

APÊNDICE A

APÊNDICE

A.1 Lemas Elementares do Cálculo

Aqui, enuciaremos vários resultados oriundos do cálculo usados no decorrer do nosso trabalho.

Lema A.1 *Sejam $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$ e $u : \overline{B}_R(x_0) \to \mathbb{R}$ uma função real qualquer contínua e positiva. Então para todo $a > 0$, existe $x \in B_R(x_0)$ tal que*

$$\sigma_R^a u(x) \geqslant 2^{-a} u(x_0) \tag{A.1}$$

e

$$u(x) \geqslant 2^{-a} \max_{B_{\sigma_R}(x_0)} u, \tag{A.2}$$

onde $\sigma_R = \dfrac{R - |x - x_0|}{2}$.

Em particular para $x_0 = 0$ e $R = 1$, temos

$$\sigma^a u(x) \geqslant 2^{-a} u(0)$$

e

$$u(x) \geqslant 2^{-a} \max_{B_\sigma(x)} u,$$

onde $\sigma = \dfrac{1 - |x|}{2}$.

Prova: Dado $a > 0$, considere a seguinte função (contínua e positiva) em $\overline{B}_R(x_0)$

$$v(y) = (R - |y - x_0|)^a u(y).$$

Desde que v é contínua em um compacto, seja $x \in \overline{B}_R(x_0)$ o ponto de máximo da função v. Como v é positiva, então segue que $x \in B_R(x_0)$, ou seja, x não pertece a fronteira de $B_R(x_0)$, pois caso contrário, teríamos que $v(x) = 0$, uma contradição, já que a função assume valores positivos. Além disso,

$$(R - |x - x_0|)^a u(x) = v(x) \geqslant v(y) = (R - |y - x_0|)^a u(y), \quad \text{para todo } y \in \overline{B}_R(x_0). \tag{A.3}$$

Em particular,

$$(R - |x - x_0|)^a u(x) \geqslant u(x_0).$$

E assim concluímos (A.1), denotando $\sigma_R = \frac{R-|x-x_0|}{2}$. Da desigualdade (A.3), obtemos

$$\begin{aligned} u(x) &\geqslant \left(\frac{R - |y - x_0|}{1 - |x - x_0|}\right)^a u(y), \quad \text{para todo } y \in \overline{B}_R(x_0) \\ &\geqslant 2^{-a} u(y), \quad \text{para todo } y \in B_{\sigma_R}(x_0). \end{aligned}$$

Portanto,

$$u(x) \geqslant \frac{1}{2^a} \max_{B_{\sigma_R}(x_0)} u.$$

■

Usando os mesmos argumentos, podemos provar o seguinte Lema

Lema A.2 *Seja $u \in C^0\left(\overline{B_1^{-T}}\right)$ uma função positiva com $T \geqslant 0$. Então para todo $a > 0$, existe $x \in B_1 \cap \{x_n \geqslant -T\}$, tal que*

$$u(x) \geqslant 2^{-a} \max_{\overline{B_\sigma^{-T}}(x)} u \quad \text{e} \quad \sigma^a u(x) \geqslant 2^{-a} u(0).$$

Prova: Considere a função

$$v(y) = (1 - |y|)^a u(y).$$

Desde que u é contínua e positiva, é claro que v também o é e, por conseguinte, assume seu máximo sobre $\overline{B_1^{-T}}$ em algum ponto $x \in \overline{B}_1^{-T} = \overline{B}_1 \cap \{x_n \geqslant -T\}$. Como $v \equiv 0$, em $\partial B_1 \cap \{x_n \geqslant -T\}$ e por outro lado, v é positiva em $B_1 \cap \{x_n \geqslant -T\}$, segue que v assume seu máximo neste conjunto. Seja $x \in B_1 \cap \{x_n \geqslant -T\}$ com

$$v(x) := \max_{\overline{B}_1^{-T}} v \quad \text{e} \quad \sigma = \frac{1 - |x|}{2}.$$

Então para $y \in \overline{B}_1 \cap \{x_n \geqslant -T\}$

$$(1-|x|)^a\, u(x) = v(x) \geqslant v(y) = (1-|y|)^a\, u(y), \tag{A.4}$$

Afirmamos que $\overline{B}_\sigma(x) \subset \overline{B}_1$ e consequentemente obtemos o resultado. Com efeito, seja $w \in \overline{B}_\sigma(x)$, então

$$|w| \leqslant |w-x| + |x| \leqslant \sigma + |x| = \frac{1-|x|}{2} + |x| = \frac{1+|x|}{2} < 1.$$

Seguindo os mesmos passos do Lema A.1, concluimos que

$$u(x) \geqslant 2^{-a} \max_{\overline{B}_1^{-T}(x)} u.$$

De (A.4) concluimos também que

$$\sigma^a u(x) \geqslant 2^{-a} u(0).$$

■

A.2 Resultados sobre Equações Diferenciais Ordinárias

Nesta seção, apresentaremos um resultado elementar acerca das Equações Diferenciais Ordinárias necessária para a observação feitas no Capítulo 4.

Lema A.3 *Seja g um função real, contínua e estritamente positiva em $(0,\infty)$, tal que*

$$\liminf_{s\to\infty} g(s) > 0.$$

Então

$$u''(t) + g(u(t)) = 0, \quad 0 \leqslant t < \infty \tag{A.5}$$

não admite solução positiva.

Prova: Suponhamos que a equação diferencial ordinária (A.5) admita solução positiva u. Seja $v(t) = u'(t)$, então

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -g(u) \end{pmatrix}. \tag{A.6}$$

Se $v(0) < 0$, temos da segunda equação de (A.6) que $v(t) < v(0)$ para todo $t > 0$, pois g é uma função integrável (contínua) e positva. Então pela primeira equação, obtemos $u(t) < u(0) + v(0)t$, para $t > 0$. Isto é impossível para t suficientemente grande, pois u é positiva. Se $v(0) = 0$, usando argumento análogo, obtemos $u(t) < u(1) + v(1)t$, para $t > 1$, o que novamente é impossível para t suficientemente grande, já que u é uma solução positiva. Então, resta-nos o caso em que $v(t) > 0$, para todo $t \geqslant 0$. Neste caso, pela primeira equação, obtemos que $u(t) > u(0) > 0$, para todo t e pela hipótese sobre g e a segunda equação, existe $\delta > 0$, tal que $v'(t) < -\delta t$. Com efeito, existe $t_0(\delta)$, onde $\delta = \liminf g(x) > 0$, tal que para $t > t_0$, temos que $g(t) > \delta$. Assim $v'(t) = -g(u(t))$, o que implica dizer que $v(t) = v(0) - \int_0^{t_0} g(u(s))ds - \int_{t_0}^t g(u(s))ds$. Dessa forma, teremos

$$v(t) \leqslant v(0) - \int_0^{t_0} g(u)ds - \delta(t - t_0),$$

o que é um absurdo para t suficientemente grande, já que v é uma função positiva.

■

A.3 Um lema de fronteira

Nesta seção, seja Ω seja um domínio de $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, tal que a origem pertence a sua fronteira. Assumir que a origem esteja próxima da fronteira consiste em que duas transversalidades intersectam superfícies de classe C^2 $\rho = 0$ e $\sigma = 0$. Suponhamos também $\rho, \sigma > 0$ em Ω. Seja $\nu(y)$ o vetor normal unitário exterior a superfície $\{\sigma = 0\} \cap \partial\Omega$ em y.

Seja $\{b_i(y)\}$ funções L^∞ e $\{a_{ij}(y)\}$ funções matrizes de ordem n satisfazendo, para alguma constante positiva $\Lambda \geqslant 1$,

$$\Lambda^-1|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j} a_{ij}(y)\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda|\xi|^2, \quad \text{para } \xi \in \mathbb{R}^n, y \in \Omega.$$

Sob esta configuração, temos

Lema A.4 *Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ uma função positiva em Ω, com $u(0) = 0$ e suponha que para alguma constante positiva A*

$$\begin{cases} \Delta u \leqslant Au, & \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} \geqslant -Au, & \text{sobre } \{\sigma = 0, \rho > 0\}, \end{cases} \tag{A.7}$$

onde ν denota o vetor unitário normal. Então

$$\frac{\partial u}{\partial \nu'}(0) > 0,$$

onde ν' é qualquer vetor no espaço tangente $\{\sigma = 0\}$ em $\{\rho > 0\}$.

Prova: Desde que o problema é invariante sob mudança de coordenadas, e as escolhas de ρ e σ representam a fronteira de superfícies. Podemos supor, sem perda de generalidade que $\rho(y) = y_1$ e $\sigma(y) = y_2$. Escolhendo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, obtemos que

$$\{y_1 > 0\} \cap \{y_2 > 0\} \cap B_{2\epsilon} \subset \Omega.$$

Queremos construir uma função $\phi > 0$ em Ω, tal que

$$\begin{cases} \Delta\phi \geqslant A\phi, & \text{em} \quad \Omega \cap B_\epsilon, \\ \phi = 0, & \text{em} \quad \{y_1 = 0\} \cap B_\epsilon, \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial \nu} \leqslant -A\phi, & \text{sobre} \quad \{y_2 = 0, y_1 > 0\} \cap B_\epsilon, \\ \phi \leqslant u, & \text{sobre} \quad \partial B_\epsilon \cap \overline{\Omega}, \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial \nu'}(0) > 0. \end{cases}$$

Uma vez construída tal função, o presente lema pode ser provado da seguinte maneira. Seja $\omega = u - \phi$, então obtemos através de um cálculo direto que

$$\begin{cases} -\Delta w + Aw \geqslant 0, & \text{em} \quad \Omega \cap B_\epsilon, \\ \omega \geqslant 0, & \text{em} \quad \{y_1 = 0\} \cap B_\epsilon, \\ \dfrac{\partial \omega}{\partial \nu} + A\omega \leqslant 0, & \text{sobre} \quad \{y_2 = 0, y_1 > 0\} \cap B_\epsilon. \end{cases}$$

Como consequência do Princípio do Máximo Forte, segue que

$$\omega \geqslant 0, \quad \text{sobre } \overline{\Omega \cap B_\epsilon}.$$

Como $\omega(0) = 0$, temos que

$$\frac{\partial \omega}{\partial \nu'}(0) \geqslant 0.$$

Consequentemente
$$\frac{\partial u}{\partial \nu'}(0) \geqslant \frac{\partial \phi}{\partial \nu'}(0) > 0.$$

Tal função pode ser dada explicitamente por

$$\phi(y) = \delta \left(e^{\alpha^2 y_1 - 1} \right) e^{\alpha y_2}, \qquad \text{para } y \in \Omega,$$

onde $\alpha > 1$ será uma constante suficientemente e $\delta > 0$ suficientemente pequeno, a serem escolhidos.

Por um cálculo direto, para α suficientemente grande, obtemos

$$\Delta\phi(y) = \delta\alpha^4 e^{\alpha y_2} e^{\alpha^2 y_1} + \alpha^2 \phi(y) \geqslant A\phi(y).$$

Sobre $\{y_2 = 0\}$, para α suficientemente grande, obtemos

$$\frac{\partial \phi}{\partial y_2} = \alpha\phi \geqslant A\phi.$$

Agora fixamos o valor de α, tal que as expressões acima sejam asseguradas. Desde que $u > 0$ em $\overline{\Omega} \setminus \{0\}$, escolhemos $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$u > \phi, \text{ sobre } \partial B_\epsilon \cap \overline{\Omega}.$$

Finalmente, é imediato ver que

$$\frac{\partial \phi}{\partial y_1}(0) = \delta\alpha^2 > 0,$$

e portanto o lema está provado.

■

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] H. Berestycki, L. Caffarelli and L. Nirenberg. *Symmetry for elliptic equations in a half space*. Boundary value problems for partial differential equations and applications. 24-42 RMA Res. Notes Appl. Math. 29, Masson, Paris, 1993.

[2] H. Berestycki, L. Caffarelli and L. Nirenberg. *Inequalities for second-order elliptic equations with applications to unbounded domains*. I, A celebration of John F. Nash, Jr. Duke Math. J. 81 (1996), 467-494.

[3] H. Berestycki, L. Caffarelli and L. Nirenberg. *Monotonicity for elliptic equations in unbounded Lipschitz domains*. Comm. Pure Appl. Math. 50 (1997), 1089-1111.

[4] H. Berestycki and L. Nirenberg. *Monotonicity, symmetry and antisymmetry of solutions of semilinear elliptic equations*. J. Geom. Phys. 5 (1988), 237-275.

[5] H. Berestycki and L. Nirenberg. *Some qualitative properties of solutions of semilinear elliptic equations in cylindrical domains*. Analysis, et cetera, 115-164, Academic Press, Boston, MA, 1990.

[6] H. Berestycki and L. Nirenberg. *On the method of moving planes and the sliding method*. Bol. Soc. Bras. Mat. 22 (1991), 1-37.

[7] H. Berestycki and L. Nirenberg. *Travelling fronts in cylinders*. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Lineaire 9 (1992), 497-572.

[8] H. Berestycki, L. Nirenberg and S.R.S. Varadhan. *The principle eigenvalues for second order elliptic operators in general domains*. Comm. Pure Appl. Math. 47 (1994), 47-92.

[9] G. Bianchi. *Non-existence of positive solutions to semilinear elliptic equations on* $\mathbb{R}^n$ *or* $\mathbb{R}^n_+$ *through the method of moving planes*. Comm. Partial Differential Equations 22 (1997), no. 9-10, 1671-1690.

[10] H. Brezis. *Semilinear equations in* $\mathbb{R}^N$ *without conditions at infinity*. Applied Math. and Optimization, 12 (1984), 271-282.

[11] H. Brezis, Y. Y. Li and I. Shafrir. *A sup + inf inequality for some nonlinear elliptic equations involving exponential nonlinearities*. J. Funct. Anal. 115 (1993), 344-358.

[12] L. Caffarelli, B. Gidas and J. Spruck. *Asymptotic symmetry and local behavior of semilinear equations with critical Sobolev growth*. Comm. Pure Appl. Math. 42 (1989), 271-297.

[13] C. C. Chen and C. S. Lin. *Estimates of the conformal scalar curvature equation via the method of moving planes*. Comm. Pure Appl. Math. 50 (1997), 971-1017.

[14] C. C. Chen and C. S. Lin. *Local behavior of singular positive solutions of semilinear elliptic equations with Sobolev exponent*. Duke Math. J. 78 (1995), 315-334.

[15] C. C. Chen and C.S. Lin. *A sharp sup+inf inequality for a nonlinear elliptic equation in* $\mathbb{R}^2$. Comm. Anal. Geom. 6 (1998), 1-19.

[16] C. C. Chen and C. S. Lin. *A Harnack inequality and local asymptotic symmetry for singular solutions of nonlinear elliptic equations*, preprint.

[17] W. Chen and C. Li. *Classification of solutions of some nonlinear elliptic equations*. Duke Math. J. 63 (1991), 615-623.

[18] M. Chipot, M. Chlebik, M. Fila and I. Shafrir. *Existence of positive solutions of a semilinear elliptic equation in* $\mathbb{R}^n_+$ *with a nonlinear boundary condition*. J. Math. Anal. Appl. 223 (1998), 429-471.

[19] M. Chipot, I. Shafrir and M. Fila. *On the solutions to some elliptic equations with nonlinear Neumann boundary conditions*. Adv. Diff. Equat. 1 (1996), 91-110.

[20] K. S. Chou and T. Y. H. Wan. *Asymptotic radial symmetry for solutions of* $\Delta u + e^u = 0$ *in a punctured disc*. Pacific J. Math. 163 (1994), 269-276.

[21] J. F. Escobar. *Uniqueness theorems on conformal deformation of metric. Sobolev inequalities, and an eigenvalue estimate*. Comm. Pure Appl. Math. 43 (1990), 857-883.

[22] L. Evans. *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics. Vol 19. American Mathematical Society.

[23] B. Gidas, W. M. Ni and L. Nirenberg. *Symmetry and related properties via the maximum principle*. Commun. Math. Phy. 68 (1979), 209-243.

[24] B. Gidas, W. M. Ni and L. Nirenberg.. *Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in* $\mathbb{R}^n$. Mathematical Analysis and Applications, vol 7A, (1981) 369-402.

[25] B. Gidas and J. Spruck. *Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations*. Comm. Pure Appl. Math. 34 (1981), 525-598.

[26] D. Gilbarg and N. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Reprint of the 1998 ed. Springer, 2001.

[27] B. Hu. *Nonexistence of a positive solution of the Laplace equation with a nonlinear boundary condition*. Differential and Integral Equations 7 (1994), 301-313.

[28] B. Hu and H-M. Yin. *The profile near blow up time for solution of the heat equation with a nonlinear boundary condition*. Trans. Amer. Math. Soc. 346 (1994), 117-135.

[29] Peter D. Lax. *On the existence of Green's Function*. Selected Papers Volume I, 2005 - Springer.

[30] Y. Y. Li. *A Harnack type inequality: the method of moving planes*. Comm. Math. Phys. 200 (199), 421-444.

[31] Y. Y. Li. *Remark on some conformally invariant integral equations: the method of moving spheres*.J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 6 (2004), no.2, 153-180.

[32] Y. Y. Li and L. Zhang. *Liouville-type theorems and Harnack-type inequalities for semilinear elliptic equations*. Journal D'Analyse Mathématique, Vol. 90 (2003).

[33] Y. Y. Li and M. Zhu. *Uniqueness theorems through the method of moving spheres*. Duke Math 80 (1995), 383-417.

[34] Y. Lou and M. Zhu. *Classifications of nonegative solutions to some elliptic problems*. Differential Integral Equations 12 (1999), 601-612.

[35] M. Obata. *The conjectures on conformal transformations of Riemannian Manifolds*. J. Diff. Geom. 6 (1971), 247-258.

[36] B. Ou. *Positive harmonic functions on the upper half space satisfying a nonlinear boundary condition*. Diff. and Integral Eq. (1996), 1157-1164.

[37] B. Ou. *Positive harmonic funtions on the upper half space satisfying a nonlinear boundary condition*. Diff. and Integral Equations 9 (1996), 1157-1164.

[38] Ponce, Augusto. *Métodos Clássicos em Teoria do Potencial.* Université Catholique de Louvain.

[39] R. Schoen. *Courses at Stanford University*, 1998 and New York University, 1989.

[40] J. Serrin. *A symmetry problem in potential theory*. Arch. Rat. Mech. Anal. 43 (1971), 304-318.

[41] L. Zhang. *Liouville type theorems on two dimensional semilinear elliptic equations*, preprint.