ISSN 1979-8911

SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN NON-LINIER DENGAN MENGGUNAKAN METODE NEWTON-RAPHSON MODIFIKASI *FUZZY*

Elis Ratna Wulan[1], Ginanjar Pajarudin[2], Dian Nuraiman[3]

Jurusan Matematika,Fakultas Sains dan Teknologi

[1]elis_ratna_wulan@uinsgd.ac.id, [2]ginanjarpajarudin@yahoo.com,

[3]dianuraiman@uinsgd.ac.id

ABSTRAK

Persamaan non-linear merupakan salah satu kajian dalam ilmu matematika. Beberapa metode numerik telah dikembangkan untuk menyelesaikan persamaan non linear. Metode yang digunakan pada penelitian ini adalah metode Newton Raphson Modifikasi *Fuzzy*. Untuk menghindari perhitungan $f'(x_n) = 0$ diterapkan modifikasi metode Newton-Raphson, dengan mengganti $f'(x_n)$ dalam formula Newton Raphson menggunakan tabel interpolasi, di mana interpolasi ditulis dalam bentuk Newtonian. Kemudian dapat dihitung nilai taksiran untuk $f(x_n)$ menggunakan interpolasi Newton. Metode penyelesaian persamaan non linear ini akan dibahas pada contoh studi kasus. Persamaan Non Linier yang digunakan pada penelitian ini adalah $f\,[x_1,\, x_2,\, x_3] = [3,4,5]\ [x_1,\, x_2,\, x_3]^2 - [1,2,3]\ [x_1,\, x_2,\, x_3] + [1,2,3]$ dengan menggunakan metode Newton Raphson modifikasi *Fuzzy* diperoleh nilai taksiran untuk $f[3,4,5] = [-5{,}57.99999959{,}184.3059112]$.

Kata kunci : Bilangan Segitiga *Fuzzy*, Persamaan Non Linear, Metode Newton Raphson, Metode Secant, Interpolasi.

ABSTRACT

Non linear eqution is one of discussion in Mathematics. Several numerical method have been develoved to solve non-linear equations. In this paper, the method used a *Fuzzy* modified Newton Raphson method. To avoid the calculation of $f'(x_n) = 0$, use method of modified Newton Raphson method, by replacing $f'(x_n)$ in Newtons Raphson formula using the interpolation table , for this we written in the form of Newtonian. Then the approximation value of $f(x_n)$ can be calculated using Newton Interpolation. Several methods for solution of non linear equations will be discussed in the example case study. Non-Linier equations used in the study is $f\,[x_1,\, x_2,\, x_3] = [3,4,5]\ [x_1,\, x_2,\, x_3]^2 - [1,2,3]\ [x_1,\, x_2,\, x_3] + [1,2,3]$. Using a

ISSN 1979-8911

Fuzzy Modified Newton Raphson method , the approximation for $f[3,4,5] = [-5,57.99999959,184.3059112]$.

Key Word : Triangular *Fuzzy* Number, Non Linear Equations, Newton Raphson Method, Secant Method, Interpolation.

1. Pendahuluan

Metode Numerik adalah teknik di mana masalah matematika diformulasikan sedemikian rupa sehingga dapat diselesaikan oleh pengoperasian aritmatika [1]. Metode numerik ini digunakan untuk menyelesaikan persoalan di mana perhitungan secara analitik tidak dapat digunakan. Metode numerik ini berangkat dari pemikiran bahwa permasalahan dapat diselesaikan dengan menggunakan pendekatan-pendekatan yang dapat dipertanggungjawabkan secara analitik.

Banyak metode numerik yang telah dikembangkan untuk memecahkan persoalan nonlinear diantaranya seperti Bisection, Secant, metode Newton Raphson, metode pengali Lagrange dan metode Karush-Kuhn Tucker. Akan tetapi, metode-metode tersebut sering tidak digunakan untuk persoalan program nonlinear berskala besar misalnya metode Bisection yang tidak dapat digunakan untuk persamaan untuk akar ganda, metode Newton Raphson dan Secant yang tidak selalu konvergen, jika mengalami nilai awal yang salah. Sekalipun telah dilakukan beberapa perbaikan pada metode-metode tersebut.

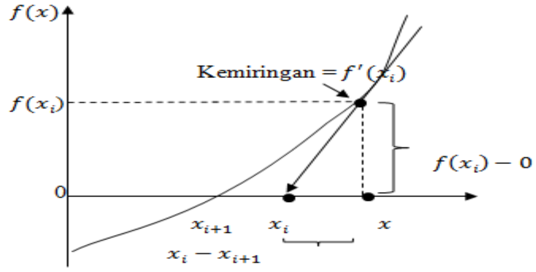
Metode iteratif adalah suatu prosedur matematika di mana akan didapat nilai yang diinginkan dari persamaan-persamaan matematika dengan terlebih dahulu memberikan nilai awal. Nilai awal adalah nilai sembarang yang dimasukkan diawal. Dengan memasukkan nilai awal tersebut, dan melakukan perhitungan sampai *error* mendekati atau bahkan nol. Kondisi ini yang disebut sebagai kondisi konvergen.

Salah satu pendekatan numerik adalah mencari nilai-nilai x yang memenuhi persamaan $f(x) = 0$. Beberapa metode numerik telah dikembangkan untuk menghitung perkiraan solusi persamaan nonlinear termasuk metode Newton Raphson. Persamaan-persamaan yang panjang dan rumit memperlihatkan sejumlah kesukaran pada kebanyakan metode numerik, khususnya pada metode Newton-Raphson. Metode ini kemudian dikembangkan dengan menggunakan Interpolasi.

2. Pembahasan

2.1.Metode Newton Raphson

Formulasi Untuk Metode Newton yaitu: $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x)}{f'(x)}$



Gambar 1. Penjelasan grafik dari metode Newton Raphson [1].

Metode Newton Raphson adalah metode yang paling banyak digunakan dari semua formula penempatan akar. Jika tebakan awal dari akar adalah x_i, sebuah garis singung dapat diperluas dari titik $[x_{i,}, f(x_i)]$. Titik di mana garis singgung ini memotong sumbu x biasanya menunjukkan sebuah taksiran perbaikan dari akar.

Metode Newton Raphson dapat diturunkan berdasarkan interpretasi geometrik (sebuah metode alternatif yang didasarkan pada Deret Taylor). Seperti pada Gambar 1, turunan pertama pada x_i adalah ekuivalen terhadap kemiringan[1]:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i)-0}{x_i - x_{i+1}}$$

yang dapat diatur kembali menjadi:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

yang dinamakan formula Newton Raphson.

Prosedur Metode Newton Raphson[7]: menentukanx_0 sebagai titik awal, kemudian menarik garis lurus yang menyinggung titik $f(x_0)$. Hal ini berakibat garis tersebut memotong sumbu $-x$ di titik x_1. Setelah itu diulangi langkah sebelumnya tapi x_1 sekarang dianggap sebagai titik awalnya. Dengan mengulang langkah-langkah sebelumnya akan mendapatkan $x_2, x_3, \dots x_n$ dengan x_n yang diperoleh adalah bilangan riil yang merupakan akar atau mendekati akar yang sebenarnya.

Perhatikan Gambar 1 untuk menurunkan rumus Metode Newton-Raphson.

Persamaan garis 1:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

x_1 adalah perpotongan garis l dengan sumbu $- x$

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

ISSN 1979-8911

$y = 0$ dan $x = x_1$ maka koordinat titik $(x_1, 0)$

$$-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = (x_1 - x_0)$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$\vdots$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

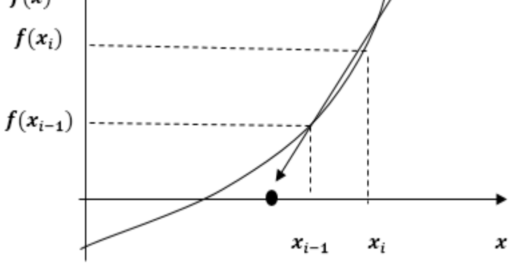
untuk $n = 1,2,3, \ldots$

2.2.Metode Secant

Masalah potensial dalam melaksanakan metode Newton Raphson adalah evaluasi turunan. Walaupun ini bukan tidak menyenangkan untuk polinomial dan banyak fungsi lainnya, ada beberapa fungsi yang turunannya terlalu sukar dievaluasikan. Untuk kasus-kasus ini, turunan tersebut dapat didekati oleh suatu diferensi terbagi hingga, seperti dalam Gambar 2.

Formula Untuk Metode Secant yaitu:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1})f(x_i)}$$



Gambar 2. Penjelasan Grafik Mengenai Metode Secant [1]

Kelebihan Metode Secant adalah dapat digunakan untuk mencari akar-akar persamaan dari persamaan polinomial kompleks, atau persamaan yang turunan pertamanya sangat sulit didapatkan.

Algoritma Metode Secant:

1. Definisikan fungsi $F(x)$
2. Definisikan torelansi *error* (e) dan iterasi maksimum (n)
3. Masukkan dua nilai pendekatan awal yang diantaranya terdapat akar yaitu x_0 dan x_1, sebaiknya gunakan metode tabel atau grafis untuk menjamin titik pendekatan yang konvergensinya pada akar persamaan yang diharapkan.
4. Hitung $F(x_0)$ dan $F(x_1)$
5. Lakukan iterasi
6. Hitung nilai taksiran akar selanjutya.

Rumus:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$$

Akar persamaan adalah nilai x yang terakhir.

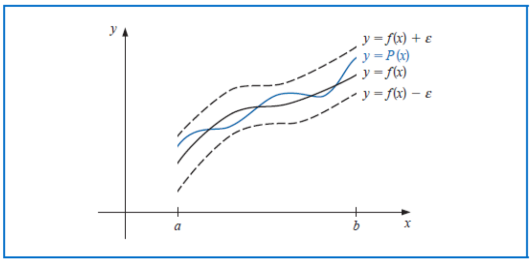
2.3.Interpolasi Newton

Secara umum, $n + 1$ titik data misal (x_0, x_0),(x_0, x_0),...,(x_0, x_0)

dapat dicocokkan dengan suatu polinomial berderajat n yang mempunyai bentuk [8].

$$y = f_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-}).$$

Untuk lebih jelasnya disajikan pada Gambar 3.



Gambar 3. Penjelasan Grafik Mengenai Interpolasi Newton [8]

Selanjutnya akan menentukan $a_0, a_1, \dots a_n$

$$a_0 = y_0$$

$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = y[x_1, x_0]$$

$$a_2 = \frac{y[x_2, x_1] - y[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} = y[x_2, x_1, x_0]$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{y[x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1] - y[x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1, x_0]}{x_n - x_0} = y[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0]$$

Nilai fungsi pada kurung siku dinamakan beda terbagi hingga dan didefinisikan sebagai

i. Beda terbagi hingga pertama

$$y[x_i, x_j] = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}$$

ii. Beda terbagi hingga kedua

$$y[x_i, x_j, x_k] = \frac{y[x_i, x_j] - y[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$$

iii. Beda terbagi hingga ke-n

$$y[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0] = \frac{y[x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1] - y[x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1, x_0]}{x_n - x_0}$$

Untuk lebih jelasnya disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Diferensiasi Terbagi

i	x_i	$y_i = f(x_i)$	Pertama	Kedua	Ketiga
0	x_0	$y(x_0)$	$y[x_1, x_0]$	$y[x_2, x_1, x_0]$	$y[x_3, x_2, x_1, x_0]$
1	x_1	$y(x_1)$	$y[x_2, x_1]$	$y[x_3, x_2, x_1]$	
2	x_2	$y(x_2)$	$y[x_3, x_2]$		
3	x_3	$y(x_3)$			

Pada Tabel 1 dilanjutkan sampai ke$-n$ sehingga interpolasi newton menjadi

$$f_n(x) = f_n(x_0) + (x - x_0)y[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1)y[x_2, x_1, x_0] + \cdots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-})y[x_n, x_{n-1}, \dots, x_0]$$

ISSN 1979-8911

2.4.Bilangan *Fuzzy*

Bilangan *fuzzy* yang paling banyak dipakai dalam aplikasi adalah bilangan *fuzzy* dengan fungsi keanggotaan segitiga, yang disebut bilangan *fuzzy* segitiga, dan bilangan *fuzzy* dengan fungsi keanggotaan trapesium yang disebut bilangan *fuzzy* trapesium [5].

a. Bilangan Segitiga *Fuzzy*

Di antara berbagai bentuk bilangan *fuzzy*, bilangan segitiga *fuzzy* adalah yang paling populer. Definisi bilangan segitiga *fuzzy* adalah bilangan *fuzzy* direpresentasikan dengan tiga poin mengikuti [6]:

$$A = (a_1, a_2, a_3)$$

Representasi ini ditafsirkan sebagai fungsi keanggotaan.

$$\mu_{(A)} \begin{cases} 0, & x < b \\ \dfrac{x-a_1}{a_2-a_1}, & a_1 \leq x \leq a_2 \\ \dfrac{a_3-x}{a_3-a_2}, & a_2 \leq x \leq a_3 \\ 0, & x > b \end{cases}$$

b. Operasi Pada Bilangan Segitiga *Fuzzy*

Misalkan bilangan segitiga *fuzzy* A dan B didefinisikan sebagai [6]:

$A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$

i. $A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3]$
ii. $A - B = [a_1 - b_3, a_2 - b_2, a_3 - b_1]$
iii. $kA = [ka_1, ka_2, ka_3]$ untuk $k \geq 0$
iv. $kA = [ka_3, ka_2, ka_1]$ untuk $k < 0$
v. $AxB = \left[a_1\, x\, b_1, a_2\, x\, b_2, a_3\, x\, b_3\right]$
vi. $\frac{A}{B} = \left[\frac{a_1}{b_3}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_1}\right]$

Adapun sistem persamaan linier fuzzy dijelaskan berikut ini. Diberikan sistem persamaan linear *n* variabel dan *n* persamaan dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$Ax = y \qquad (1)$$

dengan A matriks persegi yang entri-entriya bilangan real, dan x, y adalah vektor-vektor di dalam R^n. Metode-metode untuk menyelesaikan persamaan (1) dapat dilihat dalam [11].

Model permasalahan sistem persamaan linear *fuzzy* dijelaskan sebagai berikut :

Diberikan $u_1, u_2, \cdots, u_n, v_1, v_2, \cdots, v_n \in F$ dan $a_{i,j} \in R$ untuk $1 \le i, j \le n$.

Sistem persamaan

$$\begin{aligned} a_{1,1}u_1 + a_{1,2}u_2 + \cdots + a_{1,n}u_n &= v_1 \\ a_{2,1}u_1 + a_{2,2}u_2 + \cdots + a_{2,n}u_n &= v_2 \\ \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad &\cdots\cdots \\ a_{n,1}u_1 + a_{n,2}u_2 + \cdots + a_{n,n}u_n &= v_n \end{aligned} \qquad (2)$$

dinamakan sistem persamaan linear *fuzzy* (SPL-*fuzzy*).

Sistem persamaan (2) dapat ditulis dalam bentuk matriks $AU = V$ dengan $U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ dan

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Model sistem persamaan linear (2) mempunyai solusi *fuzzy* jika terdapat vektor $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ di dalam F^n sedemikian sehingga $\sum_{k=1}^{n} \overline{a_{j,k}x_j} = \overline{v}_j$ dan $\sum_{k=1}^{n} \underline{a_{j,k}x_j} = \underline{v}_j$, untuk setiap $j = 1, 2, \cdots, n$.

Mengingat operasi aljabar pada bilangan *fuzzy*, fungsi-fungsi $\overline{v}_j$ dan $\underline{v}_j$ dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari $\overline{x}_j$ dan $\underline{x}_j$. Sistem persamaan (2) diubah ke bentuk (2n) variabel dan (2n) persamaan menjadi

$$BX^* = V^* \qquad (3)$$

dengan $B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,2n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{2n,1} & b_{2n,2} & \cdots & b_{2n,2n} \end{bmatrix}$,

$X^* = \left[\underline{x}_1, \cdots, \underline{x}_n, -\overline{x}_1, \cdots, -\overline{x}_n\right]^T$ dan

$V^* = \left[\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n, -\overline{v}_1, \cdots, -\overline{v}_n\right]^T$.

Entri-entri $b_{i,j}$ ditentukan sebagai berikut:

- jika $a_{i,j} \ge 0$ maka $b_{i,j} = a_{i,j}$ dan $b_{i+n,j+n} = a_{i,j}$
- jika $a_{i,j} < 0$ maka $b_{i,j+n} = -a_{i,j}$ dan $b_{i+n,j} = -a_{i,j}$
- $b_{i,j} = 0$ untuk lainnya.

Persamaan (3) bukan sistem persamaan linear *fuzzy*. Persamaan (3) merupakan persamaan linear biasa yang nilai variabelnya berada dalam ruang fungsi. Dengan menggunakan persamaan (3), dimungkinkan sistem

ISSN 1979-8911

persamaan linear *fuzzy* dapat diselesaikan melalui penyelesaian sistem persamaan linear biasa. Lebih lanjut, matriks B pada persamaan (3) dapat ditulis dalam bentuk matriks blok

$B=\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix}$, sehingga matriks koefesien A pada persamaan (2) adalah $A=B_1-B_2$.

Teorema 1

Diberikan $B=\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix}$ *adalah matriks koefesien pada persamaan (3). Matriks B tak-singular jika dan hanya jika matriks-matriks* $A=B_1-B_2$ *dan* B_1+B_2 *keduanya tak-singular*.

Bukti :

(⇒) Dengan menggunakan operasi elementer baris/kolom pada matriks $B=\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix}$, didapat matriks $C=\begin{bmatrix} B_1+B_2 & B_1+B_2 \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix}$. Jika matriks C dikenai operasi elementer jumlahan dua kolom, didapat $D=\begin{bmatrix} B_1+B_2 & 0 \\ B_2 & B_1-B_2 \end{bmatrix}$.

Matriks C adalah matriks yang dihasilkan dari operasi elementer jumlahan dua baris/kolom dari matriks B. Sedangkan matriks D adalah matriks yang dihasilkan dari operasi elementer jumlahan dua baris/kolom dari matriks C.

Hal ini berakibat,

$$\det(B) = \det(C) = \det(D),$$

sehingga $\det(B) = \det(D)$

$= \det(B_1 + B_2).\det(B_1 - B_2)$

Karena B tak-singular maka $\det(B) \neq 0$ dan

$\det(B_1 + B_2).\det(B_1 - B_2) = \det(B) \neq 0$. Hal ini mengakibatkan $\det(B_1 + B_2) \neq 0$ dan $\det(B_1 - B_2) \neq 0$. Jadi matriks $A=B_1-B_2$ dan B_1+B_2 keduanya tak-singular.

(⇐) Diketahui matriks $A=B_1-B_2$ dan B_1+B_2 keduanya tak-singular. Jadi $\det(B_1 + B_2) \neq 0$ dan $\det(B_1 - B_2) \neq 0$.

Dengan cara serupa seperti pada bagian sebelumnya, didapat

$$\det(B) = \det(C) = \det(D)$$

dengan $C = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 & B_1 + B_2 \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix}$ dan

$D = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 & 0 \\ B_2 & B_1 - B_2 \end{bmatrix}$.

Hal ini berakibat

det(B) = det(D)

= det(B_1 + B_2) · det(B_1 − B_2) ≠ 0, karena nilai det(B_1 + B_2) ≠ 0 dan nilai

det(B_1 −B_2) ≠ 0. Sehingga B adalah matriks tak-singular. Bukti selesai.

Teorema 2

Diberikan $B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix}$ *adalah matriks koefesien pada persamaan (3). Jika invers matriks B ada, maka inversnya berbentuk* $B^{-1} = \begin{bmatrix} M & N \\ N & M \end{bmatrix}$.

Bukti :

Misalkan $b_{i,j}$ dan $b^*{}_{i,j}$ berturut-turut menyatakan entri matriks B dan B^{-1} pada baris ke-i dan kolom ke-j. Karena $B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} adj(B)$, maka

$$b^*{}_{i,j} = \frac{(-1)^{i+j} \det(B_{j,i})}{\det(B)} \quad (4)$$

dengan $B_{j,i}$ sub matriks yang diperoleh dengan cara mengeliminasi baris ke-j dan kolom ke-i dari matriks B.

Perhatikan sub matriks $B_{j+n,i}$ dan $B_{j,i+n}$. Matriks $B_{j+n,i}$ dapat diperoleh melalui operasi elementer pertukaran baris dan kolom dari $B_{j,i+n}$ sebanyak p kali, dengan p bilangan genap. Oleh karenanya,

det($B_{j+n,i}$) = $(-1)^p$ det($B_{j,i+n}$) =

det($B_{j,i+n}$).

Dari persamaan (4) dan mengingat

det($B_{j+n,i}$) = det($B_{j,i+n}$), maka

$$b^*{}_{i+n,j} = \frac{(-1)^{i+n+j} \det(B_{j,i+n})}{\det(B)}$$

$$= \frac{(-1)^{i+n+j} \det(B_{j+n,i})}{\det(B)} = b^*{}_{i,j+n}$$

untuk setiap $1 \le i, j \le n$. Sampai di sini, didapat $B^{-1} = \begin{bmatrix} * & N \\ N & * \end{bmatrix}$

Perhatikan juga sub matriks $B_{j,i}$ dan $B_{j+n,i+n}$, untuk $1 \le i, j \le n$.

Karena $B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix}$ maka $B_{j+n,i+n}$ dapat diperoleh menggunakan operasi

 ISSN 1979-8911

elementer pertukaran baris dan kolom dari $B_{j,i}$ sebanyak q kali, dengan q bilangan genap. Oleh karenanya,

$$\det(B_{j,i}) = (-1)^q \det(B_{j+n,i+n})$$

$$= \det(B_{j+n,i+n}).$$

Hal ini berakibat

$$b^*_{i,j} = \frac{(-1)^{i+j}\det(B_{j,i})}{\det(B)}$$

$$= \frac{(-1)^{i+j}(-1)^{2n}\det(B_{j+n,i+n})}{\det(B)}$$

$$= \frac{(-1)^{(i+n)+(j+n)}\det(B_{j+n,i+n})}{\det(B)}$$

$$= b^*_{i+n,j+n}$$

untuk setiap $1 \le i, j \le n$.

Terbukti bahwa $B^{-1} = \begin{bmatrix} M & N \\ N & M \end{bmatrix}$.

Persamaan (3) merupakan perubahan bentuk dari sistem persamaan linear *fuzzy*. Walaupun persamaan (3) mempunyai solusi tunggal, tidak berarti sistem persamaan linear *fuzzy* langsung dipeeroleh solusinya. Jika B dalam (3) tak-singular, tidak ada jaminan bahwa $X = B^{-1}V \in F$, untuk setiap $V \in F$ [11].

2.5.Metode Newton Raphson Modifikasi *Fuzzy*

Metode Newton Raphson fuzzy adalah teknik optimasi klasik untuk memecahkan persamaan nonlinear. Dalam metode ini, dimulai dengan perkiraan awal x_0 dan menghasilkan urutan perkiraan [10].

Rumus Newton-Raphson

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0,1,\ldots \qquad (5)$$

Metode Newton mensyaratkan bahwa derivatif dihitung langsung. Dalam masalah yang paling praktis, fungsi tersebut dapat diberikan oleh rumus yang panjang dan rumit, dan karenanya ekspresi analitis untuk derivatif mungkin tidak mudah didapat. Hal ini jelas dari rumus untuk metode Newton bahwa itu akan gagal dalam kasus di mana derivatif adalah nol. Dalam situasi ini, mungkin tepat untuk mendekati turunan dengan menggunakan kemiringan garis melalui dua titik pada fungsi. Dalam hal ini, menggunakan metode secant. Untuk menghindari komputasi $f'(x)$ mungkin tidak selalu tersedia atau mungkin sukar untuk menghitung dan mempertahankan sifat konvergensi yang sangat baik dari metode Newton-

Raphson, $f'(x_n)$ diganti oleh $f\ [x_n, x_{n-1}]$ di persamaan (5) [10] .

Oleh karena itu persamaan (5) menjadi :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= x_n - \frac{f(x_n)}{f\ [x_n, x_{n-1}]}$$

$$= x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f\ (x_n) - f\ (x_{n-1})}{(x_n - x_{n-1})}} \qquad (6)$$

Di mana $f[x_n, x_{n-1}] = \frac{f\ (x_n) - f\ (x_{n-1})}{(x_n - x_{n-1})}$ adalah Diferensiasi Terbagi.

Sehingga persamaan (6) merupakan metode secant. Iterasi Newton Raphson membutuhkan dua fungsi evaluasi, $f\ (x)$ dan $f\ '(x)$ per iterasi. Dimulai dengan dua pendekatan awal x_0 dan x_1, dapat dihitung x_2 dengan metode secant. Kemudian diterapkan modifikasi metode Newton-Raphson untuk menghitung x_3,x_4,x_5,... menggunakan tabel interpolasi. Dengan mengganti *f'*(x_n) dalam persamaan Formula Newton Raphson (5) oleh $g_{n,k}$ *(x)*. Untuk itu, $g_{n,k}$ *(x)* ditulis dalam bentuk Newtonian sebagai

$$g_{n,k}(x) = f\ (x_0) + \sum_{i=1}^{k}[x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-i}] \prod_{j=0}^{i=1}(x - x_{n-j}) \qquad (7)$$

$$= f\ (x_0) + f[x_n, x_{n-1}](x - x_n) + f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}](x - x_n)(x - x_{n-1}) + \cdots + f[x_n, \dots, x_0](x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1)$$

Dimana $f[x_n, x_{n-1} ... x_{n-i}]$ diferensiasi terbagi dari $f\ (x)$. Dan didefinisikan diferensiasi terbagi sebagai

$$f[x] = f(x)$$

Misalkan diferensiasi terbagi dimisalkan sebagai:

Diferensiasi Terbagi Pertama.

$$f[x_n, x_{n-1}] = \frac{f_n - f_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$$

Diferensiasi Terbagi Kedua

$$f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] = \frac{f[x_n, x_{n-1}] - f[x_{n-1}, x_{n-2}]}{x_n - x_{n-2}}$$

Diferensiasi Terbagi Ketiga

$$f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2} x_{n-3},] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}]}{x_n - x_{n-3}}$$

$$\vdots$$

Diferensiasi Terbagi ke-*n*

$$f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0]}{x_n - x_0}$$

Dimisalkan juga

$$f[x_n, x_{n-1}] = \nabla f_n$$

 ISSN 1979-8911

$$f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] = \nabla^2 f_n$$

$$f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2} x_{n-3},] = \nabla^3 f_n$$

$$\vdots$$

$$[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0] = \nabla^n f_n$$

Dari persamaan (7) , $g_{n,k}$ *(x)* adalah komputasi dengan memisalkan x_i sebagai $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-i}$ untuk *i = 1,2, ... k.*

Menggunakan pemisalan ini dapat dihitung $g_{n,k}$ *(x)* pada persamaan (7), dan diberikan $x = x_n$ menjadi

$$g_{n,k}(x) = f\ (x_0) + \sum_{i=2}^{k} [x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-i}] \prod_{j=1}^{i-1} (x - x_{n-j})$$
(8)

a) Untuk k = 2 persamaan (8) menjadi

$$g_{n,k}(x) = f[x_n, x_{n-1}] + f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}](x_n - x_{n-1})$$

$$= \nabla f_n + \nabla^2 f_n (x_n - x_{n-1})$$

Sehingga diperoleh rumus Newton Raphson dimodifikasi untuk $k = 2$ adalah

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\nabla f_n + \nabla^2 f_n (x_n, x_{n-1})} \quad (9)$$

b) Untuk $k = 3$ persamaan (8) menjadi

$$g_{n,k}(x) = f[x_n, x_{n-1}] + f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}](x_n - x_{n-1}) + f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}](x_n - x_{n-1})(x_n - x_{n-2})$$

$$= \nabla f_n + \nabla^2 f_n (x_n - x_{n-1}) + \nabla^3 f_n (x_n - x_{n-1})(x_n - x_{n-2})$$

Sehingga diperoleh rumus Newton Raphson dimodifikasi untuk $k = 3$ adalah

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\nabla f_n + \nabla^2 f_n (x_n - x_{n-1}) + \nabla^3 f_n (x_n, x_{n-1})(x_n - x_{n-2})} \quad (10)$$

c) Untuk $k = m$ persamaan (8) menjadi

$$g_{n,k}(x) = f[x_n, x_{n-1}] + f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}](x_n - x_{n-1}) + f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}](x_n - x_{n-1})(x_n - x_{n-2}) + \cdots + f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}, \dots, x_{n-m}](x_n - x_{n-1})(x_n - x_{n-2}) \dots (x_n - x_{n-m})$$

$$= \nabla f_n + \nabla^2 f_n (x_n - x_{n-1}) + \nabla^3 f_n (x_n - x_{n-1})(x_n - x_{n-2}) + \cdots + \nabla^m f_n (x_n - x_{n-1})(x_n - x_{n-2}) \dots (x_n - x_{n-m})$$

2.6. Studi Kasus

Dengan menggunakan Metode Newton Raphson Modifikasi *Fuzzy* dapat dicari nilai taksiran persamaan non-linier pada suatu titik.

ISSN 1979-8911

Contoh Numerik:

Hitung $f[3,4,5]$ dari fungsi di bawah, dengan interpolasi newton orde ke 3 .$f[x_1, x_2, x_3] = [3,4,5][x_1, x_2, x_3]^2 - [1,2,3][x_1, x_2, x_3] + [1,2,3]$

Diberikan $x_0 = [1,2,3]$ dan $x_1 = [2,3,4]$, sehingga dihitung $f[x_0]$ dan $f[x_1]$, dimana:

$$f[x_0] = [3,4,5][x_1, x_2, x_3]^2 - [1,2,3][x_1, x_2, x_3] + [1,2,3]$$

$$f[1,2,3] = [3,4,5][1,2,3]^2 - [1,2,3][1,2,3] + [1,2,3] = [-5,14,47]$$

$$f[x_1] = [3,4,5][x_1, x_2, x_3]^2 - [1,2,3][x_1, x_2, x_3] + [1,2,3]$$

$$f[2,3,4] = [3,4,5][2,3,4]^2 - [1,2,3][2,3,4] + [1,2,3] = [1,32,81]$$

Sehingga diperoleh $f[x_0] = [-5,14,47]$ dan $f[x_1] = [1,32,81]$.

Kemudian untuk mencari x_2 menggunakan persamaan (6)

$$x_{1+1} = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f\,[x_1, x_0]}$$

$$= x_1 - \frac{f(x_1)}{\nabla f_1}$$

$$= x_1 - \frac{f(x_1)}{\frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}$$

$$= [2,3,4] - \frac{[-5,14,47]}{\frac{[1,32,81] - [-5,14,47]}{[2,3,4] - [1,2,3]}}$$

$$= [5.065217392, 2.222222222, 3.941860465]$$

Sehingga dapat dihitung $f[x_2]$

$$f[x_2] = [3,4,5][x_1, x_2, x_3]^2 - [1,2,3][x_1, x_2, x_3] + [1,2,3]$$

$f[5.065217392, 2.222222222, 3.941860465] = [3,4,5][5.065217392, 2.222222222, 3.941860465]^2 - [1,2,3][5.065217392, 2.222222222, 3.941860465] + [1,2,3]$

$$= [66.14370029, 17, 30864197, 75.62610224]$$

Kemudian untuk mencari x_3 menggunakan persamaan (9)

$$x_{2+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\nabla f_n + \nabla^2 f_n (x_n - x_{n-1})}$$

$$x_3 = [1.415129289, 1.125195618, 3.501920812]$$

Sehingga dapat dihitung $f[x_3]$

$$f[x_3] = [3,4,5][x_1, x_2, x_3]^2 - [1,2,3][x_1, x_2, x_3] + [1,2,3]$$

$f[1.415129289, 1.125195618, 3.501920812]$
$= [3,4,5][1.415129289, 1.125195618, 3.501920812]^2$
$- [1,2,3][1.415129289, 1.125195618, 3.501920812]$
$+ [1,2,3]$
$= [-3.497989719, 4.813869477, 62.90211757]$

Diferensiasi Terbagi Pertama.

i. $f[x_1, x_0] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = [-15.33333333, 18, -86]$

ii. $f[x_2, x_1] = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} = [-7.650549552, 18.88888889, 70.05715716]$

ISSN 1979-8911

iii. $f[x_3, x_2] = \frac{f_3 - f_2}{x_3 - x_2} =$ $[50.61361546, 11.38967136, 1.282915551]$

Diferensiasi Terbagi Kedua.

i. $f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2,x_1] - f[x_1,x_0]}{x_2 - x_0} =$ $[26.63261952, 4.000000001, 41.34697433]$

ii. $f[x_3, x_2, x_1] = \frac{f[x_3,x_2] - f[x_2,x_1]}{x_3 - x_1} =$ $[-12.94578352, 4.000000002, -3.456058775]$

Diferensiasi Terbagi Ketiga.

i. $f[x_3, x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_3,x_2,x_1] - f[x_2,x_1,x_0]}{x_3 - x_0} =$ $[-21.70043016, -0.000001143, 18.98494186]$

Sehingga taksiran nilai fungsi pada $[x_1, x_2, x_3] = [3,4,5]$ adalah :

$$g_{n,k}(x) = f\,(x_0) + \sum_{i=1}^{k} [x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-i}] \prod_{j=0}^{i=1} (x - x_{n-j})$$

$$g_{n,k}(3,4,5) = f\,(x_0) + f[x_1, x_0](x - x_0) + f[x_2, x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1) + f[x_3, x_2, x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$g_{n,k}(3,4,5) = [-5,14,47] + [-15.33333333,18,-86]([3,4,5] - [1,2,3]) + [26.63261952,4.000000001,41.34697433]([3,4,5] - [1,2,3])([3,4,5] - [2,3,4]) + [-21.70043016 - 0.000001143,18.98494186]([3,4,5] - [1,2,3])([3,4,5] - [2,3,4])([3,4,5] - [5.065217392,2.222222222,3.941860465])$$

$$g_{n,k}(3,4,5) = [-5,57.99999959,184.3059112]$$

3. Penutup

3.1. Simpulan

Pencarian dan perhitungan nilai suatu fungsi persamaan non-linier menggunakan metode Newton Raphson modifikasi *Fuzzy*, yaitu dengan menentukan tebakan awal (x_0) dan (x_1) kemudian menghitung (x_2) dengan menggunakan metode secant $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f\,(x_n) - f\,(x_{n-1})}{(x_n - x_{n-1})}}$. Kemudian untuk mencari $(x_3), (x_4), (x_5), \dots$ menggunakan metode Newton Raphson modifikasi *Fuzzy* $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f\,(x_0) + \sum_{i=2}^{k} [x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-i}] \prod_{j=1}^{i-1} (x - x_{n-j})}$ dengan i=1,2,3,...,k. Kemudian untuk mencari nilai taksiran pada $x = c$, subtistusikan semua informasi pada formula Polinomial Newton

$$g_{n,k}(x) = f\,(x_0) + \sum_{i=1}^{k} [x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-i}] \prod_{j=0}^{i=1} (x - x_{n-j}).$$

Hasil Perhitungan Solusi Metode Newton Raphson Modifikasi *Fuzzy* untuk persamaan

$$f[x_1, x_2, x_3] = [3,4,5][x_1, x_2, x_3]^2 - [1,2,3][x_1, x_2, x_3] + [1,2,3]$$

Diperoleh nilai taksiran pada $f[3,4,5]$ adalah $[-5,57.99999959,184.3059112]$

3.2. Saran

Dalam penelitian ini, kajian yang dilakukan baru dibatasi untuk solusi persamaan non-linier menggunakan Metode Newton Raphson modifikasi *Fuzzy*, sehingga perlu dikembangkan lagi penelitian selanjutnya untuk untuk mencari solusi persamaan non-linier dengan menggunakan Metode *Broyden, Fletcher, Goldfarb* dan *Shanno.*

DAFTAR PUSTAKA

[1] Chapra, S. C.1991. *Metode Numerik Untuk Teknik, dengan Penerapan pada Komputer Pribadi*. UI-Press, Jakarta.

[2] Ripai, 2012. *Pengantar Analisis dan Komputasi Metode Numerik*. Mataram : IAIN Mataram

[3] Heath, T Michael.2002. *An Intoducting Survey,* Department of Computer Science University of Illinois at Urbana-Champaign. 2002.

[4] Sri Kusumadewidan Sri Hartati. 2010. *"Neuro-fuzzy Integral Sistem Fuzzy dan Jaringan Syaraf".* Graha Ilmu, Yogyakarta.

[5] Shokri, Javad. 2008. *"Numerical Method for Solving Fuzzy Nonlinear Equations".* Applied Mathematical Sciences, Vol.2, No.24, 1191 -1203, Iran.

[6] Kwang F Lee .2005. *First course on Fuzzy Theory and Applications*, Springer, Germany.

[7] Nugroho, Didit B. 2009. *Metode Numerik Diktat Kuliah Universitas*, Kristen Satya Wacana, Salatiga

[8] Basuki , Achmad. 2005. *Metode Numerik dan Algoritma Komputasi ,* Yogyakarta : Andi

[9] Burden ,R.L. & Faires ,J.D.2010. *Numerical Analysis, Ninth Edition.* Brooks/Cole, Boston.

[10] Subash, R. And Sathya, S. 2011."*Numerical solution of fuzzy modified Newton-Raphson method for solving non-linear equation*" Vol.3.(11).390-392.India.

[11] Noranita, B. 2008. Sistem Persamaan Linier Fuzzy. Jurnal Matematika Vol. 11, No. 2, Agustus 2008, ISSN: 1410-8518, pp 94 – 99.