



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**SOBRE O TEOREMA DE CAMPBELL-MAGAARD E
O PROBLEMA DE CAUCHY NA RELATIVIDADE
GERAL**

THAIS AKEMI TOKUBO SANOMIYA

JOÃO PESSOA-PB
FEVEREIRO/2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**SOBRE O TEOREMA DE CAMPBELL-MAGAARD E
O PROBLEMA DE CAUCHY NA RELATIVIDADE
GERAL**

Dissertação apresentada por Thais Akemi Tokubo Sanomiya ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal da Paraíba como atividade final para obtenção do título de Mestre conforme legislação vigente.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho

JOÃO PESSOA-PB
FEVEREIRO/2016

S228s Sanomiya, Thais Akemi Tokubo.
Sobre o teorema de Campbell-Magaard e o problema de
Cauchy na relatividade / Thais Akemi Tokubo Sanomiya. - João
Pessoa, 2016.
102 f. : il. -

Orientador: Carlos Augusto Romero Filho.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN

1. Física. 2. Teorias de imersões. 3. Equações
diferenciais parciais. 4. Folheações do espaço-tempo. 5.
Problema de Cauchy. 6. Teorema de Campbell-Magaard. I.
Título.

UFPB/BC

CDU: 53(043)



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física

DECLARAÇÃO DE TITULAÇÃO
Mestrado

A Comissão Examinadora que abaixo assina este documento, reunida no dia 11 de março de 2016, na Sala de Reuniões do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, **APROVA Thais Akemi Tokubo Sanomiya** na defesa de sua dissertação intitulada “*Sobre o Teorema de Campbell-Magaard e o Problema de Cauchy na Relatividade Geral*”.

João Pessoa, 11 de março de 2016

Orientador:

Carlos Augusto Romero Filho

Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho
(UFPB)



1º Examinador:

Fábio Leal de Melo Dahia

Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia
(UFPB)

2º Examinador:

Jorge Herbert Soares de Lira

Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira
(UFC)

Aos meus pais, Gilberto Massashi Sanomiya e Cristina Harumi Tokubo Sanomiya.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, meu eterno e grande Amigo, por estar sempre presente em minha vida me dando forças e guiando os meus passos. Toda honra e toda glória seja dada somente a Ti.

Aos melhores pais do mundo Gilberto e Cristina por todo amor, dedicação e carinho. Vocês são a minha fonte de inspiração. Pai, admiro muito a sua dedicação e a excelência com que realiza desde as menores as maiores tarefas da vida. Mãe, obrigada pela alegria contagiante e pela companhia e força nas mais diversas situações, a senhora é o meu maior exemplo de mulher batalhadora e guerreira. Vocês são exemplos de vida a serem seguidos, me sinto honrada em ser a filha de vocês. Obrigada por acreditarem em mim, amo vocês.

Ao meu professor e orientador Carlos Augusto Romero Filho, responsável pela minha formação como pesquisadora e profissional. Agradeço pelo voto de confiança e por toda atenção, dedicação e paciência que demonstrou por mim ao longo de todos esses anos.

A Klefson, o grande responsável pela minha escolha de ser física. Obrigada por todo amor, cuidado, paciência e por tornar os meus dias mais felizes. Serei infinitamente grata a Deus pela sua vida, Ele não poderia ter me dado um companheiro de vida melhor do que você. Amo você.

Agradeço a todos os meus amigos, em especial Erick e Daiana pela amizade sincera e pelo companheirismo.

Agradeço a todos os professores do Departamento de Física da UFPB por todo conhecimento.

A CAPES e ao CNPq pelo suporte financeiro.

O cientista converteu-se aos olhos do povo no mágico a quem as forças da natureza obedecem, mas este poder só pode conduzir a algo bom, se ele ao mesmo tempo for um sacerdote e se atuar apenas como lhe ordena a divindade ou o destino.

W.Heisenberg

RESUMO

A geometria diferencial passou a ser uma ferramenta fundamental na física com o surgimento da relatividade geral. Em particular, destacamos sua importância na investigação das chamadas teorias de imersão do espaço-tempo. Neste trabalho analisamos dois grandes formalismos fundamentados de forma direta ou indireta na teoria de imersões: o teorema de Campbell-Magaard e o problema de Cauchy para a relatividade geral. Tendo como principal objetivo traçar um paralelo entre esses dois formalismos, estudamos, nesta dissertação, o problema de valor inicial (pvi) para a relatividade geral mostrando que além de admitir a formulação de pvi, a mesma é bem posta. Ademais, aplicamos este formalismo para o caso de uma métrica do tipo Friedmann-Robertson-Walker em $(3+1)$. Estudamos também o teorema de Campbell-Magaard e sua extensão para o espaço-tempo de Einstein e aplicamos este teorema para uma métrica do tipo de Sitter em $(2+1)$.

Palavras-chave: Teorias de imersões. Equações diferenciais parciais. Folheações do espaço-tempo. Problema de Cauchy. Teorema de Campbell-Magaard

ABSTRACT

After the formulation of general relativity differential geometry has become an increasing important tool in theoretical physics. This is even more clear in the investigation of the so-called embedding space-time theories. In this work we focus our attention in the Cauchy problem. These have played a crucial role in our understanding of the mathematical structure of general relativity and embedding theories. We investigate the similarities and differences between the two approaches. We also study an extension of the Campbell-Magaard theorem and give two examples of both formalisms.

Keywords: Embedding theory. Differential partial equations. Space-time foliations. Cauchy problem. Campbell-Magaard theorem.

LISTA DE FIGURAS

2.1	Plano.	19
2.2	Cilindro.	19
2.3	Curvatura gaussiana.	25
2.4	Catenóide e helicóide.	26
3.1	Curva $\alpha(t)$	28
3.2	Superfície Regular.	39
4.1	Diagrama do espaço-tempo mostrando a região K	48
4.2	Folheação do espaço-tempo.	54
4.3	Diagrama do espaço-tempo ilustrando a noção da curvatura extrínseca em Σ	55
5.1	Imersão.	72
5.2	Representação gráfica da imersão.	73
5.3	Esfera imersa no espaço euclidiano \mathbb{R}^3	74
5.4	Sistema de coordenadas adaptado à imersão.	76
A.1	Cone de luz.	98
A.2	Estrutura causal do espaço-tempo.	99
A.3	Domínio de dependência e horizonte de Cauchy.	100
A.4	Representação tridimensional do espaço-tempo de Gödel.	100

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO	12
CAPÍTULO 2 – GEOMETRIA INTRÍNSECA DAS SUPERFÍCIES	17
2.1 Introdução	17
2.2 Isometrias	17
2.3 Equações de compatibilidade	20
2.4 O teorema Egregium	24
CAPÍTULO 3 – IMERSÕES ISOMÉTRICAS	27
3.1 Introdução	27
3.2 Imersões isométricas	28
3.3 A segunda forma fundamental para variedades riemannianas	29
3.4 O teorema de Gauss	33
3.5 A equação de Ricci	35
3.6 A equação de Codazzi	37
3.7 Imersões isométricas em $2+1$	38
3.7.1 A segunda forma fundamental	39
3.7.2 A equação de Gauss	41
3.7.3 A equação de Ricci	42
3.7.4 A equação de Codazzi	43

CAPÍTULO 4 – O PROBLEMA DE CAUCHY	44
4.1 Introdução	44
4.2 O problema de Cauchy na física	45
4.3 O problema de Cauchy na relatividade geral	50
4.3.1 Relações de Gauss-Codazzi	56
4.3.2 Equações de vínculo e evolução	58
4.3.3 Redução hiperbólica das equações de Einstein	65
4.3.4 Aplicações do problema de Cauchy	67
CAPÍTULO 5 – O TEOREMA DE CAMPBELL-MAGAARD	70
5.1 Introdução	70
5.2 O teorema de Campbell-Magaard	70
5.3 O teorema de Campbell-Magaard estendido	80
5.3.0.1 Curvaturas intrínseca e extrínseca de uma hipersuperfície	81
5.3.1 Aplicação do teorema de Campbell-Magaard	87
CAPÍTULO 6 – CONCLUSÃO	90
REFERÊNCIAS	93
APÊNDICE A – ESTRUTURA CAUSAL DO ESPAÇO-TEMPO	97
APÊNDICE B – EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS E SUAS APLICAÇÕES	101
Exemplos de EDP's	102
Classificação por tipo	102

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

“O Grande Arquiteto do Universo agora se mostra como um matemático puro.”
(J.H.JEANS, 1930)

O conceito de imersão sempre esteve presente de forma direta ou indireta no universo matemático. Desde os primórdios da geometria diferencial clássica, a definição usual de superfície regular supõe que a superfície está imersa em um espaço ambiente euclidiano, o \mathbb{R}^3 . Com a introdução do conceito de variedade diferenciável riemanniana, formulado por Riemann em 1850, o estudo de imersões ganhou um novo aspecto, iniciando uma busca pela possibilidade de imersão desses espaços abstratos em espaços euclidianos de dimensões maiores do que 3.

A primeira resposta a essa investigação foi dada, na forma de conjectura, por Schläfli [1] em 1873. Schläfli conjecturou que qualquer variedade riemanniana de dimensão n , com métrica positiva definida, poderia ser imersa, localmente, em um espaço euclidiano N -dimensional, com $N = n(n + 1)/2$. A demonstração da conjectura de Schläfli veio somente em 1926 através do trabalho de Janet [2] e do trabalho de Cartan [3], em 1927, que utilizando métodos diferentes provaram a conjectura de Schläfli que passou a ser conhecida desde então como teorema de Janet-Cartan.

É sabido que a teoria gravitacional relativística tem uma descrição do espaço-tempo em termos de uma variedade semi-riemanniana, onde a condição sobre a métrica de ser positiva-definida é substituída pela condição de ser lorentziana. Visando a aplicação destes espaços, Friedman [41], em 1961, estendeu o teorema de Janet-Cartan para variedades semi-riemannianas.

O teorema de Janet-Cartan e outros resultados da teoria de imersões que surgiram posteriormente tratavam apenas o caso de imersões locais, em outras palavras, considera-se a imersão de um subconjunto aberto, simplesmente conexo que corresponde à vizinhança de um dado ponto p da variedade riemanniana ou semi-riemanniana a ser imersa. O problema de considerar uma imersão global da variedade M^n como um todo num espaço ambiente euclidiano de

dimensão N é um problema bastante complexo, e foi abordado elegantemente por John Nash [42] em 1956. Neste trabalho Nash obteve dois resultados fundamentais: o primeiro resultado é que se a variedade imersa for compacta, então, o número de dimensões do espaço imersor é $N = n(3n + 11)/2$; o segundo resultado é que se a variedade imersa não for compacta, então, $N = n(n + 1)(3n + 11)/2$. O resultado obtido por Nash foi estendido posteriormente para espaços semi-riemannianos no trabalho de C. Clarke [43] em 1970.

A teoria da relatividade geral, além de trazer inúmeras inovações no que diz respeito a conceitos como espaço-tempo, incluiu a geometria diferencial como uma ferramenta fundamental no estudo de teorias modernas da física. Na física, o conceito de imersão foi introduzido pelas chamadas teorias de imersões do espaço-tempo. O que caracteriza uma teoria de imersão é o fato de considerar o nosso universo quadridimensional imerso em uma variedade com um número de dimensões superior a quatro.

A ideia de adicionar uma coordenada extra ao universo quadridimensional surgiu no trabalho pouco conhecido do físico finlandês Gunnar Nordström, publicado em 1914 [44]. Nordström trabalhava juntamente com Mie numa formulação relativista de uma teoria escalar da gravitação no espaço-tempo de Minkowski. Naquela ocasião, Nordström percebeu que o postulado de uma coordenada extra acarretaria na possibilidade de unificar o campo gravitacional com o eletromagnetismo. Motivadas por essa ideia de unificação da gravitação com o eletromagnetismo, estava aberta a janela para teorias multi-dimensionais na física.

Pouco tempo depois da formulação da teoria da relatividade geral, Theodor Kaluza, em 1919 [13], com o mesmo intuito de Nordström postulou a ideia de uma dimensão extra tendo agora como base a teoria gravitacional de Einstein. De maneira engenhosa, Kaluza mostrou que o espaço-tempo pentadimensional, onde se introduziu novos graus de liberdade representadas pelas componentes extras do tensor métrico, reproduzia simultaneamente as equações de Einstein e as equações do eletromagnetismo.

A proposta de Kaluza dividiu opiniões no meio físico onde a principal razão para a não aceitação era o fato de que a quinta dimensão era inobservada e aparentemente não havia nenhuma perspectiva de detecção experimental. Além do postulado de uma dimensão extra a teoria de Kaluza admitia também a hipótese de que os campos métricos não dependiam da coordenada associada a tal dimensão extra. O caráter *ad hoc* dessa condição, que posteriormente recebeu o nome de condição cilíndrica, também contribuiu de forma negativa para a aceitação da teoria de Kaluza.

O problema do caráter *ad hoc* da condição cilíndrica foi solucionada por Oscar Klein em 1926 [14]. A condição cilíndrica foi substituída pela condição de compacidade, onde atribuiu-

se à quinta dimensão a topologia de um círculo ou compacta, cujo raio extremamente pequeno explicaria a impossibilidade de detecção da dimensão extra.

No início dos anos noventa, o astrofísico inglês Paul Wesson, juntamente com outros colaboradores, desenvolveu uma teoria também em cinco dimensões conhecida na literatura como teoria da matéria induzida. Wesson modificou a teoria de Kaluza-Klein abrindo mão da hipótese de que a dimensão extra deve ser compacta. Nesta teoria, Wesson propõe que a matéria possui uma origem geométrica, em outras palavras, a matéria seria nada mais do que a manifestação da geometria e surge em decorrência do fato de que os campos possuem uma dependência com a dimensão extra. Portanto, neste cenário o espaço-tempo usual quadridimensional pode ser visto como uma hipersuperfície imersa em um espaço de cinco dimensões que deve ser solução das equações de Einstein no vázio.

A teoria original de Kaluza-Klein serviu como um protótipo para novas teorias de unificações, nas quais além do campo eletromagnético e do campo gravitacional as interações nucleares também são levados em conta. Pode-se considerar como exemplo a supergravidade [45], que consegue a unificação das quatro interações fundamentais através de uma versão estendida da relatividade geral em onze dimensões e a teoria de supercordas formulada nos anos oitenta por Michael Green e John Schwarz [46] que também propõe um universo de onze dimensões, onde esta última tem pelo menos cinco formulações diferentes. Em 1995, Witten mostrou que é possível considerar essas cinco formulações distintas da teoria de supercordas como aspectos diferentes de uma teoria subjacente ainda mais fundamental, que também postula um espaço de onze dimensões. Os objetos dinâmicos dessa teoria são as *d-branas*, das quais as cordas são um caso particular. Essa teoria subjacente recebeu o nome de Teoria M.

Associada à busca pela unificação das quatro interações da natureza uma questão intrigante tem chamado a atenção dos físicos: o problema da hierarquia. De maneira sucinta o problema da hierarquia trata da descomunal diferença na ordem de grandeza entre as três interações fundamentais (eletromagnética, fraca e forte) e a interação gravitacional. Uma tentativa de solucionar esse problema foi proposto já no final do século XX por Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali [47]. Neste modelo, essa discrepância nas ordens de grandeza é associada à existência de dimensões extras compactas, assim, a hierarquia seria gerada pela geometria das dimensões extras. Uma das possibilidades consideradas nesta teoria é que tanto a matéria quanto as interações com exceção da interação gravitacional estariam confinadas ao espaço tridimensional (3-brana), enquanto que a interação gravitacional poderia se propagar através de um espaço maior.

Ainda dentro deste cenário, surgiu um modelo alternativo ao de Arkani-Hamed, Dimopou-

los e Dvali proposto por Randall e Sundrum [4]. Este novo modelo envolve a presença de uma única dimensão extra e analogamente ao modelo anterior, trata o nosso espaço tridimensional como uma 3-brana, de maneira que o espaço-tempo corresponde a uma hipersuperfície quadridimensional imersa numa variedade de cinco dimensões com curvatura constante.

A teoria da matéria induzida e o modelo de Randall-Sundrum são exemplos de teorias de imersão da física. No entanto, para que estas teorias sejam consistentes, ou seja, para que seja possível haver imersões de um espaço menor em um outro espaço maior é necessário que tais imersões sejam viáveis sob a ótica da teoria de imersões da geometria diferencial. Portanto, associada a tais teorias surgiu a necessidade de investigar se é sempre possível fazer imersões isométricas de variedades n -dimensionais em variedades de dimensões maiores cujo tensor de Ricci é nulo.

O primeiro a investigar esta questão, embora sob interesse puramente matemático, foi Campbell [6]. Campbell mostrou que todo espaço riemanniano de dimensão n admite uma imersão local e analítica em um espaço de Einstein de dimensão $(n + 1)$. Embora correta, a demonstração de Campbell continha algumas imperfeições que foram corrigidas posteriormente por Magaard [7], e o resultado passou a ser conhecido como teorema de Campbell-Magaard. O teorema de Campbell-Magaard trata apenas do caso de espaços riemannianos, e se esse teorema pudesse ser estendido para espaços semi-riemannianos considerando a presença de uma constante cosmológica, então, o teorema de Campbell-Magaard passaria a ser um suporte matemático para as teorias de imersões. Tal extensão foi obtida posteriormente por F. Dahia e C. Romero em 2001 [8]. A restrição à métrica ser positiva definida foi retirada, o que ampliou a validade do teorema para métricas de índice arbitrário, sendo possível então incluir imersões como as que foram tratadas por Wesson.

A extensão do teorema de Campbell-Magaard se baseia no teorema de Cauchy-Kowalewskaya, o que resulta em certas restrições do ponto de vista físico. Fundamentalmente, o teorema de Cauchy-Kowalewskaya é um teorema aplicado a problemas envolvendo equações diferenciais parciais, tal que para um dado conjunto de condições iniciais analíticas, o teorema garante a existência de soluções analíticas. No entanto, este teorema garante apenas a existência de soluções, mas não garante que as soluções encontradas dependam continuamente das condições iniciais e nem garante uma estrutura causal das soluções.

A dependência contínua das soluções com as condições iniciais é de grande relevância para a Física, pois nos dá a garantia de que pequenas flutuações no espaço ambiente não provocarão grandes distorções na hipersuperfície imersa. Além disso, no cenário da relatividade geral é de crucial importância a garantia da existência da estrutura causal. O formalismo que estuda tais

questões é o problema de Cauchy aplicado à relatividade geral.

Tendo em vista estas questões, nesta dissertação, chama-se a atenção para a analogia entre o teorema de Campbell-Magaard e o problema de Cauchy para a relatividade geral. No contexto do problema de Cauchy, ou problema de valor inicial, a existência de soluções se estruturam em teoremas de equações diferenciais parciais que não dependem da analiticidade das funções envolvidas, o que permite discutir aspectos de continuidade e causalidade.

Esta dissertação está organizada com a seguinte estrutura: o capítulo 2 trata de uma revisão da geometria intrínseca das superfícies, mostrando os principais resultados da geometria diferencial clássica. No capítulo 3, introduziremos o conceito de imersões isométricas, tendo como objetivo principal a obtenção das equação de Gauss-Codazzi. O capítulo 4 trata do problema de Cauchy, ou problema de valor inicial, aplicado à relatividade geral. No capítulo 5, é apresentado o teorema de Campbell-Magaard e posteriormente a extensão do mesmo para variedades semi-riemannianas. Os apêndices compreendem uma breve introdução da estrutura causal do espaço-tempo (apêndice A) e uma introdução à teoria das equações diferenciais parciais (apêndice B).

Capítulo 2

GEOMETRIA INTRÍNSECA DAS SUPERFÍCIES

2.1 Introdução

Em geometria diferencial de curvas e superfícies, conceitos métricos sobre uma superfície regular S (comprimentos, áreas e ângulos) são definidos a partir da primeira forma fundamental I_p , que é meramente a expressão de como a superfície em questão herda o produto interno conhecido do \mathbb{R}^3 . Contudo, a geometria da primeira forma fundamental vai mais além dos conceitos métricos mencionados acima. Diversas propriedades locais importantes de uma superfície como a curvatura podem ser escritas em termos da primeira forma fundamental, o que significa dizer que essas propriedades são definidas sem fazer menção ao espaço ambiente \mathbb{R}^3 , onde está definida a superfície. O estudo de tais propriedades intrínsecas caracteriza o que chamamos de geometria intrínseca das superfícies.

Este capítulo tem, também como finalidade, fazer um breve estudo de isometrias, além de obter as equações de compatibilidade, e por fim, demonstrar a célebre fórmula de Gauss que fornece a expressão da curvatura Gaussiana K em função apenas dos coeficientes da primeira forma fundamental.

2.2 Isometrias

A noção de isometria fornece essencialmente uma noção intuitiva de duas superfícies terem os mesmos coeficientes da primeira forma fundamental. Isto significa que, no que se refere a quantidades métricas como comprimento, área e ângulos, as duas superfícies serão localmente iguais. Define-se de maneira precisa o conceito de isometria como:

Definição 1. Diz-se que uma aplicação $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$ é uma isometria se φ é um difeomorfismo e

se para todo $p \in S$ e para qualquer par $u, v \in T_p S$, tem-se:

$$\langle u, v \rangle_p = \langle d\varphi_p(u), d\varphi_p(v) \rangle_{\varphi(p)}. \quad (2.1)$$

Diz-se, então, que as superfícies S e \bar{S} são isométricas.

Em outras palavras, uma aplicação difeomorfa φ é uma isometria se a diferencial $d\varphi$ preserva o produto interno. Seja φ uma isometria, segue-se imediatamente que:

$$I_p(u) = \langle d\varphi_p(u), d\varphi_p(u) \rangle_{\varphi(p)} = I_{\varphi(p)}(d\varphi(u)), \quad (2.2)$$

para todo $u \in T_p S$. Em termos de uma base $\left\{ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(q), \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(q) \right\}$ associada a uma parametrização $\mathbf{x}(u, v)$ em $p \in S$, que de agora em diante será denotada simplesmente por $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$, pode-se reescrever a primeira forma fundamental da seguinte maneira:

Seja um vetor $w \in T_p S$ tangente a uma curva parametrizada $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, com $p = \alpha(0) = \mathbf{x}(u_0, v_0)$. Então:

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\ &= \langle \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \rangle_p \\ &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p (u')^2 + 2\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p u' v' + \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p (v')^2 \\ &= E(u')^2 + 2F u' v' + G(v')^2, \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde os valores das funções envolvidas são calculados em $t = 0$, e:

$$\begin{aligned} E(u_0, v_0) &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p, \\ F(u_0, v_0) &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p, \\ G(u_0, v_0) &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p, \end{aligned} \quad (2.4)$$

são os coeficientes da primeira forma fundamental na base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ de $T_p S$.

Exemplo 1. Um sistema de coordenadas natural para um plano $P \subset \mathbb{R}^3$ passando pelo ponto $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e contendo os vetores ortonormais $w_1 = (a_1, a_2, a_3)$, $w_2 = (b_1, b_2, b_3)$ pode ser escrito como:

$$\mathbf{x}(u, v) = p_0 + u w_1 + v w_2, \quad (2.5)$$

sendo $u, v \in \mathbb{R}$. Observe inicialmente que $\mathbf{x}_u = w_1$ e $\mathbf{x}_v = w_2$ e os coeficientes da primeira forma

fundamental serão:

$$\begin{aligned} E(u_0, v_0) &= \langle w_1, w_1 \rangle = 1, \\ F(u_0, v_0) &= \langle w_1, w_2 \rangle = 0, \\ G(u_0, v_0) &= \langle w_2, w_2 \rangle = 1. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Considere agora o cilindro reto sobre o círculo $x^2 + y^2 = 1$ cuja parametrização $\bar{\mathbf{x}}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}(u, v) &= (\cos u, \sin u, v), \\ U &= \{(u, v) \in \mathbf{R}^2; 0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty\}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Para o cálculo da primeira forma fundamental, note que:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_u &= (-\sin u, \cos u, 0), \\ \bar{\mathbf{x}}_v &= (0, 0, 1), \end{aligned} \tag{2.8}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \langle \bar{\mathbf{x}}_u, \bar{\mathbf{x}}_u \rangle = \sin^2 u + \cos^2 u = 1, \\ \bar{F} &= \langle \bar{\mathbf{x}}_u, \bar{\mathbf{x}}_v \rangle = 0, \\ \bar{G} &= \langle \bar{\mathbf{x}}_v, \bar{\mathbf{x}}_v \rangle = 1. \end{aligned} \tag{2.9}$$

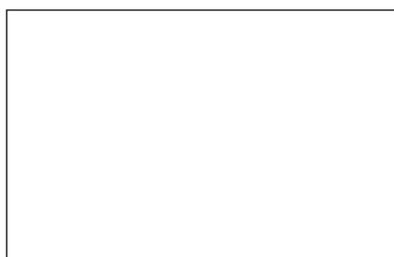


Figura 2.1: Plano.

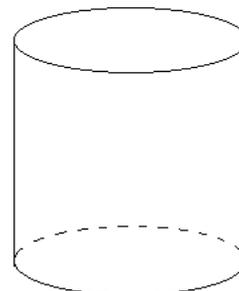


Figura 2.2: Cilindro.

Seja agora φ uma aplicação da vizinhança coordenada $\bar{\mathbf{x}}(U)$ do cilindro sobre o plano $\mathbf{x}(\mathbb{R}^2)$, definida por $\varphi: \mathbf{x} \circ \bar{\mathbf{x}}$. Como os coeficientes da primeira forma fundamental do

plano e do cilindro são iguais $E = \bar{E}, F = \bar{F}, G = \bar{G}$, então:

$$\begin{aligned} I_p(w) &= E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2 \\ &= \bar{E}(u')^2 + 2\bar{F}u'v' + \bar{G}(v')^2 \\ &= I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Segue então que o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ é localmente isométrico a um plano. Portanto, no que se refere a questões métricas, como comprimentos, ângulos e áreas, o plano e o cilindro se comportam localmente da mesma maneira. Este exemplo é bastante intuitivo já que cortando-se um cilindro ao longo de um direção pode-se obter parte de um plano.

2.3 Equações de compatibilidade

Pelo teorema fundamental da teoria local das curvas, uma curva fica totalmente definida pela sua curvatura a menos de um movimento rígido. Em analogia à teoria de curvas planas, é possível construir uma espécie de teorema fundamental para superfícies. A partir deste ponto o caminho seguido será análogo ao de curvas planas para obter o teorema fundamental. Seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização de uma superfície S . Pode-se então associar à superfície uma primeira e segunda forma fundamental¹ cujas expressões são as seguintes:

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle, \\ \Pi_{ij} &= \langle N, \mathbf{x}_{ij} \rangle, \end{aligned} \tag{2.11}$$

onde $N \in T_p S$ e i, j correspondem a u e v respectivamente. Essas duas matrizes são simétricas e g_{ij} é positiva definida.

A pergunta chave é: dados g_{ij} e Π_{ij} , sendo estas simétricas e g_{ij} positiva definida, será que existe uma superfície e uma parametrização tal que g_{ij} e Π_{ij} sejam a primeira forma fundamental e segunda forma fundamental respectivamente?

Em analogia à curvas planas, dada uma superfície S , para cada $p \in S$ temos três vetores associados $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, N\}$ que desempenharão um papel semelhante ao triedro de Frenet. Analisa-se agora como esse triedro varia com relação a u e v . A variação desses vetores deve ser uma

¹Denomina-se de segunda forma fundamental a forma quadrática II_p , definida em $T_p S$ por $II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$ onde N corresponde a aplicação normal de Gauss e $v \in T_p S$

combinação linear da base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, N\}$, então:

$$\mathbf{x}_{ij} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \mathbf{x}_k + \Pi_{ij} N, \quad (2.12)$$

$$N_i = \sum_k a_{ik} \mathbf{x}_k, \quad (2.13)$$

onde Γ_{ij}^k , Π_{ij} e a_{ik} são coeficientes. Na última expressão a ausência da componente N se dá pelo fato de que o vetor N é unitário e, como consequência, o produto interno $\langle N_i, N \rangle$ será igual a zero.

O segundo coeficiente da equação (2.12) advém do produto interno da equação (2.12) pelo vetor N :

$$\langle \mathbf{x}_{ij}, N \rangle = \sum_k \Gamma_{ij}^k \langle \mathbf{x}_k, N \rangle + B \langle N, N \rangle, \quad (2.14)$$

sendo B o coeficiente a determinar. O primeiro termo da direita será igual a zero uma vez que o conjunto $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, N\}$ forma uma base. Note, no entanto, que o lado esquerdo da equação é a própria definição da matriz Π_{ij} , de onde segue que:

$$\langle \mathbf{x}_{ij}, N \rangle = \Pi_{ij} = B \therefore B = \Pi_{ij}. \quad (2.15)$$

Tomando agora o produto escalar das equações (2.12) e (2.13) com o vetor \mathbf{x}_j , vem:

$$\langle N_i, \mathbf{x}_j \rangle = \sum_k a_{ik} \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_j \rangle = \sum_k a_{ik} g_{kj}, \quad (2.16)$$

onde utilizou-se que $g_{ij} = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle$. Reescrevendo o lado esquerdo da última equação tem-se:

$$\begin{aligned} \Pi_{ij} &= \langle N, \mathbf{x}_{ij} \rangle = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^j} \langle N, \mathbf{x}_i \rangle - \langle N_j, \mathbf{x}_i \rangle \\ \Pi_{ij} &= - \langle N_i, \mathbf{x}_j \rangle. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Substituindo este resultado na equação (2.16), tem-se:

$$a_{il} = - \sum_j \Pi_{ij} g^{jl}. \quad (2.18)$$

Para a equação (2.12), temos:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{x}_l \rangle &= \sum_k \Gamma_{ij}^k \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l \rangle + \Pi_{ij} \langle N, \mathbf{x}_l \rangle \\ &= \sum_k \Gamma_{ij}^k \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l \rangle. \end{aligned} \quad (2.19)$$

O lado esquerdo da última expressão pode ser reescrito fazendo permutações cíclicas dos índices:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{x}_l \rangle &= \partial_j \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_l \rangle - \langle \mathbf{x}_{lj}, \mathbf{x}_i \rangle = \partial_j \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_l \rangle - \partial_l \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle + \langle \mathbf{x}_{il}, \mathbf{x}_j \rangle \\
&= \partial_j \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_l \rangle - \partial_l \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle + \partial_i \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle - \langle \mathbf{x}_l, \mathbf{x}_{ij} \rangle \\
2 \langle \mathbf{x}_l, \mathbf{x}_{ij} \rangle &= \partial_j \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_l \rangle - \partial_l \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle + \partial_i \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle \\
\langle \mathbf{x}_l, \mathbf{x}_{ij} \rangle &= \frac{1}{2} (\partial_j \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_l \rangle - \partial_l \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle + \partial_i \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle). \tag{2.20}
\end{aligned}$$

Substituindo este resultado na equação (2.19), segue que:

$$\sum_k \Gamma_{ij}^k \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l \rangle = \sum_k \Gamma_{ij}^k g_{kl} \tag{2.21}$$

$$= \frac{1}{2} (\partial_j \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_l \rangle - \partial_l \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle + \partial_i \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle), \tag{2.22}$$

de onde pode-se obter a expressão clássica dos símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_l g^{lp} (\partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij} + \partial_i g_{lj}). \tag{2.23}$$

Por fim, o sistema de equações (2.12) e (2.13) assume a forma final:

$$\mathbf{x}_{ij} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \mathbf{x}_k + \Pi_{ij} N, \tag{2.24}$$

$$N_i = - \sum_{k,j} g^{jk} \Pi_{ij} \mathbf{x}_k.$$

Para que haja uma superfície com as matrizes g_{ij} e Π_{ij} , sendo a primeira forma fundamental e segunda forma fundamental, respectivamente, é necessário que o sistema de equações acima tenha solução. O exemplo 2 serve como guia para investigar a existência de tais soluções:

Exemplo 2. *Seja $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$. A equação*

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = f^i(x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{2.25}$$

possui solução, por exemplo, para o caso de apenas uma variável quando f é uma função conhecida. Da teoria de equações diferenciais parciais, a equação (2.25) só terá solução se f satisfizer a equação de compatibilidade:

$$\frac{\partial f^i}{\partial x_j} = \frac{\partial f^j}{\partial x_i}. \tag{2.26}$$

Olhando para o sistema (2.24) e comparando com o exemplo 2, se o sistema possui solução,

então a solução deve satisfazer as seguintes relações:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{ijl} &= \mathbf{x}_{ilj}, \\ N_{il} &= N_{li}.\end{aligned}\tag{2.27}$$

Derivando a primeira equação do sistema (2.24) com respeito a x_l :

$$\mathbf{x}_{ijl} = \sum_k \partial_l \Gamma_{ij}^k \mathbf{x}_k + \sum_k \Gamma_{ij}^k \mathbf{x}_{kl} + (\partial_l \Pi_{ij}) N + \Pi_{ij} N_l.\tag{2.28}$$

Derivando agora a segunda equação do sistema (2.24) com respeito a x_l :

$$N_{il} = \sum_{j,k} \left(\partial_l g^{jk} \Pi_{ij} \mathbf{x}_k - g^{jk} \partial_l \Pi_{ij} \mathbf{x}_k - g^{ij} \Pi_{ij} \partial_l \mathbf{x}_k \right)\tag{2.29}$$

Utilizando novamente o sistema (2.24) na expressão (2.28):

$$\mathbf{x}_{ijl} = \sum_k \partial_l \Gamma_{ij}^k \mathbf{x}_k + \sum_k \Gamma_{ij}^k \left(\sum_p \Gamma_{kl}^p \mathbf{x}_p + \Pi_{kl} N \right) + (\partial_l \Pi_{ij}) N - \Pi_{ij} g^{kp} \Pi_{kl} \mathbf{x}_p.\tag{2.30}$$

Pela condição (2.27), tem-se:

$$\mathbf{x}_{ijl} = \mathbf{x}_{ilj}.$$

$$\begin{aligned}& \left(\partial_l \Gamma_{ij}^p + \sum_k \Gamma_{ij}^k \Gamma_{kl}^p - g^{kp} \Pi_{ij} \Pi_{kl} \right) \mathbf{x}_p + \left(\sum_k \Gamma_{ij}^k \Pi_{kl} + \partial_l \Pi_{ij} \right) N \\ &= \left(\partial_j \Gamma_{il}^p + \sum_k \Gamma_{il}^k \Gamma_{kj}^p - g^{kp} \Pi_{il} \Pi_{kj} \right) \mathbf{x}_p + \left(\sum_k \Gamma_{il}^k \Pi_{kj} + \partial_j \Pi_{il} \right) N.\end{aligned}\tag{2.31}$$

Separando as componentes tangentes e as componentes normais, obtém-se as seguintes equações:

$$\partial_l \Gamma_{ij}^p + \sum_k \Gamma_{ij}^k \Gamma_{kl}^p - g^{kp} \Pi_{ij} \Pi_{kl} = \partial_j \Gamma_{il}^p + \sum_k \Gamma_{il}^k \Gamma_{kj}^p - g^{kp} \Pi_{il} \Pi_{kj}.\tag{2.32}$$

Esta equação, obtida com a parte tangente da expressão (2.31), recebe o nome de fórmula de Gauss. Para a parte normal:

$$\sum_k \Gamma_{ij}^k \Pi_{kl} + \partial_l \Pi_{ij} = \sum_k \Gamma_{il}^k \Pi_{kj} + \partial_j \Pi_{il}.\tag{2.33}$$

Esta equação é conhecida como a equação de Mainard-Codazzi. A fórmula de Gauss juntamente com a equação de Mainard-Codazzi são conhecidas como as equações de compatibili-

dade da teoria das superfícies.

Uma questão que merece atenção é que essas relações entre a primeira e a segunda forma fundamental são únicas. Pelo teorema de Bonnet² tem-se uma garantia de que não se pode obter, por derivações sucessivas ou qualquer outro processo, novas relações de compatibilidade. O teorema de Bonnet afirma que dadas a primeira forma fundamental e a segunda forma fundamental pode-se determinar localmente uma superfície.

2.4 O teorema Egregium

Na seção anterior mostrou-se que o sistema (2.24) só admite solução se as matrizes g_{ij} e Π_{ij} satisfizerem as equações de compatibilidade. Iniciaremos esta seção analisando um pouco mais a equação de Gauss. A equação de Gauss pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} g^{kp} (\Pi_{il}\Pi_{kj} - \Pi_{ij}\Pi_{kl}) &= \partial_j \Gamma_{il}^p - \partial_l \Gamma_{ij}^p + \sum_k \Gamma_{il}^k \Gamma_{kj}^p - \sum_k \Gamma_{ij}^k \Gamma_{kl}^p \\ (\Pi_{il}\Pi_{qj} - \Pi_{ij}\Pi_{ql}) &= g_{pq} \left(\Gamma_{il}^p - \partial_l \Gamma_{ij}^p + \sum_k \Gamma_{il}^k \Gamma_{kj}^p - \sum_k \Gamma_{ij}^k \Gamma_{kl}^p \right). \end{aligned} \quad (2.34)$$

O lado esquerdo da equação depende apenas da segunda forma fundamental enquanto o lado direito depende apenas da primeira forma fundamental. Abriremos um parêntese aqui para lembrar o método de obtenção da curvatura gaussiana de uma superfície num determinado ponto $p \in S$.

Seja S uma superfície regular, e seja $p \in S$. A escolha de um vetor normal à superfície, N , e de um vetor velocidade, x , tangente à superfície gera um plano que “corta” a superfície como mostrado na figura 2.3.

A curvatura da superfície naquele ponto será dada pela curvatura da curva $\alpha(t)$ gerada na interseção entre o plano e a superfície S . A medida que rotaciona-se o vetor x encontramos vários valores de curvaturas, o maior valor e o menor valor são as curvaturas maior e menor respectivamente, também conhecidas como curvaturas principais.

A curvatura gaussiana K_g é definida por:

$$K_g = k_1 k_2, \quad (2.35)$$

²Para o enunciado do teorema de Bonnet e a demonstração, vide a referência [9]

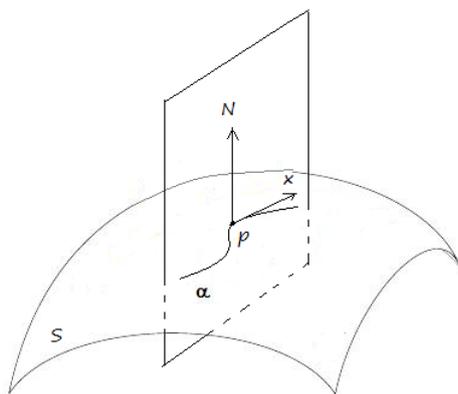


Figura 2.3: Curvatura gaussiana.

ou em termos da primeira forma fundamental e da segunda forma fundamental:

$$K_g = \frac{\Pi_{11}\Pi_{22} - \Pi_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}. \quad (2.36)$$

Tomando $i, l = 1$ e $q, j = 2$ na expressão (2.34):

$$\Pi_{11}\Pi_{22} - \Pi_{12}^2 = \Psi(g, \Gamma, \partial\Gamma) = \varphi(g, \partial g, \partial^2 g). \quad (2.37)$$

Tem-se o seguinte resultado:

$$K_g = \varphi(g, \partial g, \partial^2 g)(g_{11}g_{22} - g_{12}^2). \quad (2.38)$$

Teorema Egregium. *A curvatura gaussiana K_g de uma superfície é invariante por isometrias locais.*

A expressão (2.38) mostra que a curvatura gaussiana depende apenas da primeira forma fundamental, ou seja, é um conceito intrínseco. Este resultado é extremamente inusitado, pois a curvatura gaussiana, definida em termos das curvaturas principais que fazem menção ao espaço ambiente \mathbb{R}^3 , passou a ser um conceito intrínseco.

O teorema Egregium, conhecido também como teorema de Gauss, foi originalmente demonstrado por Gauss no seu famoso trabalho *General Investigations of Curved Surfaces* em 1791 [10]. Devido à extensão de suas consequências, este teorema pode ser considerado um dos resultados mais importantes da geometria diferencial.

Exemplo 3. Considere a superfície de revolução da catenária:

$$\begin{aligned}x &= a \cosh v, \\z &= av; \quad -\infty < v < \infty\end{aligned}$$

cuja parametrização é dada por:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(u, v) &= (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, av), \\0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty.\end{aligned}\tag{2.39}$$

A superfície gerada pela revolução da catenária é chamada *catenóide* (figura 2.4). Considere agora a seguinte parametrização para o helicóide (figura 2.4):

$$\bar{\mathbf{x}}(u, v) = (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, av).\tag{2.40}$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental do catenóide e do helicóide são, respectivamente:

$$E = a^2 \cosh^2 v, \quad F = 0, \quad G = a^2 (1 + \sinh^2 v) = a^2 \cosh^2 v.\tag{2.41}$$

$$\bar{E} = a^2 \cosh^2 v, \quad \bar{F} = 0, \quad \bar{G} = a^2 \cosh^2 v.\tag{2.42}$$

Os coeficientes de ambas as superfícies são iguais $E = \bar{E}$, $F = \bar{F}$, $G = \bar{G}$, pela seção 2.2 pode-se concluir que o catenóide é localmente isométrico ao helicóide. Aplicando o teorema de Gauss a este problema, segue que as curvaturas gaussianas do catenóide e do helicóide são iguais em pontos correspondentes, o que é um fato não-trivial do ponto de vista geométrico.

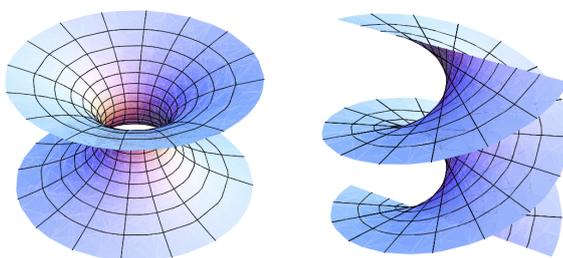


Figura 2.4: Catenóide e helicóide.

Capítulo 3

IMERSÕES ISOMÉTRICAS

“A linha tem magnitude numa direção, o plano em duas direções, o sólido em três direções e além destas não existe mais nenhuma outra magnitude, pois as três são a totalidade.” (ARISTÓTELES)

3.1 Introdução

A frase acima expressa bem a ideia que se tinha antigamente sobre a dimensionalidade do universo. Até o aparecimento da teoria da relatividade restrita, em 1905, estava fora de cogitação um universo com mais de três dimensões. Esse conceito era plausível, já que os objetos encontrados no dia a dia possuem, do ponto de vista sensorial, as dimensões de comprimento, altura e largura.

A teoria da relatividade especial proposta por Einstein, e posteriormente aprimorada por Minkowski [12], apresentou ao mundo uma física diferente da física newtoniana, tanto em termos da geometria quanto da dimensionalidade do nosso universo. O universo que era tridimensional ganhou uma quarta dimensão, que representa a coordenada temporal, e espaço e tempo, que antes eram conceitos totalmente distintos, passaram a ocupar o mesmo patamar para formar uma nova estrutura, o espaço-tempo.

A teoria da relatividade geral proporcionou um grande impulso para o estudo de geometrias não-euclidianas e suas implicações na física, assim como teorias multi-dimensionais. Com o intuito de unificar a gravitação com o eletromagnetismo, Theodor Kaluza [13] e Oscar Klein [14] sugeriram que esta unificação poderia ser obtida através da extensão do espaço-tempo a uma variedade pentadimensional. Com a adição da quinta dimensão tanto, a relatividade geral quanto o eletromagnetismo apareceriam de maneira natural. A teoria de Kaluza-Klein

assumia que a quinta dimensão era compacta, sendo este o motivo pela qual não era detectada experimentalmente. Sendo assim, a quinta dimensão era uma dimensão “escondida”.

Recentemente, surgiu uma versão não-compacta da teoria de Kaluza-Klein, proposta pelo físico inglês Paul Wesson, conhecida como teoria da matéria induzida. Nesta teoria, o universo seria pentadimensional e a quinta dimensão, agora não mais compacta, seria responsável pela existência da matéria. Outra inovação desta teoria é que o mundo onde vivemos é uma hipersuperfície quadridimensional imersa num universo pentadimensional. Teorias que postulam a existência de tais hipersuperfícies são chamadas de teorias de imersão. As teorias de imersão se tornaram alvos de grandes estudos atualmente e são consideradas a base para teorias como cordas e supercordas.

Este capítulo tem como objetivo estudar o conceito de imersões isométricas, assim como a obtenção das equações de Gauss, Ricci e Codazzi e, por fim, a aplicação destes conceitos a $2+1$ dimensões.

3.2 Imersões isométricas

Definição 2. *Sejam M^m e \bar{M}^n duas variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $\varphi : M \rightarrow \bar{M}$ é uma imersão se $d\varphi_p : T_pM \rightarrow T_{\varphi(p)}\bar{M}$ é injetiva para todo $p \in M$. Se, além disto, φ é um homeomorfismo sobre $\varphi(M) \subset \bar{M}$, onde $\varphi(M)$ tem a topologia induzida por \bar{M} , diz-se que φ é um mergulho. Se $M \subset N$ e a inclusão $i : M \subset N$ é um mergulho, diz-se que M é uma subvariedade de N .*

Exemplo 4. *Considere a curva $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ representada na figura (3.1). A curva $\alpha(t)$ é uma imersão, mas por possuir uma auto-intersecção em $t = 2$ e $t = -2$ não é um mergulho.*

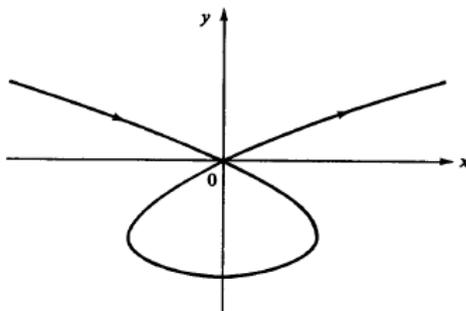


Figura 3.1: Curva $\alpha(t)$.

Seja $\varphi : M^n \rightarrow \bar{M}^{k=n+m}$ uma imersão, sendo \bar{M} uma variedade riemanniana, ou seja, \bar{M} é dotada de uma métrica riemanniana $(\bar{M}, \langle, \rangle)$. Se \bar{M} tem uma estrutura riemanniana, φ induz uma estrutura riemanniana em M por:

$$\langle u, v \rangle_p = \langle d\varphi_p(u), d\varphi_p(v) \rangle_{\varphi(p)} \quad u, v \in T_pM. \quad (3.1)$$

A métrica de M é chamada, então, a métrica induzida por φ , e diz-se que φ é uma imersão isométrica. É interessante ressaltar que a expressão (3.1) surge como uma generalização do conceito de primeira forma fundamental para variedades.

Proposição 1. *Seja $\varphi : M^n \rightarrow \bar{M}^m$, com $n \leq m$, uma imersão da variedade M na variedade \bar{M} . Para todo ponto $p \in M$, existe uma vizinhança $V \subset M$ de p tal que a restrição $\varphi|_V : V \rightarrow \bar{M}$ é um mergulho.*

Em outras palavras, para cada $p \in M$ existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $\varphi(U) \subset \bar{M}$ é uma subvariedade de \bar{M} . Na prática, isso é o mesmo que trabalhar com a subvariedade $\varphi(U) \subset \bar{M}$ ao invés de se trabalhar com a aplicação φ . A partir deste momento, a variedade M será sempre considerada como sendo uma subvariedade de \bar{M} . Ao trabalhar com a subvariedade, todo vetor $v \in T_pM$ é identificado com $d\varphi_p(v) \in T_{\varphi(p)}\bar{M}$, e além disso, para cada $p \in M$ a seguinte decomposição é válida:

$$T_p\bar{M} = T_pM \oplus (T_pM)^\perp, \quad (3.2)$$

onde $(T_pM)^\perp$ denota o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\bar{M}$. Portanto, dado $v \in T_p\bar{M}$ com $p \in M$ tem-se:

$$v = v^T + v^N, \quad (3.3)$$

sendo v^T a parte tangente à subvariedade e v^N a parte normal à subvariedade.

3.3 A segunda forma fundamental para variedades riemannianas

Em princípio, conceitos geométricos conhecidos do \mathbb{R}^3 como primeira forma fundamental e segunda forma fundamental não são definidos sobre as variedades. As imersões isométricas produzem uma “regra” de produto interno sobre a subvariedade que é uma generalização da primeira forma fundamental. Espera-se, portanto, que exista também uma generalização do conceito de segunda forma fundamental para variedades.

Antes de analisar esta questão, considere um problema mais fundamental. Sabe-se que a variedade ambiente \bar{M} induz uma métrica riemanniana na subvariedade M , existindo, portanto,

uma relação entre as conexões ∇ , da subvariedade, e $\bar{\nabla}$, da variedade ambiente. Tal relação é dada pela seguinte proposição:

Proposição 2. *Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ campos tangentes a M . Associado a esses dois campos, consideram-se as extensões locais $\bar{X}, \bar{Y} \in \mathfrak{X}(\bar{U})$, ou seja, $\bar{X}|_U = X$ e $\bar{Y}|_U = Y$. As conexões na subvariedade e na variedade ambiente serão respectivamente $\nabla_X Y$ e $\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}$. Pode-se relacionar as duas conexões como se segue:*

$$\nabla_X Y = \left(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} \right)^T. \quad (3.4)$$

Demonstração. É necessário verificar que a conexão definida por (3.4) é a conexão riemanniana relativa à métrica induzida de M . Define-se, então,

$$\hat{\nabla}_X Y = \left(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} \right)^T. \quad (3.5)$$

Será mostrado então que a conexão é bem definida e além disso:

1. $\hat{\nabla}$ é simétrica;
2. $\hat{\nabla}$ é compatível com a métrica riemanniana;

Mostrar que esta conexão é bem definida consiste em mostrar que $\hat{\nabla}_X Y$ não depende das extensões. Este resultado segue imediatamente da propriedade das conexões que afirma que $\nabla_X Y$ depende só do valor do campo X no ponto p e do valor de Y ao longo de uma curva tangente a X . Pode-se, então, sempre olhar para os valores destes campos na subvariedade M , onde $\bar{X}|_M = X$ e $\bar{Y}|_M = Y$. Sendo assim, $\hat{\nabla}_X Y$ está bem definida, pois $\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}$ em $p \in U \subset M$ só depende de $\bar{X}(q) = X(q)$ e dos valores de \bar{Y} ao longo de alguma curva tangente a $\bar{X}(q) = X(q)$.

Uma conexão afim ∇ em uma variedade riemanniana é dita simétrica quando:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M). \quad (3.6)$$

Segundo a definição (3.5):

$$\hat{\nabla}_X Y - \hat{\nabla}_Y X = \left(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X} \right)^T = [\bar{X}, \bar{Y}]^T = [X, Y]. \quad (3.7)$$

onde utilizou-se a restrição $[\bar{X}, \bar{Y}]|_M = [X, Y]$ e a propriedade de colchetes preservarem campos tangentes a uma subvariedade. Portanto, a conexão definida desta maneira é simétrica.

Uma conexão afim ∇ em uma variedade riemanniana é dita compatível com a métrica se, e somente se,

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \quad (3.8)$$

Sejam $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z} \in \mathfrak{X}(\bar{U})$ extensões. Restringindo-nos ao aberto U , tem-se,

$$X \langle Y, Z \rangle = \bar{X} \langle \bar{Y}, \bar{Z} \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}, \bar{Z} \rangle + \langle \bar{Y}, \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Z} \rangle. \quad (3.9)$$

Lembrando que pode-se sempre decompor um vetor que pertence à variedade ambiente em uma parte tangencial e outra normal à subvariedade, obtém-se:

$$\bar{X} \langle \bar{Y}, \bar{Z} \rangle = \langle (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^N, \bar{Z} \rangle + \langle (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^T, \bar{Z} \rangle + \langle \bar{Y}, (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Z})^N \rangle + \langle \bar{Y}, (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Z})^T \rangle. \quad (3.10)$$

O primeiro e o terceiro termo do lado direito serão iguais a zero, pois correspondem ao produto interno de vetores ortogonais, obtendo-se, então, o resultado final:

$$\bar{X} \langle \bar{Y}, \bar{Z} \rangle = \langle \widehat{\nabla}_X Y, Z \rangle + \langle Y, \widehat{\nabla}_X Z \rangle \quad (3.11)$$

Portanto, $\widehat{\nabla}$ é compatível com a métrica. Mostramos, assim, que $\widehat{\nabla}$ é bem definida, compatível com a métrica e simétrica. Portanto, pelo teorema de Levi-Civita esta conexão será única. \square

Ao mostrar que a conexão na subvariedade corresponde à componente tangencial da conexão da variedade ambiente, de certa maneira “perde-se” uma componente normal da conexão. É esta componente remanescente da conexão que desempenhará o papel de segunda forma fundamental sobre a variedade.

Define-se inicialmente a seguinte aplicação:

$$B(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y. \quad (3.12)$$

Proposição 3. *Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, a aplicação $B : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \rightarrow \mathfrak{X}(U)^\perp$ dada por:*

$$B(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y, \quad (3.13)$$

é bilinear e simétrica.

Demonstração. Pelas propriedades de linearidade de uma conexão, conclui-se imediatamente que B é aditiva em X e Y e é homogênea em X . Resta mostrar que B é bilinear e simétrica. Para provar a bilinearidade faz-se necessário mostrar que:

$$B(X, fY) = fB(X, Y). \quad (3.14)$$

Indicando \bar{f} definida em \bar{U} como sendo uma extensão de f , com f sendo uma função

diferenciável definida em U , em \bar{U} , tem-se:

$$\begin{aligned} B(X, fY) &= \bar{\nabla}_{\bar{X}}(\bar{f}\bar{Y}) - \bar{\nabla}_{\bar{X}}(fY) \\ &= \bar{f}\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - f\nabla_X Y + \bar{X}(\bar{f})\bar{Y} - X(f)Y, \end{aligned} \quad (3.15)$$

como na subvariedade $f = \bar{f}$ e $\bar{X}(\bar{f}) = X(f)$, então:

$$B(X, fY) = fB(X, Y), \quad (3.16)$$

isto é, B é bilinear. Para mostrar que B é simétrico, tem-se,

$$B(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \nabla_X Y = [\bar{X}, \bar{Y}] - [X, Y] + \bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{X} - \nabla_Y X. \quad (3.17)$$

Como na subvariedade $[\bar{X}, \bar{Y}] = [X, Y]$, conclui-se que:

$$B(X, Y) = B(Y, X), \quad (3.18)$$

ou seja, B é simétrico. □

Corolário 1. *A aplicação $B(X, Y)$ num ponto p só depende dos valores dos campos X e Y neste ponto. Sendo assim, B é um campo tensorial.*

Seja $p \in M$ e $n \in T_p M^\perp$. Define-se a forma bilinear simétrica $H_n : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$H_n(x, y) = \langle B(x, y), n \rangle; \quad x, y \in T_p M. \quad (3.19)$$

Definição 3. *A forma quadrática \mathbf{II}_n definida em $T_p M$ por:*

$$\mathbf{II}_n(x) = H_n(x, x), \quad (3.20)$$

é chamada a segunda forma fundamental de φ em p segundo o vetor normal n .

Pode-se associar à aplicação bilinear $H_n(x, y)$ uma aplicação linear auto-adjunta $S_n : T_p M \rightarrow T_p M$ definida por:

$$\langle S_n(x), y \rangle = H_n(x, y) = \langle B(x, y), n \rangle. \quad (3.21)$$

Com a finalidade de dar um caráter geométrico a esta aplicação linear, S_n pode ser expressa em termos da conexão :

Proposição 4. *Seja $p \in M$, $x \in T_p M$ e $n \in T_p M^\perp$. Seja N uma extensão local de n normal a M . Então:*

$$S_n(x) = -\left(\bar{\nabla}_x N\right)^T. \quad (3.22)$$

Demonstração. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $N \in \mathfrak{X}^\perp(M)$ com $X(p) = x$, $Y(p) = y$ e $N(p) = n$. A seguinte relação é válida:

$$\langle Y, N \rangle = 0, \quad (3.23)$$

pois o campo Y é tangente, enquanto N é um campo perpendicular a M . Derivando em relação a uma direção X :

$$\begin{aligned} X \langle Y, N \rangle &= 0, \\ \langle \bar{\nabla}_X Y, N \rangle + \langle Y, \bar{\nabla}_X N \rangle &= 0, \\ \langle \bar{\nabla}_X Y - (\nabla_X Y)^T, N \rangle &= -\langle Y, \bar{\nabla}_X N \rangle. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Utilizando a forma da aplicação B e restringindo os campos ao ponto p :

$$\begin{aligned} \langle B(x, y), n \rangle &= -\langle \bar{\nabla}_x N, y \rangle = -\left\langle \left(\bar{\nabla}_x N \right)^N + \left(\bar{\nabla}_x N \right)^T, y \right\rangle, \\ \langle B(x, y), n \rangle &= -\left\langle \left(\bar{\nabla}_x N \right)^T, y \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Comparando com a expressão (3.21), obtém-se:

$$S_n(x) = -\left(\bar{\nabla}_x N \right)^T. \quad (3.26)$$

□

A segunda forma fundamental tem, portanto, o papel de dar informação de como os vetores normais variam ao longo da subvariedade.

3.4 O teorema de Gauss

Definida a relação entre as conexões da subvariedade e da variedade ambiente, o passo seguinte é relacionar as curvaturas em ambas as variedades. O teorema de Gauss fornece uma relação entre as curvaturas em M e de \bar{M} em função da segunda forma fundamental.

Teorema de Gauss. *Sejam quatro vetores, X, Y, Z e W , tangentes à subvariedade M . A equação de Gauss relaciona a curvatura da subvariedade M , $\langle R(X, Y)Z, W \rangle$ com a curvatura da variedade ambiente \bar{M} , $\langle \bar{R}(Y, Z)Z, W \rangle$, segundo a expressão:*

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle + \langle B(X, Y), B(Y, Z) \rangle - \langle B(X, Z), B(Y, W) \rangle. \quad (3.27)$$

Demonstração. Sejam $X, Y, Z, W \in \mathbf{X}(\bar{M})$ extensões locais dos campos X, Y, Z, W , onde está

sendo omitida a barra sobre os campos pois as definições que seguirão são independentes das extensões. Expressando a curvatura na forma,

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle = \langle \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z, W \rangle. \quad (3.28)$$

A equação (3.28) torna-se:

$$\begin{aligned} \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle &= \langle \bar{\nabla}_X (\nabla_Y Z + \bar{\nabla}_Y Z - \nabla_Y Z) - \bar{\nabla}_Y (\nabla_X Z + \bar{\nabla}_X Z - \nabla_X Z) - \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z, W \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_X (\nabla_Y Z + B(Y, Z)) - \bar{\nabla}_Y (\nabla_X Z + B(X, Z)) - \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z, W \rangle. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Por outro lado, tem-se,

$$\langle \bar{\nabla}_X (\nabla_Y Z), W \rangle = \langle [\bar{\nabla}_X (\nabla_Y Z)]^N + [\bar{\nabla}_X (\nabla_Y Z)]^T, W \rangle = \langle [\bar{\nabla}_X (\nabla_Y Z)]^T, W \rangle,$$

que, pela proposição 2 nos dá:

$$\langle [\bar{\nabla}_X (\nabla_Y Z)]^T, W \rangle = \langle \nabla_X \nabla_Y Z, W \rangle. \quad (3.30)$$

De maneira análoga, para o último produto da expressão (3.29) segue:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z, W \rangle &= \langle (\bar{\nabla}_{[X, Y]} Z)^T + (\bar{\nabla}_{[X, Y]} Z)^N, W \rangle \\ &= \langle (\bar{\nabla}_{[X, Y]} Z)^T, W \rangle = \langle \nabla_{[X, Y]} Z, W \rangle. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Substituindo (3.30) e (3.31) na equação (3.29) e rearranjando a expressão, obtém-se:

$$\begin{aligned} \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle &= \langle \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, W \rangle + \\ &\quad \langle \bar{\nabla}_X B(Y, Z), W \rangle - \langle \bar{\nabla}_Y B(X, Z), W \rangle. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Os dois últimos termos podem ser reescritos utilizando o seguinte artifício:

$$\bar{\nabla}_X \langle B(Y, Z), W \rangle = \langle \bar{\nabla}_X B(Y, Z), W \rangle + \langle B(Y, Z), \bar{\nabla}_X W \rangle. \quad (3.33)$$

No entanto, o lado esquerdo da equação (3.33) é igual a zero pois $B(Y, Z) \in T_p M^\perp$, enquanto $W \in T_p M$. Portanto,

$$\langle \bar{\nabla}_X B(Y, Z), W \rangle = - \langle B(Y, Z), \bar{\nabla}_X W \rangle. \quad (3.34)$$

Substituindo este resultado na expressão (3.32), encontramos,

$$\begin{aligned}
\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle &= \langle R(X, Y)Z, W \rangle - \langle B(Y, Z), \bar{\nabla}_X W \rangle + \langle B(X, Z), \bar{\nabla}_Y W \rangle \\
&= \langle R(X, Y)Z, W \rangle - \langle B(Y, Z), (\bar{\nabla}_X W)^T \rangle - \langle B(Y, Z), (\bar{\nabla}_X W)^N \rangle \\
&+ \langle B(X, Z), (\bar{\nabla}_Y W)^T \rangle + \langle B(X, Z), (\bar{\nabla}_Y W)^N \rangle \\
&= \langle R(X, Y)Z, W \rangle - \langle B(Y, Z), (\bar{\nabla}_X W)^N \rangle + \langle B(X, Z), (\bar{\nabla}_Y W)^N \rangle.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Pela proposição 3,

$$B(X, Y) = \bar{\nabla}_X \bar{Y} - \nabla_X Y = \bar{\nabla}_X \bar{Y} - (\bar{\nabla}_X \bar{Y})^T = (\bar{\nabla}_X \bar{Y})^N.$$

E assim,

$$\langle B(Y, Z), \bar{\nabla}_X W \rangle = \langle B(Y, Z), B(W, X) \rangle. \tag{3.36}$$

Substituindo este resultado na equação (3.35), obtém-se finalmente:

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle B(Y, Z), B(W, X) \rangle - \langle B(X, Z), B(Y, W) \rangle \tag{3.37}$$

□

A equação de Gauss fornece, portanto, a diferença entre as curvaturas da subvariedade e da variedade ambiente conhecendo-se apenas a segunda forma fundamental.

Corolário 2. *Seja $X = W = x$ e $Y = Z = y$, sendo $\{x, y\} \subset T_p M$ um conjunto ortonormal. A equação de Gauss será dada por:*

$$K(x, y) = \bar{K}(x, y) + \langle B(x, x), B(y, y) \rangle - |B(x, y)|^2, \tag{3.38}$$

sendo $K(x, y)$ e $\bar{K}(x, y)$ as curvaturas seccionais ¹ da subvariedade e da variedade ambiente, respectivamente.

3.5 A equação de Ricci

Dada uma subvariedade $M^n \subset \bar{M}^k$ em cada ponto $p \in M$ pode-se fazer a seguinte decomposição:

$$T_p \bar{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp. \tag{3.39}$$

¹Seja $\sigma \subset T_p M$ um 2-plano gerado por $X, Y \in T_p M$. Então a curvatura seccional em σ é definida por $K(\sigma) = K(X, Y) = g(R(X, Y)X, Y) / (g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2)$.

Ou seja, faz sentido falar, localmente, em um fibrado tangente de M e também em um fibrado normal, que é formado pelo conjunto dos subespaços normais a subvariedade em cada ponto. Definindo o fibrado normal como se segue:

$$TM^\perp = \left\{ (p, V) \in T\bar{M} : p \in M, V \in T_p M^\perp \right\}. \quad (3.40)$$

Então para cada ponto $p \in M$ existe um espaço vetorial. Denotam-se os campos vetoriais tangentes e diferenciáveis a M pelas letras latinas X, Y, Z, W, etc , e os campos vetoriais normais e diferenciáveis a M pelas letras gregas ξ, η, ζ, etc .

Dados X e η a componente tangente de $\bar{\nabla}_X \eta$ é dada por $(\bar{\nabla}_X \eta)^T = -S_\eta(X)$. A componente normal de $\bar{\nabla}_X \eta$ é chamada de conexão normal, denotada por $\nabla_X^\perp \eta$:

$$\nabla_X^\perp \eta = \left(\bar{\nabla}_X \eta \right)^N. \quad (3.41)$$

A conexão normal obedece as seguintes propriedades:

1. $\nabla_X^\perp \eta$ é bilinear em X e η ;
2. $\nabla_{fX}^\perp \eta = f \nabla_X^\perp \eta$;
3. $\nabla_X^\perp (f\eta) = f \nabla_X^\perp \eta + X(f)\eta, \quad \forall f \in C^\infty(M)$.

Dada uma conexão pode-se definir uma curvatura. Define-se, então, a curvatura do fibrado tangente, $R^\perp(X, Y)$ como:

$$R^\perp(X, Y)\eta = \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \eta - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \eta - \nabla_{[X, Y]}^\perp \eta. \quad (3.42)$$

Equação de Ricci. Sejam $X, Y \in TM$ e $\eta, \zeta \in T^\perp M$. A equação de Ricci é dada por:

$$\langle \bar{R}(X, Y)\eta, \zeta \rangle = \langle R^\perp(X, Y)\eta, \zeta \rangle + \langle (S_\zeta S_\eta - S_\eta S_\zeta)(X), Y \rangle. \quad (3.43)$$

Demonstração. Calculando a quantidade,

$$\bar{R}(X, Y)\eta = \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X \eta - \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y \eta + \bar{\nabla}_{[X, Y]}\eta, \quad (3.44)$$

e separando os termos em componentes normais e tangentes, obtemos:

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)\eta &= \bar{\nabla}_Y \left[(\bar{\nabla}_X \eta)^T + (\bar{\nabla}_X \eta)^N \right] - \bar{\nabla}_X \left[(\bar{\nabla}_Y \eta)^T + (\bar{\nabla}_Y \eta)^N \right] \\ &+ (\bar{\nabla}_{[X, Y]}\eta)^T + (\bar{\nabla}_{[X, Y]}\eta)^N. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Utilizando que $S_\eta(X) = -(\bar{\nabla}_X N)^T$ e a equação (3.41):

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X, Y)\eta &= \bar{\nabla}_Y \left(\nabla_X^\perp \eta - S_\eta(X) \right) - \bar{\nabla}_X \left(\nabla_Y^\perp \eta - S_\eta(Y) \right) + \nabla_{[X, Y]}^\perp \eta - S_\eta[X, Y] \\
&= \left[\bar{\nabla}_Y (\nabla_X^\perp \eta) - \bar{\nabla}_X (\nabla_Y^\perp \eta) - \bar{\nabla}_Y (S_\eta(X)) + \bar{\nabla}_X (S_\eta(Y)) \right]^T \\
&\quad + \left[\bar{\nabla}_Y (\nabla_X^\perp \eta) - \bar{\nabla}_X (\nabla_Y^\perp \eta) - \bar{\nabla}_Y (S_\eta(X)) + \bar{\nabla}_X (S_\eta(Y)) \right]^N + \nabla_{[X, Y]}^\perp \eta - S_\eta[X, Y] \\
&= S_{\nabla_Y^\perp \eta}(X) - S_{\nabla_X^\perp \eta}(Y) - \nabla_Y S_\eta(X) + \nabla_X S_\eta(Y) + \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \eta - \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \eta \\
&\quad - B(Y, S_\eta X) + B(X, S_\eta Y) + \nabla_{[X, Y]}^\perp \eta - S_\eta[X, Y].
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Utilizando a definição da curvatura normal, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X, Y)\eta &= R^\perp(X, Y)\eta - S_{\nabla_X^\perp \eta}(Y) - \nabla_Y S_\eta(X) + S_{\nabla_Y^\perp \eta}(X) + \nabla_X S_\eta(Y) \\
&\quad - S_\eta[X, Y] - B(Y, S_\eta X) + B(X, S_\eta Y).
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Tomando o produto da equação (3.47) por ζ e observando que $\langle B(X, Y), \eta \rangle = \langle S_\eta(X), Y \rangle$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\langle \bar{R}(X, Y)\eta, \zeta \rangle &= \langle R^\perp(X, Y)\eta, \zeta \rangle - \langle B(S_\eta X, Y), \zeta \rangle + \langle B(S_\eta Y, X), \zeta \rangle \\
&= \langle R^\perp(X, Y)\eta, \zeta \rangle + \langle (S_\eta S_\zeta - S_\zeta S_\eta) X, Y \rangle \\
&= \langle R^\perp(X, Y)\eta, \zeta \rangle + \langle [S_\eta, S_\zeta] X, Y \rangle,
\end{aligned} \tag{3.48}$$

que é exatamente a equação de Ricci. □

3.6 A equação de Codazzi

Considere a seguinte curvatura denotada por:

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, N \rangle. \tag{3.49}$$

É desejável relacionar de alguma forma esta curvatura com a geometria da subvariedade mediante a métrica ou a segunda forma fundamental. Calculando explicitamente a curvatura em questão, temos:

$$\begin{aligned}
\langle \bar{R}(X, Y)Z, N \rangle &= \left\langle \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z, N \right\rangle \\
&= \left\langle \bar{\nabla}_X (\nabla_Y Z + B(Y, Z)) - \bar{\nabla}_Y (\nabla_X Z + B(X, Z)) - B([X, Y], Z), N \right\rangle.
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Note, no entanto, que o primeiro termo do produto $\langle \bar{\nabla}_X \nabla_Y Z, N \rangle$ é tangente, enquanto que o segundo é um vetor normal, portanto, tomando apenas a componente normal que será exatamente a segunda forma fundamental, segue:

$$\langle \bar{\nabla}_X \nabla_Y Z, N \rangle = \langle B(X, \nabla_Y Z), N \rangle. \quad (3.51)$$

Substituindo (3.51) em (3.50), obtém-se:

$$\begin{aligned} \langle \bar{R}(X, Y)Z, N \rangle &= \langle B(X, \nabla_Y Z), N \rangle - \langle B(Y, \nabla_X Z), N \rangle \\ &+ \langle \bar{\nabla}_X B(Y, Z) - \bar{\nabla}_Y B(X, Z) - B([X, Y], Z), N \rangle. \end{aligned} \quad (3.52)$$

A expressão (3.52) fornece a curvatura em termos da segunda forma fundamental, como gostaríamos. No entanto, pode-se ainda reescrevê-la de uma forma mais elegante. Para tal objetivo, define-se:

$$(\nabla_X^\perp B)(Y, Z) = \bar{\nabla}_X^\perp (B(Y, Z)) - B(\nabla_X Y, Z) - B(Y, \nabla_X Z). \quad (3.53)$$

Utilizando a definição anterior a equação (3.52) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, N \rangle = \langle (\nabla_X^\perp B)(Y, Z) - (\nabla_Y^\perp B)(X, Z), N \rangle. \quad (3.54)$$

A equação (3.54) é conhecida como a equação de Codazzi. As equações de Gauss, Ricci e Codazzi desempenham um papel análogo as equações de compatibilidade da teoria das superfícies quando a curvatura seccional da variedade ambiente é constante. Mais precisamente, as equações de compatibilidade, obtidas no capítulo 2, são apenas um caso especial das equações de Gauss e Codazzi.

3.7 Imersões isométricas em 2+1

Esta seção tem como objetivo reobter os resultados da teoria de superfícies (aplicação normal de Gauss, curvatura gaussiana, etc), vistos no capítulo anterior, a partir da teoria de imersões isométricas reduzida para três dimensões.

Iniciando com uma análise simples, pode-se verificar que a superfície S é uma subvariedade do \mathbb{R}^3 . Diz-se que um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular se, para todo ponto $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em \mathbb{R}^3 e uma aplicação $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S$ de um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que:

1. \mathbf{x} é um homeomorfismo diferencial, ou seja, a aplicação é contínua e a sua inversa $\mathbf{x}^{-1} \cap S \rightarrow U$ também é contínua;
2. Para todo $q \in U$, a diferencial $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva.

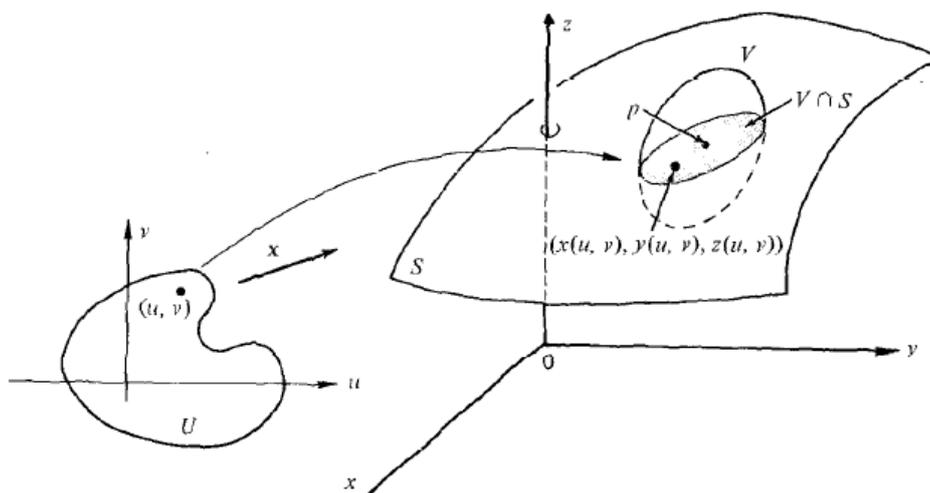


Figura 3.2: Superfície Regular.

No caso de uma superfície regular esta possui uma estrutura diferenciável dada pelo conjunto de parametrizações $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \rightarrow S$. Como consequência imediata da definição de superfície regular 1 e 2 as aplicações \mathbf{x}_α são mergulhos de U_α em S . Considere agora a seguinte inclusão $\mathbf{i} : S \subset \mathbb{R}^3$.

Para cada $p \in S$ pode-se escolher a parametrização $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ de S em p e uma parametrização $\mathbf{j} : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow V \subset \mathbb{R}^3$ em $\mathbf{i}(p)$, sendo V uma vizinhança de p em \mathbb{R}^3 e \mathbf{j} , o mapeamento identidade de modo que $\mathbf{j}^{-1} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{x} = \mathbf{x}$ seja diferenciável. Dada que a aplicação \mathbf{i} é injetiva pelo ítem 2, diz-se que \mathbf{i} é uma imersão. Além disto, \mathbf{i} é um homeomorfismo, então além de ser uma imersão a aplicação \mathbf{i} também será um mergulho. Concluimos assim que S é uma subvariedade de \mathbb{R}^3 .

De agora em diante, considere $f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ como sendo uma imersão de uma superfície regular em \mathbb{R}^3 . A variedade ambiente será o espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , e consequentemente o produto interno sobre a subvariedade S de dois vetores $v_1, v_2 \in T_p S \subset \mathbb{R}^3$ em $p \in S$ será dado pelo produto interno usual $\langle v_1, v_2 \rangle$ do \mathbb{R}^3 .

3.7.1 A segunda forma fundamental

Seja $f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão isométrica, e seja $p \in S$ e $n \in T_p S^\perp$ com $|n| = 1$. Por se tratar de uma hipersuperfície a codimensão é igual a 1. Localmente tem-se apenas duas opções de

extensão com norma igual a 1, que são respectivamente N e \bar{N} onde a última corresponde a extensão local do vetor $-n$. Escolhendo a extensão N ortogonal a S com $|N| = 1$, vamos ver como fica a expressão para o operador S_n .

Seja a aplicação linear auto-adjunta simétrica $S_n : T_p S \rightarrow T_p S$. Pela álgebra linear, sabe-se que S_n pode ser diagonalizável numa base ortonormal. Portanto, existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\} \subset T_p S$, tal que:

$$S_n(e_i) = k_i e_i; \quad i = 1, 2, \quad (3.55)$$

e cujos autovalores reais k_i podem ser identificados como sendo as curvaturas principais da superfície S no ponto p , com respeito a n .

A interpretação geométrica do operador S_n dá-se da seguinte maneira: fazendo novamente a escolha da extensão N com $|N| = 1$ e consideremos $S_1^2(0)$ a esfera unitária centrada na origem. Define-se a seguinte aplicação:

$$\mathbf{g} : S \rightarrow S_1^2(0). \quad (3.56)$$

Escolhendo uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ com $\alpha(0) = q$ e $\alpha'(0) = x$ com $x \in T_p S$, então:

$$d\mathbf{g}(q) \cdot x = \frac{d}{dt} N(\alpha(t))|_{t=0} = \bar{\nabla}_x N(q) = \left(\bar{\nabla}_x N(q) \right)^T, \quad (3.57)$$

onde utilizou-se o fato de que a variedade ambiente é o espaço euclidiano, portanto a derivada ordinária é igual a derivada covariante, e o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \langle N, N \rangle &= 1, \\ X \langle N, N \rangle &= 0 \Rightarrow \langle \bar{\nabla}_x N, N \rangle = 0, \end{aligned} \quad (3.58)$$

portanto, $\bar{\nabla}_x N \in T_p S$.

Pela proposição 4 e utilizando a equação (3.21), segue imediatamente que:

$$\mathbf{II}(x) = -\langle d\mathbf{g}(x), x \rangle. \quad (3.59)$$

O operador S_n pode ser identificado então como sendo a derivada da aplicação \mathbf{g} , aplicação esta conhecida na teoria de superfícies como a aplicação normal de Gauss. E a segunda forma fundamental assume a expressão familiar da teoria de curvas e superfícies obtida no capítulo anterior.

3.7.2 A equação de Gauss

Pelo colorário 2 a equação de Gauss pode ser escrita como:

$$K(x,y) = \bar{K}(x,y) + \langle B(x,x), B(y,y) \rangle - |B(x,y)|^2, \quad x,y \in T_p M \quad (3.60)$$

O operador S_n sendo definido pela expressão (3.55), necessita-se agora determinar como fica a forma o operador linear $B(x,y)$. Sabe-se que $B(x,y) \in T_p S^\perp$ e, como a codimensão da imersão é 1, então todos os vetores ortogonais a S podem ser expressos como sendo múltiplos inteiros do vetor n , ou seja, $B(x,y)$ deve ser um múltiplo inteiro de n para alguma constante $c \in \mathbb{R}$:

$$B(x,y) = cn. \quad (3.61)$$

Isolando a constante:

$$c = \langle B(x,y), n \rangle = \langle S_n(x), y \rangle. \quad (3.62)$$

Fazendo $x = e_i$ e $y = e_j$ e utilizando a expressão (3.55):

$$\begin{aligned} \langle B(e_i, e_j), n \rangle &= \langle S_n(e_i), e_j \rangle = k_i \langle e_i, e_j \rangle, \\ B(e_i, e_j) &= k_i \langle e_i, e_j \rangle n. \end{aligned} \quad (3.63)$$

A base $\{e_i, e_j\}$ é uma base ortonormal, portanto a expressão anterior será diferente de zero apenas no caso quando $i = j$. Obtemos, assim, a seguinte expressão para o operador $B(x,y)$:

$$B(e_i, e_i) = k_i n. \quad (3.64)$$

Substituindo este resultado na equação de Gauss obtém-se a expressão:

$$K(x,y) = k_i k_j, \quad (3.65)$$

onde foi utilizado o fato que $\langle n, n \rangle = 1$ e que a curvatura seccional do espaço euclidiano $\bar{K}(x,y)$ é igual a zero. A equação (3.65) mostra dois importantes resultados. O primeiro resultado é que a curvatura seccional da subvariedade S coincide com a curvatura gaussiana, reobtendo assim o resultado conhecido da teoria de superfícies. Pode-se analisar apenas o lado esquerdo da expressão (3.65). O lado esquerdo é a curvatura seccional definida apenas a partir da geometria da subvariedade e portanto, não há nenhuma menção da variedade ambiente, que neste caso é o espaço euclidiano. Concluimos, então, que o lado direito, correspondente à curvatura gaussiana, é um conceito intrínseco da subvariedade S . Portanto, o segundo resultado é que esta expressão

é uma forma indireta do teorema Egregium.

3.7.3 A equação de Ricci

Considere novamente a inclusão $i : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ e seja um ponto $p \in S$. Escolhendo localmente um campo N numa vizinhança de p que seja normal e unitário:

$$\langle N, N \rangle = 1, \quad N(p) \in T_p S^\perp. \quad (3.66)$$

Derivando com respeito a uma direção tangente X :

$$X \langle N, N \rangle = 0 \Rightarrow \langle \nabla_X N, N \rangle = 0. \quad (3.67)$$

Este resultado implica que o vetor $\nabla_X N$ pertence ao plano tangente a superfície, mas note que a conexão normal consiste em pegar a componente normal do mesmo, de onde segue imediatamente que:

$$\nabla_X^\perp N = 0. \quad (3.68)$$

Substituindo (3.68) na expressão da curvatura do fibrado tangente (3.42), obtém-se:

$$R^\perp(X, Y)N = 0. \quad (3.69)$$

Como toda curvatura, $R^\perp(X, Y)N = 0$ também é um objeto tensorial e conseqüentemente só depende dos campos X, Y e N no ponto p . Escrivendo $\eta \in T_p S^\perp$ como um múltiplo unitário do vetor N , obtém-se:

$$R^\perp(X, Y)\eta = 0 \quad \forall \eta \in T_p S^\perp. \quad (3.70)$$

Substituindo estes resultados na equação de Ricci (3.43):

$$\langle R^\perp(X, Y)\eta, \zeta \rangle = -\langle (S_\zeta S_\eta - S_\eta S_\zeta)(X), Y \rangle; \quad \eta, \zeta \in T_p S^\perp, \quad (3.71)$$

onde utilizou-se que a curvatura $R(X, Y)$ do espaço euclidiano é nula. Na seção 3.7.1 mostrou-se que o operador S_n é diagonalizável e portanto, para todo $p \in S$ existe uma base $\{e_i, e_j\} \in T_p S$ tal que todos os operadores S_n serão diagonalizáveis simultaneamente, ou seja, o lado direito da equação (3.71) se anula e a equação de Ricci assume a seguinte forma final:

$$\langle R^\perp(X, Y)\eta, \zeta \rangle = 0. \quad (3.72)$$

3.7.4 A equação de Codazzi

A equação de Codazzi é dada pela expressão:

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, N \rangle = \langle (\nabla_X^\perp B)(Y, Z) - (\nabla_Y^\perp B)(X, Z), N \rangle. \quad (3.73)$$

Considerando o fato de que a variedade ambiente é euclidiana, a curvatura $\bar{R}(X, Y)$ será igual a zero e a equação de Codazzi assume a forma:

$$\langle (\nabla_X^\perp B)(Y, Z), N \rangle = \langle (\nabla_Y^\perp B)(X, Z), N \rangle. \quad (3.74)$$

Por (3.53):

$$\langle (\nabla_X^\perp B)(Y, Z), N \rangle = \langle \bar{\nabla}_X^\perp (B(Y, Z)), N \rangle - \langle B(\nabla_X Y, Z), N \rangle - \langle B(\nabla_X Z, Y), N \rangle, \quad (3.75)$$

Pela seção 3.7.3 a conexão normal é igual a zero, portanto, o primeiro termo da direita da equação (3.75) pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$X \langle B(Y, Z), N \rangle = \langle \bar{\nabla}_\perp (B(Y, Z)), N \rangle + \langle B(Y, Z), \bar{\nabla}_X^\perp N \rangle = \langle \bar{\nabla}_\perp (B(Y, Z)), N \rangle. \quad (3.76)$$

O que equivale pela relação (3.21) a:

$$\langle \bar{\nabla}_\perp (B(Y, Z)), N \rangle = X \langle S_n(Y), Z \rangle. \quad (3.77)$$

O lado direito da equação (3.75) assume a forma:

$$\begin{aligned} \langle (\nabla_X^\perp B)(Y, Z), N \rangle &= X \langle S_n(Y), Z \rangle - \langle S_n(\nabla_X Y), Z \rangle - \langle S_n(Y), \nabla_X Z \rangle \\ &= \langle \nabla_X (S_n(Y)), Z \rangle + \langle S_n(Y), \nabla_X Z \rangle - \langle S_n(\nabla_X Y), Z \rangle - \langle S_n(Y), \nabla_X Z \rangle \\ \langle (\nabla_X^\perp B)(Y, Z), N \rangle &= \langle \nabla_X (S_n(Y)), Z \rangle - \langle \nabla_X (S_n(Y)), Z \rangle. \end{aligned}$$

Seguindo o mesmo procedimento no lado direito da equação (3.74), a equação de Codazzi assume a forma final:

$$\nabla_X S_N(Y) - \nabla_Y S_N(X) = S_n([X, Y]). \quad (3.78)$$

A equação (3.78) corresponde a equação de Mainardi-Codazzi.

Capítulo 4

O PROBLEMA DE CAUCHY

“Podemos considerar o estado atual do Universo como efeito de seu passado e a causa de seu futuro. Uma inteligência que, em um instante determinado, deveria conhecer todas as forças que põem em movimento a natureza, e todas as posições de todos os objetos dos quais a natureza é composta, se esta inteligência fosse ampla o suficiente para submeter esses dados à análise, ela englobaria em uma única fórmula os movimentos dos maiores corpos do universo e dos menores átomos; para tal inteligência nada seria incerto e o próprio futuro, assim como o passado, estariam evidentes a seus olhos.” (LAPLACE, 1814)

4.1 Introdução

O problema de Cauchy ou o problema de valor inicial é um problema clássico das equações diferenciais. Na teoria das equações diferenciais ordinárias, entende-se por problema de valor inicial encontrar a solução de uma dada equação com um número apropriado de condições iniciais pré-determinadas em um determinado ponto inicial [16]. Por exemplo, a equação diferencial ordinária de segunda ordem:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = f\left(t, u, \frac{du}{dt}\right), \quad (4.1)$$

juntamente com as condições iniciais:

$$u(t_0) = \alpha, \quad \frac{du}{dt}(t_0) = \beta, \quad (4.2)$$

constituem um problema de valor inicial.

Um problema análogo pode ser formulado para o caso de equações diferenciais parciais. Supondo-se que a equação seja de segunda ordem envolvendo duas variáveis independentes,

seja uma função das variáveis independentes x e y e suponha que esta equação possa ser resolvida explicitamente para u_{yy} , de modo que esta possa ser representada da seguinte maneira:

$$u_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}). \quad (4.3)$$

Para um dado valor $y = y_0$, definem-se as condições iniciais do problema dando-se:

$$u(x, y_0) = f(x), \quad u_y(x, y_0) = g(x), \quad (4.4)$$

onde $f = f(x)$ e $g = g(x)$ são funções conhecidas.

O problema de determinar a solução da equação (4.3) satisfazendo as condições (4.4) é conhecido como o problema de valor inicial para equações diferenciais parciais.

Diz-se, então, que uma teoria física possui uma formulação de valor inicial se é possível especificar determinadas condições iniciais de modo que o sistema e a sua subsequente evolução dinâmica seja determinada de maneira única. Além disso, é necessário que as condições iniciais sejam viáveis do ponto de vista físico [17].

É desejável, também, que “pequenas alterações” nas condições iniciais produzam apenas “pequenas alterações” na solução em uma dada região compacta fixa do espaço-tempo. Além disso, tratando-se de uma teoria relativista, mudanças das condições iniciais em uma região, S , que estejam dentro da superfície de Cauchy não devem produzir quaisquer mudanças na solução fora da região futura causal, $J^+(S)$. Caso esta condição fosse violada, existiria a possibilidade de propagação de sinais com velocidades superiores à velocidade da luz correspondendo, portanto, à um regime não-relativístico. Se a teoria possui uma formulação de valor inicial satisfazendo estas duas condições diz-se que está bem posta.

4.2 O problema de Cauchy na física

É sabido que grande parte dos sistemas físicos são regidos por equações diferenciais, sejam elas parciais ou ordinárias. Considere, por exemplo, o caso da mecânica newtoniana. Na mecânica clássica o comportamento de uma partícula é governada pela segunda lei de Newton. Se a partícula se move sob a influência de algum potencial $\Phi(x)$, então estará sob a ação de uma força dada por $f = -\nabla\Phi(x)$, e tem-se:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\partial_i \Phi. \quad (4.5)$$

A equação (4.5) é uma equação diferencial de segunda ordem para $x^i(t)$, mas ao se introduzir o conceito de momento, pode-se reescrevê-la como:

$$\begin{aligned}\frac{dp^i}{dt} &= -\partial_i\Phi, \\ \frac{dx^i}{dt} &= \frac{p^i}{m}.\end{aligned}\tag{4.6}$$

O sistema (4.6) corresponde a duas equações de primeira ordem acopladas. Neste cenário, o problema de valor inicial consiste em especificar um “estado” (x^i, p^i) que sirva como condições de contorno, de maneira que o sistema (4.6) tenha uma solução única. Além disso, uma vez dadas as coordenadas e o momento num certo tempo t_0 , pode-se obter a evolução do sistema para qualquer valor de t .

Outro exemplo é o caso do campo de Klein-Gordon massivo, ϕ , definido no espaço-tempo de Minkowski, cuja dinâmica obedece à equação:

$$\partial_a\partial^a\phi - m^2\phi = 0.\tag{4.7}$$

Escolhendo as coordenadas globais inerciais t, x, y, z a equação (4.7) pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - m^2\phi.\tag{4.8}$$

A diferença matemática entre as equações (4.5) e (4.8) deve-se ao fato de que enquanto a primeira é uma equação diferencial ordinária, a segunda é uma equação diferencial parcial. Apesar dessa diferença, ambas equações dizem como calcular a segunda derivada de uma quantidade desconhecida num instante de tempo, dados o valor e a primeira derivada desta quantidade em um tempo t_0 .

A analogia física e matemática entre as equações (4.5) e (4.8) sugere que a teoria de Klein-Gordon deva ter a seguinte formulação de valor inicial: especificar arbitrariamente os valores de ϕ e $\partial\phi/\partial t$ em uma determinada hipersuperfície Σ_0 com $t = t_0$. De fato, admitindo-se que as condições $(\phi, \partial\phi/\partial t)$ são funções analíticas em Σ , por derivações sucessivas das condições iniciais, pode-se obter todas as derivadas espaciais de ϕ e $\partial\phi/\partial t$ em $t = t_0$. Por exemplo, a equação (4.8) fornece $\partial^2\phi/\partial t^2$ com respeito a derivadas segundas espaciais que podem ser calculadas a partir das condições iniciais, e se a equação obtida for derivada em relação à coordenada temporal t , obtém-se $\partial^3\phi/\partial t^3$ e todas as derivadas espaciais em $t = t_0$. Recursivamente, pode-se obter, então, uma série de potências para a solução ϕ .

Um teorema de extrema importância para problemas de valores iniciais, provado por Cau-

chy e posteriormente generalizado por Kowalewskaya, mostrou que o problema de valor inicial da teoria de Klein-Gordon possui uma solução:

Teorema de Cauchy-Kowalewskaya. *Sejam t, x^1, \dots, x^{m-1} coordenadas de \mathbb{R}^m . Considere um sistema de n equações diferenciais parciais para n funções ϕ_1, \dots, ϕ_n em \mathbb{R}^m , tendo a forma:*

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial t^2} = F_i \left(t; x^\alpha; \phi_j; \partial \phi_j / \partial t; \partial^2 \phi_j / \partial t \partial x^\alpha; \partial^2 \phi_j / \partial x^\alpha \partial x^\beta \right), \quad (4.9)$$

onde cada F_i é uma função analítica de suas variáveis. Sejam $f_i(x^\alpha)$ e $g_i(x^\alpha)$ funções analíticas. Então, existe uma vizinhança aberta O da hipersuperfície $t = t_0$ tal que em O existe uma única solução analítica da equação (4.9) com $\phi_i(t_0, x^\alpha) = f_i(x^\alpha)$ e $\frac{\partial \phi_i}{\partial t}(t_0, x^\alpha) = g_i(x^\alpha)$.

Embora o teorema de Cauchy-Kowalewskaya garanta a existência da solução do problema de valor inicial, este não garante a dependência contínua da solução com as condições iniciais e não garante uma estrutura causal que seria necessária para uma consistência do ponto de vista físico. Diferentemente do caso clássico, por se tratar do cenário relativístico uma análise mais cuidadosa torna-se necessária.

Faz-se necessária a investigação com respeito à continuidade no seguinte sentido: se as condições iniciais sobre a hipersuperfície Σ sofrem uma pequena perturbação, então a solução deve sofrer apenas pequenas perturbações também. A primeira dificuldade que surge está baseada no fato que não se tem uma noção do que seja, por exemplo, duas funções próximas, já que a geometria neste contexto não é mais a geometria euclidiana. Em análise funcional define-se a distância entre duas funções f_1 e f_2 em $t = t_0$ da seguinte maneira: ¹

$$\| f_1 - f_2 \| = \sup_{x \in \Sigma_0} |f_1(x) - f_2(x)| + \sum_{k_1, k_2, k_3} \sup_{x \in \Sigma_0} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2+k_3} (f_1 - f_2)}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2} \partial z^{k_3}} \right|, \quad (4.10)$$

onde $k_1 + k_2 + k_3 \leq k$. É importante notar que a norma gera uma noção de distância e, portanto, faz sentido falar em topologia. Pode-se definir, então, em uma região compacta do espaço-tempo, uma topologia nas soluções. O teorema de Cauchy-Kowalewskaya [18, 19] não dá a garantia de que, para qualquer escolha razoável da topologia no espaço das condições iniciais tenhamos como resultado soluções que sejam contínuas. Além disso, o teorema de Cauchy-Kowalewskaya não dá nenhuma informação com respeito a propagação causal do campo em questão. Para mostrar que a formulação da teoria de Klein-Gordon é bem posta necessita-se de outros métodos além do teorema de Cauchy-Kowalewskaya.

Seja ϕ uma solução suave da equação de Klein-Gordon (4.7), então o tensor energia-

¹A norma (4.10) é uma generalização da norma da convergência uniforme definida num espaço de Banach.

momento de ϕ será:

$$T_{ab} = \partial_a \phi \partial_b \phi - \frac{1}{2} \eta_{ab} (\partial_c \phi \partial^c \phi + m^2 \phi^2), \quad (4.11)$$

e este é conservado:

$$\partial^a T_{ab} = 0. \quad (4.12)$$

Se $\xi^a = (\partial/\partial t)^a$ é um campo vetorial de Killing do tipo tempo ortogonal à hipersuperfície, Σ_0 , então,

$$\nabla^a (T_{ab} \xi^b) = \xi^b \nabla^a T_{ab} + T_{ab} \nabla^a \xi^b. \quad (4.13)$$

O primeiro termo do lado direito se anula devido a condição (4.12) e o segundo termo também será nulo devido a equação de Killing:

$$\nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a = 0. \quad (4.14)$$

Note também que os coeficientes da conexão provenientes da derivada covariante serão iguais a zero por se tratar do espaço-tempo de Minkowski, e portanto, a derivada covariante se torna a derivada usual. Tem-se, então, a seguinte condição:

$$\partial^a (T_{ab} \xi^b) = 0. \quad (4.15)$$

Seja S_0 uma bola fechada na hipersuperfície Σ_0 , e seja Σ_1 uma hipersuperfície futura para $t = t_1$. Considere a hipersuperfície Σ_1 , em $t = t_1$, e definindo um conjunto K tal que $K = D^+(S_0) \cap J^-(\Sigma_1)$. Além disso, sejam $S_1 = D^+(S_0) \cap \Sigma_1$ e S_2 o “envelope” de K .

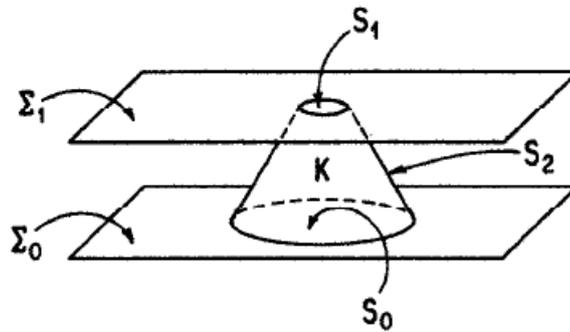


Figura 4.1: Diagrama do espaço-tempo mostrando a região K .

Integrando a equação (4.15) na região K e aplicando o teorema de Gauss, temos:

$$\int_{S_1} T_{ab} \xi^a \xi^b + \int_{S_2} T_{ab} l^a \xi^b = \int_{S_0} T_{ab} \xi^a \xi^b, \quad (4.16)$$

onde l^a é futuro-direcionado normal a S_2 .

Supondo um observador com uma quadri-velocidade v^a , a quantidade $-T_{\beta}^{\alpha}v^{\beta}$ representa o fluxo de matéria visto por ele. Neste caso, faz-se a exigência de que $T_{\alpha\beta}v^{\alpha}v^{\beta} \geq 0$ para qualquer vetor tipo-tempo futuro-direcionado v^{α} , ou seja, o observador sempre vai ver um fluxo positivo de energia, e além disso, exige-se que $-T_{\beta}^{\alpha}v^{\beta}$ não seja um vetor tipo-espaço, o que implica, $T_{\beta}^{\alpha}T_{\alpha\lambda}v^{\beta}v^{\lambda} \leq 0$. Essa exigência sobre o tensor momento-energia é denominada condição de energia dominante. Do ponto de vista físico, essa condição significa que a velocidade do fluxo de matéria é sempre menor do que a velocidade da luz c .

Considerando a condição de energia dominante pode-se dizer que $T_{ab}l^a\xi^b \geq 0$, ou seja o segundo termo da equação (4.16) é não-negativo. Utilizando a equação (4.11), pode-se reescrever a equação (4.16) da seguinte maneira:

$$\int_{S_1} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + |\vec{\nabla} \phi|^2 + m^2 \phi^2 \right] \leq \int_{S_0} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + |\vec{\nabla} \phi|^2 + m^2 \phi^2 \right]. \quad (4.17)$$

Pela equação (4.17) pode-se mostrar que deve haver no máximo uma solução em $D^+(S_0)$ com as condições iniciais $(\phi, \partial\phi/\partial t)$ em S_0 . Em outras palavras, se ϕ_1 e ϕ_2 são ambas soluções da equação de Klein-Gordon (4.7) com as mesmas condições iniciais suaves, mas não necessariamente analíticas, então a diferença $\psi = \phi_2 - \phi_1$ também será solução da equação de Klein-Gordon:

$$\begin{aligned} \partial_a \partial^a \psi - m^2 \psi &= \partial_a \partial^a (\phi_2 - \phi_1) - m^2 (\phi_2 - \phi_1) \\ &= \partial_a \partial^a \phi_2 - m^2 \phi_2 - (\partial_a \partial^a \phi_1 - m^2 \phi_1) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, ψ é solução da equação de Klein-Gordon. Com relação as condições iniciais de ψ , pode-se dizer que estas serão nulas já que ϕ_1 e ϕ_2 possuem as mesmas condições iniciais $(\phi, \partial\phi/\partial t)$. Então, para ψ o lado direito da equação (4.17), tem-se:

$$\int_{S_0} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + |\vec{\nabla} \psi|^2 + m^2 \psi^2 \right] = 0, \quad (4.18)$$

uma vez que em S_0 as condições iniciais são as mesmas. Considerando o caso massivo, $m \neq 0$, então $\psi = 0$ em S_1 :

$$\int_{S_1} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + |\vec{\nabla} \psi|^2 + m^2 \psi^2 \right] = 0 \Rightarrow \psi \text{ deve ser zero em } S_1. \quad (4.19)$$

Se $\psi = 0$ em S_1 , isso implica que $\psi = 0$ ao longo de todo o domínio de dependência futura $D^+(S_0)$, e de maneira semelhante pode-se concluir que $\psi = 0$ em todo $D^-(S_0)$. Fica claro,

portanto, que existe apenas uma única solução em $D^+(S_0)$ satisfazendo as condições iniciais $(\phi, \partial\phi/\partial t)$. Além disso, tem-se a visualização do fato de que qualquer mudança nas condições fora de S_0 não afeta a solução dentro do domínio de dependência $D(S_0)$. Portanto, a segunda condição para que o problema de valor inicial seja bem posto é satisfeita.

A condição de continuidade é provada utilizando uma versão generalizada das integrais (4.17) (norma de Sobolev). Para a prova detalhada, vide a referência [17].

Embora a habilidade prática em controlar as condições iniciais em problemas gravitacionais seja limitada, é natural que o problema de Cauchy possa ser estendida para a relatividade geral. A menos que a relatividade geral difira drasticamente das outras teorias da física clássica, ela deve permitir uma especificação física razoável das condições iniciais. Dadas estas condições iniciais, as equações de Einstein devem determinar a subsequente evolução do sistema.

4.3 O problema de Cauchy na relatividade geral

Ao formular o problema de Cauchy para a relatividade geral, destacam-se algumas diferenças em relação às teorias tratadas anteriormente. Primeiramente, as equações de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (4.20)$$

são covariantes e, por isso, não fornecem nenhuma noção privilegiada de tempo, já que na relatividade as coordenadas espaciais e a coordenada temporal passam a ocupar o mesmo patamar. Neste caso, necessita-se fazer uma escolha de uma hipersuperfície tipo-espaço (ou fatia) Σ , especificando-se as condições iniciais sobre a mesma. Utilizando as equações de evolução, determina-se a dinâmica do sistema para uma outra hipersuperfície futura.

A segunda diferença está no fato de que para que se possa ter uma formulação de valor inicial bem posta é necessário que se faça uma “escolha de gauge”, isto é, uma escolha de coordenadas para que as equações de Einstein assumam uma forma desejada.

Antes da análise do problema de Cauchy, faz-se necessário enunciar os seguintes resultados:

Definição 4. *Um sistema de n equações diferenciais parciais de segunda ordem para n funções desconhecidas ϕ_1, \dots, ϕ_n em uma variedade M é chamado quase-linear, diagonal, hiperbólico de segunda ordem se este pode ser colocado na forma:*

$$g^{ab}(x; \phi_j; \nabla_c \phi_j) \nabla_a \nabla_b \phi_j = F_i(x; \phi_j; \nabla_c \phi_j), \quad (4.21)$$

onde ∇_a é qualquer operador derivativo, g^{ab} é uma métrica lorentziana e cada F_i é uma função

suave de suas variáveis.

Para equações desse tipo segue-se o teorema [20]:

Teorema 1. *Sejam $(\phi_0)_1, \dots, (\phi_0)_n$ quaisquer soluções do sistema hiperbólico quase-linear (4.21) na variedade M e seja $(g_0)^{ab} = g^{ab}(x; (\phi_0)_j; \nabla_j(\phi_0)_j)$. Suponha que $(M, (g_0)_{ab})$ seja globalmente hiperbólico (ou alternativamente, considere uma região globalmente hiperbólica desse espaço-tempo). Seja Σ uma superfície suave de Cauchy tipo-espaço de $(M, (g_0)_{ab})$. Então, a formulação do valor inicial da equação (4.21) é bem posta em Σ da seguinte maneira: para uma condição inicial em Σ suficientemente próxima às condições iniciais para $(\phi_0)_1, \dots, (\phi_0)_n$, existe uma vizinhança aberta O de Σ tal que a equação (4.21) tem solução, ϕ_1, \dots, ϕ_n , em O ($O, g_{ab}(x; \phi_j; \nabla_c \phi_j)$) e é globalmente hiperbólica. A solução é única em O e propaga-se causalmente no sentido de que dado outro conjunto de condições iniciais ϕ'_1, \dots, ϕ'_n tal que no subconjunto S sejam iguais a ϕ_1, \dots, ϕ_n , então, a solução permanece a mesma na região $O \cap D^+(S)$. Finalmente, a solução depende continuamente das condições iniciais.*

A prova do teorema pode ser encontrada em [22]. Antes da análise da formulação do problema de valor inicial para a relatividade geral, vamos iniciar os nossos estudos olhando para a formulação de valor inicial para as equações de Maxwell no espaço-tempo de Minkowski devido a sua grande semelhança com a formulação relativística.

As equações de Maxwell no vácuo para o potencial vetor A_μ no espaço-tempo de Minkowski assumem a forma:

$$G_b := \partial^a (\partial_a A_b - \partial_b A_a) = 0. \quad (4.22)$$

A equação (4.22) representa um sistema de quatro equações para quatro componentes desconhecidas A_a , e aparentemente tem-se condições suficientes para a determinação de todas as componentes A_a . No entanto, uma análise mais cuidadosa da equação (4.22) mostra que ela não está na forma hiperbólica onde o problema de valor inicial é conhecido. Além disso, pode-se observar que $G_0 = 0$ não contém termos de segunda derivada temporal,

$$G_0 = \partial^a (\partial_a A_0 - \partial_0 A_a) = 0. \quad (4.23)$$

Ou seja,

$$\partial^\mu (\partial_\mu A_0 - \partial_0 A_\mu) = 0. \quad (4.24)$$

Em notação vetorial:

$$\nabla^2 A_0 - \vec{\nabla} \cdot (\partial \vec{A} / \partial t) = 0, \quad (4.25)$$

ou seja,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad (4.26)$$

com o campo eletromagnético \vec{E} definido por:

$$\vec{E} = \vec{\nabla} A_0 - \partial \vec{A} / \partial t. \quad (4.27)$$

A equação (4.24) diz, então, que a divergência do campo elétrico é nula. Pode-se ainda reescrever a expressão para o campo elétrico (4.24) na forma:

$$E_a = (\partial_a A_b - \partial_b A_a) n^b = F_{ab} n^b, \quad (4.28)$$

onde n^a é um vetor unitário normal à Σ_0 . A equação (4.25), ou equivalentemente a equação (4.26), impõe um vínculo entre as condições iniciais $(A_\mu, \partial A_\mu / \partial t)$. Se as condições iniciais impostas sobre Σ_0 não satisfizerem a condição (4.25), então não é possível encontrar uma solução das equações de Maxwell.

As três equações remanescentes da expressão (4.22) possuem segundas derivadas temporais com respeito à parte espacial do vetor A_a e, em princípio, podem-se obter todas derivadas segundas em relação ao tempo e aplicar o teorema de Cauchy-Kowalewskaya. No entanto, essas equações não estão na forma hiperbólica. Além disso, era de se esperar, em analogia com as teorias clássicas que, por diferenciação das condições iniciais (4.25), poderíamos obter uma equação para $\partial^2 A_0 / \partial t^2$, que permitiria, então, uma formulação do problema de valor inicial. No entanto, uma inspeção mais atenta leva à seguinte identidade:

$$\partial^b \partial^a (\partial_a A_b - \partial_b A_a) = 0. \quad (4.29)$$

Esta expressão mostra que a derivada temporal da equação de vínculo (4.25) se anula somente se as componentes espaciais das equações de Maxwell são satisfeitas. Então, a equação (4.24) é um sistema indeterminado para A_a , ou seja, tem-se na realidade apenas três equações, mais a equação de vínculo para quatro funções desconhecidas.

Da teoria do eletromagnetismo é sabido que dois potenciais vetores que difiram apenas por um gradiente de uma função χ , $\partial_a \chi$, representam do ponto de vista físico, o mesmo campo elétrico. Portanto, essa indeterminação tem como origem essa arbitrariedade, de modo que não é possível determinar A_a apenas a partir das condições iniciais.

Uma maneira de contornar essa indeterminação é fixar um gauge apropriado para A_a , de modo a reescrever as equações de Maxwell na forma hiperbólica. Impomos, então, o gauge de

Lorentz:

$$\partial^a A_a = 0. \quad (4.30)$$

Com a escolha desse gauge, as equações de Maxwell se tornam:

$$\partial^a \partial_a A_b = \square A_b = 0, \quad (4.31)$$

que é a equação da onda, e tem-se portanto, as equações de Maxwell na forma hiperbólica. Dadas as condições iniciais $(A_a, \partial A_a / \partial t)$, e fazendo a transformação de gauge mencionado, tem-se $\partial^a A_a = 0$ em Σ_0 . Por outro lado, (4.31) implica que:

$$\partial^a \partial_a (\partial^b A_b) = \partial^b (\partial^a \partial_a A_b) = 0. \quad (4.32)$$

Pelo teorema 1, se a equação (4.31) for satisfeita em qualquer hipersuperfície, então a condição (4.30) será satisfeita em qualquer hipersuperfície se e somente se:

$$\partial^b A_b = \partial(\partial^b A_b) / \partial t = 0, \quad (4.33)$$

em Σ_0 . De início, assumiu-se que o gauge de Lorentz vale em Σ_0 , e usando a equação (4.31) é possível ver que a condição inicial $\partial(\partial^b A_b) / \partial t = 0$ é equivalente a condição (4.25). Se $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ em Σ_0 , então a condição de gauge será satisfeita em qualquer hipersuperfície se a equação (4.31) é satisfeita.

Conclui-se, então, que as equações de Maxwell, com a escolha de gauge adequada, possuem uma formulação de valor inicial bem posto.

Retomando nossa atenção para as equações de Einstein no vácuo $G_{\mu\nu} = 0$, nota-se que, diferentemente do caso de uma teoria formulada no contexto da relatividade especial, onde o espaço-tempo é fixo, na relatividade geral, o problema consiste em encontrar o espaço-tempo em si. Necessita-se, portanto, determinar a quantidade, ou as quantidades que passarão a fazer o papel de variável dinâmica no cenário relativístico. Seja (M, g_{ab}) um espaço-tempo globalmente hiperbólico. Todo espaço-tempo globalmente hiperbólico pode ser folheado em superfícies de Cauchy, Σ_t , parametrizadas pela função t . A figura (4.2) é uma representação dessa folheação do espaço-tempo.

A métrica do espaço-tempo, g_{ab} , induz uma métrica espacial, ou seja, uma métrica tridimensional riemanniana, h_{ab} , em cada seção Σ_t através da seguinte expressão:

$$h_{ab} = g_{ab} - n_a n_b, \quad (4.34)$$

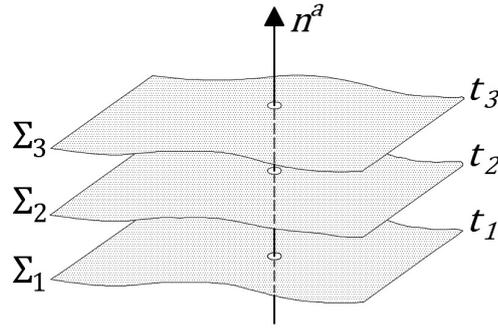


Figura 4.2: Folheação do espaço-tempo.

onde n_a é o vetor normal à Σ_t .

Seja t^α um campo vetorial em M satisfazendo a condição $t^\alpha \nabla_\alpha t = 1$. Pode-se decompor este campo vetorial em uma parte tangente e outra parte normal a Σ_t ; para tal, definem-se duas quantidades: a função lapso, N , e o vetor deslocamento, N^a :

$$\begin{aligned} N &= -t^a n_a = (n^a \nabla_a t)^{-1}, \\ N_a &= h_{ab} t^b. \end{aligned} \quad (4.35)$$

O campo de vetor t^a pode ser interpretado como sendo um fluxo do tempo ao longo do espaço-tempo. Suponha que estejamos partindo da hipersuperfície Σ_0 , em $t = 0$, e indo em direção a uma hipersuperfície Σ_t , com $t > 0$. Identificando esse deslocamento como sendo um difeomorfismo seguindo uma curva integral de t^a , esse efeito de avançar no tempo seria uma mudança na métrica espacial tridimensional na variedade M de $h_{ab}(0)$ para $h_{ab}(t)$. Pode-se ver, então, um espaço-tempo globalmente hiperbólico (M, g_{ab}) como sendo uma evolução temporal da métrica riemanniana de uma variedade tridimensional. Isto sugere que a métrica espacial tridimensional sobre a hipersuperfície possa ser a variável dinâmica da relatividade geral, e espera-se, então, que as condições iniciais apropriadas sejam constituídas pela métrica riemanniana, h_{ab} , e suas derivadas temporais na variedade tridimensional Σ .

Uma quantidade que está relacionada diretamente com a noção de derivada temporal da métrica espacial em uma hipersuperfície imersa no espaço-tempo é a curvatura extrínseca, K_{ab} . Seja n^a um campo vetorial unitário do tipo-tempo ortogonal a Σ . Define-se, então,

$$K_{ab} = K_{ba} = h_a^c \nabla_c n_b = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n h_{ab}, \quad (4.36)$$

onde $\mathcal{L}_n h_{ab}$ é a derivada de Lie de h_{ab} na direção de n^a .

Pode-se interpretar a curvatura extrínseca como sendo a projeção dos gradientes dos campos

de vetores n_b sobre a hipersuperfície Σ , ou seja, ela indica como o campo de vetores n_b varia quando é deslocado de um ponto a outro sobre a superfície Σ .

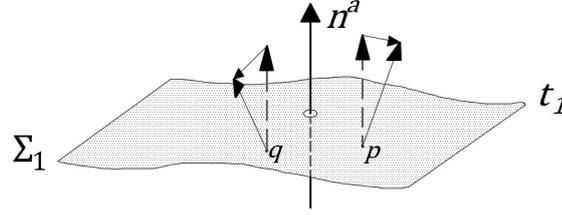


Figura 4.3: Diagrama do espaço-tempo ilustrando a noção da curvatura extrínseca em Σ .

Para o quadro da relatividade geral devemos ter as seguintes condições iniciais apropriadas: (Σ, h_{ab}, K_{ab}) .

Antes de formular o problema de Cauchy, podem-se estabelecer algumas relações entre quantidades definidas no espaço-tempo e quantidades induzidas na hipersuperfície Σ .

Seja v^a um vetor em $p \in \Sigma$. Assume-se que o vetor v^a possa ser decomposto em uma parte tangente a Σ e outra parte perpendicular a Σ , isto é,

$$v^a = v_{\perp} n^a + v_{\parallel}^a, \quad (4.37)$$

onde n^a é um vetor unitário normal a Σ e $v_{\parallel}^a n_a = 0$. Note que a condição $v_{\perp} = 0$ equivale a:

$$v^a = h^a_b v^b, \quad (4.38)$$

onde fez-se uso do vetor de deslocamento, com h_{ab} dada pela expressão (4.34) e o primeiro índice do h_{ab} levantado pela métrica g^{ab} .

De maneira mais geral, um tensor $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$ em $p \in \Sigma$ pode ser visto como sendo um tensor sobre o espaço tangente a Σ em p se:

$$T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} = h^{a_1}_{c_1} \dots h^{a_k}_{c_k} h_{b_1}^{d_1} \dots h_{b_l}^{d_l} T^{c_1 \dots c_k}_{d_1 \dots d_l}. \quad (4.39)$$

Seja $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$ um campo tensorial sobre a variedade Σ . Do ponto de vista da decomposição (4.39), a quantidade $\nabla_c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$ não seria bem definida, pois o comportamento do campo tensorial fora da variedade Σ não é conhecido. No entanto, pode-se utilizar o tensor h^a_b como um projetor e definir a seguinte operação de derivação: $h_d^c \nabla_c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$.

Lema 1. *Seja (M, g_{ab}) um espaço-tempo e seja Σ uma hipersuperfície tipo-espaço suave em M . Seja h_{ab} a métrica induzida em Σ dada pela equação (4.34), e seja D_a a operação de derivação*

associado a h_{ab} . Então D_a é dado pela fórmula:

$$D_c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} = h^{a_1}_{d_1} \dots h_{b_l}^{e_l} h_c^f \nabla_f T^{d_1 \dots d_k}_{e_1 \dots e_l}, \quad (4.40)$$

sendo ∇_a a derivada covariante em relação à métrica g_{ab} .

4.3.1 Relações de Gauss-Codazzi

Associada a uma derivada covariante, sempre pode-se definir o conceito de curvatura. Além disso, tendo em mãos o lema 1, pode-se obter uma relação entre a curvatura da hipersuperfície Σ , $\bar{R}_{abc}{}^d$, e a curvatura do espaço-tempo, $R_{abc}{}^d$. Suponha que ω_a seja um campo vetorial dual em Σ , então:

$$\bar{R}_{abc}{}^d \omega_d = D_a D_b \omega_c - D_b D_a \omega_c. \quad (4.41)$$

Utilizando o Lema 1 a equação (4.41) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} D_a D_b \omega_c &= D_a (h_c^e h_b^d \nabla_d \omega_e) = h_a^f h_b^g h_c^k \nabla_f (h_g^d h_k^e \nabla_d \omega_e) = h_a^f h_b^g h_g^d h_c^k h_k^e \nabla_f \nabla_d \omega_e \\ &+ h_a^f h_b^g h_c^k h_k^e \nabla_f h_g^d \nabla_d \omega_e + h_a^f h_b^g h_c^k h_g^d \nabla_f h_k^e \nabla_d \omega_e \\ &= h_a^f h_b^d h_c^e \nabla_f \nabla_d \omega_e + h_a^f h_b^g h_c^e \nabla_f h_g^d \nabla_d \omega_e + h_a^f h_b^d h_c^k \nabla_f h_k^e \nabla_d \omega_e. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Note que,

$$\begin{aligned} h_b^g h_c^e h_a^f (\nabla_f h_g^d) &= h_b^g h_c^e h_a^f \nabla_f (g_g^d + n_g n^d) \\ &= h_b^g h_c^e K_{ag} n^d = h_c^e K_{ab} n^d. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Utilizando esse resultado na expressão (4.42), segue:

$$D_a D_b \omega_c = h_a^f h_b^d h_c^e \nabla_f \nabla_d \omega_e + h_c^e K_{ab} n^d \nabla_d \omega_e + h_b^d K_{ac} n^e \nabla_d \omega_e. \quad (4.44)$$

Além disso,

$$h_b^d (n^e \nabla_d \omega_e) = h_b^d \nabla_d (n^e \omega_e) - h_b^d \omega_e \nabla_d n^e = -\omega_e K_b^e. \quad (4.45)$$

A expressão (4.44) toma a seguinte forma final:

$$D_a D_b \omega_c = h_a^f h_b^d h_c^e \nabla_f \nabla_d \omega_e - K_{ac} K_b^e \omega_e + h_c^e K_{ab} n^d \nabla_d \omega_e. \quad (4.46)$$

De maneira semelhante, pode-se obter a seguinte expressão:

$$D_b D_a \omega_c = h_a^f h_b^d h_c^e \nabla_d \nabla_f \omega_e - K_{be} K_a^e \omega_e + h_c^e K_{ab} n^d \nabla_d \omega_e. \quad (4.47)$$

Substituindo (4.46) e (4.47) em (4.41), obtém-se,

$$\begin{aligned} D_a D_b \omega_c - D_b D_a \omega_c &= (\nabla_f \nabla_d \omega_e - \nabla_d \nabla_f \omega_e) h_a^f h_b^d h_c^e + K_{bc} K_a^e \omega_e - K_{ac} K_b^e \omega_e, \\ \bar{R}_{abc}{}^d \omega_d &= R_{fde}{}^j \omega_j h_a^f h_b^d h_c^e + K_{bc} K_a^e \omega_e - K_{ac} K_b^e \omega_e, \\ \bar{R}_{abc}{}^d &= h_a^f h_b^g h_c^k h^d{}_j R_{fgk}{}^j + K_{bc} K_a^d - K_{ac} K_b^d. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Pode-se fazer também o seguinte cálculo com a curvatura extrínseca:

$$\begin{aligned} D_a K_{bc} &= h_b^g h_c^f h_a^d \nabla_d K_{gf} = h_a^d h_b^g h_c^f \nabla_d (h_g^e \nabla_e n_f) \\ &= h_a^d h_b^g h_c^f h_g^e \nabla_d \nabla_e n_f + h_a^d h_b^g h_c^f \nabla_d h_g^e \nabla_e n_f \\ &= h_a^d h_c^f h_b^e \nabla_d \nabla_e n_f + K_{ab} n^e h_c^f \nabla_e n_f, \end{aligned} \quad (4.49)$$

onde utilizou-se que

$$h_a^c h_b^d \nabla_c h_d^e = g^{ef} h_a^c h_b^d \nabla_c h_{df} = g^{ef} h_a^c h_b^d n_f \nabla_c n_d = n^e K_{ab}. \quad (4.50)$$

De maneira semelhante, pode-se obter

$$D_b K_{ac} = h_b^d h_c^f h_a^e \nabla_d \nabla_e n_f + K_{ab} n^e h_c^f \nabla_e n_f. \quad (4.51)$$

Então,

$$2D_{[a} K_{b]c} = 2h_{[a}{}^d h_{b]}{}^e h_c^f \nabla_d \nabla_e n_f = 2h_a^d h_b^e h_c^f \nabla_{[d} \nabla_{e]} n_f = h_a^d h_b^e h_c^f R_{fgde} n^g. \quad (4.52)$$

Contraindo a equação (4.52) com h^{ac} , obtém-se:

$$D_a K^a{}_b - D_b K^a{}_a = h^c{}_b R_{cd} n^d. \quad (4.53)$$

As equações (4.48) e (4.53) são as equações de Gauss-Codazzi obtidas no capítulo 3, só que agora expressas em termos de coordenadas.

4.3.2 Equações de vínculo e evolução

O tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ tem uma dependência linear com o tensor de Riemann através da relação $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - 1/2g_{\mu\nu}R$. Em contra partida, o tensor de Riemann tem uma dependência com a derivada do tensor métrico. Assim, é possível expressar o tensor de Einstein em termos da derivada do tensor métrico:

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}g^{\alpha\beta} (-2\partial_\beta\partial_{(\mu}g_{\nu)\alpha} + \partial_\alpha\partial_\beta g_{\mu\nu} + \partial_\mu\partial_\nu g_{\alpha\beta}) + F_{\mu\nu}(g, \partial g). \quad (4.54)$$

Desse modo, podemos reescrever o tensor de Einstein como

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} (-2\partial_\beta\partial_{(\mu}g_{\nu)\alpha} + \partial_\alpha\partial_\beta g_{\mu\nu} + \partial_\mu\partial_\nu g_{\alpha\beta}) \\ &+ \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}g^{\rho\sigma} (-\partial_\beta\partial_\rho g_{\sigma\alpha} + \partial_\alpha\partial_\beta g_{\rho\sigma}) + \widehat{F}_{\mu\nu}(g, \partial g). \end{aligned} \quad (4.55)$$

Note que o as equações $G_{\mu\nu}n^\nu = 0$ não contém termos com segunda derivada temporal com respeito a métrica. De maneira que não serão todas as equações aptas para serem utilizadas como equações de evolução do sistema. Essas equações remanescentes fornecerão uma espécie de vínculo entre as condições iniciais do nosso problema. Para tal função, utilizam-se as relações de Gauss-Codazzi. A partir da equação de Codazzi:

$$D_a K^a{}_b - D_b K^a{}_a = h^c{}_b R_{cd} n^d.$$

Sabe-se que $G_{\mu\nu} = 0 \iff R_{\mu\nu} = 0$. Então,

$$0 = h^b{}_a G_{bc} n^c = h^b{}_a R_{bc} n^c = D_b K^b{}_a - D_a K^b{}_b. \quad (4.56)$$

A partir da equação de Gauss, temos

$$\bar{R}_{abc}{}^d = h_a{}^f h_b{}^g h_c{}^k h^d{}_j R_{fgk}{}^j + K_{bc} K_a{}^d - K_{ac} K_b{}^d.$$

Contraindo com $h^{ac} h^b{}_d$, obtém-se:

$$\begin{aligned} h^{ac} h^b{}_d \bar{R}_{abc}{}^d &= -h^{ac} h^b{}_d K_{ac} K_b{}^d + h^{ac} h^b{}_d K_{bc} K_a{}^d \\ \bar{R} &= -K_a{}^a K_b{}^b + K_{cd} K^{cd} \\ \bar{R} + (K_a{}^a)^2 - K_{ab} K^{ab} &= 0. \end{aligned} \quad (4.57)$$

As equações (4.56) e (4.57) são as equações de vínculo, que impõem uma relação entre as

condições iniciais. Portanto, das dez componentes das equações de Einstein apenas uma parcela delas, aquelas correspondentes às componentes G^{ab} , darão a dinâmica do sistema. As quatro componentes restantes, correspondentes às componentes $G^{0\mu}$ serão as equações de vínculo. Um resultado importante é que se as equações de vínculo (4.56) e (4.57) são satisfeitas inicialmente sobre uma fatia Σ e as componentes espaciais das equações de Einstein são satisfeitas em todo espaço, então as equações de vínculo também serão válidas em todo o espaço [21]. Para mostrar esse resultado, pode-se reescrever o tensor de Einstein da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} &= R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(g^{00}R_{00} + 2g^{0l}R_{0l}), \\ g^{\gamma\alpha}G_{\alpha\beta} &= g^{\gamma\alpha}R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\gamma\alpha}g_{\alpha\beta}(g^{00}R_{00} + 2g^{0l}R_{0l}), \\ G^\gamma_\beta &= g^{\gamma\alpha}R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^\gamma_\beta(g^{00}R_{00} + 2g^{0l}R_{0l}). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Por exemplo, para $\gamma = i$ e $\beta = j$, tem-se:

$$\begin{aligned} G^i_j &= g^{i\alpha}R_{\alpha j} - \frac{1}{2}g^i_j(g^{00}R_{00} + 2g^{0l}R_{0l}) \\ &= g^{i0}R_{0j} + g^{il}R_{lj} - \frac{1}{2}g^i_j(g^{00}R_{00} + 2g^{0l}R_{0l}) \\ &= g^{i0}R_{0j} - \frac{1}{2}g^i_j(g^{00}R_{00} + 2g^{0l}R_{0l}). \end{aligned}$$

De maneira semelhante, obtém-se os seguintes termos do tensor de Einstein:

$$\begin{aligned} G^i_j &= g^{i0}R_{0j} - \frac{1}{2}g^i_j(g^{00}R_{00} + 2g^{0l}R_{0l}), \\ G^i_0 &= g^{i0}R_{00} + g^{il}R_{l0}, \end{aligned} \quad (4.59)$$

e,

$$G^0_j = g^{00}R_{0j}, \quad G^0_0 = \frac{1}{2}g^{00}R_{00}. \quad (4.60)$$

O lado direito da equação (4.59) depende apenas de termos do tipo $R_{0\lambda}$, que utilizando (4.60) pode ser reescrito em termos de G^0_λ . O tensor de Einstein obedece à identidade de Bianchi $\nabla^a G_{ab} = 0$, e, como consequência, obtém-se a seguinte identidade:

$$\nabla_\alpha G^\alpha_\lambda = \nabla_0 G^0_\lambda + \nabla_i G^i_\lambda = 0. \quad (4.61)$$

Supondo que $\lambda = 0$, tem-se a seguinte expressão:

$$\nabla_0 G^0_0 + \nabla_i G^i_0 = 0. \quad (4.62)$$

Explicitando os termos da derivada covariante, temos:

$$\begin{aligned} & \partial_0 G^0_0 - \Gamma^{\alpha}_{00} G^0_{\alpha} + \Gamma^0_{\alpha 0} G^{\alpha}_0 + \partial_i G^i_0 - \Gamma^{\alpha}_{i0} G^0_{\alpha} + \Gamma^i_{\alpha i} G^{\alpha}_0 \\ & = \partial_0 G^0_0 - \Gamma^0_{00} G^0_0 - \Gamma^i_{00} G^0_i + \Gamma^0_{00} G^0_0 + \Gamma^0_{i0} G^i_0 + \partial_i G^i_0 - \Gamma^0_{0i} G^i_0 - \Gamma^j_{i0} G^i_j \\ & + \Gamma^i_{i0} G^0_0 + \Gamma^i_{ij} G^j_0. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\partial_0 G^0_0 + \partial_i G^i_0 - \Gamma^i_{00} G^0_i + \Gamma^i_{i0} G^0_0 + \Gamma^i_{ij} G^j_0 = 0. \quad (4.63)$$

Note que os termos G^i_0 podem ser reescritos ainda em termos G^0_{λ} :

$$G^i_0 = X^{i0} G^0_0 + Y^{il} G^0_l, \quad (4.64)$$

onde os coeficientes X^{i0} e Y^{il} dependem apenas dos termos da métrica. Substituindo em (4.63), obtém-se:

$$\begin{aligned} & \partial_0 G^0_0 + X^{i0} \partial_i G^0_0 + Y^{il} \partial_i G^0_l - \Gamma^i_{00} G^0_i + \Gamma^i_{i0} G^0_0 \\ & + \Gamma^i_{ij} (X^{i0} G^0_0 + Y^{il} G^0_l) + Z(\partial g) = 0. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Uma expressão semelhante a essa é obtida quando tomamos $\lambda = j$ na equação (4.61). De maneira geral, pode-se escrever esse sistema de equações da seguinte maneira:

$$G^0_{\lambda,0} = A^{\sigma i}_{\lambda} G^0_{\sigma,i} + B^{\sigma}_{\lambda} G^0_{\sigma}, \quad (4.66)$$

onde os coeficientes $A^{\sigma i}_{\lambda}$ e B^{σ}_{λ} dependem apenas do tensor métrico e de suas primeiras derivadas. A equação (4.66) forma um sistema de quatro equações diferenciais parciais de primeira ordem para as quatro componentes G^0_{λ} . O lado direito de (4.66) corresponde a derivadas espaciais das componentes G^0_{λ} enquanto o lado esquerdo fornece a derivada temporal de G^0_{λ} . Por hipótese, os coeficientes do sistema são contínuos na região considerada, e portanto este sistema possui solução.

Como foi visto anteriormente, as condições iniciais na hipersuperfície Σ_0 obedecem as equações de vínculo $G^0_{\lambda} = 0$, e olhando para o sistema (4.66) vemos claramente que $G^0_{\lambda} = 0$ é solução do sistema, ou seja, as equações de vínculo surgem naturalmente da necessidade de satisfazer o sistema (4.66).

Além disso, a equação (4.66) está na forma normal², e de acordo com a teoria das equações

²Uma equação diferencial, por exemplo, ordinária da forma $F(x, y, y', \dots, y^n) = 0$ está na forma normal se puder ser colocada na forma $y^n = f(x, y, y', \dots, y^{n-1})$.

diferenciais, a solução $G^0_\lambda = 0$ será única, ou seja, se $[G^0_\lambda = 0]_{\Sigma_0}$ então a equação $G^0_\lambda = 0$ será válida em qualquer outra hipersuperfície Σ .

Viu-se anteriormente que apenas uma parcela, aquela correspondente à parte espacial do tensor de Einstein, corresponde à parte dinâmica das equações de Einstein. As equações de vínculo e as equações dinâmicas surgem a partir do uso das equações de Gauss-Codazzi, e quando o tensor de Einstein é reescrito em termos de derivadas da métrica, respectivamente. No entanto, durante esses procedimentos a origem física desse conjunto de equações torna-se obscura. Portanto, com a finalidade de investigar a origem de tais equações podemos olhar para a formulação hamiltoniana da relatividade geral.

Seja ψ um campo tensorial (ou um conjunto de campos tensoriais) definidos sobre a variedade M e seja $S[\psi]$ um funcional de ψ , isto é, S associa a cada campo de configurações um número. A formulação hamiltoniana de uma teoria de campo consiste na especificação de um funcional $H[q, \pi]$, sendo q e π as coordenadas generalizadas e os momentos canonicamente conjugados, respectivamente, em Σ_t denominado hamiltoniano, cuja forma é:

$$H = \int_{\Sigma_t} \mathcal{H}, \quad (4.67)$$

onde a densidade hamiltoniana \mathcal{H} é uma função local de q , π e de suas derivadas espaciais, tal que o par de equações:

$$\dot{q} \equiv \mathcal{L}_t q = \frac{\delta H}{\delta \pi}, \quad (4.68)$$

$$\dot{\pi} \equiv \mathcal{L}_t \pi = -\frac{\delta H}{\delta q}, \quad (4.69)$$

é equivalente às equações de campo serem satisfeitas por ψ , ou seja, $\frac{\delta S}{\delta \psi} = 0$.

É bem sabido da mecânica clássica que dado a formulação lagrangiana existe uma prescrição para obter a formulação hamiltoniana. Portanto, em analogia com a mecânica clássica, considere q como sendo o campo ψ calculado em Σ_t . Suponha que o funcional S tem a seguinte forma:

$$S[\psi] = \int_M \mathcal{L}[\psi],$$

onde \mathcal{L} é uma função local de ψ e de um número finito de suas derivadas, ou seja:

$$\mathcal{L}|_x = \mathcal{L} \left(\psi(x), \nabla \psi(x), \dots, \nabla^k \psi(x) \right).$$

Suponha que S é funcionalmente diferenciável e que os campos de configurações ψ que

extremizam S :

$$\left. \frac{\delta S}{\delta \psi} \right|_{\psi} = 0, \quad (4.70)$$

são soluções das equações de campo para ψ . Então, o funcional S é denominado *ação* e \mathcal{L} é denominada *densidade lagrangiana*. Assumindo que \mathcal{L} possui dependência com derivadas temporais de q de primeira ordem, pode-se definir o momento, π , associado ao campo ψ em Σ_t através da relação:

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}. \quad (4.71)$$

Se é possível resolver esta equação para \dot{q} como função de q e π , define-se:

$$\mathcal{H}(q, \pi) = \pi \dot{q} - \mathcal{L}. \quad (4.72)$$

O primeiro passo para a formulação hamiltoniana da relatividade é expressar a ação gravitacional em termos da métrica tridimensional, função lapso, vetor de deslocamento (h_{ab}, N, N_a) e em termos de suas derivadas temporais. Seja a densidade lagrangiana para as equações de Einstein no vácuo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G &= \sqrt{-g}R, \\ G_{ab} &= R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}. \end{aligned} \quad (4.73)$$

A partir da definição do tensor de Einstein, temos as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} -Rg_{ab}n^an^b &= 2 \left(G_{ab}n^an^b - R_{ab}n^an^b \right) \\ -Rn_bn^b &= 2 \left(G_{ab}n^an^b - R_{ab}n^an^b \right) \\ R &= 2 \left(G_{ab}n^an^b - R_{ab}n^an^b \right). \end{aligned} \quad (4.74)$$

Da equação (4.57) pode-se obter ainda:

$$G_{ab}n^an^b = \frac{1}{2} \left[\bar{R} - K_{ab}K^{ab} + K^2 \right]. \quad (4.75)$$

Por outro lado, a partir da definição do tensor de Riemann, temos

$$\begin{aligned} R_{ab}n^an^b &= R_{acb}{}^cn^an^b \\ &= -n^a(\nabla_a \nabla_c - \nabla_c \nabla_a)n^c \\ &= (\nabla_a n^a)(\nabla_c n^c) - (\nabla_c n^a)(\nabla_a n^c) - \nabla_a(n^a \nabla_c n^c) + \nabla_c(n^a \nabla_a n^c) \\ &= K^2 - K_{ac}K^{ac} - \nabla_a(n^a \nabla_c n^c) + \nabla_c(n^a \nabla_a n^c). \end{aligned} \quad (4.76)$$

Os dois últimos termos do lado direito são divergências e podem ser descartados. Como

$$\sqrt{-g} = N\sqrt{h}, \quad (4.77)$$

e levando em conta (4.74) – (4.76), a densidade lagrangiana pode ser reescrita como:

$$\mathcal{L}_G = \sqrt{h}N \left[\bar{R} + K_{ab}K^{ab} - K^2 \right]. \quad (4.78)$$

A curvatura extrínseca, K_{ab} , pode ser reescrita em termos da derivada temporal da métrica tridimensional definida por $\dot{h}_{ab} \equiv h_a^c h_b^d \mathcal{L}_t h_{cd}$:

$$\begin{aligned} K_{ab} &= \frac{1}{2} \mathcal{L}_n h_{ab} = \frac{1}{2} (n^c \nabla_c h_{ab} + h_{ac} \nabla_b n^c + h_{cb} \nabla_a n^c) \\ &= \frac{1}{2N} [N n^c \nabla_c h_{ab} + h_{ac} \nabla_b (N n^c) + h_{cb} \nabla_a (N n^c)] \\ &= \frac{1}{2N} h_a^c h_b^d (\mathcal{L}_t h_{cd} - \mathcal{L}_N h_{cd}) \\ &= \frac{1}{2N} (\dot{h}_{ab} - D_a N_b - D_b N_a), \end{aligned} \quad (4.79)$$

onde o operador D_a foi definido em (4.40).

O momento canonicamente conjugado a h_{ab} é:

$$\begin{aligned} \pi^{ab} &= \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \dot{h}_{ab}} \\ &= \sqrt{h}N \left[\frac{\partial^{(3)} R}{\partial \dot{h}_{ab}} + \frac{\partial (K_{ab} K^{ab})}{\partial \dot{h}_{ab}} - \frac{\partial K^2}{\partial \dot{h}_{ab}} \right] \\ &= \sqrt{h} (K^{ab} - h^{ab} K), \end{aligned} \quad (4.80)$$

onde se utilizou dos seguintes resultados:

$$\frac{\partial R^{(3)}}{\partial \dot{h}_{ab}} = 0, \quad \frac{\partial K_{ab}}{\partial \dot{h}_{ab}} = \frac{1}{2N}, \quad \frac{\partial K^2}{\partial \dot{h}_{ab}} = \frac{h^{ab} K}{N}. \quad (4.81)$$

Note que a densidade lagrangiana não contém derivadas temporais de N e N_a ; consequentemente seus momentos conjugados são identicamente nulos. Pode-se, então, interpretar esse fato dizendo que N e N_a não desempenham um papel dinâmico. A densidade hamiltoniana será, portanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_G &= \pi^{ab} \dot{h}_{ab} - \mathcal{L}_G \\ &= -\sqrt{h}N\bar{R} + \frac{N}{\sqrt{h}} \left(\pi^{ab} \pi_{ab} - \frac{1}{2} \pi^2 \right) + 2\pi^{ab} D_a N_b \\ &= \sqrt{h} \left\{ N \left(-\bar{R} + \frac{1}{h} \pi^{ab} \pi_{ab} - \frac{1}{2h} \pi^2 \right) - 2N_b \left[D_a (h^{-1/2} \pi^{ab}) \right] + 2D_a (h^{-1/2} N_b \pi^{ab}) \right\}. \end{aligned}$$

O último termo pode ser ignorado pois é um termo de fronteira e pode-se admitir uma superfície espacial grande o suficiente para que a contribuição desse termo seja desprezível. Para determinar a hamiltoniana H do sistema integra-se \mathcal{H} sobre a hipersuperfície Σ_t utilizando um elemento de volume espacial \bar{e} :

$$H_G = \int_{\Sigma_t} \mathcal{H} \bar{e}. \quad (4.82)$$

Fazendo uma variação de H_G com respeito a N e N_a , obtém-se:

$$-\bar{R} + \frac{1}{h} \pi^{ab} \pi_{ab} - \frac{1}{2h} \pi^2 = 0, \quad (4.83)$$

$$D_a (h^{-1/2} \pi^{ab}) = 0. \quad (4.84)$$

Uma vez que as componentes N e N_a não desempenham papel dinâmico, o par de equações (4.83) e (4.84) podem ser tomadas como equações de vínculo. Ademais, utilizando a expressão do momento (4.80) o par de equações acima assumem a forma:

$$\bar{R} + (K_a^a)^2 - K_{ab} K^{ab} = 0,$$

$$D_b K^b_a - D_a K^b_b = 0,$$

que são as equações de vínculo obtidas anteriormente.

Finalmente, as duas equações canônicas restantes:

$$\dot{h}_{ab} = \frac{\delta H}{\delta \pi^{ab}} \quad \dot{\pi}^{ab} = -\frac{\delta H}{\delta h_{ab}}, \quad (4.85)$$

fornecem:

$$\dot{h}_{ab} = 2h^{-1/2} N \left(\pi_{ab} - \frac{1}{2} h_{ab} \pi \right) + D_a N_b + D_b N_a, \quad (4.86)$$

$$\begin{aligned} \dot{\pi}^{ab} = & -N\sqrt{h} \left(\bar{R}^{ab} - \frac{1}{2} \bar{R} h^{ab} \right) + \frac{1}{2\sqrt{h}} h^{ab} \left(\pi_{cd} \pi^{cd} - \frac{1}{2} \pi^2 \right) \\ & - 2Nh^{-1/2} \left(\pi^{ac} \pi_c^b - \frac{1}{2} \pi \pi^{ab} \right) + \sqrt{h} \left(D^a D^b N - h^{ab} D^c D_c N \right) \\ & + \sqrt{h} D_c \left(h^{-1/2} N^c \pi^{ab} \right) - 2\pi^{c(a} D_c N^{b)}. \end{aligned} \quad (4.87)$$

As equações (4.86) e (4.87) são as equações dinâmicas do nosso sistema. Como resultado final, o conjunto de equações (4.83), (4.84), (4.86) e (4.87) são equivalentes as equações de Einstein no vácuo. No formalismo hamiltoniano consegue-se, portanto, uma clara visualização da origem e do significado das equações de vínculo e dinâmicas da relatividade geral.

4.3.3 Redução hiperbólica das equações de Einstein

As equações de Einsteins $G_{ab} = 0$ constituem um sistema de dez equações indeterminadas para as componentes da métrica $g_{\mu\nu}$. No caso relativístico, assim como no eletromagnetismo, existe, no entanto, uma ambiguidade associada à própria estrutura geométrica do nosso sistema.

Suponha duas variedades diferenciáveis M e N e seja $\phi : M \rightarrow N$ um difeomorfismo. Do ponto de vista geométrico, as variedades M e N possuem a mesma estrutura. Se uma teoria descreve, por exemplo em M , um campo de tensores $T^{(i)}$, então se $\phi : M \rightarrow N$ é um difeomorfismo, as soluções $(M, T^{(i)})$ e $(N, d\phi T^{(i)})$ possuem as mesmas propriedades geométricas. O difeomorfismo fornece uma liberdade de escolha de gauge em qualquer teoria formulada em termos de campos tensoriais sobre variedades [17].

Suponha, então, duas fatias $\Sigma_1 = M$ e $\Sigma_2 = N$. Se $\phi : M \rightarrow N$, então (M, g_{ab}) e $(M, d\phi g_{ab})$ representam o mesmo espaço-tempo. Quaisquer duas soluções das equações de Einstein, que tem as componentes da métrica g_{ab} e $d\phi g_{ab}$ relacionadas por uma lei de transformação usual de tensores, representarão do ponto de vista físico, a mesma solução. Baseado nessa “liberdade de escolha de gauge”, pode-se fixar o chamado gauge harmônico [33, 34]:

$$H^\mu \equiv \nabla_a \nabla^a x^\mu = 0. \quad (4.88)$$

Em termos de coordenadas, o gauge harmônico pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha \nabla^\alpha x^\mu &= \nabla_\alpha (g^{\alpha\beta} \nabla_\beta) x^\mu = 0 \Rightarrow g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta x^\mu = 0, \\ g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha (\partial_\beta x^\mu) &= g^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \partial_\beta x^\mu - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \partial_\gamma x^\mu) = -g^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \\ \nabla_\alpha \nabla^\alpha x^\mu &= g^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^\mu = 0. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Além disso, pela definição dos símbolos de Christoffel:

$$\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} (\partial_\alpha g_{\nu\beta} + \partial_\beta g_{\nu\alpha} - \partial_\nu g_{\alpha\beta}) = 0. \quad (4.90)$$

Os termos da equação (4.90) podem ser reescritos da seguinte maneira:

$$\partial_\alpha (g^{\mu\nu} g_{\nu\beta}) = g^{\mu\nu} \partial_\alpha g_{\nu\beta} + g_{\nu\beta} \partial_\alpha g^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow g^{\mu\nu} \partial_\alpha g_{\nu\beta} = -g_{\nu\beta} \partial_\alpha g^{\mu\nu}. \quad (4.91)$$

Substituindo em (4.90):

$$-\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\nu\beta} \partial_\alpha g^{\mu\nu} + g_{\nu\alpha} \partial_\beta g^{\mu\nu}) - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \partial_\nu g_{\alpha\beta} = 0.$$

A condição harmônica pode ser finalmente escrita na forma:

$$H^\mu = \partial_\nu g^{\mu\nu} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \partial_\nu g_{\alpha\beta} = 0. \quad (4.92)$$

Utilizando a condição harmônica, as equações de Einstein no vácuo podem ser reescritas da seguinte maneira:

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (-\partial_\beta \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\beta \partial_\mu g_{\nu\alpha} + \partial_\alpha \partial_\beta g_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu g_{\alpha\beta}) + F_{\mu\nu}(g, \partial g). \quad (4.93)$$

Pode-se fazer o seguinte cálculo:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\mu} \nabla_\nu \Gamma^\alpha &= g_{\alpha\mu} \nabla_\nu (g^{\rho\sigma} \Gamma_{\rho\sigma}^\alpha) = g_{\alpha\mu} g^{\rho\sigma} (\partial_\nu \Gamma_{\rho\sigma}^\alpha) + F(g, \partial g) \\ &= \frac{1}{2} g_{\alpha\mu} g^{\rho\sigma} g^{\alpha\lambda} \partial_\nu (\partial_\rho g_{\lambda\sigma} + \partial_\sigma g_{\lambda\rho} - \partial_\lambda g_{\rho\sigma}) + \bar{F}(g, \partial g) \\ &= \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\nu \partial_\rho g_{\mu\sigma} + \partial_\nu \partial_\sigma g_{\mu\rho} - \partial_\nu \partial_\mu g_{\rho\sigma}) + \bar{F}(g, \partial g), \end{aligned} \quad (4.94)$$

onde $\Gamma^\mu = g^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^\mu$. Um cálculo semelhante pode ser feito para obter

$$g_{\alpha\nu} \nabla_\mu \Gamma^\alpha = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu \partial_\rho g_{\nu\sigma} + \partial_\mu \partial_\sigma g_{\nu\rho} - \partial_\mu \partial_\nu g_{\rho\sigma}) + \bar{F}(g, \partial g). \quad (4.95)$$

E, por fim, tem-se a expressão:

$$g_{\alpha(\mu} \nabla_{\nu)} \Gamma^\alpha = g^{\alpha\beta} (-\partial_\mu \partial_\nu g_{\alpha\beta} + \partial_\nu \partial_\beta g_{\alpha\mu} + \partial_\beta \partial_\mu g_{\nu\alpha}). \quad (4.96)$$

Levando em conta a expressão (4.93) e comparando com (4.96), $R_{\mu\nu}$ pode ser reescrito como:

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta g_{\mu\nu} + g_{\alpha(\mu} \nabla_{\nu)} \Gamma^\alpha + \bar{F}(g, \partial g). \quad (4.97)$$

Impondo a condição harmônica, temos

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta g_{\mu\nu} + \bar{F}(g, \partial g) = 0. \quad (4.98)$$

A equação (4.98) é conhecida como a equação de Einstein reduzida (para mais detalhes, vide [23]). O ponto crucial é que agora as equações de Einstein estão na forma hiperbólica quase-linear de segunda ordem, (4.21), de maneira que o teorema 1 pode ser aplicado diretamente. Note, no entanto, que o teorema 1 prova apenas a existência de uma solução local das equações de Einstein. O nosso próximo passo será então globalizar esse resultado.

Teorema 2. *Seja Σ uma variedade tridimensional de classe C^∞ , seja h_{ab} uma métrica Rie-*

manniana em Σ e seja K_{ab} um campo tensorial simétrico suave em Σ . Suponha que h_{ab} e K_{ab} satisfaçam as equações de vínculo (4.56) e (4.57). Então, existe um único espaço-tempo de classe C^∞ , (M, g_{ab}) , chamado desenvolvimento maximal de Cauchy de (Σ, h_{ab}, K_{ab}) , que satisfaz as seguintes propriedades:

1. (M, g_{ab}) é globalmente hiperbólico, com a superfície de Cauchy Σ ;
2. (M, g_{ab}) é uma solução das equações de Einstein;
3. A métrica induzida e a curvatura extrínseca de Σ são respectivamente, h_{ab} e K_{ab} ;
4. Qualquer outro espaço satisfazendo (1) – (3) pode ser mapeado isometricamente em um subconjunto de (M, g_{ab}) .

Ademais, (M, g_{ab}) satisfaz a propriedade de domínio de dependência da seguinte maneira. Suponha que (Σ, h_{ab}, K_{ab}) e $(\Sigma', h'_{ab}, K'_{ab})$ sejam condições iniciais com desenvolvimentos maximais (M, g_{ab}) e (M', g'_{ab}) respectivamente. Suponha que exista um difeomorfismo entre $S \subset \Sigma$ e $S' \subset \Sigma'$ que leva (h_{ab}, K_{ab}) de S para (h'_{ab}, K'_{ab}) em S' . Então $D(S)$ no espaço-tempo (M, g_{ab}) é isométrico a $D(S')$ no espaço-tempo (M', g'_{ab}) . Finalmente, a solução em g_{ab} em M depende continuamente das condições iniciais (h_{ab}, K_{ab}) em Σ .

Com esse último teorema, concluímos que o problema de Cauchy, ou problema de valor inicial, é bem definido para a relatividade geral.

4.3.4 Aplicações do problema de Cauchy

Na seção 4.3.2. foi visto que as equações de Einstein podem ser separadas em duas classes:

$$R_{ij} = 0, \quad (4.99)$$

$$G_\lambda{}^0 = 0. \quad (4.100)$$

O conjunto de seis equações (4.99) determinam a evolução do sistema enquanto as quatro equações remanescentes (4.100) impõem um vínculo entre as condições iniciais.

Considere um modelo homogêneo e isotrópico para o espaço-tempo. Para essa classe de modelo a forma mais geral da métrica é dada por:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(d\chi^2 + \chi^2 d\Omega^2). \quad (4.101)$$

Essa métrica pode ser reescrita considerando as seguintes transformações: $\chi = r$, $r = \text{sen}\chi$ e $\text{senh}\chi = r$:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{1}{1-kr^2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2 \right], \quad (4.102)$$

onde k pode assumir os valores 1, 0 e -1. Por simplicidade, considere o caso $k = 0$. Em coordenadas cartesianas, temos

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (4.103)$$

Suponha, então, uma hipersuperfície tipo-espaço para $t = t_0$, cuja métrica é da forma (4.103). Além disso, adotemos o sistema de coordenadas gaussianas normais, isto é,

$$g_{00} = 1, \quad g_{0i} = 0. \quad (4.104)$$

Os termos não-nulos da conexão são: ³

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= \Gamma_{22}^0 = \Gamma_{33}^0 = a\dot{a}, \\ \Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{a}}{a}. \end{aligned} \quad (4.105)$$

O tensor de Riemann tem os seguintes termos não-nulos: ⁴

$$\begin{aligned} R_{110}^0 &= R_{220}^0 = R_{330}^0 = \ddot{a}a, \\ R_{212}^1 &= R_{313}^1 = R_{323}^2 = -\dot{a}^2. \end{aligned} \quad (4.106)$$

De (4.106) obtém-se ainda:

$$\begin{aligned} R_{00} &= 3\frac{\ddot{a}}{a}, \\ R_{11} &= R_{22} = R_{33} = -a\ddot{a} - 2\dot{a}^2, \end{aligned} \quad (4.107)$$

e:

$$R = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right). \quad (4.108)$$

Munidos das quantidades geométricas, vamos analisar as equações de evolução (4.99) e o

³A conexão é por definição: $\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(\partial_b g_{cd} + \partial_c g_{db} - \partial_d g_{bc})$.

⁴O tensor de Riemann, o tensor de Ricci e o escalar de curvatura são, respectivamente: $R_{bcd}^a = \Gamma_{bc,d}^a - \Gamma_{bd,c}^a + \Gamma_{ed}^a \Gamma_{bc}^e - \Gamma_{ec}^a \Gamma_{bd}^e$, $R_{ab} = g^{cd} R_{acbd}$ e $R = g^{ab} R_{ab}$.

vínculo (4.100). Considerando a constante cosmológica, essas equações assumem a forma:

$$R_{ij} = \Lambda g_{ij}, \quad (4.109)$$

$$G_{0\lambda} = -\Lambda g_{0\lambda}, \quad (4.110)$$

onde o tensor de Einstein é, por definição, $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R$.

Na equação (4.110) a única equação não nula será para a componente G_{00} uma vez que foram adotadas as coordenadas gaussianas. Então,

$$G_{00} = -3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = -\Lambda. \quad (4.111)$$

Reescrevendo esta equação, obtém-se:

$$\frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}. \quad (4.112)$$

Note que estes resultados são válidos, em princípio na hipersuperfície Σ_0 , mas usando o fato de que os vínculos são propagados, a equação (4.112) pode ser integrada e obtém-se:

$$a(t) = Ce^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}, \quad (4.113)$$

onde C é uma constante de integração.

As equações de evolução (4.109) fornecem:

$$R_{11} = R_{22} = R_{33} = a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 = \Lambda a^2. \quad (4.114)$$

Substituindo a expressão (4.113) verifica-se que ela é satisfeita para qualquer valor de C . Portanto, tomando $C = 1$, a métrica (4.103) se torna

$$ds^2 = dt^2 - e^{2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (4.115)$$

Note que, neste caso particular, a solução foi obtida utilizando-se apenas a equação de vínculo. Portanto, partindo da hipótese de que na hipersuperfície a métrica é do tipo Friedmann-Robertson-Walker, ao utilizar as equações de vínculo e as equações de propagação, a métrica resultante é a métrica de de Sitter.

Capítulo 5

O TEOREMA DE CAMPBELL-MAGAARD

“São o campo e partículas entidades estrangeiras imersas na geometria, ou são nada além de geometria?” (J. WHEELER, 1962)

5.1 Introdução

Os modelos de Randall-Sundrum e a teoria da matéria da induzida, proposta por Paul Wesson, apresentam um ponto em comum: ambas postulam que o nosso espaço-tempo quadridimensional estaria imerso em um espaço-tempo pentadimensional. Essas teorias e outros modelos semelhantes, são conhecidos como teorias de imersão. No entanto, associada a elas surgiu a necessidade de se investigar a validade de realizar imersões isométricas de um espaço-tempo n -dimensional em espaços-tempo em que o número de dimensões é maior que n .

Para que haja imersão de um espaço em outro é necessário levar em conta teoremas de imersão da geometria diferencial. Um teorema que nos dá base para a existência de tais tipo de imersões é o chamado teorema de Campbell-Magaard.

5.2 O teorema de Campbell-Magaard

Neste capítulo consideram-se apenas variedades semi-riemannianas. Diz-se que uma variedade M é semi-riemanniana se esta é dotada de uma métrica $g : T_p M^n \times T_p M^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r (analítica) satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $g(V, W) = g(W, V), \forall V, W \in T_p M^n$;
2. Se $g(V, W) = 0, \forall W \in T_p M^n$, então $V = 0$.

Além disso, neste capítulo investiga-se a possibilidade de imersão de M^n em uma coleção de espaços semi-riemannianos que possua alguma propriedade geométrica, denotada por π , em comum. Essas propriedades podem ser das mais variadas possíveis, como por exemplo, variedades com curvatura constante ou com tensor de Ricci nulo.

Neste teorema, a propriedade geométrica π considerada será ter o tensor de Ricci igual a zero. Portanto, o espaço ambiente considerado será M_π , ou seja, o conjunto dos espaços semi-riemannianos de dimensão $(n + 1)$ cujo tensor de Ricci é nulo.

Teorema de Campbell-Magaard. *Seja M^n , com $n > 1$ um espaço semi-riemanniano com o elemento de linha*

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j, \quad (5.1)$$

em um certo sistema de coordenadas numa vizinhança de $p \in M^n$, de coordenadas $x_p^1 = \dots = x_p^n = 0$. Para que haja uma imersão isométrica local e analítica de M^n no ponto p em um espaço de dimensão $(n + 1)$ com tensor de Ricci nulo, é suficiente que g_{ij} sejam funções analíticas no ponto $0 \in \mathbb{R}^n$.

Uma generalização para a existência de imersões isométricas de codimensão 1 em espaços semi-riemannianos de propriedades π não especificadas é garantida pelo seguinte teorema:

Teorema 3. *Sejam M^n um espaço semi-riemanniano (M^n, g) e $\mathbf{x} = \{x^1, \dots, x^n\}$ um sistema de coordenadas locais numa vizinhança U de $p \in M^n$. Uma condição necessária e suficiente para que M^n , com elemento de linha $ds^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j$ tenha uma imersão isométrica local e analítica em M_π^{n+1} é que existam funções analíticas*

$$\bar{g}_{ik} = \bar{g}_{ik}(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}), \quad (5.2)$$

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}), \quad (5.3)$$

definidas em um aberto $D \subset \mathbf{x}(U) \times \mathbb{R}$, contendo o ponto $(x_p^1, \dots, x_p^n, 0)$, satisfazendo as seguintes condições:

$$\bar{g}_{ik}(x^1, \dots, x^n, 0) = g_{ik}(x^1, \dots, x^n), \quad (5.4)$$

em um aberto de $\mathbf{x}(U)$, e

$$\bar{g}_{ik} = \bar{g}_{ki}, \quad (5.5)$$

$$|\bar{g}_{ik}| \neq 0, \quad (5.6)$$

$$\bar{\psi} \neq 0, \quad (5.7)$$

em todo D . Além disso, exigimos que:

$$ds^2 = \bar{g}_{ik} dx^i dx^k + \varepsilon \bar{\psi}^2 dx^{n+1} dx^{n+1}, \quad (5.8)$$

com $\varepsilon = \pm 1$, represente o elemento de linha de \tilde{M}^{n+1} em uma vizinhança coordenada de V de $\tilde{M}^{n+1} \in M_\pi^{n+1}$.

A ideia central desse teorema é de que existe um sistema de coordenadas adaptado à imersão, de modo que a imagem da imersão seja exatamente a hipersuperfície $x^{n+1} = 0$ do espaço ambiente e a condição de isometria se reduza a relação (5.4), ou seja, quando a coordenada extra é nula, recaímos na variedade menor M^n .

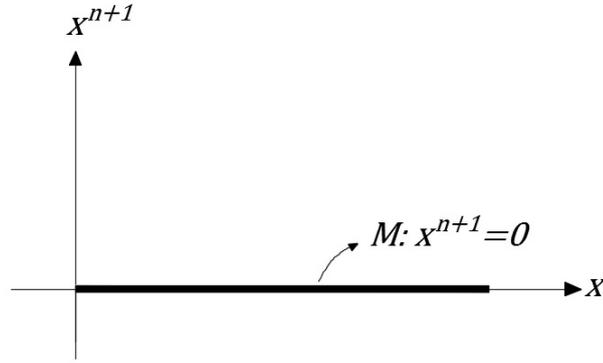


Figura 5.1: Imersão.

Demonstração. Considere inicialmente a condição necessária do teorema, ou seja, admita a existência de uma imersão isométrica local $\phi : M^n \rightarrow \tilde{M}^{n+1}$, com¹ $(\tilde{M}^{n+1}, \tilde{g}) \in M_\pi^{n+1}$ e, portanto, das funções (5.2) e (5.3), sujeitas às condições (5.4), (5.5), (5.6), (5.7) e (5.8). Pela teoria de imersões, se $\phi : U \subset M^n \rightarrow \tilde{M}^{n+1}$ é uma imersão, e $\{y\} = \{y^1, \dots, y^{n+1}\}$ um sistema de coordenadas de um aberto que contenha $\phi(U)$, a imersão ϕ determina uma relação entre as coordenadas $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^{n+1}$:

$$y^\alpha = \sigma^\alpha(x^1, \dots, x^n), \quad (5.9)$$

onde $\sigma = \mathbf{y} \circ \phi \circ \mathbf{x}^{-1} : \mathbf{x}(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ e $\alpha = 1, \dots, n+1$ ².

Se ϕ é uma imersão então $d\phi_p$ é injetiva e os n vetores $\{d\phi_p(\partial_{x^1}), \dots, d\phi_p(\partial_{x^n})\}$ de $T_{\phi(p)}\tilde{M}^{n+1}$ são linearmente independentes. Em termos da base dos vetores de \mathbf{y} , tem-se $d\phi_p(\partial_{x^i}) = \frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial x^i} \partial_{y^\alpha}|_{\phi(p)}$. A matriz jacobiana de σ , cujos elementos são $\frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial x^i}$ tem posto n .

O índice α , correspondente ao índice de linha, varre de 1 até $n+1$ e o a , correspondente ao índice de coluna, varre de 1 até n , formando uma matriz $(n+1) \times n$. Pode-se, então, escolher

¹ \tilde{g} é a métrica do espaço ambiente.

²Neste capítulo os índices latinos e gregos variam de 1 a n e de 1 a $n+1$ respectivamente

um índice a_0 e eliminar a linha e a coluna de modo que a matriz restante seja uma matriz $n \times n$, cujo determinante é não-nulo no ponto p . Renumerando $\alpha_0 = n + 1$, o novo sistema se torna $y^i = \sigma^i(x^1, \dots, x^n)$, com $i = 1, \dots, n$, que tem jacobiano diferente de zero em (x_p^1, \dots, x_p^n) . Fazendo uso do teorema da função inversa, se as funções σ^i são de classe C^r , então pode-se dizer que existem abertos A e B do \mathbb{R}^n com, A contendo (x_p^1, \dots, x_p^n) e B contendo (y_p^1, \dots, y_p^n) , em que a função (5.9) pode ser invertida obtendo-se a forma

$$x^i = \rho^i(y^1, \dots, y^n), \tag{5.10}$$

onde as funções $\rho^i : B \rightarrow \mathbb{R}$ são tais que $\sigma^i(\rho^1(\vec{y}), \dots, \rho^n(\vec{y})) = y^i$ para $\vec{y} = (y^1, \dots, y^n) \in B$ e $\rho^i(\sigma^1(x), \dots, \sigma^n(x)) = x^i$ para $x = (x^1, \dots, x^n) \in A$. As funções ρ^i são de classe C^r em B , e se σ^i são funções analíticas, então existe um aberto contendo (y_p^1, \dots, y_p^n) onde as funções inversas ρ^i também são analíticas.

A função de imersão $y^{n+1} = \sigma^{n+1}(x^1, \dots, x^n)$ em termos da função (5.10) assume a forma $y^{n+1} = \xi(y^1, \dots, y^n)$, onde $\xi : B \rightarrow \mathbb{R}$. Pode-se definir então, em um certo conjunto aberto $E \subset \mathbf{y}(V)$ uma função bem definida $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(y^1, \dots, y^n, y^{n+1}) = y^{n+1} - \xi(y^1, \dots, y^n). \tag{5.11}$$

O aberto E pode ser definido da seguinte maneira. Define-se uma aplicação de projeção $P : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que:

$$P(y^1, \dots, y^n, y^{n+1}) = (y^1, \dots, y^n). \tag{5.12}$$

O conjunto $P^{-1}(B)$ é um aberto do \mathbb{R}^{n+1} , assim define-se o conjunto E como sendo $E = P^{-1}(B) \cap \mathbf{y}(V)$. Um esquema simples da imersão está representado na figura abaixo:

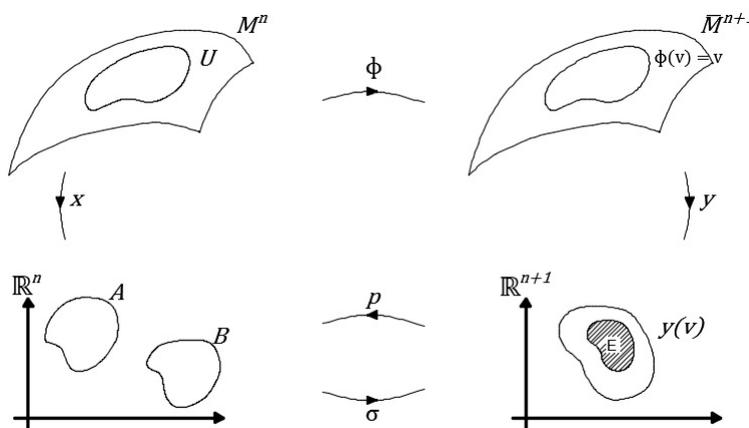


Figura 5.2: Representação gráfica da imersão.

A função (5.11) pode ser entendida de maneira simples considerando o seguinte exemplo. Seja a imersão da esfera S^2 no espaço tridimensional \mathbb{R}^3 . Então, a imersão se dará da seguinte forma: $\phi : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Utilizando a transformação

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \phi,$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi,$$

$$z = r \cos \theta,$$

pode-se obter

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad (5.13)$$

e, além disso,

$$z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}. \quad (5.14)$$

De modo que a função de imersão será:

$$f(x, y, z) = z - \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}. \quad (5.15)$$

Se $f(x, y, z) = 0$ a expressão (5.14) é recuperada, e, portanto, neste exemplo, a coordenada extra é dada pela coordenada z .

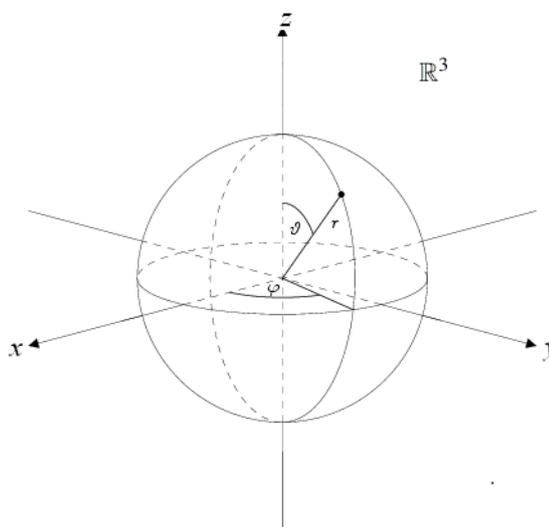


Figura 5.3: Esfera imersa no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 .

A expressão (5.11) é justamente uma generalização da expressão (5.15). A função f apresentada possui algumas propriedades importantes. Antes, considere alguns resultados que nos serão úteis a partir de agora [35]:

Definição 5. *Seja $f : M^m \rightarrow N^n$ uma aplicação diferenciável. Um ponto $p \in M$ é dito ser um ponto regular de f se a diferencial $df(p)$ tem posto n , em outras palavras, se $df(p)$ é uma*

transformação linear sobrejetora. Um ponto $q \in N$ é chamado valor regular de f se $f^{-1}(q)$ contém apenas pontos regulares.

Definição 6. Se $q \in f(M)$ é um valor regular de um mapeamento suave $f : M \rightarrow N$, então $f^{-1}(q)$ é uma subvariedade de M , e a $\dim M = \dim N + \dim f^{-1}(q)$.

Note que o zero é um valor regular de f , pois, pelo menos, $\frac{\partial f}{\partial y^{n+1}} \neq 0$ em todo E . Portanto, se zero é um valor regular de f , pela definição 6, $f^{-1}(0)$ é uma subvariedade de \mathbb{R}^{n+1} . A subvariedade $f^{-1}(0)$ está definida no aberto \mathbb{R}^{n+1} , mas por construção $f^{-1}(0) \in \sigma(A)$ e pela parametrização $\mathbf{y}^{-1}(f^{-1}(0))$ pode-se definir a subvariedade sobre o aberto $V \subset \tilde{M}^{n+1}$.

Proposição 5. Seja c um valor de f . Então $\tilde{M} = f^{-1}(c)$ é uma hipersuperfície semi-riemanniana de M se, e somente se, $\langle \nabla f, \nabla f \rangle \neq 0$.

Seja $p \in U$. A aplicação $d\phi_p$ é injetiva. Isto permite definir um sub-espaço vetorial de dimensão n sobre o espaço $T_{\phi(p)}\tilde{M}^{n+1}$ constituído por $d\phi_p(T_p M^n)$. De modo que qualquer vetor $v \in d\phi_p(T_p M^n)$ corresponde ao vetor tangente no ponto p de alguma curva γ sobre o aberto $\phi(U) \subset \overline{M}^{n+1}$. Ao longo desta curva, $f(\gamma) = 0$, pelo menos para um determinado intervalo de γ contendo a imagem do ponto p . Dessa maneira, $df(v) = v(f) = 0 \Rightarrow \tilde{g}_{\phi(p)}(\nabla f, v) = 0$, ou seja, o gradiente de f é perpendicular à subvariedade $f^{-1}(0)$. Escolhendo, em particular, $\bar{e}_\alpha \equiv d\phi_p(\partial_{x^i})$, então, $\tilde{g}_{\phi(p)}(\nabla f, \bar{e}_\alpha) = 0$. Resta verificar se ∇f e os vetores \bar{e}_α são linearmente independentes. Para tal, faz-se necessário encontrar a solução da seguinte equação:

$$a^i \bar{e}_i + a^{n+1} \nabla f = 0. \quad (5.16)$$

Tomando o produto interno com o vetor \bar{e}_j :

$$a^i \tilde{g}_{\phi(p)}(\bar{e}_i, \bar{e}_j) + a^{n+1} \tilde{g}_{\phi(p)}(\nabla f, \bar{e}_j) = 0. \quad (5.17)$$

O segundo termo da direita é nulo devido ao resultado $\tilde{g}_{\phi(p)}(\nabla f, \bar{e}_i) = 0$. Além disso:

$$\tilde{g}_{\phi(p)}(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \tilde{g}_{\phi(p)}(d\phi_p(\partial_{x^i}), d\phi_p(\partial_{x^j})) = g_p(\partial_{x^i}, \partial_{x^j}) = g_{ij}. \quad (5.18)$$

O resultado obtido é, portanto, $a^i g_{ij} = 0$. Por hipótese, g_{ij} é não-degenerado, concluindo-se a partir disso que $a^i = 0$. Imediatamente, segue da equação (5.16) que $a^{n+1} = 0$, pois assumiu-se que $\nabla f \neq 0$. Concluímos, então, que ∇f e os vetores \bar{e}_i são linearmente independentes. Como tais, o conjunto de $n + 1$ vetores $\{\nabla f, \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ constitui uma base para o espaço tangente

$T_{\phi(p)}\tilde{M}^{n+1}$. Expressando a métrica em relação a esta base, tem-se:

$$\tilde{g}_{ab} = \begin{pmatrix} \tilde{g}_{\phi(p)}(\nabla f, \nabla f) & 0_{1 \times n} \\ 0_{n \times 1} & (\tilde{g}_{\phi(p)}(\bar{e}_\alpha, \bar{e}_\beta))_{n \times n} \end{pmatrix}$$

Como \tilde{g} também é não-degenerado, então, tem-se $\tilde{g}_{\phi(p)}(\nabla f, \nabla f) \neq 0$. Concluimos, assim, que f^{-1} é uma hipersuperfície semi-riemanniana. Além disso, o gradiente da hipersuperfície coincide com a imagem da imersão. No caso de uma imersão que induz uma métrica não-degenerada, a norma é diferente de zero, $\tilde{g}(\nabla f, \nabla f) \neq 0$. Note que no caso riemanniano, esta condição seria naturalmente satisfeita, mas, como neste caso $\tilde{g}(\nabla f, \nabla f)$ pode assumir os valores $-1, 0$ e 1 , foi necessária uma análise mais cuidadosa. Fisicamente, a exigência de que $\tilde{g}(\nabla f, \nabla f) \neq 0$ exclui a possibilidade de que ∇f possa ser um vetor do tipo luz. A função f irá servir como auxílio na construção de coordenadas adaptadas à imersão, de maneira que a imagem da imersão coincidirá localmente com a hipersuperfície correspondente a $\hat{y}^{n+1} = 0$.

A construção desse sistema de coordenadas pode ser interpretado da seguinte maneira: supondo que f seja uma nova coordenada \hat{y}^{n+1} , as outras coordenadas serão escolhidas de modo que sejam ortogonais a ∇f , ou seja, necessitam-se determinar n funções $h^i(y^1, \dots, y^n, y^{n+1})$ que satisfaçam a equação:

$$\tilde{g}^{ab} \frac{\partial f}{\partial y^\alpha} \frac{\partial h^i}{\partial y^\beta} = 0. \quad (5.19)$$

Ao determinar essas n funções h , estas irão formar uma espécie de “malha” sobre a variedade, formando assim um sistema de coordenadas.

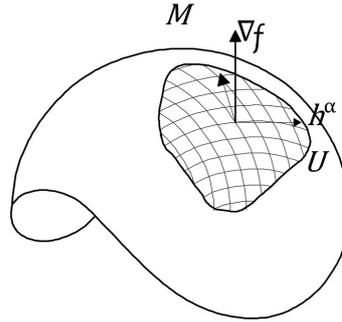


Figura 5.4: Sistema de coordenadas adaptado à imersão.

A equação (5.19) é do tipo:

$$A^1(y) \frac{\partial h}{\partial y^1} + \dots + A^{n+1}(y) \frac{\partial h}{\partial y^{n+1}} = 0, \quad (5.20)$$

onde define-se $A^b(y) = \tilde{g}^{ab} \frac{\partial f}{\partial y^a}$. Pela teoria das equações diferenciais parciais, se A^b é analítica no aberto E , sendo $A^b \neq 0$ para algum valor de $b = 1, \dots, n+1$, a equação (5.20) admite n soluções independentes $h^i(y^1, \dots, y^{n+1})$ analíticas em um aberto $E' \subset E$ contendo o ponto

$(y_p^1, \dots, y_p^{n+1})$. Em outras palavras, se h^i possui n soluções linearmente independentes, isso equivale a dizer que a matriz jacobiana $\frac{\partial h^i}{\partial y^\alpha}$ tem posto n . As colunas dessa matriz dão origem a n vetores linearmente independentes, definidos por $\tilde{g}^{\alpha\beta} \frac{\partial h^i}{\partial y^\alpha} \partial_{y^\beta}$. Cada um desses vetores satisfaz a equação (5.20); então, é claro que estes são ortogonais a ∇f . Além disso, $\tilde{g}(\nabla f, \nabla f) \neq 0$, o que permite concluir que $\nabla f = g^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial y^\alpha} \partial_{y^\beta}$ e $\tilde{g}^{\alpha\beta} \frac{\partial h^i}{\partial y^\alpha} \partial_{y^\beta}$ formam $n+1$ vetores linearmente independentes. Logo:

$$\begin{pmatrix} \tilde{g}^{1\alpha} \frac{\partial h^1}{\partial y^\alpha} & \dots & \tilde{g}^{1\alpha} \frac{\partial h^n}{\partial y^\alpha} & \tilde{g}^{1\alpha} \frac{\partial f}{\partial y^\alpha} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \tilde{g}^{n+1\alpha} \frac{\partial h^1}{\partial y^\alpha} & \dots & \tilde{g}^{n+1\alpha} \frac{\partial h^n}{\partial y^\alpha} & \tilde{g}^{n+1\alpha} \frac{\partial f}{\partial y^\alpha} \end{pmatrix} = \tilde{g}^{\alpha\beta} \begin{pmatrix} \frac{\partial h^1}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial h^n}{\partial y^1} & \frac{\partial f}{\partial y^1} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial h^1}{\partial y^{n+1}} & \dots & \frac{\partial h^n}{\partial y^{n+1}} & \frac{\partial f}{\partial y^{n+1}} \end{pmatrix}$$

tem determinante não-nulo. Como, por hipótese, a matriz \tilde{g}^{ab} é não-singular, então:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial h^1}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial h^n}{\partial y^1} & \frac{\partial f}{\partial y^1} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial h^1}{\partial y^{n+1}} & \dots & \frac{\partial h^n}{\partial y^{n+1}} & \frac{\partial f}{\partial y^{n+1}} \end{vmatrix} \neq 0,$$

para $(y_p^1, \dots, y_p^{n+1})$. Fazendo uso novamente do teorema da função inversa, se o determinante de h em $(y_p^1, \dots, y_p^{n+1})$ é diferente de zero, então existem os abertos $W \subset E'$ contendo o ponto $(y_p^1, \dots, y_p^{n+1})$ e $O \subset \mathbb{R}^{n+1}$ contendo $(h^1(y_p), \dots, h^n(y_p), f(y_p) = 0)$ onde a aplicação $\mathbf{h} \equiv \{h^1, \dots, h^n, f\} : W \rightarrow O$ possui inversa diferenciável e analítica. Baseado nisso, pode-se obter a seguinte correspondência entre as variáveis $\hat{y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $y \in \mathbb{R}^{n+1}$:

$$\hat{y}^i = h^i(y^1, \dots, y^{n+1}), \quad (5.21)$$

$$\hat{y}^{n+1} = f(y^1, \dots, y^{n+1}). \quad (5.22)$$

E de fato, essa correspondência representa uma transformação de coordenadas. Pela lei de transformação tensorial, a métrica transforma-se segundo a regra:

$$\hat{g}^{ab} = \tilde{g}^{cd} \frac{\partial \hat{y}^a}{\partial y^c} \frac{\partial \hat{y}^b}{\partial y^d}. \quad (5.23)$$

Então,

$$\hat{g}^{ab} = \tilde{g}^{cd} \frac{\partial \hat{y}^a}{\partial y^c} \frac{\partial \hat{y}^b}{\partial y^d}, \quad (5.24)$$

$$\hat{g}^{an+1} = \tilde{g}^{\alpha\beta} \frac{\partial \hat{y}^a}{\partial y^\alpha} \frac{\partial \hat{y}^{n+1}}{\partial y^\beta} = \tilde{g}^{\alpha\beta} \frac{\partial h^a}{\partial y^\alpha} \frac{\partial f}{\partial y^\beta} = 0, \quad (5.25)$$

$$\hat{g}^{n+1n+1} = \tilde{g}^{\alpha\beta} \frac{\partial \hat{y}^{n+1}}{\partial y^\alpha} \frac{\partial \hat{y}^{n+1}}{\partial y^\beta} = \tilde{g}^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial y^\alpha} \frac{\partial f}{\partial y^\beta} \neq 0, \quad (5.26)$$

onde na passagem da equação (5.25) utilizou-se (5.19). Nesse novo sistema de coordenadas, $\widehat{\mathbf{y}} = \mathbf{h} \circ \mathbf{y}$, e o elemento de linha assume, portanto, a seguinte forma:

$$ds^2 = \widehat{g}_{ab} d\widehat{y}^a d\widehat{y}^b + \widehat{g}_{n+1n+1} d\widehat{y}^{n+1} d\widehat{y}^{n+1}. \quad (5.27)$$

Substituindo essa nova parametrização na função de imersão, obtém-se:

$$\widehat{y}^{n+1} = f(\boldsymbol{\sigma}^1(x), \dots, \boldsymbol{\sigma}^{n+1}(x)) = 0, \quad (5.28)$$

$$\widehat{y}^i = h^i(\boldsymbol{\sigma}^1(x), \dots, \boldsymbol{\sigma}^{n+1}(x)) \equiv \lambda^i(x^1, \dots, x^n), \quad (5.29)$$

para todo $(x^1, \dots, x^n) \in A'$, sendo A' um aberto de A que contém o ponto (x_p^1, \dots, x_p^n) .

Os vetores que antes eram expressos como $\bar{e}_\alpha = \frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial x^i} \partial_{y^\alpha}$, agora, na nova base de coordenadas, podem ser escritos como $\bar{e}_i = \frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \widehat{y}^\beta}{\partial y^\alpha} \partial_{\widehat{y}^\beta}$. Os n vetores \bar{e}_i são linearmente independentes; portanto a matriz $\frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \widehat{y}^\beta}{\partial y^\alpha} = \frac{\partial \widehat{y}^\beta}{\partial x^i}$ tem posto n . Mas, $\frac{\partial \widehat{y}^{n+1}}{\partial x^i} = 0$, e então $|\frac{\partial \widehat{y}^i}{\partial x^i}| \neq 0$. Isto permite fazer uso do teorema da função inversa mais uma vez, de modo que é possível inverter o sistema $\widehat{y}^i = \lambda^i(x^1, \dots, x^n)$, existindo algum aberto $\widehat{A} \subset A'$ que contém o ponto (x_p^1, \dots, x_p^n) e outro aberto no \mathbb{R}^n $C \in P(O)$ contendo o ponto $(\widehat{y}_p^1, \dots, \widehat{y}_p^n)$, tal que

$$x^i = \theta^i(\widehat{y}^1, \dots, \widehat{y}^n), \quad (5.30)$$

onde cada função $\theta^i : C \rightarrow \mathbb{R}$ é analítica e satisfaz $\theta^i(\lambda^1(x), \dots, \lambda^n(x)) = x^i$ para $x \in \widehat{A}$.

Por fim, define-se a seguinte aplicação no aberto $\widehat{O} = P^{-1}(C) \cap O$:

$$y^{n+1*} = \widehat{y}^{n+1}, \quad (5.31)$$

$$y^i* = \theta^i(\widehat{y}^1, \dots, \widehat{y}^n). \quad (5.32)$$

O determinante jacobiano desta aplicação é diferente de zero, e, além disso, ela é analítica, sendo assim é uma transformação de coordenadas. A imagem de \widehat{O} por esta aplicação é um aberto denotado por $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, que se identificamos, utilizando a aplicação de projeção $P(D) = \widehat{A}$, sendo \widehat{A} é a imagem de C pelo difeomorfismo de θ^i , então $D \subset \mathbf{x}(U) \times \mathbb{R}$. Tomando a aplicação $\vartheta = \{\theta^1, \dots, \theta^n, I^{n+1}\}$, onde $I^{n+1}(\widehat{y}^1, \dots, \widehat{y}^{n+1}) = \widehat{y}^{n+1}$, pode-se concluir que $\widehat{y}^* = \vartheta \circ \widehat{y} : W \subset V \rightarrow D$ é um sistema de coordenadas da vizinhança $W = \widehat{y}^{-1}(\widehat{O})$ do ponto $\phi(p) \in \widetilde{M}^{n+1}$. Pela regra de transformação (5.23) as componentes da métrica nesse novo sistema de coordenadas serão

$$g^{n+1i*} = \frac{\partial y^{n+1*}}{\partial \widehat{y}^\alpha} \frac{\partial y^i*}{\partial \widehat{y}^\beta} \widehat{g}^{\alpha\beta} = \frac{\partial y^i*}{\partial \widehat{y}^{n+1}} \widehat{g}^{n+1n+1} = 0, \quad (5.33)$$

$$g^{n+1n+1*} = \widehat{g}^{n+1n+1}. \quad (5.34)$$

E o elemento de linha assume a forma:

$$ds^2 = g_{ik}^* dy^i dy^k + g_{n+1n+1}^* dy^{n+1} dy^{n+1}. \quad (5.35)$$

As funções de imersão nas novas coordenadas serão:

$$y^i = \theta^i(\lambda^1(x), \dots, \lambda^n(x)) = x^i, \quad (5.36)$$

$$y^{n+1} = 0. \quad (5.37)$$

Como consequência, a condição de isometria:

$$g_{\alpha\beta}^* \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^k} = g_{ik}, \quad (5.38)$$

válida na região de imersão $y^{n+1} = 0$ e $x \in \widehat{A}$, se reduz a seguinte expressão:

$$g_{ij}^*(x^1, \dots, x^n, 0) = g_{ij}(x^1, \dots, x^n). \quad (5.39)$$

Definem-se agora as seguintes funções:

$$\bar{g}_{ik} = g_{ik}^* \quad (5.40)$$

$$\bar{\psi}^2 = |g_{n+1n+1}^*|. \quad (5.41)$$

Neste momento, mostra-se que estas funções são as funções (5.2) e (5.3), procuradas desde o início. Necessita-se mostrar, então, que elas satisfazem as condições (5.4) – (5.8). A condição (5.4) é satisfeita imediatamente por causa da condição de isometria nesse sistema de coordenadas (5.38). Além disso, por (5.38) vê-se que $g_{ik}^* = g_{ki}^*$ e consequentemente $\bar{g}_{ik} = \bar{g}_{ki}$ satisfazendo, assim, a condição de simetria (5.5). A condição (5.6) é satisfeita, e $g_{\alpha\beta}^*$ é uma matriz não singular, pois $|g_{\alpha\beta}^*| = |g_{ik}^*| |g_{n+1n+1}^*| = |\bar{g}_{ik}| \bar{\psi}^2 \neq 0 \Rightarrow |\bar{g}_{ik}| \neq 0$, onde nessa última demonstração utiliza-se o fato de que

$$\widehat{g}_{n+1n+1} = \bar{g}^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial y^\alpha} \frac{\partial f}{\partial y^\beta} \neq 0, \quad (5.42)$$

o que implica em:

$$\bar{\psi}^2 = |g_{n+1n+1}^*| = \left| \frac{1}{\bar{g}^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial y^\alpha} \frac{\partial f}{\partial y^\beta}} \right| \neq 0, \quad (5.43)$$

satisfazendo, portanto, a condição (5.7). Por fim, a condição (5.8) nos dá o elemento de linha na coordenada \tilde{y} . Se \tilde{g} é a métrica de um espaço \tilde{M}^{n+1} que satisfaz uma determinada propriedade

π , então o elemento de linha (5.8) também satisfaz a esta mesma propriedade π . Com isso a demonstração da condição necessária do teorema é concluída.

A demonstração da condição necessária deste teorema é bem mais simples. Supõe-se que exista um espaço \tilde{M}^{n+1} com uma propriedade π e um sistema de coordenadas $\{x^1, \dots, x^n, x^{n+1}\}$ de um aberto $\phi(U) = V$ de \tilde{M}^{n+1} tal que o elemento de linha de dessa variedade tenha a forma (5.8):

$$ds^2 = \bar{g}_{ik} dx^i dx^j + \varepsilon \bar{\psi}^2 dx^{n+1} dx^{n+1}, \quad (5.44)$$

onde $\bar{g}_{\alpha\beta}$ satisfaz a condição (5.4).

Suponha $\sigma : \hat{A} \subset \mathbf{x}(U) \rightarrow D$ a aplicação definida por

$$\bar{\sigma}(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^n, 0). \quad (5.45)$$

Pode-se mostrar que, de fato, a aplicação σ é uma imersão isométrica de (M^n, g) em $(\tilde{M}^{n+1}, \bar{g})$. A matriz jacobiana de σ tem posto n , e, além disso, a métrica induzida por esta imersão é dada por

$$\frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \sigma^\beta}{\partial x^j} \bar{g}_{\alpha\beta} = \bar{g}_{ik}(x^1, \dots, x^n, 0) = g_{ik}(x^1, \dots, x^n), \quad (5.46)$$

onde utilizou-se a condição (5.4). Isto mostra então que σ é uma imersão isométrica de M^n em \tilde{M}^{n+1} .

□

5.3 O teorema de Campbell-Magaard estendido

Na seção anterior, foi mostrado que é possível fazer uma imersão de um espaço M^n em uma coleção de espaços que possuem um determinada propriedade π em comum. O objetivo desta seção será obter uma versão estendida do teorema de Campbell-Maggard, onde ao invés de considerar uma imersão numa coleção de espaços com o tensor de Ricci nulo considera-se agora uma imersão em uma coleção de espaços de Einstein de dimensão $(n+1)$ [8].

Seja $(\tilde{M}^{n+1}, \tilde{g})$ uma variedade semi-riemanniana e seja $\mathbf{y} = \{y^1, \dots, y^{n+1}\}$ um sistema de coordenadas em um aberto $V \subset \tilde{M}^{n+1}$, e sejam $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ e $\tilde{R}_{\alpha\beta}$ as componentes da métrica e do tensor de Ricci neste sistema de coordenadas. Uma variedade é dita um espaço de Einstein se a seguinte relação tensorial é válida:

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} = \frac{2\Lambda}{1-n} \tilde{g}_{\alpha\beta}, \quad (5.47)$$

onde Λ é uma constante e $n \geq 2$. Neste caso, a propriedade π do espaço em que a imersão será realizada é representada pela relação tensorial (5.47).

5.3.0.1 Curvaturas intrínseca e extrínseca de uma hipersuperfície

Em cada ponto de uma variedade semi-riemanniana \tilde{M}^{n+1} existe uma vizinhança coordenada na qual a métrica pode ser expressa na forma:

$$ds^2 = \bar{g}_{ik} dy^i dy^k + \varepsilon \bar{\psi}^2 (dy^{n+1})^2. \quad (5.48)$$

Considere agora a aplicação de inclusão $i(y^1, \dots, y^n) = (y^1, \dots, y^n, 0)$ que nos dá uma imersão da hipersuperfície Σ_0 , definida por $y^{n+1} = 0$ em \tilde{M}^{n+1} . A inclusão induz uma métrica sobre a hipersuperfície cujas componentes são dadas por:

$$g_{ik}(y^1, \dots, y^n) = \frac{\partial i^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial i^\beta}{\partial y^k} \tilde{g}_{\alpha\beta} = \bar{g}_{ik}(y^1, \dots, y^n, 0). \quad (5.49)$$

A hipersuperfície Σ_0 possui uma métrica induzida que obedece a relação (5.49). Portanto, esta possui toda a estrutura de um espaço semi-riemanniano, isto é, a hipersuperfície Σ_0 pode ser munida de uma conexão afim, derivada covariante, tensor de Riemann e outras estruturas geométricas, todas associadas à métrica induzida sobre Σ_0 . Dada uma imersão isométrica, é possível obter uma relação entre as quantidades geométricas da hipersuperfície e do espaço ambiente. As equações que dão essa relação são as equações de Gauss-Codazzi. Portanto, nas coordenadas (5.48), as equações de Gauss-Codazzi em um sistema de coordenadas assumem a forma:

$$R_{mkij} = \tilde{R}_{mkij} + \varepsilon(h_{ik}h_{jm} - h_{jk}h_{im}), \quad (5.50)$$

$$\nabla_j h_{ik} - \nabla_i h_{jk} = \frac{1}{\bar{\psi}} \tilde{R}_{(n+1)kij}, \quad (5.51)$$

sendo h_{ik} o tensor de curvatura extrínseca, que, nas coordenadas (5.48), fica expresso por

$$h_{ik} = -\frac{1}{2\bar{\psi}} \frac{\partial \bar{g}_{ik}}{\partial y^{n+1}}. \quad (5.52)$$

Considere agora as componentes do tensor de Ricci $R_{\alpha\beta} = g^{\delta\gamma} R_{\delta\alpha\gamma\beta}$ nas coordenadas (5.48). Contraindo os índices j e m na equação de Gauss, obtém-se:

$$R_{ik} = \tilde{R}_{ik} - \tilde{R}_{i(n+1)k}^{(n+1)} - \varepsilon g^{jm} (h_{ik}h_{jm} - h_{jk}h_{im}). \quad (5.53)$$

Calculando $\tilde{R}_{i(n+1)k}^{(n+1)}$ com respeito a (5.48), podem-se identificar alguns termos usando (5.52) e escrever

$$\tilde{R}_{ik} = R_{ik} + \varepsilon g^{jm}(h_{ik}h_{jm} - 2h_{jk}h_{im}) - \frac{\varepsilon}{\psi} \frac{\partial h_{ik}}{\partial y^{n+1}} + \frac{1}{\psi} \nabla_i \nabla_k \psi. \quad (5.54)$$

Além disso, da equação de Codazzi, segue que:

$$\tilde{R}_{i(n+1)} = \psi g^{jk} (\nabla_j h_{ik} - \nabla_i h_{jk}). \quad (5.55)$$

A componente $\tilde{R}_{(n+1)(n+1)}$ pode ser obtida fazendo $\tilde{R}_{(n+1)(n+1)} = g^{ik} (\tilde{g}_{(n+1)(n+1)} \tilde{R}_{i(n+1)k}^{(n+1)})$. Portanto,

$$\tilde{R}_{(n+1)(n+1)} = \varepsilon \psi^2 g^{ik} \left(-\frac{\varepsilon}{\psi} \frac{\partial h_{ik}}{\partial y^{n+1}} + \frac{1}{\psi} \nabla_i \nabla_k \psi - \varepsilon g^{jm} h_{jk} h_{im} \right). \quad (5.56)$$

É importante notar que as equações obtidas acima são válidas não apenas para a hipersuperfície $y^{n+1} = 0$, mas para qualquer hipersuperfície Σ_c definida por $y^{n+1} = c$ sendo c uma constante. Por conveniência, a partir de agora denotaremos a métrica induzida em qualquer Σ_c por \bar{g}_{ik} , assim como todas as quantidades associadas à métrica induzida serão marcadas com uma barra e somente a métrica induzida em Σ_0 será denotada sem a barra, g_{ik} .

O espaço imersor \tilde{M}^{n+1} em questão é um espaço de Einstein, e como todo ponto de $V \subset \tilde{M}^{n+1}$ pertence a alguma hipersuperfície Σ_c , podem-se usar as equações de decomposição do tensor de Ricci em termos das partes intrínsecas e extrínsecas para qualquer hipersuperfície Σ_c , onde $c = y^{n+1}$. Se o espaço ambiente é um espaço de Einstein, então é válida a relação tensorial (5.47), e as equações (5.54), (5.55) e (5.56) serão equivalentes ao seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{ik} &= \bar{R}_{ik} + \varepsilon \bar{g}^{jm} (\bar{h}_{ik} \bar{h}_{jm} - 2\bar{h}_{jk} \bar{h}_{im}) - \frac{\varepsilon}{\bar{\psi}} \frac{\partial \bar{h}_{ik}}{\partial y^{n+1}} + \frac{1}{\bar{\psi}} \bar{\nabla}_i \bar{\nabla}_k \bar{\psi} \\ &= \frac{2\Lambda}{1-n} \bar{g}_{ik}, \end{aligned} \quad (5.57)$$

$$\tilde{R}_{i(n+1)} = \bar{\psi} \bar{g}^{jk} (\bar{\nabla}_j \bar{h}_{ik} - \bar{\nabla}_i \bar{h}_{jk}) = 0, \quad (5.58)$$

$$\tilde{G}_{(n+1)}^{(n+1)} = -\frac{1}{2} \bar{g}^{ik} \bar{g}^{jm} [\bar{R}_{ijkm} + \varepsilon (\bar{h}_{ik} \bar{h}_{jm} - \bar{h}_{jk} \bar{h}_{im})] = \Lambda, \quad (5.59)$$

onde a última equação foi obtida de (5.54) e (5.56), utilizando-se a definição do tensor de Einstein $\tilde{G}_{(n+1)}^{(n+1)} = \tilde{R}_{(n+1)}^{(n+1)} - \frac{1}{2} \tilde{R}$, sendo $\tilde{R} = \tilde{g}^{\alpha\beta} \tilde{R}_{\alpha\beta}$ o escalar de curvatura.

Tendo em mãos o conjunto de equações acima, pode-se investigar a imersão de um espaço semi-riemanniano M^n em um espaço de Einstein. As equações (5.57), (5.58) e (5.59) formam um sistema de equações diferenciais para \bar{g}_{ik} e $\bar{\psi}$. A ideia agora é mostrar que se são conhe-

cidas as componentes $g_{ik}(x^1, \dots, x^n)$ da métrica em M^n em um certo sistema de coordenadas, então existe um conjunto aberto de \mathbb{R}^{n+1} onde esse conjunto de equações admite uma solução $\bar{g}_{ik}(y^1, \dots, y^n, y^{n+1})$ e $\bar{\psi}(y^1, \dots, y^n, y^{n+1})$, satisfazendo a condição inicial $\bar{g}_{ik} = g_{ik}$ em Σ_0 . Além disso, pode-se mostrar que as funções \bar{g}_{ik} e $\bar{\psi}$ possuem todas as propriedades necessárias para constituírem um elemento de linha de uma variedade semi-riemanniana de dimensão $(n+1)$. Concluímos, a partir disso, que se \bar{g}_{ik} e $\bar{\psi}$ satisfazem as equações (5.57), (5.58) e (5.59), a métrica obtida a partir dessas funções representa a métrica de um espaço de Einstein. Desse modo, em virtude do teorema de Magaard, fica garantida a existência da imersão. Tendo em vista esse objetivo, considere o seguinte lema:

Lema 2. *Sejam \bar{g}_{ik} e $\bar{\psi}$ funções analíticas no ponto $(0, \dots, 0) \in \Sigma_0 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ satisfazendo as condições (5.5), (5.6) e (5.7), assim como à equação (5.57) em um aberto que contém o ponto $(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Além disso, se \bar{g}_{ik} e $\bar{\psi}$ satisfazem (5.58) e (5.59) em Σ_0 , então \bar{g}_{ik} e $\bar{\psi}$ satisfazem (5.58) e (5.59) em um certo aberto de \mathbb{R}^{n+1} contendo o ponto $(0, \dots, 0)$.*

A prova deste lema pode ser encontrado detalhadamente em [7]. Embora seja essencial para o nosso objetivo, note que o lema 2 não diz nada acerca da existência das soluções \bar{g}_{ik} e $\bar{\psi}$. A existência de tais soluções nos é garantida pelo teorema de Cauchy-Kowalewskaya visto no capítulo 4. Enuncia-se agora uma versão particular do teorema de Cauchy-Kowalewskaya:

Teorema de Cauchy-Kowalewskaya. *Seja o conjunto de equações diferenciais parciais:*

$$\frac{\partial^2 u^A}{\partial (y^{n+1})^2} = F^A \left(y^a, u^B, \frac{\partial u^B}{\partial y^a}, \frac{\partial^2 u^B}{\partial y^a \partial y^\alpha} \right), \quad A = 1, \dots, m \quad (5.60)$$

onde u^1, \dots, u^m são funções desconhecidas das $n+1$ variáveis $y^1, \dots, y^n, a = 1, \dots, n+1, \alpha = 1, \dots, n, B = 1, \dots, m$. Sejam também, $\xi^1, \dots, \xi^m, \eta^1, \dots, \eta^m$, funções das variáveis y^1, \dots, y^n , analíticas na origem de \mathbb{R}^n . Se as funções F^A forem analíticas com relação a cada um dos seus argumentos em torno dos valores calculados no ponto $y^1 = \dots = y^n = 0$, então existe uma única solução das equações (5.60) que é analítica em $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$, satisfazendo as seguintes condições iniciais:

$$u^A(y^1, \dots, y^n, 0) = \xi^A(y^1, \dots, y^n), \quad (5.61)$$

$$\frac{\partial u^A}{\partial y^{n+1}}(y^1, \dots, y^n, 0) = \eta^A(y^1, \dots, y^n), \quad A = 1, \dots, m. \quad (5.62)$$

Utilizando a definição da curvatura extrínseca, dada pela equação (5.52), pode-se reescrever a equação (5.57) em termos de derivadas da métrica. Isolando o termo de segunda derivada em

relação à coordenada extra, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{g}_{ik}}{\partial (y^{n+1})^2} &= \varepsilon \frac{4\Lambda}{1-n} \bar{\psi}^2 \bar{g}_{ik} + \frac{1}{\bar{\psi}} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y^{n+1}} \frac{\partial \bar{g}_{ik}}{\partial y^{n+1}} - \frac{1}{2} \bar{g}^{jm} \left(\frac{\partial \bar{g}_{ik}}{\partial y^{n+1}} \frac{\partial \bar{g}_{jm}}{\partial y^{n+1}} - 2 \frac{\partial \bar{g}_{im}}{\partial y^{n+1}} \frac{\partial \bar{g}_{jk}}{\partial y^{n+1}} \right) \\ &- 2\varepsilon \bar{\psi} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^i \partial y^k} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y^j} \bar{\Gamma}_{ik}^j \right) - 2\varepsilon \bar{\psi}^2 \tilde{R}_{ik}. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Utilizando a condição de simetria $\bar{g}_{ik} = \bar{g}_{ki}$, a expressão (5.63) fica expressa apenas em termos das funções \bar{g}_{ik} com $i \leq k$. Observe que se considerarmos que $\bar{\psi}$ é uma função conhecida, então (5.63) passa a constituir um conjunto de equações diferenciais parciais para as $m = \frac{n(n+1)}{2}$ funções desconhecidas \bar{g}_{ik} , tal como a equação (5.60). Além disso, o lado direito de (5.63) é composto por funções racionais das coordenadas y , nas funções \bar{g}_{ik} e suas derivadas. Assim, escolhendo $\bar{\psi}$ como uma função não-nula e analítica na origem de \mathbb{R}^{n+1} , juntamente com as condições iniciais:

$$\frac{\partial \bar{g}_{ik}}{\partial y^{n+1}}(y^1, \dots, y^n, 0) = -2\bar{\psi}(y^1, \dots, y^n, 0) h_{ik}(y^1, \dots, y^n), \quad (5.64)$$

$$\bar{g}_{ik}(y^1, \dots, y^n, 0) = g_{ik}(y^1, \dots, y^n), \quad (5.65)$$

válidas em uma certa vizinhança do ponto $0 \in \mathbb{R}^n$, onde g_{ik} e h_{ik} são funções analíticas arbitrárias com $|g_{ik}| \neq 0$ neste ponto, então o lado direito da equação (5.63) também será analítico no ponto

$$y^1 = 0 \dots y^{n+1} = 0; \bar{g}_{ik} \Big|_0; \frac{\partial \bar{g}_{ik}}{\partial y^1} \Big|_0 \dots \frac{\partial \bar{g}_{ik}}{\partial y^{n+1}} \Big|_0; \frac{\partial^2 \bar{g}_{ik}}{\partial y^j \partial y^m} \Big|_0. \quad (5.66)$$

Assim, aplicando o teorema de Cauchy-Kowalewskaya conclui-se que a equação (5.63) admite uma única solução $\bar{g}_{\alpha\mu}(y^1, \dots, y^{n+1})$, analítica em $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$, e que também satisfaz as condições iniciais dadas. Note também que o determinante $|\bar{g}_{ik}|$, que é não-nulo na origem devido as condições iniciais, permanecerá diferente de zero em algum aberto de \mathbb{R}^{n+1} devido à continuidade da solução. De modo que a condição (5.6) do teorema 3 é satisfeita para esta solução.

Os resultados obtidos até este momento podem ser resumidos no seguinte lema:

Lema 3. *Sejam g_{ik} , $h_{ik}(y^1, \dots, y^n)$, com $i, k = 1, \dots, n$ e $\bar{\psi}(y^1, \dots, y^n, y^{n+1})$ funções arbitrárias analíticas nos pontos $0 \in \mathbb{R}^n$ e $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$, respectivamente, com $g_{ik} = g_{ki}$, $|g_{ik}| \neq 0$, $h_{ik} = h_{ki}$ em um conjunto aberto de \mathbb{R}^n contendo o ponto $0 \in \mathbb{R}^n$, e $\bar{\psi} \neq 0$ em um conjunto aberto de \mathbb{R}^{n+1} contendo o ponto $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$. Diz-se então que existe um único conjunto de funções $\bar{g}_{ik}(y^1, \dots, y^n, y^{n+1})$, analíticas em $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$, que satisfazem:*

1. as condições (5.5) e (5.6) e a equação (5.57);
2. as condições iniciais (5.4) e (5.64).

Identificando as funções g_{ik} com as componentes da métrica de variedade semi-riemanniana M^n , e fazendo uso do lema 2, do lema 3 e do teorema de Campbell-Magaard pode-se demonstrar o seguinte teorema de imersão:

Teorema 4. *Seja M^n uma variedade semi-Riemanniana com uma métrica dada por:*

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k, \quad (5.67)$$

em um sistema de coordenadas $\{x^i\}$ de uma vizinhança do ponto $p \in M^n$, com coordenadas $x_p^1 = \dots = x_p^n = 0$. Então, M^n pode ser local e analiticamente imersa, no ponto p , em um espaço de Einstein de dimensão $(n+1)$ com constante cosmológica Λ se, e somente se, existem funções $h_{ik}(x^1, \dots, x^n)$ analíticas em $0 \in \mathbb{R}^n$, tais que:

$$h_{ik} = h_{ki}, \quad (5.68)$$

$$g^{jk} (\nabla_j h_{ik} - \nabla_i h_{jk}) = 0, \quad (5.69)$$

$$g^{ik} g^{jm} [R_{ijkm} + \varepsilon (h_{ik} h_{jm} - h_{jk} h_{im})] = -2\Lambda. \quad (5.70)$$

Demonstração. Seja M_Λ^{n+1} a classe de todos os espaços de Einstein com dimensão $n+1$ e constante cosmológica Λ . Assume-se que M^n tem uma imersão local e analítica, no ponto p , em M_Λ^{n+1} . De acordo com o teorema de Campbell-Magaard, se temos uma imersão local então existem funções $\bar{g}_{ik}(x^1, \dots, x^{n+1})$, satisfazendo (5.4), e existe uma função $\bar{\psi}(x^1, \dots, x^{n+1})$, ambas analítica em $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$, tais que

$$ds^2 = \bar{g}_{ik} dx^i dx^k + \varepsilon \bar{\psi}^2 dx^{n+1} dx^{n+1} \quad (5.71)$$

corresponde ao elemento de linha de algum membro de M_Λ^{n+1} , expresso em um sistema de coordenadas conveniente. Sendo o espaço ambiente um espaço de Einstein, então esta métrica satisfaz naturalmente as equações (5.57), (5.58) e (5.59) em uma vizinhança do ponto $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$. Em particular, isto é verdadeiro para pontos da hipersuperfície $x^{n+1} = 0$, mas é sabido que em Σ_0 , $\bar{g}_{ik} = g_{ik}$, devido à nossa condição (5.4). Se definirmos, então, a curvatura extrínseca como $h_{ik}(x^1, \dots, x^n) = \bar{h}_{ik}(x^1, \dots, x^n, 0)$, então necessariamente h_{ik} satisfaz as equações (5.68), (5.69) e (5.70).

A condição suficiente do teorema se dá da seguinte maneira. Necessita-se mostrar que as equações (5.68), (5.69) e (5.70), sendo as funções g_{ik} conhecidas, admitem sempre uma

solução para h_{ik} . Primeiramente, escolhe-se $\bar{\psi}(x^1, \dots, x^{n+1}) \neq 0$ analítica na origem de \mathbb{R}^{n+1} . Pelo lema 3, existe um conjunto único de funções $\bar{g}_{ik}(x^1, \dots, x^{n+1})$ que satisfaz (5.4), (5.5), (5.6), (5.52) e (5.57) e à condição $\bar{g}_{ik}(x^1, \dots, x^n, 0) = g_{\alpha\mu}(x^1, \dots, x^n)$. Se h_{ik} e g_{ik} satisfazem (5.69) e (5.70), então pelo lema 2, as funções $\bar{g}_{ik}(x^1, \dots, x^{n+1})$ satisfazem (5.57), (5.58) e (5.59) em uma vizinhança do ponto $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$, o que implica que o elemento de linha formado pelas funções \bar{g}_{ik} e $\bar{\psi}$ corresponde ao elemento de linha de um espaço de Einstein com constante cosmológica Λ . E segue-se, pelo teorema de Campbell-Magaard que M^n pode ser imerso local e analiticamente em M_Λ^{n+1} .

□

No teorema 4 encontrou-se a condição para que M^n possa ser local e analiticamente imerso em um espaço de Einstein de dimensão $(n+1)$. Resta-nos verificar que as equações (5.68), (5.69) e (5.70), dadas as funções g_{ik} , possuem sempre uma solução para h_{ik} . As equações (5.68), (5.69) e (5.70) formam um conjunto de n equações diferenciais parciais onde a equação (5.70) faz o papel de equação de vínculo, tal como temos no problema de Cauchy, visto no capítulo anterior. Embasados no teorema de Cauchy-Kowalewskaya, enuncia-se o seguinte lema:

Lema 4. *Sejam $g_{ik}(x^1, \dots, x^n)$ e $h_{ik}(x^1, \dots, x^n)$ ($i \leq k, i > 1, (i, k) \neq (r', n)$) funções analíticas na origem $0 \in \mathbb{R}^n$, com h_{ik} satisfazendo as condições iniciais $h_{1k}(0, \dots, x^2, \dots, x^n) = f_k(x^2, \dots, x^n)$ ($k > 1$) e $h_{r',n}(0, x^2, \dots, x^n) = f_1(x^2, \dots, x^n)$, sendo f_k uma função analítica no ponto $0 \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo:*

$$g^{rs} \left(h_{rs} + h_{sr} \right) \Big|_0 \neq 0. \quad (5.72)$$

Então existe um conjunto único de funções $h_{ik}(x^1, \dots, x^n)$ ($i, k = 1, \dots, n$), analíticas em $0 \in \mathbb{R}^{n-1}$, satisfazendo as equações (5.58), (5.59) e (5.70).

De acordo com este lema, dado um conjunto de funções analíticas g_{ik} , pode-se sempre garantir a existência de funções h_{ik} que satisfazem o conjunto de equações (5.68), (5.69) e (5.70). Portanto, o lema 4 diz que as condições do teorema 4 são satisfeitas, permitindo assim, enunciar o teorema final:

Teorema 5. *Seja M^n um espaço semi-Riemanniano de dimensão n sendo $n > 1$, com elemento de linha*

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k, \quad (5.73)$$

expresso em um sistema de coordenadas de uma vizinhança do ponto $p \in M^n$, cujas coordenadas são $x_p^1 = \dots = x_p^n = 0$. Uma condição suficiente para que M^n tenha uma imersão isométrica

local e analítica no ponto p em um espaço de Einstein de dimensão $n + 1$, com constante cosmológica Λ , é que as funções g_{ik} sejam analíticas no ponto $0 \in \mathbb{R}^n$.

É importante observar que o elemento de linha do espaço ambiente será único se são especificadas funções arbitrárias que obedecem às seguintes condições:

1. $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ funções $h_{ik}(x^1, \dots, x^n)$ ($i \leq k, i > 1, i, k \neq r', n$) analíticas na origem;
2. n funções $h_{1k}(0, x^2, \dots, x^n) = f_k(x^2, \dots, x^n)$ ($k > 1$) e $h_{r'n}(0, x^2, \dots, x^n) = f_1(x^2, \dots, x^n)$ são analíticas em $0 \in \mathbb{R}^{n-1}$, satisfazendo a condição (5.72);
3. uma função $\bar{\psi}(x^1, \dots, x^{n+1}) \neq 0$ e analítica em 0.

Se considerar o caso em que $\Lambda = 0$, claramente vê-se que este teorema se reduz ao teorema de Campbell-Magaard, o qual assegura a existência de uma imersão local e analítica de qualquer espaço riemanniano no conjunto dos espaços “Ricci-flat”. Logo, o teorema acima constitui uma generalização do teorema de Campbell-Magaard.

5.3.1 Aplicação do teorema de Campbell-Magaard

Nesta seção, o espaço considerado será um espaço lorentziano de dimensão $n = 3$. O teorema 5 garante a existência de pelo menos um espaço de Einstein com dimensão $n = 4$ onde (M^3, g) pode ser imerso isometricamente. Suponha, então, que a métrica do espaço lorentziano seja:

$$ds^2 = dt^2 - e^{2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}(dx^2 + dy^2). \quad (5.74)$$

Assume-se que a métrica do espaço imersor seja do tipo Friedmann-Robertson-Walker e adota-se o sistema de coordenadas gaussianas normais. Para a métrica (5.74) temos as seguintes quantidades geométricas:

$$R_{ab} = \left(\frac{2\Lambda}{3}, -\frac{2\Lambda}{3}e^{2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}, -\frac{2\Lambda}{3}e^{2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t} \right) = \frac{2\Lambda}{3}g_{ab}, \quad (5.75)$$

$$R = 2\Lambda. \quad (5.76)$$

O primeiro passo é determinar as funções h_{ab} que satisfaçam as condições (5.68), (5.69) e (5.70). Considere o seguinte ansatz para h_{ab} :

$$h_{ab} = cg_{ab}, \quad (5.77)$$

sendo c uma constante. A função h_{ab} é solução da equação (5.70) se:

$$R - c^2 g^{ik} g^{jm} (g_{ik} g_{jm} - g_{jk} g_{im}) = -2\Lambda,$$

isto é,

$$R - 6c^2 = -2\Lambda,$$

o que nos dá

$$c = \frac{2\Lambda}{3}. \quad (5.78)$$

As condições (5.68) e (5.69) são facilmente verificadas. A partir da equação (5.64), tem-se:

$$\frac{\partial \bar{g}_{ik}}{\partial y^{n+1}} = -2\bar{\psi} h_{ik} = -2c \bar{\psi} \bar{g}_{ik}. \quad (5.79)$$

onde considera-se que $\bar{\psi}$ seja apenas uma função do tempo. Derivando novamente em relação a dimensão extra, temos

$$\frac{\partial^2 \bar{g}_{ik}}{\partial (y^{n+1})^2} = -2c \bar{\psi} \frac{\partial \bar{g}_{ik}}{\partial y^{n+1}} = 4c^2 \bar{\psi}^2 \bar{g}_{ik}. \quad (5.80)$$

Substituindo (5.80) na equação (5.63), obtém-se:

$$4c^2 \bar{\psi}^2 \bar{g}_{ik} = 2\Lambda \bar{\psi}^2 \bar{g}_{ik} - 2c^2 \bar{\psi}^2 \bar{g}^{jm} (\bar{g}_{ik} \bar{g}_{jm} - 2\bar{g}_{im} \bar{g}_{jk}) \quad (5.81)$$

$$+ 2\bar{\psi} \left(\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^i \partial y^k} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y^j} \bar{\Gamma}_{ik}^j \right) + 2\bar{\psi}^2 R_{ik}, \quad (5.82)$$

onde assumiu-se que $\varepsilon = -1$. A função $\bar{\psi}$ só possui dependência na coordenada t ; portanto, faremos $i = k = 0$. Note que como foi suposto que a métrica do espaço imersor é do tipo Friedmann-Robertson-Walk, então não há presença de termos da conexão do tipo $\bar{\Gamma}_{00}^j$. Assim, obtém-se a seguinte equação diferencial ordinária para $\bar{\psi}$:

$$2\Lambda \bar{\psi}^2 - 6c^2 \bar{\psi}^2 + 2\bar{\psi} \ddot{\bar{\psi}} + 2\bar{\psi}^2 \frac{2\Lambda}{3} = 0. \quad (5.83)$$

Substituindo o valor da constante c , tem-se:

$$\ddot{\bar{\psi}} - \frac{\Lambda}{3} \bar{\psi} = 0. \quad (5.84)$$

A solução geral da EDO (5.84) é:

$$\bar{\psi} = Ae^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t} + Be^{-\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}, \quad (5.85)$$

sendo A e B constantes de integração. Escolhendo $A = 1$ e $B = 0$ a solução será:

$$\bar{\Psi}(t) = e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}. \quad (5.86)$$

A métrica do espaço imersor (5.71) será:

$$ds^2 = dt^2 - e^{2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (5.87)$$

Este espaço é conhecido como espaço de de Sitter, e para $z = 0$ a métrica se reduz a métrica do espaço menor (5.74).

Capítulo 6

CONCLUSÃO

Com o advento da relatividade restrita em 1905, muito se discutiu sobre a dimensionalidade do nosso universo. Apesar das inúmeras tentativas de alcançar tal resposta, esta questão ainda está em aberto.

O primeiro trabalho a postular a existência de novas dimensões surgiu no ano de 1914 com o físico finlandês Gunnar Nordström [24], quando este percebeu que poderia unificar o campo eletromagnético com o campo gravitacional acrescentando ao universo uma quinta dimensão. De maneira independente, em 1919, Theodor Kaluza também com o objetivo de unificar o eletromagnetismo com a gravitação, postulou a existência de uma quinta dimensão. Com um formalismo elegante, Kaluza [13] mostrou que o acréscimo da nova dimensão reproduz simultaneamente as equações do eletromagnetismo e as equações de Einstein. Além de postular a existência da quinta dimensão, Kaluza também postulou que os campos métricos não dependiam da coordenada associada à dimensão extra, postulado este que ficou conhecido como condição cilíndrica. A condição cilíndrica não foi bem aceita pelo seu caráter *ad hoc*, mas esta peculiaridade foi resolvida posteriormente por Oscar Klein [14] em 1926. Klein substituiu a condição cilíndrica pela condição de compacidade, onde a quinta dimensão passou a ser uma dimensão compacta, em outras palavras, a quinta dimensão possui a topologia de um círculo.

A teoria de Kaluza-Klein serviu de base para inúmeras teorias de unificações. No início dos anos 90 o físico inglês Paul Wesson [5] sugeriu uma teoria, também em cinco dimensões, onde a matéria teria origem na geometria [25]. Wesson modificou a teoria de Kaluza-Klein relaxando a hipótese de que a quinta dimensão deveria ser compacta. Nesta nova abordagem, o espaço-tempo passou a ser visto como uma hipersuperfície quadridimensional imersa em um espaço maior de cinco dimensões. Teorias que possuem esta característica passaram a ser conhecidas como teorias de imersões na física. A hipótese de considerar o espaço-tempo quadridimensional como sendo uma hipersuperfície é uma ideia *ad hoc*; portanto, surgiu a necessidade de investigar

a validade de tal hipótese.

A investigação da validade de diferentes tipos de imersões é bem mais antigo na matemática. Após a publicação do trabalho de Riemann [26] sobre a teoria das variedades em 1868, Schläfli considerou o problema de imersões de variedades de dimensão n em espaços Euclidianos [1] e postulou que o número máximo de dimensões necessários para realizar tal imersão era $\frac{1}{2}n(n+1)$. Em 1926, Janet [2] provou esta conjectura parcialmente para $n = 2$ usando o método de série de potências, e este resultado foi generalizado por Cartan para um valor de n arbitrário [3]. A prova completa da conjectura de Schläfli veio com o trabalho de Burstin [27].

Até este ponto, a física e a matemática desenvolviam separadamente conceitos de imersões. Uma ponte entre a matemática e a física surgiu com o trabalho de Campbell em 1926, onde ele investigou, embora com interesse puramente matemático, a condição para imersão de uma variedade de dimensão n em um espaço Ricci-flat de dimensão maior. Campbell mostrou de maneira incompleta que seria necessária apenas uma codimensão para que houvesse tal imersão, postulado este provado por Magaard. O teorema de Campbell-Magaard, como ficou conhecido, foi estendido para casos em que o espaço ambiente admite uma constante cosmológica. O teorema de Campbell-Magaard estendido passou a ser utilizado como base para as teorias de imersões, como a teoria de matéria induzida de Wesson e o modelo de Randall-Sundrum.

Paralelamente ao desenvolvimento de tais teorias, uma outra classe de problemas relacionado a imersões surgia na física. A teoria de equações diferenciais já era bem estabelecida na matemática, assim como suas amplas aplicações na física através de problemas de valores iniciais ou através de problemas de contorno. A menos que a relatividade geral diferisse drasticamente das demais teorias da física, era esperada uma formulação do problema de valor inicial para a mesma.

O problema de valor inicial aplicado à relatividade geral começou com Lichnerowicz [28, 32] em 1944, e concluído posteriormente pela física e matemática francesa Yvonne Choquet-Bruhat [29, 30] em 1952 e 1953, mostrando que as equações de Einstein podem ser reescritas na forma hiperbólica, e conseqüentemente, além de possuir uma formulação de problema de valor inicial, o problema é bem posto no sentido de possuir uma estrutura causal bem definida e as soluções possuem uma dependência contínua em relação às condições iniciais.

Curiosamente, apesar de terem sido desenvolvidos separadamente, o teorema de Campbell-Magaard e o problema de Cauchy para a relatividade geral possuem muitas semelhanças. O teorema de Campbell-Magaard é fundamentado sobre o teorema de Cauchy-Kowalewskaya e garante a existência de uma imersão isométrica local de uma variedade n -dimensional em

uma variedade Ricci-flat de dimensão $n + 1$. Por outro lado, o problema de Cauchy também é fundamentado sobre uma versão estendida do teorema de Cauchy-Kowalewskaya. Ademais, mostramos no decorrer dos capítulos 3 e 4 que em ambos os casos é possível trabalhar com as ferramentas da teoria de imersões isométricas. Em outras palavras, as duas formulações podem ser tratadas do ponto de vista de folheações. Encontraram-se em ambas teorias equações de compatibilidade (equações de Gauss-Codazzi) e encontraram-se também equações de evolução para a métrica e para a curvatura extrínseca no caso do problema de Cauchy e no caso do teorema de Campbell-Magaard, respectivamente.

No entanto, analisando os dois formalismos fica evidente uma primeira diferença: a assinatura. No problema de Cauchy a primeira hipótese que se faz é sobre o tipo da folheação. Neste cenário a folheação deve ser do tipo-tempo, em outras palavras, a hipersuperfície cujas condições iniciais são definidas deve ser uma hipersuperfície tipo-espaço. Em contrapartida, no teorema de Campbell-Magaard a dimensão extra é espacial e a folheação do espaço-tempo passa a ser do tipo-espaço.

Como discutido no capítulo 4, o teorema de Cauchy-Kowalewskaya não é suficiente para garantir a dependência contínua das soluções e nem garante a estrutura causal do espaço-tempo. Diferentemente do problema de valor inicial, que para relatividade geral é bem posto, no caso do teorema de Campbell-Magaard não existe nenhuma garantia sobre a continuidade das soluções. Vale salientar neste ponto que por se tratar de uma folheação do tipo-espaço não faz sentido falarmos de uma estrutura causal como discutido no capítulo 4, em outras palavras, a causalidade só pode ser estudada se a variável dinâmica do sistema for o tempo [31]. Do ponto de vista físico, no caso de folheações tipo-espaço a própria estrutura causal estaria confinada à hipersuperfície menor.

O grande problema que aparece é que não existe um teorema semelhante ao teorema 1 para folheações dessa natureza, ou seja, o teorema de Cauchy-Kowalewskaya garante apenas a existência de soluções analíticas, mas não garante que, por exemplo, se as condições iniciais forem ligeiramente perturbadas as soluções sofrerão apenas pequenas perturbações. O teorema de Campbell-Magaard possui uma formulação de problema de valor inicial, mas não é bem posto. Ademais, a exigência de que as funções sejam analíticas é indesejável em algumas situações físicas, por exemplo, no estudo de objetos astronômicos a analiticidade não se aplica devido a presença de contorno nestes objetos.

REFERÊNCIAS

- [1] SCHLÄFLI, L., *Nota Alla Memoria del Signor Beltrami, Sugli Spazii di Curvatura Constant*, Ann. di Mat. **5**, 170 (1871)
- [2] JANET, M., *Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien*, Ann. Soc. Polon. Math. **5**, 38 (1926)
- [3] CARTAN, E., *Sul la possibilità de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien*, Ann. Soc. Polon. Math. **6**, 1 (1927)
- [4] RANDALL, L. and SUNDRUM, R. Phys. Rev. Lett. **83**, 3370 (1999). RANDALL, L. and SUNDRUM, R. Phys. Rev. Lett. **83**, 4690 (1999)
- [5] OVERDUIN, J. M. and WESSON, P. S., *Kaluka-Klein Gravity*, Phys. Rep. **283**, 303 (1997)
- [6] CAMPBELL, J., *A course of differential geometry*, Oxford: Claredon (1926)
- [7] MAGAARD, L., *Zur einbettung riemannscher Raume in Einstein-Raume und konforme euclidische Raume*, PhD Thesis, Kiel (1963)
- [8] DAHIA, F., *Imersão do espaço-tempo e a generalização do teorema de Campbell-Magaard*, tese de doutorado, João Pessoa, Universidade Federal da Paraíba (2001)
- [9] CARMO, M. P., *Geometria diferencial de curvas e superficies*, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro (2005)
- [10] GAUSS, K. F., *General investigations of curved surfaces*, Raven Press, New York (1923)
- [11] CARMO, M. P., *Riemannian geometry*, Birkhäuser, Boston (1992)

- [12] MINKOWSKI, H., *Space and Time, and the Principle of Relativity*, Dover, New York (1923)
- [13] KALUZA, T., *On the problem of unity in physics*, Sitz. Press. Akad. Wiss. **33**, 966 (1926)
- [14] KLEIN, O., *Quantum theory and five-dimensional theory of relativity*, Zeitschr. Physik. **13**, 897 (1926)
- [15] D'INVERNO, R. A., *Introducing Einstein's relativity*, 1ed, Oxford University Press (1992)
- [16] TYN, M.U. and LOKENATH, D., *Linear partial differential equations for scientists and engineers*, Birkhäuser, Boston (2007)
- [17] WALD, R. M., *General relativity*, The University of Chicago Press (1984)
- [18] COURANT, R. and HILBERT, D., *Methods of mathematical physics - II*, John Wiley and Sons (1989)
- [19] ZACHMANOGLU, E. and THOE, D., *Introduction to partial differential equations with applications*, Dover Publications (1986)
- [20] LERAY, J., *Hyperbolic differential equations*, Princeton Institute for Advanced Study (1952)
- [21] ADLER, R., MAURICE, B. and MENACHEM, S., *Introduction to general relativity*, McGraw-Hill, Book Company, New York (1975)
- [22] HAWKING, S. W. and ELLIS, G. F. R., *The large scale structure of space-time*, Cambridge University Press (1973)
- [23] YVONNE, C. B., *General relativity and Einstein's equations*, Oxford University Press (2009)
- [24] NORDSTRÖN, G., *Über die Möglichkeit, das elektromagnetische feld und das gravitationsfeld zu vereinigen*, Phys. Zeitschr. **15**, 504 (1914)
- [25] WESSON, P. S., *Space-time-matter*, World Scientific, Cingapura (1999)

-
- [26] RIEMANN, B. Abh. Königl. Gesellsch, **13**, 1 (1868)
- [27] BURSTIN, C. Rec. Math. Moscou (Math. Sbornik), **38**, 74 (1931)
- [28] LICHNEROWICZ, A. J. Math. Pures Appl. **23**, 37 (1944)
- [29] YVONNE, C. B. Acta Mathematica, **88**, 141 (1952)
- [30] YVONNE, C. B. J. Rat. Mech. Anal. **5**, 951 (1956)
- [31] ANDERSON, E. and TAVAKOL, R., *PDE system approach to large extra dimensions* (2003)
- [32] ANDERSON, E., *The Campbell-Magaard theorem is inadequate and inappropriate as a protective theorem for relativistic field equations* (2004)
- [33] de DONDER, T. Mem. Sci. Math., **8** (1925)
- [34] LANCZOS, K. Ann. Phys., **12**, 621 (1922)
- [35] O'NEILL, B., *Semi-riemannian geometry with applications to relativity*, Academic Press, New York (1983)
- [36] CARROL, S., *Spacetime and geometry: an introduction to general relativity*, Addison Wesley, Boston (2004)
- [37] ARFKEN, G. B. and WEBER, H. J., *Mathematical methods for physicists*, Academic Press, New York (2005)
- [38] JÚNIOR, R. I. e IÓRIO, V. M., *Equações diferenciais parciais: uma introdução*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro (1988)
- [39] BARATA, J. C. A., *Curso de física-matemática, Notas de Aula*, Universidade de São Paulo (2005)
- [40] CRUZ, F. F., *Imersões em espaços de Einstein: aplicações à relatividade geral*, dissertação de mestrado, Fortaleza, Universidade Federal do Ceará (2007)

-
- [41] FRIEDMAN, F., *Local isometric embedding of Riemannian and pseudo-Riemannian manifolds*, Memoirs Amer. Nath. Soc. **97**, 1 (1970)
- [42] NASH, J., *The imbedding problem for Riemann manifolds*, Ann. Math. **63**, 20 (1956)
- [43] CLARKE, C. J. S., *On the global isometric embedding of pseudo-Riemannian manifolds*, Proc. R. Soc. A **314**, 417- 428 (1970)
- [44] NORDSTRÖM, G., *Über die Möglichkeit, das elektromagnetische Feld und das Gravitationsfeld zu vereinigen*, Phys. Zeitschr. **15**, 504 (1914)
- [45] WEST, P., *Introduction to supersymmetry and supergravity*, World Scientific, Cingapura (1986)
- [46] GREEN, M., SCHAWARZ, J. and WITTEN, E., *Superstring theory*, Cambridge University Press, Cambridge, England (1987)
- [47] ARKANI-HAMED, N., DIMOPOULOS, S. and DVALI, G., *The hierarchy problem and the new dimensions at a milimeter*, Physc. Lett. B **429**, 263 (1998)

Apendice A

ESTRUTURA CAUSAL DO ESPAÇO-TEMPO

O espaço-tempo é uma estrutura quadridimensional composta por três dimensões espaciais e uma dimensão temporal, onde um ponto individual nesta estrutura é denominado evento. As partículas que viajam no espaço-tempo têm sua história registrada por uma curva que denominamos de linha de universo. Tais descrições se aplicam igualmente tanto para a relatividade especial quanto para a mecânica newtoniana.

Entretanto, há uma diferença sutil entre ambos os casos no que diz respeito ao conjunto de caminhos que uma partícula pode tomar. Na teoria clássica, não há nenhuma restrição sobre a velocidade que uma partícula pode ter; em contrapartida, na relatividade especial uma partícula nunca atinge uma velocidade superior à velocidade da luz. Este limite imposto sobre a velocidade nos permite definir, em qualquer ponto p do espaço-tempo, um cone de luz que descreve localmente o conjunto de todas as trajetórias permitidas.

A folha superior do cone de luz é denominada futuro absoluto de p e a folha inferior de passado absoluto de p . Os eventos que estão no futuro absoluto estão relacionados causalmente com o ponto p , e o conjunto de todos esses eventos compreende o futuro cronológico de p . Além disso, futuro cronológico de p , juntamente com a superfície do cone, formam o futuro causal de p , que do ponto de vista físico, representa os eventos que podem ser influenciados por um sinal emitido a partir de p .

Na relatividade geral, localmente, pode-se estender a definição da estrutura causal discutida acima, levando em conta, no entanto, que globalmente podem ocorrer alterações causadas pela topologia não-trivial do espaço-tempo, como, por exemplo, singularidades ou rotações das direções do cone de luz entre dois eventos. Este apêndice tem como objetivo definir o conceito de causalidade do espaço-tempo, agora no cenário da relatividade geral.

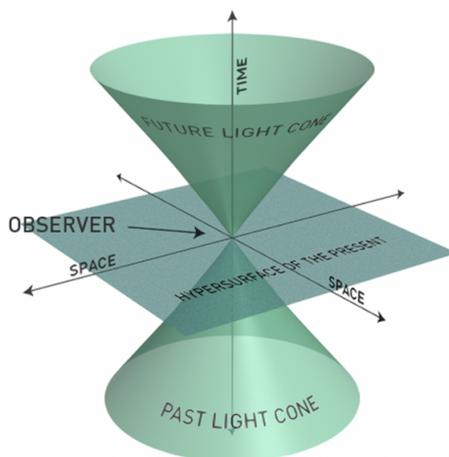


Figura A.1: Cone de luz.

Um espaço-tempo é dito orientável temporalmente se para qualquer $p \in M$ os vetores tipo-tempo e tipo-luz podem ser separados em duas classes, a classe dos vetores direcionados ao futuro, e a classe dos vetores direcionados ao passado. Em outras palavras, se um vetor do tipo-tempo direcionado para o futuro for transportado ao longo de uma curva fechada, ao retornar para o ponto inicial a sua natureza deve ser preservada. Em um espaço-tempo que não seja temporalmente orientável conceitos como “direcionado ao futuro” ou “direcionado ao passado” não são bem definidos.

Seja (M, g_{ab}) um espaço-tempo temporalmente orientável. Uma curva diferenciável $\alpha(t)$ é denominada curva do tipo-tempo direcionada para o futuro (passado) se em cada $p \in \alpha$ o vetor tangente t^a é um vetor do tipo-tempo direcionado para o futuro (passado). De maneira similar, a curva $\alpha(t)$ é dita ser uma curva causal direcionada para o futuro (passado) se para cada $p \in \alpha$, o vetor tangente t^a ou é um vetor direcionado para o futuro (passado) tipo-tempo ou tipo-luz.

O conjunto de todos os eventos que podem ser conectados por uma curva do tipo-tempo direcionada para o futuro (passado) partindo do ponto $p \in M$ é denominado futuro (passado) cronológico de p , denotado por $I^\pm(p)$. Para um subconjunto $S \subset M$, define-se $I^\pm(S)$ como:

$$I^\pm(S) = \bigcup_{p \in S} I^\pm(p). \quad (\text{A.1})$$

De maneira similar, o conjunto de todos os eventos que podem ser conectados por uma curva causal direcionada para o futuro (passado) denomina-se futuro (passado) causal de $p \in M$, cuja representação é $J^\pm(p)$. Para um subconjunto $S \subset M$, define-se $J^\pm(S)$ como:

$$J^\pm(S) = \bigcup_{p \in S} J^\pm(p). \quad (\text{A.2})$$

Teorema. *Seja (M, g_{ab}) um espaço-tempo arbitrário e seja $p \in M$. Então, existe uma vizinhança normal convexa de p , isto é, um conjunto aberto U com $p \in U$ tal que para todo $q, r \in U$ existe uma única geodésica γ conectando q e r onde γ está inteiramente contida em U . Ademais, para qualquer U , o futuro cronológico de p em U , $I^+(p)|_U$, corresponde ao conjunto de todos os pontos que podem ser conectados por uma geodésica tipo-tempo direcionada para o futuro começando em p , onde a geodésica está inteiramente contida em U .*

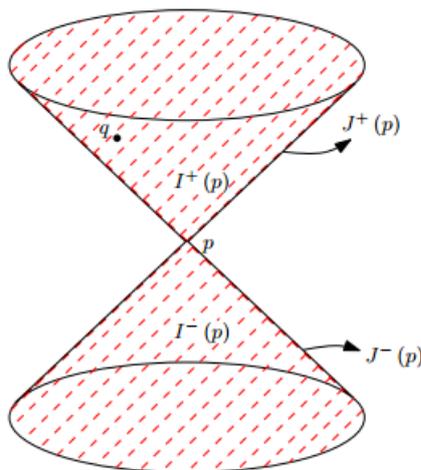


Figura A.2: Estrutura causal do espaço-tempo.

Seja S um conjunto fechado, acronal¹. Define-se o domínio de dependência futura (passada) de S , denotado por $D^\pm(S)$, como sendo o conjunto de todos os pontos $p \in M$, tais que toda curva causal², $\alpha(t)$, inextensível para o passado (futuro), ou seja, que não possui pontos finais passados (futuros), com $\alpha(t') = p$, intersecta a superfície S . A borda do domínio de dependência futura (passada), $D^\pm(S)$, é denominada de horizonte de Cauchy futuro (passado) $H^\pm(S)$.

Existe uma grande diferença entre os conjuntos $I^\pm(S)$ e $D^\pm(S)$. No conjunto $I^\pm(S)$ a curva que liga dois eventos não necessariamente intersecta a superfície S ; em contra partida, no conjunto $D^\pm(S)$ a curva que liga dois eventos deve, necessariamente, intersectar a superfície S . Em outras palavras, qualquer sinal enviado para $p \in D^+(S)$ deve ficar “registrado” na superfície S . Portanto, se fixarmos um conjunto de condições iniciais sobre S seremos capazes de prever o que ocorrerá em $p \in D^+(S)$.

O domínio de dependência de S , denotado por $D(S)$, é por definição:

$$D(S) = D^+(S) \cup D^-(S). \quad (\text{A.3})$$

¹Dizemos que um conjunto $S \subset M$ é acronal se não existem $p, q \in S$ tais que $q \in I^+(p)$, ou seja, $I^+(S) \cap S$ é vazio. Neste conjunto as curvas causais cruzam apenas uma vez.

²Uma curva $\alpha(t)$ é dita causal se em cada ponto $p \in \alpha(t)$ o vetor tangente for do tipo-tempo ou do tipo-luz.

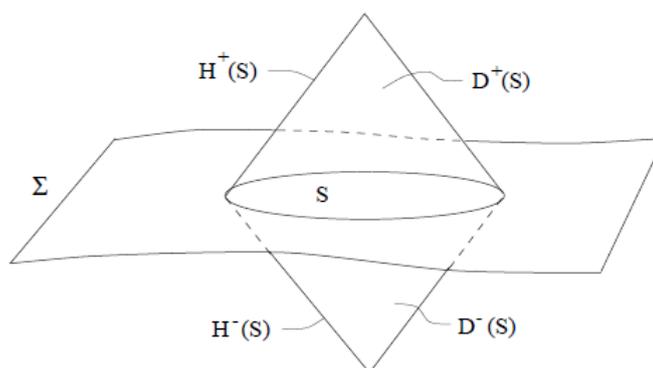


Figura A.3: Domínio de dependência e horizonte de Cauchy.

O conjunto $D(S)$ representa, portanto, o conjunto completo de todos os eventos que podem ser determinados a partir do conhecimento das condições iniciais em S .

Um conjunto acronal fechado Σ tal que $D(\Sigma) = M$ é chamado superfície de Cauchy. Um espaço-tempo (M, g_{ab}) que admite uma superfície de Cauchy Σ é dito globalmente hiperbólico.

Espaços que são globalmente hiperbólicos são de grande interesse físico uma vez que tanto o futuro como o passado de uma partícula podem ser inteiramente descritos se as condições iniciais em Σ forem conhecidas. Portanto, a escolha de que um espaço-tempo seja globalmente hiperbólico é uma exigência física. Essa escolha exclui espaços exóticos que possuem, por exemplo, curvas tipo-tempo fechadas (por exemplo, espaço-tempo de Gödel).

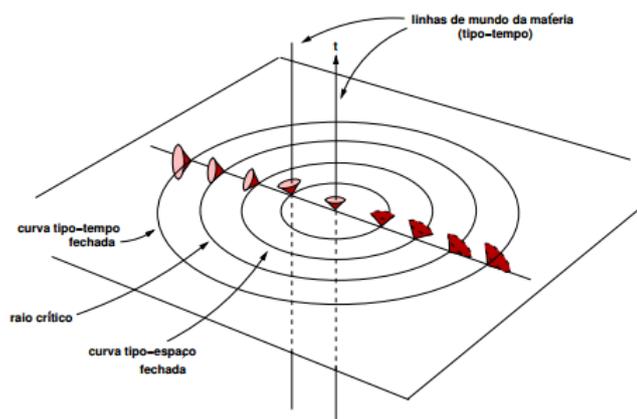


Figura A.4: Representação tridimensional do espaço-tempo de Gödel.

Apendice B

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS E SUAS APLICAÇÕES

As equações diferenciais, sejam elas ordinárias ou parciais, desempenham um papel central na física pois, elas são representações matemáticas diretas ou indiretas das leis da natureza. Portanto, a compreensão do caráter das equações diferenciais e o desenvolvimento de soluções das mesmas tornam-se imprescindíveis para resolução de uma vasta classe de problemas físicos. Este apêndice tem como objetivo dar uma breve introdução às equações diferenciais parciais. De maneira simples, uma equação diferencial parcial (EDP) é uma equação diferencial envolvendo duas ou mais variáveis independentes x_1, \dots, x_n . Mais precisamente, uma EDP é uma equação com o seguinte aspecto:

$$F\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}, x_1, \dots, x_n, u\right) = 0, \quad (\text{B.1})$$

onde $F : (\mathbb{R}^n)^k \times (\mathbb{R}^n)^{k-1} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}$, com $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, é uma função conhecida e $u = u(x)$ é a função a ser determinada.

A ordem da EDP corresponde ao termo da maior derivada parcial que aparece; por exemplo, a ordem da EDP (B.1) é k . A grande maioria das EDP's que possuem interesse físico são, em geral, no máximo de segunda ou terceira ordem.

As EDP's podem ser separadas em classes de acordo com a linearidade. Diz-se que uma EDP é linear se u e todas as suas derivadas parciais são de primeiro grau com coeficientes que dependem apenas das variáveis independentes x_1, \dots, x_n , caso contrário a EDP é dita não-linear.

Como exemplo, considere uma EDP linear de segunda ordem:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u(x) + d(x) = 0, \quad (\text{B.2})$$

onde pelo menos um dos coeficientes a_{ij} é diferente de zero. Além disso, se função $d(x) = 0$ a EDP é dita linear e homogênea.

Uma EDP é dita semi-linear se as derivadas parciais de maior grau são lineares. Para uma EDP de segunda ordem, a forma mais geral de uma EDP semi-linear é:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right). \quad (\text{B.3})$$

Se a EDP não se enquadra nessas classificações a EDP é dita totalmente não-linear.

Exemplos de EDP's

1. Equação de Laplace, $\nabla^2 u = 0$. Essa equação faz uma descrição matemática de fenômenos estacionários, ou seja, independentes do tempo, como por exemplo fenômenos eletrostáticos, hidrostática (escoamento irrotacional de ondas superficiais e fluido perfeito) e campos gravitacionais estáticos.
2. Equação de onda, $\partial_t^2 u = c^2 \nabla^2 u + h$, onde c é a velocidade de propagação da onda. Essa equação está presente em diversos fenômenos ondulatórios, como ondas eletromagnéticas, ondas elásticas em sólidos, incluindo cordas, membranas vibratórias e entre outros fenômenos.
3. Equação do calor não-homogênea, $\partial_t u = \alpha^2 \nabla^2 u + h$, onde α é a constante de difusividade térmica. Esta equação corresponde a uma descrição matemática de fenômenos de difusão, como por exemplo a transmissão de calor em uma placa de ferro.
4. Equação de Klein Gordon, $c^{-2} \partial_t^2 \psi - \nabla^2 \psi = -\mu^2 \psi$.

Classificação por tipo

As EDP's semi-lineares de segunda ordem formam três classes: elípticas, hiperbólicas e parabólicas. A cada classe estão associados diferentes tipos de fenômenos físicos. No caso de duas variáveis independentes a EDP semi-linear pode ser colocada na forma:

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y, u, \partial u / \partial x, \partial u / \partial y). \quad (\text{B.4})$$

A equação (B.4) pode ser classificada de acordo com o sinal do discriminante $b^2 - ac$:

1. Elíptica se $b^2 - ac < 0$;
2. Parabólica se $b^2 - ac = 0$;
3. Hiperbólica se $b^2 - ac > 0$.

A classe das equações elípticas descrevem fenômenos estacionários como por exemplo, potenciais eletrostáticos gerados por uma distribuição de cargas fixas e envolvem termos com ∇^2 ou $c^{-2}\partial^2/\partial t^2 + \nabla^2$. De fato, se atentarmos para a equação de Laplace no exemplo 1, no caso de duas variáveis, tem-se:

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0. \quad (\text{B.5})$$

Comparando com a equação (B.4) os coeficientes são: $a = 1$, $b = 0$ e $c = 1$. Portanto o discriminante vale -1 , ou seja, a equação de Laplace é uma equação elíptica.

Estão associados à classe das equações hiperbólicas fenômenos que dependem do tempo como por exemplo, propagação de ondas em meios materiais cuja equação correspondente envolve termos com $c^{-2}\partial^2/\partial t^2 - \nabla^2$. A equação de onda unidimensional é:

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = f(x, t). \quad (\text{B.6})$$

Os coeficientes serão, portanto, $a = 1$, $b = 0$ e $c = -1$. O discriminante será 1 , ou seja, a equação de onda é uma equação hiperbólica.

A classe das equações parabólicas é uma classe intermediária entre as equações elípticas e hiperbólicas, pois os fenômenos associados a ela podem inicialmente ter uma dependência temporal mas tendem a um estado estacionário. As EDP's parabólicas envolvem $a\partial/\partial t + \nabla^2$. Suponha o fenômeno de propagação de calor em uma placa de ferro, cuja equação é:

$$\partial_t u = \partial_x^2 u + f(x, y). \quad (\text{B.7})$$

Os coeficientes desta equação serão: $a = 1$, $b = 0$ e $c = 0$. O discriminante será igual a zero, portanto, a equação de calor é uma equação parabólica.

Como discutido anteriormente as equações hiperbólicas e parabólicas descrevem processos que possuem uma dependência temporal. A solução u de tais equações pode ser interpretada como sendo uma evolução de um estado inicial (x_0, t_0) sujeito a um conjunto de condições iniciais, ademais, a solução u é determinada pelas condições iniciais de tal modo que a solução é única e depende continuamente das condições iniciais, ou seja, os problemas que envolvem essas duas classes de equações possuem uma formulação bem posta.

Apesar do tratamento de ambas as equações serem semelhantes, as equações hiperbólicas distinguem-se das equações parabólicas pela velocidade de propagação dos efeitos, no caso hiperbólico as informações viajam a uma velocidade finita. Como consequência, o valor da solução u de uma equação hiperbólica em um ponto (x_1, t_1) depende apenas das condições iniciais numa vizinhança S do ponto x_0 . Em outras palavras, se fizermos uma perturbação nas condições iniciais fora da região S a solução permanecerá a mesma. Do ponto de vista físico as equações hiperbólicas satisfazem naturalmente a condição de causalidade.