

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física



Dissertação de Mestrado

**Métodos perturbativos para obtenção de aproximações
analíticas em modelos de campos escalares**

Thiago Ferreira do Nascimento

João Pessoa

-2012-

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física



Dissertação de Mestrado

**Métodos perturbativos para obtenção de aproximações
analíticas em modelos de campos escalares**

Thiago Ferreira do Nascimento

Dissertação submetida ao Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba, sob orientação do professor Dionísio Bazeia como parte dos requisitos para obtenção do título de mestre em Física.

João Pessoa

-2012-

N244m Nascimento, Thiago Ferreira do.
Métodos perturbativos para obtenção de aproximações
analíticas em modelos de campos escalares / Thiago Ferreira
do Nascimento.- João Pessoa, 2012.
65f. : il.
Orientador: Dionísio Bazeia
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
1. Física. 2. Defeitos topológicos. 3. Campo escalar.
4. Perturbação.

UFPB/BC

CDU: 53(043)

Aos meus pais

Agradecimentos

Quero agradecer ao meu orientador, Prof. Dionísio Bazeia, que me acompanhou durante toda minha graduação no curso de Física, também transmissor responsável pelo saber aqui exposto.

Ao Prof. Roberto Menezes, por sua ajuda e interesse, avaliação e sábias ideias.

Ao Prof. Laércio Losano, por sempre pregar boas ideias e motivador nas atividades desenvolvidas na presente dissertação.

A todos os professores do Departamento de Física e professores de Matemática que ajudaram na expansão do meu raciocínio e conhecimento de outros ramos científicos.

Quero agradecer também a todas as pessoas que se fizeram presentes, que se preocuparam, que foram solidárias, que torceram por mim e direta ou indiretamente, contribuíram para execução dessa Dissertação de Mestrado.

A todos os meus amigos e amigas que sempre estiveram presentes me aconselhando e incentivando com carinho e dedicação.

A Capes pelo suporte financeiro.

"Todo grande progresso da ciência resultou de uma nova audácia da imaginação."

John Dewey

Resumo

Desenvolvemos um formalismo geral para os modelos descritos por um campo escalar real, em duas dimensões do espaço-tempo, perturbado por uma função que molda o padrão da dinâmica podendo também deformar o potencial. Consideramos inicialmente modelos que possuam soluções estáveis estática. Nosso formalismo torna possível obter soluções estáticas perturbada, a sua densidade de energia e energia, e para examinar a estabilidade linear correspondente. Trabalhamos com três formas distintas de perturbação: uma modificando a dinâmica, outras deformando o potencial, e outro como um produto atuando em ambos os meios. Particularmente, se temos perturbação apenas no potencial, vamos mostrar que as soluções perturbada estática são sempre estáveis. Caso contrário, podemos estabilizar a solução perturbada escolhendo o sinal do parâmetro α , de forma adequada. Consideramos algumas formas específicas da função de perturbação ilustrando com vários exemplos.

Abstract

We developed a general formalism for models described by one real scalar field, in two dimensional space-time, perturbed by a function which modifies the standard dynamics also deforming the potential. We consider starting models which has stable static solutions. Our formalism makes possible to obtain perturbed static solutions, its energy density and energy, and to examine the corresponding linear stability. We work with three distinct forms of perturbation: one modifying the dynamics, other deforming the potential, and another as a product acting in both ways. Particularly, if we have only the potential perturbation, we show that the perturbed static solutions is always stable. Otherwise, we can stabilize the perturbed solution choosing the sign of the parameter α , adequately. We consider some specific forms of the perturbation function, and illustrated with several examples.

Sumário

Agradecimentos	i
Resumo	iii
Abstract	iv
1 Introdução	1
1.1 Introdução	1
2 Teoria de um Campo Escalar Real	3
2.1 Conceitos fundamentais	3
2.2 Teoria Lagrangeana do Campo	4
2.3 Defeitos	7
2.3.1 Defeitos tipo Kink	8
2.3.2 Defeitos do tipo Lump	10
2.4 Soluções BPS	12
2.5 Estabilidade Linear	13
2.5.1 Exemplos	15
3 Formalismo de Primeira Ordem	18
3.1 Formalismo Geral	18
3.1.1 Estabilidade Linear	20

4	Formalismo com Perturbação	23
4.1	Novos Modelos	23
4.2	Aplicações	28
4.2.1	Perturbação na parte cinética do modelo	28
4.2.2	Perturbação na parte potencial do modelo	33
4.2.3	Perturbação do Produto	40
5	Conclusão	44
A		45
A.1	Obtenção do Potencial Mecânico Quântico Perturbado	45
A.2	Teorema de Derrick	47

Lista de Figuras

2.1	Potencial ϕ^4 adimensional referente a eq.(2.18)	8
2.2	Soluções do tipo kink e anti-kink dados pela eq.(2.20)	9
2.3	Densidade de energia referente ao modelo ϕ^4 , eq.(2.23)	10
2.4	Potencial ϕ^4 invertido, eq.(2.24)	10
2.5	Soluções do lump e anti-lump dados pela eq.(2.26)	11
2.6	Densidade de energia referente ao modelo ϕ^4 invertido, eq.(2.27)	12
4.1	Potencial quântico do modelo ϕ^4 (2.18) (linha sólida vermelha), e perturbado por (4.47), para $\alpha = 0.3$ (linha tracejada azul) e $\alpha = -0.3$ (linha pontilhada verde).	31
4.2	Potencial quântico do modelo ϕ^4 (2.18) (linha sólida vermelha), e perturbado por (4.49), para $\alpha = 0.3$ (linha tracejada azul) e $\alpha = -0.3$ (linha pontilhada verde).	32
4.3	Potencial quântico do modelo seno-Gordon (2.53) (linha sólida vermelha), e pelo potencial perturbado (4.53), para $\alpha = 0.3$ (linha azul tracejada) e $\alpha = -0.3$ (linha verde pontilhada).	33
4.4	Potencial mecânico quântico do modelo seno-Gordon (2.53) (linha sólida vermelha), e o potencial perturbado (4.55), para $\alpha = 0.3$ (linha azul tracejada) e $\alpha = -0.3$ (linha verde pontilhada).	34

4.5	Potencial ϕ^4 (2.18) (linha azul tracejada) e seu potencial perturbado (4.71) para $\alpha = 0.1$ (linha sólida vermelha), e para $\alpha = -0.1$ (linha sólida vermelha).	37
4.6	Potencial seno-Gordon (2.53) (linha tracejada azul) e o potencial perturbado (4.74) por $\alpha = 0.1$ (linha sólida vermelha).	37
4.7	Potencial seno-Gordon (2.53) (linha tracejada azul) e o potencial perturbado (4.77) por $s = 1$ and $\alpha = 0.1$ (linha sólida vermelha). . .	39
4.8	Potencial seno-Gordon (2.53) (linha tracejada azul) e o potencial perturbado (4.77) por $s = 2$ e $\alpha = 0.1$ (linha sólida vermelha). . . .	39
4.9	Potencial ϕ^4 (2.18) (linha tracejada azul) e o potencial efetivo (4.86) (linha sólida vermelha), para $m = n = 1$ e $\alpha = 0.1$, acima, e $\alpha = -0.1$, abaixo do potencial.	42
4.10	O potencial quântico do modelo ϕ^4 (2.18) (linha sólida vermelha), e o potencial mecânico quântico (4.89), para $n = m = 1$ com $\alpha = 0.2$ (linha tracejada azul) e com $\alpha = -0.2$ (linha pontilhada verde). . .	42
4.11	O potencial seno-Gordon (2.53) (linha tracejada azul) e o potencial efetivo (4.86) (linha sólida vermelha), para $m = n = 1$ e $\alpha = 0.1$, levanta, e $\alpha = -0.1$, abaixa o potencial.	43
4.12	Potencial mecânico quântico do modelo seno-Gordon (2.53) (linha sólida vermelha), e o potencial quântico perturbado (4.89), para $n = m = 1$ e $\alpha = 0.2$ (linha tracejada azul), e $\alpha = -0.2$ (linha pontilhada verde).	43

Capítulo 1

Introdução

1.1 Introdução

De todos os campos conhecidos como exemplo os espinorias, os tensoriais, os vetoriais, os escalares, qual seria o motivo de trabalhar, em teoria de campos, com o mais simples campo de todos, o campo escalar? É simples. Por não ser o mais sofisticado, não quer dizer que seja o de menos importância no mundo da física, ou que sua matemática seja tão transparente, engano quem pensava isso. Na verdade, o campo escalar possui uma gama de aplicações em diversos contextos, uma delas está no cenário cosmológico onde há a quintessência, a qual, trata-se como um combustível para a aceleração cósmica, ou seja, resultará na dinâmica dos campos associados ao universo. Outra aplicação está na matéria condensada com os defeitos [6], principalmente na formação de padrões [7] e em sistemas magnéticos [8]. Os defeitos aparecem naturalmente através da presença de transições de fase no início do universo [3], e pode ser usado também para descrever supergravidade [4] e no mundo das branas [5]. O tipo de defeito, bem

como suas propriedades dependem dos detalhes de cada quebra de simetria. Na química temos polímeros, na presença de defeitos para descrever uma estrutura conformacional [13]. Na biologia, trata-se em estruturas de macromoléculas como exemplo, o DNA [14]. Existem uma grande variedade de modelos com um ou mais campos escalares, cada um com suas características específicas. Este trabalho tem como objetivo estudar a teoria de perturbação em teoria de campos, desenvolvendo um formalismo geral para a obtenção analítica das soluções estáticas na teoria de campos padrão. O trabalho se encontra da seguinte forma:

O segundo capítulo trata-se de consolidar o embasamento teórico, analisando a teoria de campos a partir da densidade lagrangeana, e com isso obter uma elaboração do que se trata defeitos topológicos e não-topológicos, dando ênfase aos defeitos do tipo kink e lump. Há também um breve comentário passando ainda há um estudo do método BPS, Bogomol'nyi, Prasad e Sommerfeld, como ferramentas no trabalho. Na última seção do capítulo 2, falaremos sobre estabilidade linear, pois é nela que dá o ponto de partida para o nosso trabalho.

No terceiro capítulo iremos dar um rigor matemático mais elaborado ao trabalho fazendo-o da nossa ferramenta principal, o qual trabalharemos com uma densidade lagrangeana que dependa de um campo escalar ϕ e um termo cinético X . Ainda neste capítulo abordaremos a estabilidade linear com esse formalismo matemático.

No quarto capítulo trabalharemos com um modelo perturbativo levando em conta que, este modelo, deve retornar ao modelo tradicional e com isso iremos obter sua estabilidade linear, será trabalhado com exemplos que satisfazem características diferentes para o entendimento do conteúdo.

No quinto capítulo faremos um breve comentário, de modo geral, sobre a dissertação apresentando os principais resultados do mesmo.

Capítulo 2

Teoria de um Campo Escalar Real

2.1 Conceitos fundamentais

Quando se trata do estudo de algum objeto físico, devemos a priori saber o seu significado. O que quer dizer exatamente um *Campos Escalar*? A física lida com um amplo conjunto de grandezas. Dentro dessa gama enorme de grandezas existem algumas, cuja caracterização completa requer tão somente um número seguido de uma unidade de medida. Tais grandezas são chamadas grandezas escalares. Exemplos dessas grandezas são distância e a temperatura. Um campo escalar é uma função $\phi(Q)$ cujo valor em cada ponto Q do espaço-tempo se relaciona com uma grandeza escalar. A principal propriedade do campo é a invariância sob transformações de Lorentz, isto é, $\phi(Q') = \phi(Q)$. Se o ponto Q tem coordenadas $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ em um sistema de referencial inercial A e $x' = (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$ no sistema de referencial inercial A' , temos

$$\phi'(x') = \phi(x) \tag{2.1}$$

Um exemplo a ser analisado é a determinação da temperatura de qualquer ponto da atmosfera terrestre, para isso, deveríamos primeiramente preencher todos os pontos a partir das proximidades da superfície até as imediações da exosfera, com termômetros. Desta maneira, cada ponto se associa a uma grandeza escalar, a temperatura. Chamamos de campo escalar a função (ou objeto), no caso do exemplo, o campo de temperatura sendo um escalar às coordenadas do espaço e do tempo representados por uma notação semelhante na relatividade dado pela função real do quadri vetor $x^\mu = (x^0 = t, \vec{x})$, ou seja, campos escalares reais, $\phi = \phi(x^\mu)$, são os campos mais simples encontrados na natureza.

2.2 Teoria Lagrangeana do Campo

Considerando que um campo ϕ em um ponto x^μ que interage consigo numa vizinhança infinitesimal desse ponto, de tal modo que a densidade lagrangeana \mathcal{L} dependa de $\phi(x^\mu)$ e $\partial_\mu\phi(x^\mu)$ então sua ação a ser obtida em $D + 1$ dimensões é da forma

$$S = \int d^{D+1}x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) \quad (2.2)$$

onde \mathcal{L} é uma função generalizada sobre todos os graus de liberdade do sistema, descrita na forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu\phi \partial^\mu\phi - V(\phi) \quad (2.3)$$

onde o primeiro termo da nossa densidade lagrangeana é o termo cinético e $V(\phi)$ é a priori, uma função escalar qualquer do campo que é o termo de potencial, o potencial do sistema, que especifica o modelo a ser estudado e diz como o campo auto interage. Aplicando o princípio variacional (mínima ação), isto é

$$\delta S = \delta \int d^{D+1}x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) = 0 \quad (2.4)$$

encontramos a equação de movimento

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \quad (2.5)$$

Estamos interessados apenas em soluções estacionárias, isto é, independentes do tempo, portanto a equação de movimento pode ser escrita na forma

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial V}{\partial \phi} \quad (2.6)$$

sendo o campo imerso em D dimensões espaciais. No caso de um campo unidimensional $\phi = \phi(x)$, teremos

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{\partial V}{\partial \phi} \quad (2.7)$$

que é uma equação diferencial ordinária não linear de segunda ordem, não linear devido o potencial não ser linear. O tensor energia-momento, de modo geral, é dado por

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (2.8)$$

e no nosso modelo temos que o tensor energia-momento é da forma

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right) \quad (2.9)$$

por simplicidade iremos admitir uma dimensão temporal e uma espacial de tal forma que $\phi = \phi(x, t)$. Podemos então escrever a densidade de energia $\rho(x) = T_{00}$ e a pressão $P(x) = T_{11}$ como segue

$$\rho(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + V(\phi) \quad (2.10a)$$

$$p(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - V(\phi) \quad (2.10b)$$

em soluções de campo estacionário, temos como densidade de energia e pressão respectivamente da forma:

$$\rho(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + V(\phi) \quad (2.11a)$$

$$p(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - V(\phi) \quad (2.11b)$$

e, nas soluções estacionárias, temos como energia total do sistema o valor

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \rho dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi) \right] dx \quad (2.12)$$

Quando o campo é homogêneo $\phi = 0$, a energia será então simplificada, pois $\frac{d\phi}{dx} = 0$. Portanto

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} V(\phi) dx \quad (2.13)$$

Neste trabalho nós estamos interessados em casos com energia finita e portanto, localizadas. Para isto, nosso campo deve satisfazer alguns requisitos:

- Nos extremos o campo deve ser finito.
- A derivada do campo nos extremos deve ser nula.

com um formalismo algébrico, nós temos

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x) = \phi_{s+}$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) = \phi_{s-}$
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{d\phi}{dx} = 0$

Estas condições de contorno estão diretamente relacionadas à densidade de energia, pois se o extremo do campo fosse infinito a densidade de energia explodiria. Após estabelecidas as condições nos extremos, podemos definir a corrente topológica

$$j^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi. \quad (2.14)$$

Essa corrente não está relacionada diretamente ao teorema de Noether que diz que para cada transformação infinitesimal, que não altere a ação, está associada uma quantidade conservada, ou informalmente falando, para cada simetria corresponde uma lei de conservação, podemos demonstrar que esta corrente é conservada, como segue abaixo

$$\partial_\mu j^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi = \epsilon^{\nu\mu} \partial_\nu \partial_\mu \phi = -\epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi \quad (2.15)$$

portando

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (2.16)$$

onde usamos o fato de que $\epsilon^{\mu\nu} = -\epsilon^{\nu\mu}$ e $\partial_\mu\partial_\nu = \partial_\nu\partial_\mu$. A partir disso podemos encontrar nossa carga topológica conservada

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} dx j^0 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \partial_x \phi(x) = \phi_{s+} - \phi_{s-} \quad (2.17)$$

onde $\phi_{s\pm}$ são campos constantes. Essa carga topológica só depende do comportamento assintótico dos campos, os quais podemos encontrar duas soluções, uma quando a carga for nula, chamada de soluções não-topológicas, a outra é quando a carga for diferente de zero, conhecida como solução topológica. de forma geral, defeito topológico é uma solução de um sistema de equações diferenciais parciais mas também se trata de transições de fase de um estado a outro. Vale ressaltar que Tais correntes e leis de conservação são chamadas topológicas, uma vez que a sua conservação decorre de propriedades topológicas das configurações do campo e não diretamente das simetrias da teoria. Vamos agora dar ênfase a soluções topológicas e não-topológicas analisando os defeitos mais conhecidos, os do tipo kink e os do tipo lump, os quais iremos definir adiante.

2.3 Defeitos

Defeitos topológicos são configurações da matéria baseada em transições de fase. Estas configurações são geralmente relacionadas a quebra de simetria do sistema, o qual, cada defeito se torna único devido a suas propriedades de simetria da matéria e da natureza da transição de fase. Temos como defeitos topológicos as paredes de domínio, cordas cósmicas, monopolos magnéticos, entre outros. É importante estudar esse conteúdo? Com toda certeza, os defeitos nos fornecem

algo exclusivo para a física do início do universo, seu estudo é uma parte inevitável de qualquer tentativa séria de compreender o universo primordial.

2.3.1 Defeitos tipo Kink

Defeitos topológicos, como já foi dito, está relacionado a carga topológica quando for diferente de zero, pois sendo zero diz que os mínimos da solução possuem valores diferente, portanto a solução poderá crescer ou diminuir surgindo então, um defeito entre eles. Para tal fato utilizaremos o modelo ϕ^4 para descrever o defeito. Considere então o potencial ϕ^4 adimensional dado na forma

$$V(\phi) = \frac{1}{2}(1 - \phi^2)^2 \quad (2.18)$$

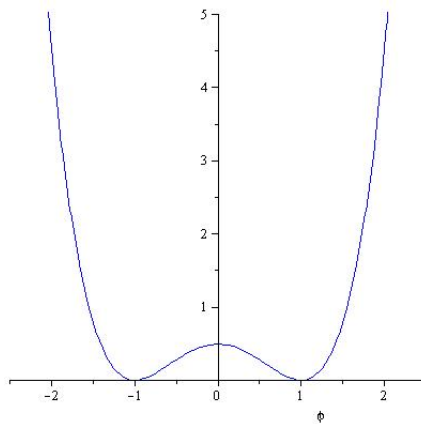


Figura 2.1: Potencial ϕ^4 adimensional referente a eq.(2.18)

quando referimos ao modelo ser adimensional, se deve ao fato de que a dimensão foi imposta em constantes arbitrárias para o modelo, sendo que admitimos as constantes igual a um para uma simplificação que nos dará. A equação de movimento

é dada a partir de (2.7), isto é,

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -2\phi(1 - \phi^2) \quad (2.19)$$

cuja solução dessa equação diferencial é dada por

$$\phi(x) = \pm \tanh(x) \quad (2.20)$$

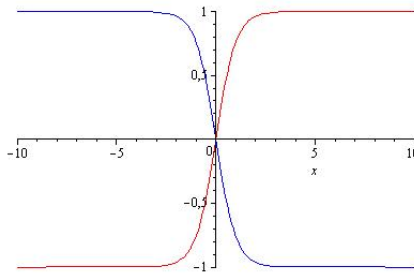


Figura 2.2: Soluções do tipo kink e anti-kink dados pela eq.(2.20)

este resultado pode ser obtido de forma mais simples, usando o método da quadratura em (2.7). Esse método é simplesmente baseado em diminuir uma ordem de derivação de uma equação diferencial, ou seja

$$\frac{d\phi}{dx} \frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{d\phi}{dx} \frac{dV(\phi)}{d\phi} \quad (2.21)$$

usando a regra da cadeia e integrando logo iremos ter

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{2V(\phi) + C} \quad (2.22)$$

da (2.14) vemos que para que a energia seja finita devemos impor que a constante c seja nula, pois se levarmos em conta $C \neq 0$ a energia tenderia ao infinito. da eq.(2.2)B vemos que a densidade de energia do kink é $\rho = \text{sech}^4(x)$ portanto a energia total para o nosso modelo é dado por

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sech}^4(x) = \frac{4}{3} \quad (2.23)$$

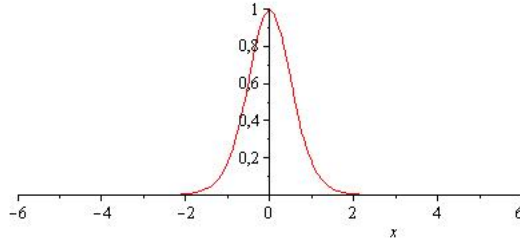


Figura 2.3: Densidade de energia referente ao modelo ϕ^4 , eq.(2.23)

2.3.2 Defeitos do tipo Lump

Considerando agora um outro modelo ϕ^4 invertido, dado por

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2 - \frac{1}{2}\phi^4 \quad (2.24)$$

o nome ϕ^4 invertido está relacionado por ele ser similar ao modelo *phi4*. sua

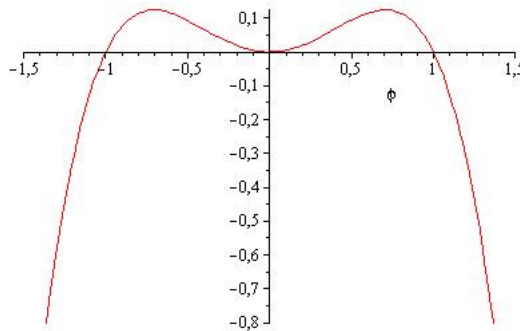


Figura 2.4: Potencial ϕ^4 invertido, eq.(2.24)

equação de movimento obtida por (2.7) é dada na forma

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \phi - 2\phi^3 \quad (2.25)$$

Existem 3 tipos de soluções, uma é dada no mínimo local, no caso, $\phi = 0$, as outras são dadas por

$$\phi(x) = \pm \operatorname{sech}(x) \quad (2.26)$$

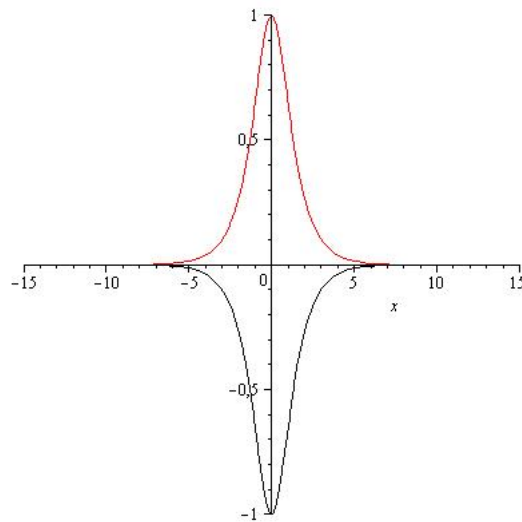


Figura 2.5: Soluções do lump e anti-lump dados pela eq.(2.26)

Essas soluções são conhecidas como lump, visto que no infinito tanto positivo quanto negativo, a solução vai ao mesmo resultado, no caso, zero. Sua densidade de energia segue na forma

$$\rho = \operatorname{sech}^2(x)\tanh^2(x) \quad (2.27)$$

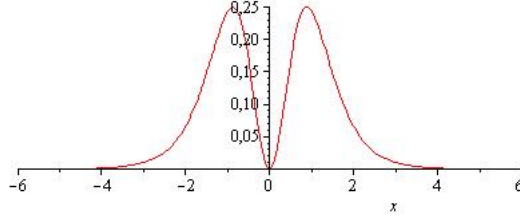


Figura 2.6: Densidade de energia referente ao modelo ϕ^4 invertido, eq.(2.27)

integrando-a dará a sua energia total cujo valor é $E = \frac{2}{3}$

2.4 Soluções BPS

Uma outra forma de analisar defeitos topológicos é usando o método bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield, ou BPS. da (2.22) nós podemos admitir que não há potenciais negativos, para tornar bem satisfatório esta afirmação vamos admitir que o potencial seja quadrático, ou seja,

$$V(\phi) = \frac{1}{2}W_\phi^2 \quad (2.28)$$

onde $W = W(\phi)$ é conhecido como função superpotencial e o índice ϕ é uma derivação do superpotencial. Com esse método nós temos como equação de movimento dada por

$$\frac{d^2\phi}{d\phi^2} = W_\phi W_{\phi\phi} \quad (2.29)$$

sendo que a equação de movimento de primeira ordem é dada da forma

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm W_\phi \quad (2.30)$$

mesmo sendo de primeira ordem, ela possui a mesma solução da equação de segunda ordem. Admitindo o superpotencial, a (2.12) fica da forma

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} W_\phi^2 \right] \quad (2.31)$$

e usando o completamento dos quadrados, nós obtemos

$$E = E_B + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{d\phi}{dx} \pm W_\phi \right)^2 \quad (2.32)$$

vemos que o segundo termo é nada mais que a equação de movimento de primeira ordem, portanto se anula. Logo a energia de Bogomol'nyi é então, dada por

$$E = |\Delta W| = |W(\phi(\infty)) - W(\phi(-\infty))| \quad (2.33)$$

ou seja, simplesmente manipulando o superpotencial, obteríamos não apenas o valor da energia, mas o menor valor da energia e isso, analisando a solução nos seus limites assintóticos.

2.5 Estabilidade Linear

Para analisarmos a estabilidade linear, temos

$$\phi(x, t) = \bar{\phi}(x) + \eta(x, t) \quad (2.34)$$

onde $\eta(x, t)$ é uma pequena perturbação da solução $\bar{\phi}(x)$. Substituindo na equação (2.5) porém, considerando apenas uma dimensão espacial, vemos que a equação fica

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{d^2 \phi}{dx^2} - \frac{d^2 \eta}{dx^2} + \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad (2.35)$$

o potencial tem uma dependência tanto em ϕ estático quanto na perturbação η portanto expandindo nosso potencial em torno da flutuação em série de Taylor até primeira ordem, obtemos

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \frac{dV}{d\phi} + \eta \frac{d^2 V}{d\phi^2} = 0 \quad (2.36)$$

mas da equação (2.6) encontramos

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \eta \frac{d^2 V}{d\phi^2} = 0 \quad (2.37)$$

considerando que nós encontramos uma equação diferencial parcial, podemos então utilizar o método de separação de variáveis da forma $\eta(x, t) = \eta(x)Y(t)$ para gerar as equações

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} + w^2 Y = 0 \quad (2.38)$$

$$\frac{d^2 \eta}{dx^2} - \eta U(x) = -w^2 \eta \quad (2.39)$$

onde $U(x) = V_{\bar{\phi}\bar{\phi}}$ é o potencial mecânico quântico. Vemos que $Y = Y(t)$ é uma função oscilatória, portanto podemos admitir uma solução da forma

$$\eta(x, t) = \eta(x)\cos(wt) \quad (2.40)$$

que segue

$$-\eta'' + U(x)\eta = w^2\eta \quad (2.41)$$

ou da forma de operador

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + U\right)\eta_n = w_n^2\eta_n \quad (2.42)$$

definindo $H = -\frac{d^2}{dx^2} + U$ o qual se trata de um operador do tipo hamiltoniano, vale ressaltar também que os autovalores da autofunção η devem ser positivos pois, valores negativos fariam com que o sistema desestabilizasse, ou seja, a autofunção teria um valor infinito, isto é, $y(t) = \cos(wt)$ se tornaria $\bar{y}(t) = \cosh(\bar{w}t)$ que explodiria no infinito. Vemos que a hamiltoniana pode ser fatorado

$$\left(\frac{d}{dx} \pm W_\phi\right)\left(-\frac{d}{dx} \pm W_\phi\right)\eta = w^2\eta \quad (2.43)$$

o qual chamaremos

$$S_\pm^+ = -\frac{d}{dx} \pm W_{\phi\phi} \quad (2.44)$$

$$S_\pm^- = \frac{d}{dx} \pm W_{\phi\phi} \quad (2.45)$$

sendo S^+ o adjunto de S . A hamiltoniana se torna

$$H = S^+S \quad (2.46)$$

onde H é auto-adjunto de H^+ já que $H^+ = (S^+S)^+ = S^+(S^+)^+ = (S^+S) = H$, mostrando então, que as autofunções são associadas a diferentes autovalores, são ortogonais e normalizáveis. Os autovalores das autofunções são dados por

$$\begin{aligned} W_n^2 &= \langle \eta_n | H | \eta_n \rangle = \langle \eta_n | S^+ I S | \eta_n \rangle = \\ &= \sum_m \langle \eta_n | S^+ | \eta_m \rangle \langle \eta_m | S | \eta_n \rangle = \\ &= \sum_m \langle \eta_n | S | \eta_m \rangle^* \langle \eta_m | A | \eta_n \rangle = \sum_m | \langle \eta_n | A | \eta_m \rangle |^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (2.47)$$

mostra-se que os autovalores são positivos e que os campos descritos por potenciais que possuem limites inferiores são linearmente estáveis. Quando o autovalor é zero, conhecido como zero da função $\eta_0 \propto \phi'$, nós encontramos a autofunção da forma

$$S_{\pm} \eta_0 = 0 \quad (2.48)$$

portanto

$$\eta_0 = C e^{\pm \int dx W_{\phi\phi}} \quad (2.49)$$

onde C é uma constante de normalização que aparece na integração, sendo o modo zero o menor estado de energia do sistema.

2.5.1 Exemplos

Um exemplo importante é o modelo ϕ^4 (2.18) que gera o superpotencial $W(\phi) = \phi - \frac{1}{3}\phi^3$. Pelo potencial mecânico quântico

$$U(x) = V_{\phi\phi} = 4 - 6\text{sech}^2(x) \quad (2.50)$$

teremos como equação do tipo schroedinger da forma

$$-\frac{d^2\eta}{dx} + (4 - 6\text{sech}^2(x))\eta = w^2\eta. \quad (2.51)$$

A solução BPS que conecta os dois mínimos em $\phi = \pm 1$ são $\phi_0(x) = \pm \tanh(x)$, que tem densidade de energia $\rho(x) = \text{sech}^4(x)$ e energia $E_0 = \frac{4}{3}$. O modo zero pode ser obtido facilmente da forma

$$\eta_0(x) = \sqrt{\frac{3}{4}}\text{sech}^2(x). \quad (2.52)$$

Outro exemplo relevante é o modelo seno-Gordon, cujo o potencial é dado por

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\cos^2(\phi) \quad (2.53)$$

que gera o superpotencial $W(\phi) = \text{sen}(\phi)$ possuindo mínimos equidistantes em $\phi_{min} = (n + 1/2)\pi$ e máximos em $\phi_{max} = n\pi$, onde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ a solução BPS é

$$\phi_0 = \arcsen(\tanh(x)) + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.54)$$

com a densidade de energia $\rho(x) = \text{sech}^2(x)$, e energia total $E_0 = 2$. O potencial mecânico quântico é dado por

$$U(x) = 1 - 2\text{sech}^2(x) \quad (2.55)$$

e o modo zero é $\eta_0 = \sqrt{\frac{1}{2}}\text{sech}(x)$. Os potenciais (2.50) e (2.55) são conhecidas como potenciais Pöschl-Teller modificado, eles possuem uma forma geral do tipo

$$U(x) = A - B\text{sech}^2(x) \quad (2.56)$$

onde A e B são reais e positivos, os autovalores para tal potencial é dado por

$$E_n = A - C_n^2 \quad (2.57)$$

onde

$$C_n^2 = \sqrt{B + \frac{1}{4}} - n - \frac{1}{2} \quad (2.58)$$

sendo que

$$0 \leq n < \sqrt{B + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \quad (2.59)$$

o potencial Pöschl-Teller modificado sendo proposto por Morse [69], em 1932, ele obteve os autovalores , no caso, a energia e as autofunções, sendo que o potencial é caracterizado por um número finito de estados ligados, cujo espectro depende dos parâmetros A e B.

Capítulo 3

Formalismo de Primeira Ordem

3.1 Formalismo Geral

O tratamento geral para um campo escalar real que possa preservar a simetria de Lorentz é descrito pela ação

$$S = \int d^2x \mathcal{L}(\phi, X) \quad (3.1)$$

onde $\mathcal{L}(\phi, X)$ representa a densidade lagrangeana. Vamos supor que a densidade lagrangeana não depende explicitamente das coordenadas no espaço-tempo; portanto, dado que o modelo gera uma simetria de Poincaré, ou seja, é invariante por rotação no espaço e por translação no espaço tempo além de obedecer a simetria de Lorentz. Então a equação de movimento é dada por

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad (3.2)$$

sabemos que $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, X)$ e que $X = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$, então temos que nossa equação de

movimento com dependência em X é dada por

$$\partial_\mu(\mathcal{L}_X \partial^\mu \phi) = \mathcal{L}_\phi \quad (3.3)$$

sendo que os índices de \mathcal{L} dado por X e ϕ são relacionados como as derivadas de \mathcal{L} em relação aos índices mencionados. Se aplicarmos a derivada do lado esquerdo, nossa equação ficará

$$\mathcal{L}_{X\phi} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + \mathcal{L}_{XX} \partial^\mu \phi \partial^\mu \phi \partial_\mu \partial_\alpha \phi + \mathcal{L}_X \square \phi = \mathcal{L}_\phi \quad (3.4)$$

O tensor momento-energia $T^{\mu\nu}$ para esta lagrangeana tem a forma

$$T^{\mu\nu} = \mathcal{L}_X \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (3.5)$$

portanto a densidade de energia $T^{00} = \rho$ e a densidade de pressão $T^{11} = p$ em (1, 1) dimensão são respectivamente

$$\rho = \mathcal{L}_X \dot{\phi}^2 - \mathcal{L} \quad (3.6)$$

$$p = \mathcal{L}_X \phi'^2 + \mathcal{L} \quad (3.7)$$

onde o ponto significa derivada com respeito à dimensão temporal, se houvesse um traço, seria uma derivada com respeito à dimensão espacial da forma $\dot{\phi}$. Nós temos que levar em conta que o modelo é geral, isso nos gera uma condição de energia nula, ou seja,

$$T_{\mu\nu} \eta^\mu \eta^\nu \geq 0 \quad (3.8)$$

sendo η^μ um vetor nulo que obedece a condição $g^{\mu\nu} \eta_\mu \eta_\nu = 0$, isto é, nosso modelo fica restringido a

$$T_{\mu\nu} \eta^\mu \eta^\nu = (\mathcal{L}_X \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}) \eta^\mu \eta^\nu \geq 0 \quad (3.9)$$

$$\mathcal{L}_X \geq 0 \quad (3.10)$$

Considerando configurações estáticas $\phi = \phi(x)$ para o nosso modelo, então a equação de movimento (3.4) fica

$$(2\mathcal{L}_{XX}X + \mathcal{L})\phi'' = 2\mathcal{L}_{X\phi}X - \mathcal{L}_\phi \quad (3.11)$$

essa equação se deve ao fato de que $X = -\frac{1}{2}\phi'^2$, multiplicando ambos os lados por $\phi'(x)$ e integrando encontramos

$$\mathcal{L} - 2\mathcal{L}_X X = C \quad (3.12)$$

sendo C uma constante de integração. Um fato importante de se notar é que C está se comportando como se fosse a pressão, isso não é coincidência uma vez que a pressão nas soluções estáticas é constante (ver apêndice). A energia total do campo é dado pela integração de todo espaço na densidade de energia. Se o campo for estático, teremos a energia da seguinte forma

$$E = - \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}(\phi, X) dx \quad (3.13)$$

3.1.1 Estabilidade Linear

A partir deste ponto, iremos abordar toda a estabilidade clássica com a matemática já mencionada. Introduziremos flutuações em torno do campo escalar da forma

$$\phi(x, t) = \phi(x) + \eta(x, t) \quad (3.14)$$

a flutuação $\eta(x, t)$ será usada para encontrar a sua contribuição quadrática na ação

$$S^{(2)} = \frac{1}{2} \int d^2x \{ \mathcal{L}_X \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta + \mathcal{L}_{XX} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \eta)^2 + [\mathcal{L}_{\phi\phi} - \partial_\mu (\mathcal{L}_{\phi X} \partial^\mu \phi)] \eta^2 \} \quad (3.15)$$

o índice da ação $S^{(2)}$ é relacionado como o termo de segunda ordem da expansão da ação. A equação de movimento para a flutuação $\eta(x)$ é dado por

$$\partial_\mu (\mathcal{L}_X \partial^\mu \eta + \mathcal{L}_{XX} \partial^\mu \phi \partial_\nu \phi \partial^\nu \eta) = [\mathcal{L}_{\phi\phi} - \partial_\mu (\mathcal{L}_{\phi X} \partial^\mu \phi)] \eta \quad (3.16)$$

admitindo o campo estático, isto é, fazer análise apenas da evolução temporal da flutuação. Obtemos

$$\mathcal{L}_X \ddot{\eta} - [(2\mathcal{L}_{XX}X + \mathcal{L}_X)\eta']' = (\mathcal{L}_{\phi\phi} + (\mathcal{L}_{\phi X}\phi')')\eta \quad (3.17)$$

o método de separação de variáveis. Considerando o fato de que a separação será dada na forma

$$\eta(x, t) = \eta(x)\cos(\omega t) \quad (3.18)$$

na qual obtemos

$$- [(2\mathcal{L}_{XX}X + \mathcal{L}_X)\eta']' = (\mathcal{L}_{\phi\phi} + (\mathcal{L}_{\phi X}\phi')' + \omega^2 \mathcal{L}_X)\eta \quad (3.19)$$

Para garantir a hiperbolicidade, impomos que

$$A^2 = \frac{2\mathcal{L}_{XX}X + \mathcal{L}_X}{\mathcal{L}_X} > 0 \quad (3.20)$$

a eq.(3.19), também pode ser escrita na forma

$$- [a(x)\eta']' = b(x)\eta \quad (3.21)$$

apenas fazendo uma mudança de variável da forma

$$dx = Adz \quad e \quad \eta = \frac{u}{\sqrt{\mathcal{L}_X A}} \quad (3.22)$$

sendo que $a(x)$ e $b(x)$ são dados por (ver apêndice)

$$a(x) = 2\mathcal{L}_{XX}X + \mathcal{L}_X \quad (3.23)$$

$$b(x) = \mathcal{L}_{\phi\phi} + (\mathcal{L}_{\phi X}\phi')' + \omega^2 \mathcal{L}_X \quad (3.24)$$

e com isso, encontramos uma equação do tipo Schrödinger

$$- u_{zz} + U(z)u = \omega^2 u \quad (3.25)$$

onde

$$U(z) = \frac{\sqrt{A}\mathcal{L}_{Xzz}}{\sqrt{A}\mathcal{L}_X} - \frac{1}{\mathcal{L}_X} \left[\mathcal{L}_{\phi\phi} + \frac{1}{A} \left(\mathcal{L}_{\phi X} \frac{\phi_z}{A} \right)_z \right] \quad (3.26)$$

no qual $U(z)$ é o potencial mecânico quântico, ou seja, se soubermos quem é o nosso potencial quântico, conseguiríamos encontrar seus autovalores e autovetores. Algo que devemos atentar é que a estabilidade linear diz que os autovalores w^2 deverão ser negativos, esta afirmação está inteiramente ligado a dependência do potencial $U(z)$. Um caso particular de interesse é quando o autovalor é zero e por correspondência possui autoestados chamados de modo zero, nos quais são os mais simples de analisar. Um exemplo importante para abordar esta formulação é quando o \mathcal{L} é da forma

$$\mathcal{L} = X - V(\phi) \quad (3.27)$$

onde nós obtemos os termos $\mathcal{L}_X = 1$, $\mathcal{L}_{XX} = 0$, $\mathcal{L}_{X\phi} = 0$, $\mathcal{L}_\phi = -V_\phi$ e $\mathcal{L}_{\phi\phi} = -V_{\phi\phi}$. A partir das equações (3.11), (3.13) e (3.19) teremos

$$\phi'' = V_\phi \quad (3.28)$$

$$E = \int dx \left(\frac{1}{2} \phi'^2 + V(\phi) \right) \quad (3.29)$$

e

$$-\eta'' + V_{\phi\phi}\eta = w^2\eta \quad (3.30)$$

observa-se que as equações de movimento e energia são de um campo escalar estático e a equação do tipo Schrödinger é a mesma para flutuações do modelo padrão.

Capítulo 4

Formalismo com Perturbação

4.1 Novos Modelos

Ao aplicar o formalismo usado no capítulo anterior, vamos a partir de agora focar um modelo perturbativo. Acrescentaremos à ação não perturbada uma contribuição na qual possamos escrever uma nova ação dada por

$$\tilde{S} = S_0 + \alpha \int d^2x F(\phi, X), \quad (4.1)$$

onde S_0 é a ação não perturbada dada pela Eq.(2.2) em (1, 1) dimensões. $F(\phi, X)$ é a princípio uma função arbitrária de ϕ e X , e α é um parâmetro muito pequeno cujo objetivo é controlar a ordem da expansão perturbativa, sendo já trabalhado em [44], mas aqui $F(\phi, X)$ também inclui dependência em X . O tensor energia-momento para o novo modelo pode ser escrito da forma

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \alpha (F_X \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} F(\phi, X)), \quad (4.2)$$

onde $T_{\mu\nu}$ é dado por Eq (2.9). Para soluções estáticas, a densidade de energia e pressão podem ser escrito como

$$\tilde{\rho}(\phi, \phi') = \rho(\phi, \phi') - \alpha \rho_\alpha(\phi, \phi') \quad (4.3a)$$

$$\tilde{p}(\phi, \phi') = p(\phi, \phi') + \alpha p_\alpha(\phi, \phi') \quad (4.3b)$$

os quais ρ e p são dados pela Eq.(2.11), e a contribuição da densidade de energia e pressão são respectivamente:

$$\rho_\alpha = F(\phi, X) \quad (4.4)$$

$$p_\alpha = F - 2F_X X \quad (4.5)$$

A equação de movimento para esse novo modelo descrito por (4.1), encontrada do modo geral, é obtida a partir da equação de Lagrange ficando na seguinte forma

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi + W_\phi W_{\phi\phi} = \alpha (F_\phi - \partial_\mu (F_X \partial^\mu \phi)) , \quad (4.6)$$

para soluções estáticas, pode ser escrito como

$$-\phi'' + W_\phi W_{\phi\phi} = \alpha (F_\phi + (F_X \phi')') . \quad (4.7)$$

considerando uma solução perturbativa da forma,

$$\phi(x) = \phi_0(x) + \alpha \phi_\alpha(x) , \quad (4.8)$$

onde $\phi_0(x)$ é a solução estática quando α for a zero. Expandindo a Eq. (4.7) em termos de α até chegarmos à contribuição de primeira ordem, obtemos

$$-\phi''_\alpha + (W_\phi W_{\phi\phi\phi} + W_{\phi\phi}^2) \phi_\alpha = F_\phi + (F_X \phi')' , \quad (4.9)$$

Temos $\phi = \phi_0$ como solução homogênea, ou seja, solução constante quando α tende a zero, no caso, esta solução homogênea é então dada por

$$\phi = \phi_0 + \alpha \left(\frac{F_\phi}{W_\phi W_{\phi\phi\phi} + W_{\phi\phi}^2} \right)_{\phi=\phi_0} , \quad (4.10)$$

que mostra os limites assintóticos da solução topológica podem mudar somente quando houver dependência de ϕ em F . A equação de movimento (4.7) pode ser escrita da seguinte forma

$$-\phi''_\alpha + (W_\phi W_{\phi\phi\phi} + W_{\phi\phi}^2)\phi_\alpha = \frac{p'_\alpha}{\phi'} \quad (4.11)$$

e além disso, se for integrada encontraremos a densidade de pressão constante, $\tilde{p} = c$. Fazendo $c = 0$, para soluções topológicas, encontramos a equação de primeira ordem

$$\phi' = \sqrt{W_\phi^2 - 2\alpha p_\alpha}, \quad (4.12)$$

de uma substituição (4.8) e ao usar (2.29), obtemos

$$\phi'_\alpha = W_{\phi\phi}(\phi_0) \phi_\alpha - \frac{p_\alpha(\phi_0, \phi'_0)}{W_\phi(\phi_0)}, \quad (4.13)$$

que é resolvida por

$$\phi_\alpha(x) = -\phi'_0(x) \int_0^{\phi_0} \frac{p_\alpha(\phi)}{W_\phi^3} d\phi, \quad (4.14)$$

onde uma constante de integração pode ser descartada, uma vez que ela representa uma translação da solução não perturbada. Vamos tratar agora a contribuições para a energia das soluções estáticas perturbadas (4.8), que surge a partir da perturbação de primeira ordem na densidade de energia, Eq.(4.14). Por meio de uma integração por partes e usando (2.7), nós podemos escrever a Eq.(4.3a) da seguinte forma

$$\tilde{\rho} = \phi_0'^2 - \alpha F(\phi_0, \phi'_0) + \alpha[\phi'_0 \phi_\alpha]' \quad (4.15)$$

A expansão da energia é representada da seguinte forma

$$E = E_0 + \alpha E^{(1)} + \alpha^2 E^{(2)} + \dots \quad (4.16)$$

sendo que a correção de primeira ordem tem a forma

$$E^{(1)} = - \int_{-\infty}^{\infty} dx F(\phi_0, \phi'_0) + [\phi'_0 \phi_\alpha] \Big|_{x \rightarrow -\infty}^{x \rightarrow \infty} \quad (4.17)$$

um caso que podemos ressaltar é quando há soluções do tipo kink, isto é, $\phi'_0 \rightarrow 0$, quando $x \rightarrow \pm\infty$, portanto a correção de primeira ordem da energia não depende da correção de primeira ordem da solução, resultando em

$$E^{(1)} = - \int_{\phi_0(-\infty)}^{\phi_0(\infty)} d\phi \frac{F(\phi, W_\phi)}{W_\phi}, \quad (4.18)$$

que estende o resultado obtido na Ref. [44], onde F é somente função de ϕ . Podemos também mostrar que a correção de ordem n em α na solução contribui para a correção de ordem $n + 1$ da energia. Assim, a correção de segunda ordem na energia que depende de ϕ_α , é dado por

$$E^{(2)} = \int_{\phi_0(-\infty)}^{\phi_0(\infty)} \frac{d\phi}{W_\phi} \left(\frac{\phi_\alpha'^2}{2} + \frac{1}{2} U_0(\phi) \phi_\alpha^2 - F_\phi \phi_\alpha + F_X W_\phi \phi_\alpha' \right), \quad (4.19)$$

onde

$$U_0(\phi) = W_{\phi\phi}^2 + W_\phi W_{\phi\phi\phi}. \quad (4.20)$$

A carga topológica das soluções estáticas (4.8) definido por (2.17), pode ser escrita como

$$Q = Q_0 + \alpha [\phi_\alpha(\infty) - \phi_\alpha(-\infty)], \quad (4.21)$$

sendo $Q_0 = \phi_0(\infty) - \phi_0(-\infty)$ a carga topológica da solução não perturbada $\phi_0(x)$.

Focaremos a partir de agora na estabilidade linear. Para soluções estáticas, usando (2.34) seguimos o processo desenvolvido na Refs. [20, 45] para obter

$$\partial_\mu \partial^\mu \eta + V_{\phi\phi} \eta = \alpha \left[-F_X \ddot{\eta} + ((F_X + 2X F_{XX}) \eta')' + F_{\phi\phi} \eta + (F_{X\phi} \phi') \eta \right], \quad (4.22)$$

onde o ponto significa derivada em relação ao tempo. Aqui, podemos tomar a

perturbação dada por $\eta(x, t) = \eta(x) \cos(\omega t)$, e substituindo em (4.22) encontramos

$$-\eta'' + V_{\phi\phi}\eta - \omega^2\eta = \alpha \left[((F_X + 2F_{XX}X)\eta')' + (F_X\omega^2 + F_{\phi\phi} + (F_{X\phi}\phi')') \eta \right]. \quad (4.23)$$

Podemos modificar esta equação (4.23), pondo na forma do tipo da equação de Schrödinger como

$$\left[-\frac{d^2}{dz^2} + \tilde{U}(z) \right] \tilde{\eta} = \tilde{\omega}^2 \tilde{\eta}. \quad (4.24)$$

para este fim, seguimos o processo da Ref. [20], por meio da mudança de variáveis

$$dx = (1 + \alpha F_{XX}X) dz, \quad (4.25a)$$

e

$$\eta = \left(1 - \frac{\alpha}{2} (F_{XX}X + F_X) \right) \tilde{\eta}, \quad (4.25b)$$

obtemos o potencial do tipo mecânico-quântico

$$\tilde{U}(z) = U_0(z) + \alpha U_\alpha(z), \quad (4.26)$$

onde U_0 é dado por (4.20), e

$$U_\alpha(z) = \frac{1}{2} (F_X + F_{XX}X)_{zz} - (F_{X\phi}W_\phi)_z - F_X U_0 - F_{\phi\phi} + \frac{1}{2} \frac{dU_0}{dz} \int dz \left(\frac{F}{X} - 2F_X + 2F_{XX}X \right), \quad (4.27)$$

fazendo $\phi = \phi_0(z)$, obtemos o estado fundamental do potencial perturbado (4.26) escrito da forma

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_0(z) &= \eta_0(z) \left(1 + \frac{\alpha}{2} (F_{XX}X + F_X) \right) \\ &\quad + \alpha \eta'_0 \int dz F_{XX}X, \end{aligned} \quad (4.28)$$

onde $\eta_0(z)$ é o estado fundamental quando α desaparece.

Para soluções estáticas do potencial não perturbado (2.28), o potencial mecânico-quântico tem o modo zero: $\eta_0 \propto \phi'_0$, como o estado fundamental, que garante sua estabilidade. Portanto, quando a correção do modo zero da energia não perturbada é dado por

$$\Delta\omega_0 = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} dz \eta_0^2(z) U_\alpha(z), \quad (4.29)$$

sendo-a não negativa. A solução estática perturbada (4.8) é estável, também. Isto sempre pode ser feito escolhendo o sinal de α como o mesmo de $\Delta\omega$. Alternativamente, podemos examinar a estabilidade observando a comparação entre os potenciais quânticos não perturbado e perturbado. A seguir, consideraremos alguns exemplos de perturbações.

4.2 Aplicações

4.2.1 Perturbação na parte cinética do modelo

Neste ponto, consideraremos a dependência da perturbação apenas em X , isto é., $F(\phi, X) = F(X)$, onde, usando Eq. (2.28), temos $X = -\frac{1}{2}W_\phi^2$. Vamos escolher uma função monômia de X

$$F(X) = \frac{2^{n-1}}{n} X |X|^{n-1}, \quad (4.30)$$

onde n é um parâmetro inteiro positivo. Usando Eq (4.10), Vemos que essa solução homogênea é a mesma do modelo não perturbado. Tendo em vista a eq.(4.3b), a contribuição da perturbação na densidade de pressão torna-se

$$p_\alpha(W_\phi) = \frac{2n-1}{2n} W_\phi^{2n}, \quad (4.31)$$

sendo que a perturbação ϕ_α dada por Eq (4.14) é escrita na forma

$$\phi_\alpha = -\frac{2n-1}{2n} \phi'_0 \int_0^x dx \phi_0'^{2n-2}, \quad (4.32)$$

que, usando (4.15), dá a densidade de energia

$$\tilde{\rho} = \phi_0'^2 + \frac{\alpha}{2n} \phi_0'^{2n} + \alpha[\phi_0' \phi_\alpha]', \quad (4.33)$$

e, de (4.18), podemos calcular a correção de primeira ordem da energia por meio de

$$E^{(1)} = \frac{1}{2n} \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_0'^{2n}. \quad (4.34)$$

por exemplo, para $n = 1$, obtemos

$$\phi_\alpha = -\frac{1}{2} x \phi_0', \quad (4.35)$$

a densidade de energia

$$\tilde{\rho} = \phi_0'^2 - \alpha x \phi_0' \phi_0'', \quad (4.36)$$

e a energia

$$E = E_0 \left(1 + \frac{1}{2} \alpha \right), \quad (4.37)$$

onde E_0 é a energia da solução estática não perturbada e, para $n = 2$, eq. (4.32) encontramos

$$\phi_\alpha = -\frac{3}{4} \phi_0' W(\phi_0), \quad (4.38)$$

que fornece a densidade de energia

$$\tilde{\rho} = \phi_0'^2 - \frac{\alpha}{2} (\phi_0'^4 + 3\phi_0' \phi_0'' W(\phi_0)), \quad (4.39)$$

e a correção de primeira ordem da energia, Eq.(4.34), escrita da forma

$$E^{(1)} = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_0'^4. \quad (4.40)$$

A partir disso, nós podemos examinar a estabilidade linear. A transformação dada pela equação (4.25) torna-se-a

$$dx = (1 + \alpha(n-1)W_\phi^{2n-2}) dz \quad (4.41)$$

$$\eta = \left(1 - \frac{\alpha n}{2} W_\phi^{2n-2} \right) \tilde{\eta} \quad (4.42)$$

A perturbação do potencial mecânico quântico, Eq. (4.27), é escrita da forma

$$\begin{aligned}
U_\alpha(z) = & (2n(n-1)^2 - 1) W_\phi^{2n-2} W_{\phi\phi}^2 \\
& + (n^2 - n - 1) W_\phi^{2n-1} W_{\phi\phi\phi} \\
& + \frac{(1 - 4n + 2n^2)}{2n} \left(3W_\phi W_{\phi\phi} W_{\phi\phi\phi} \right. \\
& \left. + W_\phi^2 W_{\phi\phi\phi\phi} \right) \times \int dz W_\phi^{2n-2}
\end{aligned} \tag{4.43}$$

onde $\phi = \phi_0(z)$.

A seguir, ilustramos o caso geral, para qualquer inteiro n , com alguns exemplos. Vamos tomar o modelo ϕ^4 definido pelo potencial (2.18). de (4.32). Obtemos que a correção de primeira ordem da solução não perturbada ϕ_0 escrito em termos da função hipergeométrica da forma

$$\begin{aligned}
\phi_\alpha = & -\frac{2n-1}{2n} \tanh(x) \operatorname{sech}^2(x) \\
& \times {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 3-2n; \frac{3}{2}; \tanh(x)^2\right),
\end{aligned} \tag{4.44}$$

que representa uma séries de polinômios de $4n - 5$ graus em $\tanh(x)$. e, de (4.34), a primeira correção da energia é

$$E^{(1)} = \frac{1}{2n} \frac{\Gamma(2n)\sqrt{\pi}}{\Gamma(2n+1/2)}. \tag{4.45}$$

A perturbação do potencial mecânico quântico (4.27) pode ser calculada caso a caso.

Para $n = 1$, nós obtemos a solução

$$\phi(x) = \tanh(x) - \frac{1}{2}\alpha x \operatorname{sech}^2(x), \tag{4.46}$$

a energia é dado por (4.37), onde $E_0 = 4/3$, e a perturbação

$$U_\alpha(x) = -4 + 6 \operatorname{sech}^2(x) (1 - x \tanh(x)), \tag{4.47}$$

dando $\Delta\omega_0 = 0$, no qual mostra que (4.46) é estável, também. Na Fig. (4.1), plotamos o potencial quântico perturbado por (4.47).

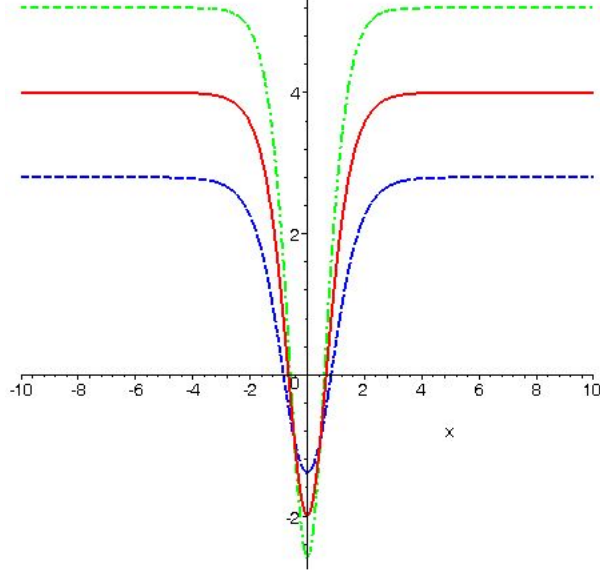


Figura 4.1: Potencial quântico do modelo ϕ^4 (2.18) (linha sólida vermelha), e perturbado por (4.47), para $\alpha = 0.3$ (linha tracejada azul) e $\alpha = -0.3$ (linha pontilhada verde).

para $n = 2$, temos

$$\phi(x) = \tanh(x) \left(1 - \frac{1}{4} \alpha \operatorname{sech}^2(x) (2 + \operatorname{sech}^2(x)) \right), \quad (4.48)$$

a energia $E = \frac{4}{3} (1 + \frac{6}{35} \alpha)$, e a perturbação

$$U_\alpha(z) = 2 \operatorname{sech}^2(z) + 11 \operatorname{sech}^4(z) - 15 \operatorname{sech}^6(z) \quad (4.49)$$

encontramos $\Delta\omega_0 = 0$, o que evidencia que a solução perturbada (4.48) é estável.

Na Fig. (4.2), nós plotamos o potencial quântico perturbado (4.49).

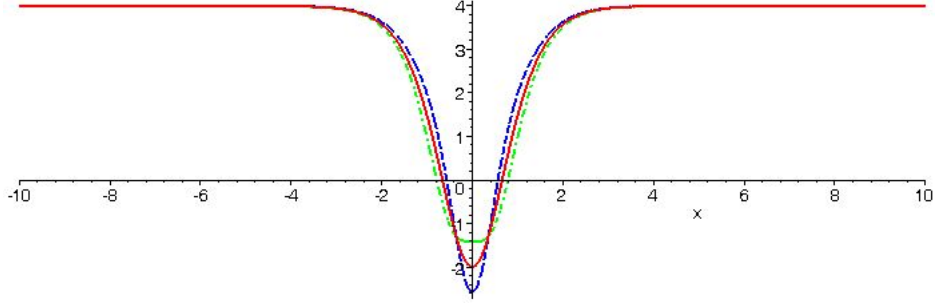


Figura 4.2: Potencial quântico do modelo ϕ^4 (2.18) (linha sólida vermelha), e perturbado por (4.49), para $\alpha = 0.3$ (linha tracejada azul) e $\alpha = -0.3$ (linha pontilhada verde).

Vamos aplicar o mesmo procedimento ao modelo seno-Gordon definido por (2.53). Para um valor qualquer n , a primeira ordem da solução perturbada (4.32) é também dado pela função hipergeométrica da forma

$$\begin{aligned} \phi_\alpha &= -\frac{2n-1}{2n} \tanh(x) \operatorname{sech}(x) \\ &\quad \times {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 2-n; \frac{3}{2}; \tanh(x)^2\right), \end{aligned} \quad (4.50)$$

e a primeira ordem de correção da energia é

$$E^{(1)} = \frac{1}{2n} \frac{\Gamma(n)\sqrt{\pi}}{\Gamma(n+1/2)}. \quad (4.51)$$

Novamente, a perturbação U_α é calculada caso a caso.

Para $n = 1$, a correção da solução é

$$\phi_\alpha = -\frac{1}{2}\alpha x \operatorname{sech}(x), \quad (4.52)$$

a energia é dado por (4.37), onde $E_0 = 2$, e a perturbação de potencial quântico é

$$U_\alpha(x) = -1 + 2 \operatorname{sech}^2(x) (1 - x \tanh(x)), \quad (4.53)$$

dando $\Delta\omega_0 = 0$. Então, a solução estática é estável, também. Na Fig. (4.3), exibimos o potencial quântico perturbado por (4.47).

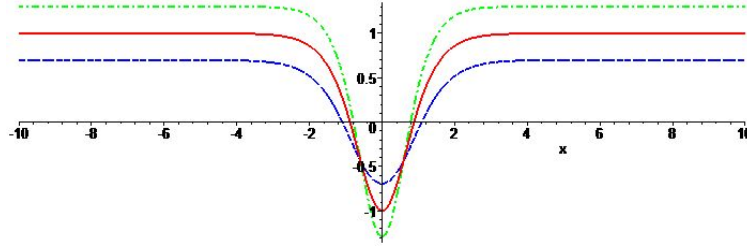


Figura 4.3: Potencial quântico do modelo seno-Gordon (2.53) (linha sólida vermelha), e pelo potencial perturbado (4.53), para $\alpha = 0.3$ (linha azul tracejada) e $\alpha = -0.3$ (linha verde pontilhada).

Para $n = 2$, nós temos

$$\phi_\alpha(x) = -\frac{3}{4} \tanh(x) \operatorname{sech}(x), \quad (4.54)$$

a energia $E = 2(1 + \frac{1}{6}\alpha)$, e a perturbação

$$U_\alpha(z) = 4 \operatorname{sech}^2(z) - 5 \operatorname{sech}^4(z), \quad (4.55)$$

que dá $\Delta\omega_0 = 0$. sendo que, a solução (4.54) é estável, também. Na Fig. (4.4), nós exibimos o potencial quântico perturbado por (4.49).

4.2.2 Perturbação na parte potencial do modelo

Vamos investigar o caso onde $F(\phi, X) = F(\phi)$, com uma perturbação adicionando um termo extra no potencial. Então, chamamos $F(\phi) = -V_\alpha(\phi)$, que deixa o potencial perturbado

$$\tilde{V}(\phi) = \frac{1}{2} \left(W_\phi + \alpha \frac{V_\alpha(\phi)}{W_\phi} \right)^2. \quad (4.56)$$

Na faixa determinada pela solução estática não perturbada, isto é, $\phi_0(-\infty) \leq$

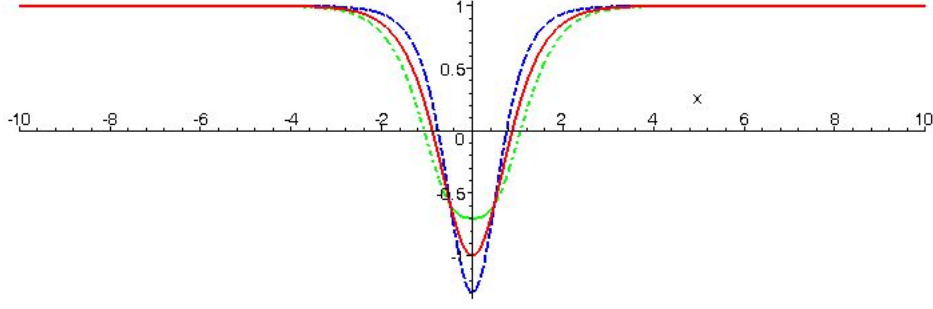


Figura 4.4: Potencial mecânico quântico do modelo seno-Gordon (2.53) (linha sólida vermelha), e o potencial perturbado (4.55), para $\alpha = 0.3$ (linha azul tracejada) e $\alpha = -0.3$ (linha verde pontilhada).

$\phi \leq \phi_0(\infty)$, de (4.10), o mínimo e o máximo, respectivamente, são dados por

$$\phi_{min} = \phi_{min}^0 - \alpha \left(\frac{V_{\alpha,\phi}}{W_{\phi\phi}^2} \right)_{\phi=\phi_{min}^0}, \quad (4.57a)$$

$$\phi_{max} = \phi_{max}^0 - \alpha \left(\frac{V_{\alpha,\phi}}{W_{\phi}W_{\phi\phi\phi}} \right)_{\phi=\phi_{max}^0}, \quad (4.57b)$$

onde ϕ_{min}^0 e ϕ_{max}^0 são o mínimo e máximo do potencial não perturbado (2.28), respectivamente. Os valores máximos são

$$\tilde{V}_{max} = V_{max} \left(1 + 2\alpha \frac{V_{\alpha}}{W_{\phi}^2} \right)_{\phi=\phi_{max}^0}, \quad (4.58)$$

onde V_{max} é um máximo do potencial não perturbado. Aqui $p_{\alpha} = -V_{\alpha}(\phi)$, e usado em (4.14) temos

$$\phi_{\alpha}(x) = g(\phi_0), \quad (4.59)$$

onde

$$g(\phi) = W_{\phi} \int_0^{\phi} \frac{V_{\alpha}(\phi)}{W_{\phi}^3} d\phi. \quad (4.60)$$

A densidade de energia (4.15) toma a forma

$$\tilde{\rho} = \rho_0(1 + 2\alpha g_{\phi}(\phi_0)), \quad (4.61)$$

onde $\rho_0 = \phi_0'^2$ é a densidade não perturbada, que fornece as correções de primeira ordem da energia

$$E^{(1)} = 2 \int_{\phi_0(-\infty)}^{\phi_0(\infty)} d\phi W_\phi g_\phi. \quad (4.62)$$

se definirmos o superpotencial como

$$\tilde{W}(\phi) = W(\phi) + \alpha \int_0^\phi d\phi \frac{V_\alpha(\phi)}{W_\phi}, \quad (4.63)$$

é fácil mostrar que

$$E = E_0 + \alpha E^{(1)} = |\tilde{W}(\phi_0(\infty)) - \tilde{W}(\phi_0(-\infty))|. \quad (4.64)$$

No caso da perturbação do potencial, a correção do potencial mecânico quântico (4.27) é escrita da forma

$$U_\alpha(x) = 3 W_\phi W_{\phi\phi} g_{\phi\phi} + W_\phi^2 g_{\phi\phi\phi} \quad (4.65)$$

onde $\phi = \phi_0(x)$, e que a correção do modo zero não perturbado (4.29) são dados por

$$\Delta\omega_0 = \alpha \int_{\phi_0(-\infty)}^{\phi_0(\infty)} d\phi W_\phi U_\alpha, \quad (4.66)$$

e por uma integração por partes nos leva a

$$\int_{\phi_0(-\infty)}^{\phi_0(\infty)} d\phi W_\phi^3 g_{\phi\phi\phi} = - \int_{\phi_0(-\infty)}^{\phi_0(\infty)} d\phi 3 W_\phi^2 W_{\phi\phi} g_{\phi\phi}, \quad (4.67)$$

o que leva a $\Delta\omega_0 = 0$. Portanto, as soluções estática perturbada são estáveis, também.

Vamos agora considerar algumas formas explicitas do potencial perturbado. Note que, se escolhermos a perturbação na forma $V_\alpha = -W_\phi^2/2$, nós encontramos um caso trivial, levando para $\phi_\alpha = -\frac{1}{2} x \phi_0'$, como uma perturbação do caso cinético (4.35).

Uma perturbação interessante é

$$V_\alpha(\phi) = W_\phi^3, \quad (4.68)$$

que resulta em $\phi_\alpha = \phi_0\phi'_0$. O mínimo e o máximo não mudam, somente as alturas do máximo que possuem um deslocamento dado por $\Delta V_{max} = 2\alpha V_{max} W_\phi(\phi_{max}^0)$, para $\phi_0(-\infty) \leq \phi \leq \phi_0(\infty)$. de (4.61), a correção para a densidade de energia é

$$\rho_\alpha = 2\alpha(\phi'_0{}^3 + \phi_0\phi'_0{}^2 W_{\phi\phi}(\phi_0)), \quad (4.69)$$

e de (4.62) a primeira ordem de correção da energia é

$$E^{(1)} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi'_0{}^3. \quad (4.70)$$

Por exemplo, temos a perturbação (4.68) no potencial ϕ^4 (2.18). Neste caso, obtemos o potencial perturbado

$$\tilde{V}(\phi) = \frac{1}{2} (1 + 2\alpha(1 - \phi^2)) (1 - \phi^2)^2, \quad (4.71)$$

que foi investigado na Refs. [46,47]. Note que, o máximo na origem é deslocado por $\Delta V_{max} = \alpha$. Para $\phi^2 \gg 1$, o termo em α não pode ser tratado em um caminho perturbado, como mostrado na figura Fig. 4.5. Entretanto, queremos encontrar correções das soluções topológicas que obedecem a condição $\phi^2 < 1$. Neste caso, a solução estática é

$$\phi(x) = \tanh(x)(1 + \alpha \operatorname{sech}^2(x)), \quad (4.72)$$

a correção da energia é $E^{(1)} = \frac{16}{15}$, e a perturbação do potencial quântico (4.65) é

$$U_\alpha(x) = 36 \operatorname{sech}^2(x) - 42 \operatorname{sech}^4(x). \quad (4.73)$$

Tomando a perturbação (4.68) no potencial seno-Gordon (2.53), que leva ao potencial perturbado

$$\tilde{V} = \frac{1}{2} (\cos(\phi) + \alpha \cos^2(\phi))^2, \quad (4.74)$$

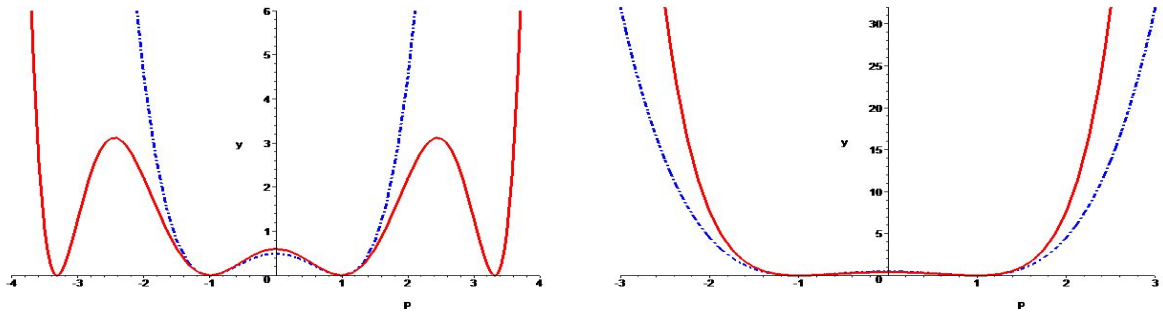


Figura 4.5: Potencial ϕ^4 (2.18) (linha azul tracejada) e seu potencial perturbado (4.71) para $\alpha = 0.1$ (linha sólida vermelha), e para $\alpha = -0.1$ (linha sólida vermelha).

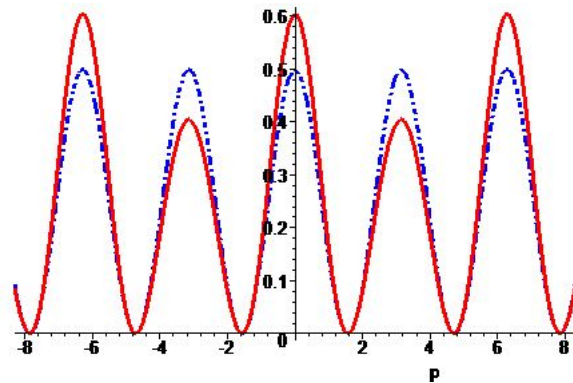


Figura 4.6: Potencial seno-Gordon (2.53) (linha tracejada azul) e o potencial perturbado (4.74) por $\alpha = 0.1$ (linha sólida vermelha).

que é ilustrado na Fig. 4.6. Note que, o máximo em $\phi = n\pi$ são deslocados por $\Delta V_{max} = (-1)^n \alpha$. Assim, o potencial perturbado é um duplo potencial seno-Gordon. As soluções estáticas são

$$\phi(x) = (1 + \alpha \operatorname{sech}(x)) \phi_0(x), \quad (4.75)$$

onde $\phi_0(x)$ é dado por (2.54), sua energia é $E = 2 + \frac{\pi}{2}\alpha$, e a perturbação do

potencial quântico (4.65) é

$$U_\alpha(x) = 6 \operatorname{sech}(x) - 9 \operatorname{sech}(x)^3 + 4 \tanh(x) \operatorname{sech}(x)^2 \arcsin(\tanh(x)). \quad (4.76)$$

Finalmente, consideramos um exemplo mais geral à aplicar a perturbação $V_\alpha = \cos(\phi) \cos(\phi/s)$, parametrizada por um número real s , no modelo seno Gordon (2.53), que dá o potencial perturbado

$$\tilde{V} = \frac{1}{2} \left(\cos(\phi) + \alpha \cos\left(\frac{\phi}{s}\right) \right)^2. \quad (4.77)$$

O mínimo e o máximo (4.57) são

$$\phi_{min} = \frac{(2n+1)\pi}{2} + (-1)^n \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2s}\right) \quad (4.78a)$$

$$\phi_{max} = n\pi - \frac{(-1)^n}{s} \sin\left(\frac{n\pi}{s}\right), \quad (4.78b)$$

onde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, e de (4.58) as alturas dos máximos são

$$\tilde{V}_{max} = \frac{1}{2} \left(1 + 2(-1)^n \alpha \cos\left(\frac{n\pi}{s}\right) \right). \quad (4.79)$$

Assim, de (4.79), obtemos a multiplicidade do modelo seno Gordon, determinados pelos números das diferentes alturas. Em geral, não existe uma fórmula fechada para a perturbação das soluções estáticas (4.59), que podem ser calculadas pelos mesmo valores de s , como segue abaixo. Entretanto, o superpotencial (4.63) escrito na forma

$$\tilde{W} = \sin(\phi) + \alpha s \sin\left(\frac{\phi}{s}\right), \quad (4.80)$$

e o mínimo (4.78a), pode ser usado para calcular a energia das soluções topológicas estáticas. Note que, o parâmetro s introduz uma nova família de modelos do seno-Gordon definidos por (2.53), que inclui duplos e triplos modelos do seno Gordon. Por exemplo, para $s = 1$ temos um potencial seno-Gordon com a altura

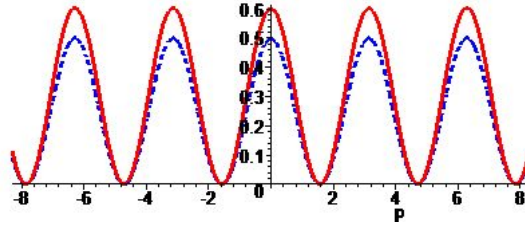


Figura 4.7: Potencial seno-Gordon (2.53) (linha tracejada azul) e o potencial perturbado (4.77) por $s = 1$ and $\alpha = 0.1$ (linha s3lida vermelha).

de m3xima $\tilde{V}_{max} = (1 + 2\alpha)/2$, como 3e mostrado na fig.(4.7). Neste caso, as solu33es topol33gicas s3o

$$\phi(x) = \phi_0(x) + \alpha x \operatorname{sech}(x), \quad (4.81)$$

onde $\phi_0(x)$ 3e dado por (2.54), a energia 3e $E = 2 + 2\alpha$, e a perturba33o qu3ntica (4.65) 3e

$$U_\alpha(x) = 2 - 4 \operatorname{sech}(x)^2 (1 - x \tanh(x)). \quad (4.82)$$

para $s = 2$, temos um triplo-Gordon com as alturas no m3ximo em: $\tilde{V}_{max} = (1 - 2\alpha)/2, 1/2$, e $(1 + 2\alpha)/2$, como ilustrado na fig.(4.9).

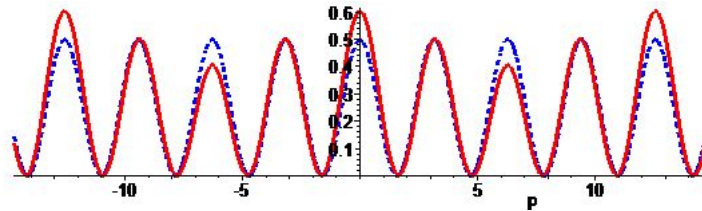


Figura 4.8: Potencial seno-Gordon (2.53) (linha tracejada azul) e o potencial perturbado (4.77) por $s = 2$ e $\alpha = 0.1$ (linha s3lida vermelha).

As solu33es s3o est3ticas

$$\phi(x) = \phi_0(x) + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} (\chi(x) + \operatorname{sech}(x) \operatorname{arctanh}(\chi(x))), \quad (4.83)$$

onde $\phi_0(x)$ é dado por (2.54) e $\chi(x) = (1 - \text{sech}(x))^{1/2}$, a energia é $E = 2 + 2\alpha$, e a perturbação quântica (4.65) é

$$U_\alpha(x) = \frac{\tanh(x)}{\sqrt{2} \chi(x)} \left(1 + \frac{7}{4} \text{sech}(x) - 4 \text{sech}^2(x) \right) + 2\sqrt{2} \tanh(x) \text{sech}^2(x) \arctanh(\chi(x)). \quad (4.84)$$

Particularmente, quando $\phi_\alpha = g(\phi)$ é uma função inversível, um caminho alternativo para implementar a perturbação do potencial é denotado pelo método de deformação [22], empregando uma função deformadora $f(\phi) = \phi - \alpha g(\phi)$, como feito em Ref. [48].

4.2.3 Perturbação do Produto

Nesta seção investigamos o caso onde $F(\phi, X) = F(X) V_\alpha(\phi)$. Portanto, temos a densidade de pressão

$$p_\alpha = (F - 2F_X X) V_\alpha(\phi), \quad (4.85)$$

e para as soluções estáticas e homogêneas dados por (4.10), e (4.8) com (4.14), respectivamente, podemos definir um potencial efetivo

$$V_{eff} = \frac{1}{2} \left(W_\phi - \alpha \frac{F(\phi, W_\phi)}{W_\phi} \right)^2. \quad (4.86)$$

Aqui, tomamos a perturbação cinética dado por (4.30), onde n é inteiro positivo, e $V_\alpha = a(m, n) W_\phi^{2m}$, onde $a(m, n) = n(2m + 2n - 1)/(2n - 1)(n + m)$, e m é um inteiro positivo ou um semi-inteiro. O potencial efetivo (4.86) é escrito da forma

$$V_{eff} = \frac{1}{2} \left(W_\phi + \frac{\alpha}{2n} W_\phi^{2n+2m-1} \right)^2, \quad (4.87)$$

que possui o mesmo mínimo e máximo do potencial não perturbado, para $\phi_0(-\infty) \leq \phi \leq \phi_0(\infty)$. As correções para as soluções estáticas são dados por Eq.(4.32), escolhendo $n \rightarrow n + m$. A correção de primeira ordem da energia, Eq.(4.18), torna-se

$$E^{(1)} = \frac{a(m, n)}{2n} \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_0'^{2(m+n)}. \quad (4.88)$$

e, a perturbação do potencial mecânico quântico, Eq.(4.27), é escrito da forma

$$\begin{aligned} U_\alpha(z) = & a(m, n) \left\{ A(m, n) W_\phi^{2(n+m-1)} W_{\phi\phi}^2 \right. \\ & + B(m, n) W_\phi^{2(n+m)-1} W_{\phi\phi\phi} \\ & + \frac{(1 - 4n + 2n^2)}{2n} \left(3W_\phi W_{\phi\phi} W_{\phi\phi\phi} \right. \\ & \left. \left. + W_\phi^2 W_{\phi\phi\phi\phi} \right) \times \int dz W_\phi^{2(n+m-1)} \right\} \end{aligned} \quad (4.89)$$

onde

$$\begin{aligned} A(m, n) = & 2(n - 2)m^2 + \left(4n^2 - 8n - \frac{1}{n} + 4 \right) m \\ & + 2n(n - 1)^2 - 1 \end{aligned} \quad (4.90a)$$

$$B(m, n) = \left(n - \frac{1}{n} - 2 \right) m + n^2 - n - 1, \quad (4.90b)$$

e $\phi = \phi_0(z)$.

Vamos tomar, como exemplo, a perturbação do produto no potencial ϕ^4 , ver (2.18). A correção de primeira ordem das soluções estáticas são dadas por (4.44), tomando $n \rightarrow n + m$, e a correção da energia fica na forma

$$E^{(1)} = \frac{a(m, n)}{2n} \frac{\Gamma(2n + 2m)\sqrt{\pi}}{\Gamma(2n + 2m + 1/2)}. \quad (4.91)$$

Para $n = m = 1$, temos a solução (4.48), com energia $E = \frac{4}{3} \left(1 + \frac{18}{35}\alpha \right)$, e o potencial efetivo (4.87) ilustrado em Fig. (4.9).

A perturbação do potencial quântico é

$$U_\alpha(z) = -6 \operatorname{sech}^2(z) - 21 \operatorname{sech}^4(z) + 3 \operatorname{sech}^6(z), \quad (4.92)$$

para $n = m = 1$, temos as soluções (4.54), com energia $E = 2(1 + \frac{1}{2}\alpha)$, e o potencial efetivo (4.87) ilustrado em Fig. (4.11).

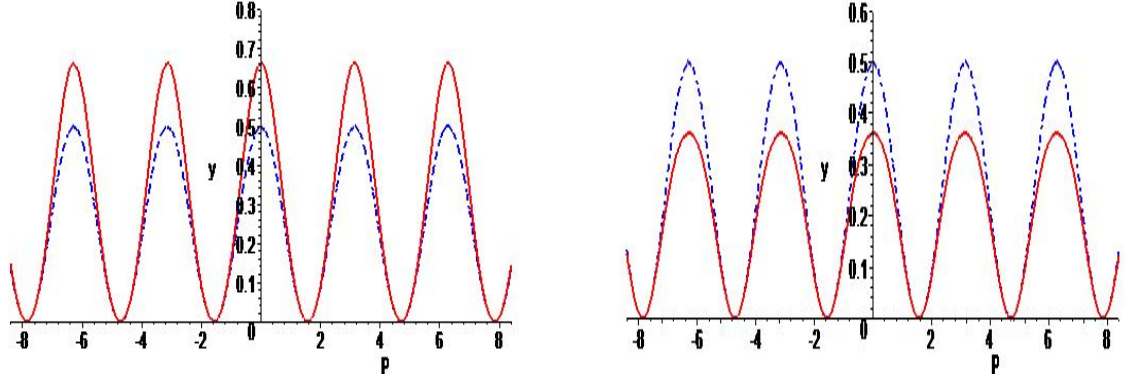


Figura 4.11: O potencial seno-Gordon (2.53) (linha tracejada azul) e o potencial efetivo (4.86) (linha sólida vermelha), para $m = n = 1$ e $\alpha = 0.1$, levanta, e $\alpha = -0.1$, abaixa o potencial.

A perturbação do potencial quântico é

$$U_\alpha(z) = -9 \operatorname{sech}^2(z) + \frac{27}{2} \operatorname{sech}^4(z), \quad (4.94)$$

Portanto, da Eq.(4.29), encontramos $\Delta\omega_0 = 6/5 \alpha$. Novamente, a solução estática perturbada é estável para α positivo, como pode ser vista na Fig. (4.12).

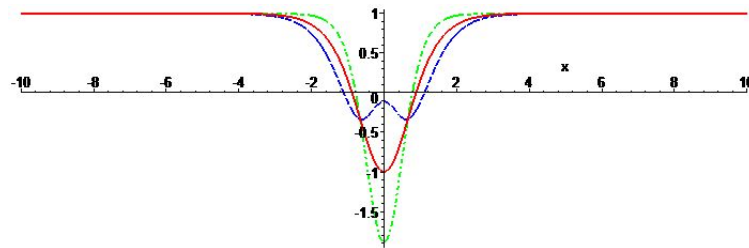


Figura 4.12: Potencial mecânico quântico do modelo seno-Gordon (2.53) (linha sólida vermelha), e o potencial quântico perturbado (4.89), para $n = m = 1$ e $\alpha = 0.2$ (linha tracejada azul), e $\alpha = -0.2$ (linha pontilhada verde).

Capítulo 5

Conclusão

Nesta dissertação estudamos os fundamentos básicos da teoria de campos escalares, apresentados no capítulo 2, de grande importância no mundo científico nos seus vários aspectos, como exemplo, defeitos topológicos, perturbações, entre outros. No capítulo 3 mostramos que é possível estabelecer um novo formalismo em Teoria de Campos, com o intuito de obter novos tipos de ferramentas algébricas sem alterar a teoria já conhecida, o qual foi feito introduzindo uma lagrangeana com dependência $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, X)$, com a parte cinética da lagrangeana de uma forma mais geral. Após isso, foi estudado a perturbação do campo, o qual se trata do foco principal do trabalho. No capítulo 4 buscamos uma descrição do campo, mas agora de forma perturbativa, sendo aplicado uma função $F = F(X, \phi)$ na ação [68] e fazendo uma perturbação no campo, com isso analisá-lo, usando a teoria do capítulo 3, o seu formalismo e obter soluções estáticas e suas propriedades no campo perturbado a partir do modelo não perturbado que possui as soluções estáticas estáveis. Nesse novo formalismo apresentado verificamos que a perturbação sobre o potencial em soluções estáticas também são estáveis e nos outros casos pode-se estabilizar a solução perturbada fazendo o sinal do parâmetro α o mesmo de Δw_0 .

Apêndice A

A.1 Obtenção do Potencial Mecânico Quântico Perturbado

Para encontrar o potencial quântico perturbado devemos expressar a equação

$$- [(2\mathcal{L}_{XX}X + \mathcal{L}_X)\eta']' = (\mathcal{L}_{\phi\phi} + (\mathcal{L}_{\phi X}\phi')' + w^2\mathcal{L}_X)\eta \quad (\text{A.1})$$

da seguinte forma

$$- [a(x)\eta']' = b(x)\eta, \quad (\text{A.2})$$

que toma forma de uma equação do tipo Schrödinger. Considerando as mudanças de variáveis

$$dx = Adz \quad e \quad \eta = \frac{u}{\sqrt{\mathcal{L}_X A}} \quad (\text{A.3})$$

na equação (A.2), obtemos

$$a(x)\eta' = a(x)\frac{d\eta}{dx} = \frac{a}{A} \left[\frac{u_z B - B_z u}{B^2} \right], \quad (\text{A.4})$$

e

$$\begin{aligned} [a(x)\eta']' &= \frac{1}{A} \left[\frac{a}{A} \left(\frac{u_z B - B_z u}{B^2} \right) \right]_z & (A.5) \\ &= \frac{1}{A^2 B} \left[u_z \left(a_z - \frac{2a(x)B_z}{B} \right) - \frac{u}{B} \left(\frac{2a(x)B_z^2}{B} - a_z B_z - a B_{zz} \right) + u_{zz} a \right]. \end{aligned}$$

Considerando agora todos os termos somados de u_z zero, obtemos

$$a_z - \frac{2aB_z}{B} = 0, \quad (A.6)$$

e conseqüentemente

$$\frac{a}{B^2} = C, \quad (A.7)$$

onde C é uma constante arbitrária. Fazendo a escolha que $C = A$, temos

$$B = \sqrt{\frac{a}{A}}, \quad (A.8)$$

e aplicando o resultado em (A.2), finalmente obtemos

$$\begin{aligned} [a\eta']' &= \left[\frac{1}{A} \left(u_z \sqrt{\frac{a}{A}} - \frac{1}{2\sqrt{A}} a^{-\frac{1}{2}} a_z u \right) \right]_z & (A.9) \\ &= A^{-\frac{3}{2}} \left(u_{zz} \sqrt{a} + \frac{1}{4} a^{-\frac{3}{2}} a_z u - \frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}} a_{zz} u \right). \end{aligned}$$

Da equação (A.1) é fácil ver que

$$b(x) = \mathcal{L}_{\phi\phi} + (\mathcal{L}_{\phi X} \phi')' + w^2 \mathcal{L}_X. \quad (A.10)$$

Nossa idéia é obter a equação

$$-u_{zz} + U(z) = w^2 u, \quad (A.11)$$

o que faz com que $b(x)$ assuma a forma $b(x) = w^2 \mathcal{L}_X$, portanto

$$b(x)\eta = w^2 \mathcal{L}_X \eta = w^2 \mathcal{L}_X \frac{u}{B} = w^2 \mathcal{L}_X \left(\frac{a}{A} \right)^{-\frac{1}{2}} u. \quad (A.12)$$

Por conseqüência de (A.2), temos

$$-A^{-\frac{3}{2}} \sqrt{a} u_{zz} + \dots = w^2 \mathcal{L}_X \left(\frac{a}{A} \right)^{-\frac{1}{2}} u \quad (A.13)$$

onde os fatores multiplicativos de u_{zz} e u , dados pela (A.1), são unitários. Para que ocorra isso, impomos que

$$-A^{-\frac{3}{2}}\sqrt{a} = w^2 \mathcal{L}_X \left(\frac{a}{A} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.14})$$

onde obtemos

$$a = A^2 \mathcal{L}_X. \quad (\text{A.15})$$

Aplicando a equação que garante a hiperbolicidade, encontramos

$$a = 2\mathcal{L}_{XX}X + \mathcal{L}_X, \quad (\text{A.16})$$

e utilizando (A.15) em (A.9), obtemos

$$\frac{1}{A} \left[u_z \sqrt{A\mathcal{L}_X} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{A\mathcal{L}_X}} (A\mathcal{L}_X)_z u \right]_z. \quad (\text{A.17})$$

Como já havíamos anulado o fator multiplicativo de u_z , a forma simplificada da equação acima é então dada por

$$- [a\eta']' = (\sqrt{A\mathcal{L}_X})_{zz} \frac{u}{A} = b\eta = [\mathcal{L}_{\phi\phi} + (\mathcal{L}_{\phi X}\phi)'] \frac{u}{\sqrt{A\mathcal{L}_X}}, \quad (\text{A.18})$$

e, rearranjando os termos, obtemos nosso potencial mecânico quântico na forma

$$U(z) = \frac{\sqrt{A\mathcal{L}_X}_{zz}}{\sqrt{A\mathcal{L}_X}} - \frac{1}{\mathcal{L}_X} \left[\mathcal{L}_{\phi\phi} + \frac{1}{A} \left(\mathcal{L}_{\phi X} \frac{\phi_z}{A} \right)_z \right] \quad (\text{A.19})$$

A.2 Teorema de Derrick

O teorema de Derrick está relacionado a analisar o comportamento de soluções e se elas são estáveis, sendo baseado na teoria de campos escalares clássicos para D-dimensões.

Teorema: Só haverá soluções independentes do tempo de energia finita para $D = 1$ em uma teoria de campo escalar em D dimensões espaciais, descrita pela densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \quad (\text{A.20})$$

a energia é dada por

$$E = \int \left(\frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - V(\phi) \right) d^D x = I_1 + I_2 \quad (\text{A.21})$$

vamos admitir que cada uma das integrais serão chamadas por I_1 e I_2 respectivamente, onde eles possuem valores bem definidos. Considere agora $\phi^\lambda(x) = \phi(\lambda x)$, fazendo esta mudança de escala, verificasse que nossa energia fica da forma

$$E_\lambda = \int \left(\frac{1}{2} \lambda^{-D} (\lambda \nabla \phi)^2 + \lambda^{-D} V(\phi) \right) d^D x = \lambda^{(2-D)} I_1 + \lambda^{-D} I_2 \quad (\text{A.22})$$

a energia E_λ volta a nossa energia conhecida quando $\lambda = 1$ e como $\phi = \phi(x)$ é uma solução localizada de $\delta E = 0$ portanto

$$\left(\frac{\partial E(\lambda)}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=1} = (2 - D) I_1 - D I_2 = 0 \quad (\text{A.23})$$

desprezando os vácuos da solução observasse que a dimensão pode ser apenas $D = 1$, poderia ser $D = 2$ se, e somente se, $I_2 = 0$ mas isso foge do fato de estarmos desprezando o vácuo já que a nossa busca é em examinar soluções diferentes do vácuo. Para o nosso modelo considerando (A.22) e (A.23), da energia obtemos

$$\left(\frac{\partial E(\lambda)}{\partial \lambda} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{-2} \mathcal{L} - 2\lambda \mathcal{L}_X X \quad (\text{A.24})$$

e considerando $\lambda = 1$ encontramos

$$\mathcal{L} - 2\lambda \mathcal{L}_X X = 0 \quad (\text{A.25})$$

Referências Bibliográficas

- [1] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons* (North-Holland, Amsterdam, 1982).
- [2] A. Vilenkin and E.P.S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects* (Cambridge, Cambridge, UK, 1994).
- [3] E.W. Kolb and M.S. Turner, *The Early Universe* (Addison-Wesley, Redwood, CA, 1990).
- [4] M. Cvetič and H.H. Soleng, Phys. Rep. **282**, 159 (1997).
- [5] P.S. Wesson, *Five Dimensional Physics* (World Scientific, Singapore, 2006).
- [6] N. Manton and P. Sutcliffe, *Topological Solitons* (Cambridge, Cambridge, England, 2004).
- [7] D. Walgraef, *Spatio-Temporal Pattern Formation* (Springer, New York, 1997).
- [8] A.H. Eschenfelder, *Magnetic Bubble Technology* (Springer, Berlin, 1981).
- [9] R. Caldwell, R. Dave, and P. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **80**, 1582 (1998)
- [10] S. Carrol, Phys. Rev. Lett. **81**, 3067 (1998)
- [11] P. Peebles and B. Ratra, Rev. Mod. Phys. **75**, 559 (2003).
- [12] T. Padmanabham, Phys. Rep. **380**, 235 (2003)

- [13] D. Bazeia, M.Z. Hernandez, A. M. Simas, Solitons in Poly(oxyethylene). Preprint cond-mat/0207716
- [14] Ludmila V. Yakushevick, Nonlinear Physics of DNA, 2 ed, Ed. Wiley - VCH (2004)
- [15] D. Bazeia, M. J. dos Santos, R. F. Ribeiro, Phys. Lett. **A208**, 84-88 (1995). [hep-th/0311265].
- [16] D. Tong, Phys. Rev. **D66**, 025013 (2002). [hep-th/0202012].
- [17] M. Eto, N. Sakai, Phys. Rev. **D68**, 125001 (2003). [hep-th/0307276].
- [18] A. de Souza Dutra, Phys. Lett. **B626**, 249-255 (2005). [arXiv:0705.2903 [hep-th]].
- [19] D. Bazeia, F. A. Brito, L. Losano, JHEP **0611**, 064 (2006). [hep-th/0610233].
- [20] D. Bazeia, L. Losano, R. Menezes and J. C. R. Oliveira, Eur. Phys. J. C **51**, 953 (2007), [arXiv:hep-th/0702052].
- [21] M.K. Prasad and C.M. Sommerfield, Phys. Rev. Lett. **35**, 760 (1975); E.B. Bogomol'nyi, Sov. J. Nucl. Phys. **24**, 449 (1976).
- [22] D. Bazeia, L. Losano and J.M.C. Malbouisson, Phys. Rev. D **66**, 101701(R) (2002).
- [23] C. A. Almeida, D. Bazeia, L. Losano, J. M. C. Malbouisson, Phys. Rev. **D69**, 067702 (2004). [hep-th/0405238].
- [24] V. I. Afonso, D. Bazeia, M. A. Gonzalez Leon, L. Losano, J. Mateos Guilarte, Phys. Rev. **D76**, 025010 (2007). [arXiv:0704.2424 [hep-th]].

- [25] D. Bazeia, L. Losano, R. Menezes, *Physica* **D208**, 236-256 (2005). [hep-th/0411197].
- [26] A. Alonso Izquierdo, M. A. Gonzalez Leon, M. de la Torre Mayado, J. Mateos Guilarte, *Physica* **D200**, 220-241 (2005). [nlin/0411050 [nlin-ps]].
- [27] A. Alonso-Izquierdo, M. A. Gonzalez Leon, J. Mateos Guilarte, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 131602 (2008). [arXiv:0808.3052 [hep-th]].
- [28] [hep-th/0304197]. E. Babichev, *Phys. Rev.* **D74**, 085004 (2006).
- [29] [hep-th/0608071]. D. Bazeia, L. Losano, R. Menezes, J. C. R. E. Oliveira, *Eur. Phys. J.* **C51**, 953-962 (2007).
- [30] [hep-th/0702052]. D. Bazeia, L. Losano, R. Menezes, *Phys. Lett.* **B668**, 246-252 (2008).
- [31] [arXiv:0705.3554 [hep-th]]. E. Babichev, *Phys. Rev.* **D77**, 065021 (2008).
- [32] [arXiv:0711.0376 [hep-th]]. D. Bazeia, E. da Hora, C. dos Santos, R. Menezes, *Phys. Rev.* **D81**, 125014 (2010).
- [33] [arXiv:1006.3955 [hep-th]]. M. Andrews, M. Lewandowski, M. Trodden, D. Wesley, *Phys. Rev.* **D82**, 105006 (2010).
- [34] [arXiv:1007.3438 [hep-th]]. P. P. Avelino, D. Bazeia, R. Menezes, [arXiv:1007.1457 [hep-th]].
- [35] C. Armendariz-Picon, T. Damour, V. F. Mukhanov, *Phys. Lett.* **B458**, 209-218 (1999). [hep-th/9904075].
- [36] C. Armendariz-Picon, V. F. Mukhanov, P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 4438-4441 (2000). [astro-ph/0004134].

- [37] M. Olechowski, Phys. Rev. **D78**, 084036 (2008). [arXiv:0801.1605 [hep-th]].
- [38] C. Adam, N. Grandi, J. Sanchez-Guillen, A. Wereszczynski, J. Phys. A **A41**, 212004 (2008). [arXiv:0711.3550 [hep-th]].
- [39] C. Adam, N. Grandi, P. Klimas, J. Sanchez-Guillen, A. Wereszczynski, J. Phys. A **A41**, 375401 (2008). [arXiv:0805.3278 [hep-th]].
- [40] D. Bazeia, A. R. Gomes, L. Losano, R. Menezes, Phys. Lett. **B671**, 402-410 (2009). [arXiv:0808.1815 [hep-th]].
- [41] V. Dzhunushaliev, V. Folomeev, M. Minamitsuji, Rept. Prog. Phys. **73**, 066901 (2010). [arXiv:0904.1775 [gr-qc]].
- [42] Y. -X. Liu, Y. Zhong, K. Yang, Europhys. Lett. **90**, 51001 (2010). [arXiv:0907.1952 [hep-th]].
- [43] L. B. Castro, L. A. Meza, [arXiv:1011.5872 [hep-th]].
- [44] C.A.G. Almeida, D. Bazeia and L. Losano, J. Phys. A **34**, 3351 (2001), [arXiv:hep-th/0103166].
- [45] D. Bazeia, L. Losano and R. Menezes, Phys. Lett. B **668**, 246 (2008), [arXiv:hep-th/0807.0213].
- [46] N. H. Christ and T. D. Lee, Phys. Rev. D **12**, 1606 (1975).
- [47] D. Bazeia and L. Losano, Phys. Rev. D **73**, 025016 (2006), [arXiv:hep-th/0511193].
- [48] "Topological defects in sine-Gordon models"....
- [49] M. Born and L. Infeld, Proc. R. Soc. London A **144**, 425 (1934); P. Brax, J. Mourad and D.A. Steer, Phys. Lett. B **575**, 115 (2003), [arXiv:astro-ph/0410031].

- [50] E.B. Bogomol'Snyi, *Sov J. Nucl. Phys.* 24, 449 (1976).
- [51] Dionisio Bazeia Filho, *Campos Escalares em ação*, Tese apresentada para o Concurso de Professor Titular - UFPB (2004).
- [52] P. G. Drazin, R. S. Johnson, *Solitons-An Introduction*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, 1989.
- [53] T. D. Lee, R. Friedberg and A. Sirlin. *Class of scalar-field soliton solutions in three space dimensions*, *Physical Review D*, Vol 13 , nº 10, 15 may 1976.
- [54] D. Bazeia, L. Losano and J. M. C. Malbouisson, *Deformed defects*, *Phys. Rev. D* 66, 101701 (2002) [arXiv:hep-th/0209027].
- [55] D. Bazeia, *Defect Structures in Field Theory*, [arXiv: hep- th/ 0507188v2 23 Jul 2005].
- [56] D. Bazeia, L. Losano and R. Menezes, *First-order framework and generalized global defect solutions*, [arXiv:0807.0213v2 [hep-th] 21 Aug 2008]
- [57] D. Bazeia, L. Losano, R. Menezes and J.C.R.E Oliveira, *Generalized global defect solutions*, [arXiv:hep-th/0702052v2 [hep-th] 23 May 2007]
- [58] Roberto Menezes da Silva, *Defeitos Globais em Teoria de Campos e Aplicações*, [Tese de Doutorado (2007)]
- [59] Marcos Antonio Matos Souza, *Defeitos Deformados e Aplicações em Modelos Multi seno-Gordon*, [Disertação de Mestrado (2009)]
- [60] Carlos Alberto Gomes de Almeida, *Deformação de Defeitos em Modelos de Campos Escalares*, [Tese de Doutorado (2004)]
- [61] E.B. Bogomol'nyi, *Stability of Classical Solutions*, *Soc. J. Nucl. Phys.* 24, 449 (1976).

- [62] Vilenkin A. and Shellard E.P.S., *Cosmic strings and other topological defects*, (CUP, 1994)(T)(ISBN 0521391539)(534s).
- [63] V.I. Afonso, D. Bazeia, M.A. Gonzalez Leon, L. Losano, J. Mateos Guilarte, *Constructing networks of defects with scalar fields*, Journal-ref: Phys.Lett.B662:75-79, 2008 , [arXiv:0710.5663v2 [hep-th] 18 Feb 2008].
- [64] D. Bazeia, M.A. González León, L. Losano, J. Mateos Guilarte, *Deformed defects for scalar fields with polynomial interactions*, Journal-ref: Phys.Rev.D73:105008, 2006, [arXiv:hep-th/0605127v1 12 May 2006].
- [65] D. Bazeia, L. Losano, *Deformed defects with applications to braneworlds*, Journal-ref: Phys.Rev. D73 (2006) 025016, [arXiv:hep-th/ 0511193v3 5 Jan 2006].
- [66] D. Bazeia, J. Menezes, R. Menezes, *New Global Defect Structures*, Journal-ref: Phys.Rev. D66 (2002) 101701, [arXiv:hep-th/0305234v3 21 Oct 2003].
- [67] C. A. G. Almeida, L. Losano, R. Menezes,¹ and T. F. Nascimento, *Em preparação*,
- [68] N. Rosen, Philip M. Morse, *On the Vibrations of Polyatomic Molecules*, Journal-ref: Phys.Rev. **42** 210