

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

**Uma Visão Contemporânea de Alguns Conceitos da
Teoria Quântica**

Bertúlio de Lima Bernardo

JOÃO PESSOA
-2013-

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Uma Visão Contemporânea de Alguns Conceitos da Teoria Quântica

Bertúlio de Lima Bernardo

Tese realizada no Departamento
de Física da UFPB, sob orientação do Prof.
Dr. Fernando Jorge Sampaio Moraes, para
a obtenção do grau de Doutor em Física.

JOÃO PESSOA
-2013-

Aos meus pais
Irenalda e Bernardo

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela grande oportunidade que é a vida, e pelas inúmeras alegrias que me deu ao longo dela. Obrigado, Senhor!

Ao professor Fernando Moraes pela confiança depositada em mim e pelo profissionalismo ao me orientar neste trabalho.

Ao professor Eric Heller, da Universidade de Harvard, pela coorientação e por me conceder a oportunidade única de estudar em uma das universidades mais importantes do mundo.

A meus pais, Irenalda e Bernardo, pelo amor, pela educação e pela incansável dedicação que sempre tiveram para promover a nossa família.

A meu irmão Bernowly que sempre me incentivou e acreditou em mim.

A minha namorada Larissa, pelo carinho, pela confiança e pelo estímulo.

A meus colegas da pós-graduação que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

À Universidade Federal da Paraíba por praticamente toda a minha formação.

À Universidade de Harvard pela recepção e pela oportunidade de desenvolvimento do meu trabalho.

Ao povo brasileiro que indiretamente tem apostado em mim como profissional.

Ao povo norte-americano que me acolheu em sua terra durante um ano como se fosse um filho dela.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) pelo suporte financeiro que me foi concedido através das bolsas de doutorado e de doutorado sanduíche.

Resumo

Nesta tese discutimos alguns aspectos fundamentais da teoria quântica de um ponto de vista mais contemporâneo, onde também pudemos desenvolver três trabalhos. No primeiro analisamos teoricamente um interferômetro de fenda dupla para átomos. Mostramos que se os autoestados de energia do átomo estão correlacionados com os comportamentos de partícula e de onda do mesmo, fenômenos complementares podem ser medidos simultaneamente, indicando uma reinterpretação do princípio da complementaridade. O mesmo aparato também apresentou propriedades de apagador quântico. No segundo apresentamos um interferômetro de duas partículas e a maneira como a decoerência afeta o grau de interferência. Mostramos como os constituintes do ambiente, aqui considerados como fótons, podem destruir a oscilação na taxa de coincidência de detecção das partículas. Devido a sua característica temporal, chamamos este processo de decoerência temporal quântica. No último trabalho estudamos a existência de uma nova família de soluções ortogonais da equação paraxial da luz. A amplitude complexa desses feixes são proporcionais às funções hipergeométricas confluentes, que denominamos modos hipergeométricos do segundo tipo (HyG-II). Demonstramos formalmente que um meio com um perfil hiperbólico de índice de refração pode gerar e suportar essa classe de feixes. Uma vez que esses modos são autofunções do momento angular orbital do fóton, concluímos que uma fibra ótica com este perfil de índice, em certas situações, poderia levar vantagem em relação a outras fibras com índice variável na capacidade de transmissão de dados.

Palavras-chave: Princípio da complementaridade, decoerência, momento angular orbital da luz.

Abstract

In this thesis we discuss some fundamental aspects of the quantum theory from a contemporaneous point of view, where we could develop three works. In the first we analyze theoretically an atomic double-slit interferometer. It has been shown that if the energy eigenstates of the atom are correlated with its particle and wave behaviors, complementary phenomena can be measured simultaneously, indicating a reinterpretation of the complementarity principle. We also demonstrate that this experiment possesses quantum erasure properties. In the second we present a two-particle interferometer in order to analyze the way in which decoherence affects quantum interference. It has been shown how the environmental constituents, here considered as photons, can destroy the oscillations in the coincidence detection rate of the particles. Due to the temporal characteristic of this kind of interference, we name this process as quantum temporal decoherence. In the last work we study the existence of a novel complete family of exact and orthogonal solutions of the paraxial wave equation. The complex amplitude of these beams is proportional to the confluent hypergeometric functions, which we name hypergeometric modes of type-II (HyG-II). It is formally demonstrated that a hyperbolic-index medium can generate and support the propagation of such a class of beams. Since these modes are eigenfunctions of the photon orbital angular momentum, we conclude that an optical fiber with hyperbolic-index profile could take advantage over other graded-index fibers by the capacity of data transmission.

Keywords: Complementarity principle, decoherence, orbital angular momentum of light.

Sumário

1	Introdução	1
2	Complementaridade: Uma nova perspectiva acerca de um princípio fundamental	7
2.1	Experimento da fenda dupla, informação sobre o caminho e complementaridade.	8
2.2	Emaranhamento quântico	11
2.3	Esquema de medida de von Neumann	13
2.4	Descrição do experimento da fenda dupla em termos do emaranhamento .	15
2.5	Apagador quântico (“Quantum erasure”)	17
2.6	Uma nova visão sobre complementaridade e apagador quântico no experimento da fenda dupla	21
2.6.1	Proposta experimental	22
2.6.2	Apagador quântico (revisitado)	27
2.6.3	Discussão	28
3	Decoerência e a transição entre os mundos quântico e clássico	30
3.1	O conceito e a interpretação da matriz densidade	31
3.1.1	Matriz densidade	31
3.2	Matriz densidade reduzida	33
3.2.1	Relevância no estudo da decoerência	34
3.2.2	Demonstração da matriz densidade reduzida	35

3.2.3	Medidas locais de interferência e distinguibilidade	36
3.3	O ambiente como monitor do estado	38
3.4	Decoerência e supressão local da interferência	40
3.5	Decoerência temporal em um interferômetro de duas partículas	43
3.5.1	Proposta experimental	44
3.5.2	Discussão	52
4	Um paralelo entre a mecânica quântica e a ótica ondulatória	53
4.1	Mais um pouco de mecânica quântica	53
4.1.1	Equação de Schrödinger	54
4.1.2	Postulado de Born	57
4.2	Uma visão geral do estudo da ótica	57
4.3	Ótica ondulatória	59
4.4	Alicerces da ótica ondulatória	59
4.4.1	Equação da onda	59
4.4.2	Intensidade, potência e energia	60
4.4.3	Ondas monocromáticas	61
4.4.4	Representação complexa	61
4.4.5	Equação da onda	61
4.4.6	Equação de Helmholtz	62
4.4.7	Intensidade ótica	62
4.5	Ondas elementares	63
4.5.1	Onda plana	63
4.5.2	Ondas esféricas	64
4.6	Ondas paraxiais	64
4.6.1	Equação paraxial de Helmholtz	65
4.7	Momento angular orbital da luz	66
4.8	Transmissão de dados por modos hipergeométricos através de um meio com índice de refração hiperbólico	68

4.8.1	Equação do feixe	68
4.8.2	Propriedades de transmissão	72
4.8.3	Discussão	74
5	Conclusão	75

Capítulo 1

Introdução

A física moderna é fundamentada em duas grandes teorias do século passado: a mecânica quântica e a relatividade. Ambas foram desenvolvidas para descrever fenômenos onde a mecânica newtoniana falhava. A primeira tem o seu domínio na descrição do comportamento das pequenas partículas, tais como os átomos, onde a teoria de Newton fornece previsões completamente equivocadas. A segunda obteve sucesso na descrição dos corpos com grandes velocidades, onde novamente a física de Newton não podia explicar alguns resultados experimentais básicos. Essas teorias têm mudado radicalmente a nossa intuição dos mundos microscópico e macroscópico. Porém, é importante enfatizar que essas teorias exigiram da comunidade científica grandes esforços e um bom período de tempo para reconhecer todas as implicações dessas teorias, que, notavelmente, nunca encontraram nenhuma controvérsia experimental até os dias atuais. Particularmente, nesta tese, nos dedicaremos ao estudo de alguns dos fundamentos da mecânica quântica e a algumas de suas recentes aplicações.

Em nossa vida cotidiana, os objetos são considerados como estando localizados em algum lugar, existindo em algum instante de tempo e se deslocando a uma certa velocidade. A física newtoniana estipula que, uma vez que conhecemos a velocidade e a posição de um objeto de uma dada massa, bem como as forças que atuam nele, é possível determinarmos completamente todo comportamento futuro desse objeto. Por exemplo, se você conhece as posições e as velocidades do sol, da lua e da terra, você poderá determinar com excelente precisão quando o próximo eclipse solar irá acontecer. É impressionante como tão pouca

informação é necessária para se deduzir tanto.

Esses objetos, além das leis da física, ou por causa delas, também obedecem à lógica Booleana. Ainda não está claro se essa lógica é algo diferente da física (provavelmente não), mas vamos falar sobre ela por um momento. A regra básica da lógica Booleana é excluir o intermediário. Um objeto, tal como uma maçã, está posicionada “aqui” ou “não aqui”, mas nenhuma outra possibilidade é permitida. Se algo existe, mas não está aqui, então está em algum outro lugar. Objetos existem ou não, nenhuma terceira opção é logicamente possível de acordo com Boole.

Outra lei importante da lógica Booleana diz que se pensarmos a respeito de uma proposição (“a maçã está na mesa”) e pensarmos em outra proposição (“a maçã tem velocidade zero”), então a ordem com que anunciamos essas proposições pode ser revertida e ainda concluiremos o mesmo resultado, ou seja, dizer que “a maçã está em repouso sobre a mesa” é simplesmente o mesmo que dizer que “a maçã está na mesa e em repouso”. Esta lei é conhecida como comutatividade das proposições.

Como vemos, tudo isso é simples e direto. Porém, em desacordo, o mundo dos objetos microscópicos não obedece à lógica Booleana, e sabemos disso a partir da experiência com um enorme grau de precisão. Objetos, tais como elétrons, átomos ou fótons (partículas de luz) podem, de certa forma, existir em várias posições (ou ter várias velocidades) todos ao mesmo tempo. Além disso, se estabelecermos que um elétron está aqui agora e depois afirmarmos que ele tem uma dada velocidade, definitivamente, não é a mesma coisa que dizer que o elétron tem a dada velocidade e depois afirmar que ele está aqui agora. Na lógica quântica, tanto a lei de excluir intermediários, quanto a da comutatividade das proposições são simplesmente violadas. Estranhamente, o mundo microscópico não condiz com a lógica dos objetos clássicos tão comuns em nossas vidas diárias. Vamos discutir um experimento que dramaticamente demonstra esta discórdia. Este simples experimento ilustrará o comportamento quântico da luz. Tal colocação está sendo feita apenas para motivar o tema da nossa discussão sem entrar em muitos detalhes nesse estágio.

O aparato da Fig. 1.1 é chamado de interferômetro de Mach-Zehnder. Ele consiste em dois espelhos, E_1 e E_2 , e dois divisores de feixe, DF_1 e DF_2 , com iguais probabilidades de

reflexão e de transmissão. Vamos averiguar o que acontece nesse aparato quando um único fóton entra nele. Para tal, precisamos conhecer como se dá a ação de um divisor de feixe. Isso pode ser resumido de acordo com a seguinte equação:

$$|a\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|b\rangle + i|c\rangle), \quad (1.1)$$

que significa que o estado a transforma-se em uma superposição dos estados b e c . Esta é apenas uma maneira formal de dizer que a partícula que entra pelo caminho a sairá pelos caminhos b ou c com probabilidades iguais. A fase imaginária na frente de c significa que quando a luz é defletida de 90° por um espelho ou divisor de feixe, ela adquire um fase de $e^{i\pi/2} = i$ (a origem da fase é puramente clássica, ou seja, pode ser derivada das equações de Maxwell [3]). Com isso em mente, o interferômetro de Mach-Zehnder mostrado na Fig.

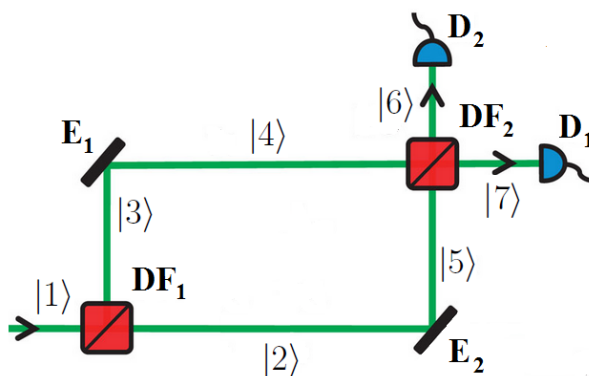


Figura 1.1: Interferômetro de Mach-Zehnder.

1.1 procede da seguinte forma:

$$\begin{aligned} |1\rangle &\xrightarrow{DF_1} \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle + i|3\rangle) \\ &\xrightarrow{E_1, E_2} \frac{1}{\sqrt{2}}(i|5\rangle + i(i|4\rangle)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(i|5\rangle - |4\rangle) \\ &\xrightarrow{DF_2} \frac{1}{2}(i(|6\rangle + i|7\rangle) - (i|6\rangle + |7\rangle)) = -|7\rangle. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Dessa forma, se tudo for arranjado adequadamente, e se ambos os braços do interferômetro tiverem o mesmo comprimento, então o fóton só poderá ser detectado pelo detector D_2 .

Este fenômeno é mais comumente conhecido como interferência, que é uma propriedade característica das ondas. Entretanto, é sem dúvida impressionante o fato de que as partículas de luz também possuam esta propriedade.

O que aconteceria se detectássemos os fótons após o primeiro divisor de feixe e desejássemos saber que caminho eles seguiram? O resultado é que metade dos fótons seriam detectados no braço 2 e o restante deles seriam detectados no braço 3. Assim, parece que os fótons, após o primeiro divisor, “escolhem” aleatoriamente se mover por um caminho ou por outro com a mesma probabilidade. Utilizando esta linha de raciocínio para ambos divisores de feixe, esperar-se-ia que ambos detectores recebessem fótons, em média, com a mesma frequência. Mas, não é isso o que vemos. Na realidade, apenas o detector 2 absorve fótons. A amplitude e, conseqüentemente, a probabilidade do detector 1 absorver é zero. Isso quer dizer que o estado do fóton após o divisor de feixe é mais que apenas uma mistura estatística de duas probabilidades. Como vimos, ele é uma superposição, o que quer dizer que os fótons percorrem os dois caminhos (ao contrário do que se esperaria para uma partícula). Esta é a razão pela qual se usa vetores para se expressar estados quânticos: a superposição de estados é permitida.

Observe que não estamos utilizando uma descrição sofisticada do sistema físico neste capítulo introdutório. Existem razões para isso. Primeiro, existem várias características importantes do sistema quântico que podem ser corretamente descritas utilizando uma teoria menos sofisticada. Segundo, começar com um formalismo simples e elevar o grau de sofisticação ao longo do texto tem um grande valor pedagógico.

Antes de falarmos sobre o conteúdo deste texto, concluiremos a descrição do experimento exposto acima apontando uma outra característica estranha dos sistemas quânticos: a medida livre de interação [1], que foi realizada experimentalmente com lasers e divisores de feixe [23]. Suponha que em um interferômetro de Mach-Zehnder bloqueamos um dos caminhos após o primeiro divisor, inserindo um meio absorvedor como mostrado na figura 1.2. O que acontece então? Obviamente, se o fóton for absorvido, nenhum dos dois detectores irá registrar o fóton. Entretanto, se o fóton não for detectado, ele terá, no segundo divisor, uma chance igual de ser transmitido ou refletido tal que os detectores irão regis-

tratar os fótons com a mesma frequência, em média. Em outras palavras, a interferência foi destruída pela simples presença do absorvedor. Assim, temos uma conclusão intrigante: podemos detectar a presença de um absorvedor em um caminho sem que o fóton sequer se aproximasse dele; daí a medida livre de interação. Dessa forma, se o detector 2 registra o fóton, então, necessariamente, o fóton tomou o caminho 6, que implica a existência de um obstáculo no caminho 5. No caso contrário, somente o detector 1 registraria o fóton. Isto é certamente incrível, e é somente uma das bases da descrição quântica da luz e de vários dos fenômenos que abordaremos ao longo desta tese. No próximo capítulo, discutimos alguns

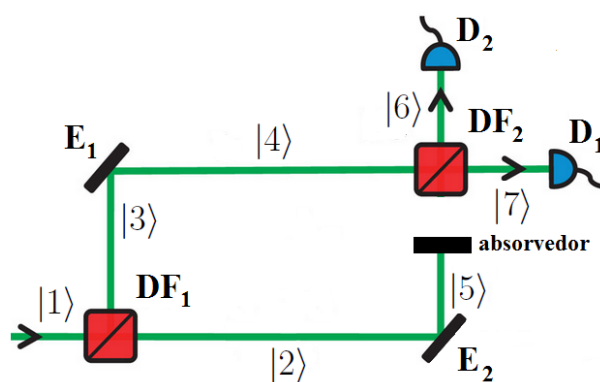


Figura 1.2: Este aparato mostra o quão estranha a mecânica quântica é. A presença ou a ausência do absorvedor pode ser determinada sem a interação direta com ele. Isto leva à noção de medida livre de interação - um tema ainda aberto em mecânica quântica.

dos fundamentos da teoria quântica, dando ênfase ao estudo da complementaridade e suas mais recentes implicações. Apesar de ser um princípio fundamental da teoria, demonstraremos de uma maneira factível do ponto de vista experimental como a complementaridade talvez precise de reinterpretação, como sugerido por alguns trabalhos recentes. O capítulo 3 examina o aparente conflito acerca de uma possível fronteira entre os mundos quântico e clássico, apresentando o papel da decoerência como uma resposta para esta questão. Introduzimos essa teoria para um sistema composto de fendas duplas, onde pudemos explorar a sua fenomenologia de uma maneira relativamente simples. O capítulo 4 estende a aplicação da mecânica quântica no âmbito da ótica, onde utilizamos suas propriedades para estudar os modos de propagação da luz em uma fibra ótica com um perfil de índice de refração

radialmente hiperbólico. Demonstramos como uma fibra desse tipo pode levar vantagem na capacidade de transmissão de dados, quando comparada com as bem conhecidas fibras com índice de refração com perfil quadrático. Para concluir, o capítulo 5 expõe as nossas conclusões de uma forma abrangente e apresenta os possíveis rumos que esta pesquisa pode seguir a partir dos trabalhos introduzidos aqui.

Capítulo 2

Complementaridade: Uma nova perspectiva acerca de um princípio fundamental

O princípio da complementaridade distingue o mundo dos fenômenos quânticos das propriedades da física clássica. Foi proposto por Niels Bohr em 1928 [4], numa época em que a mecânica quântica, do modo em que a conhecemos hoje era ainda muito recente, e todos os exemplos utilizados para ilustrar a complementaridade se referiam à posição e ao momento da entidade quântica, seja ela um fóton ou uma partícula com massa. Esta é a razão histórica pela qual o princípio da complementaridade é frequentemente identificado como a dualidade partícula-onda da matéria.

Richard Feynman, quando memoravelmente discute o experimento da fenda dupla em sua introdução à mecânica quântica [5], nota que este comportamento dual contém o mistério básico da teoria quântica. De fato, ele vai além quando diz: “Na realidade, este é o único mistério.”

A complementaridade, entretanto, é um conceito mais geral. Dizemos que dois observáveis são complementares se o preciso conhecimento de um implica que todos os possíveis resultados da medida do outro são igualmente prováveis. Podemos ilustrar isso com dois importantes exemplos. O primeiro diz respeito à posição e ao momento (ao longo de uma mesma direção) de uma partícula: se a posição está determinada então o resultado acerca da medida do momento não pode ser previsto e todos os valores são igualmente

prováveis. O segundo envolve duas componentes perpendiculares do spin de uma partícula com spin meio: se a componente vertical tem um valor definido (“up” ou “down”), então se medirmos a componente horizontal, ambos os valores (“esquerda” ou “direita”, por exemplo) podem ser encontrados com a mesma probabilidade. Assim, enunciaremos o princípio da complementaridade como:

“Para cada grau de liberdade, as variáveis dinâmicas são um par de observáveis complementares.”

De uma maneira menos formal e menos precisa, temos: *“Não importa como o sistema é preparado, existe sempre uma medida cujo resultado é totalmente imprevisível.”* Assim, como dissemos no capítulo anterior, no mundo microscópico o conhecimento completo sobre o futuro, no sentido da física clássica, é impossível. Este, em sua essência, é o mistério apontado por Feynman. Na sua formulação original, Bohr também chama a atenção sobre como se verifica a ação da complementaridade nos experimentos: “O estudo dos fenômenos complementares exige aparatos experimentais mutuamente exclusivos [4].” Em outras palavras, ele quis dizer que um mesmo aparato experimental não pode exibir duas propriedades complementares para um mesmo sistema quântico. Este é o ponto que exploraremos mais diretamente ao longo deste capítulo.

A partir do trabalho de Bohr, vários experimentos foram propostos para enfatizar a complementaridade na física quântica. Dentre os mais notáveis podemos citar o experimento de recuo da fenda de Einstein [6], a interação elétron-fóton de Feynman [5] e o microscópio de Heisenberg [7]. Na próxima seção, analisaremos o primeiro deles.

2.1 Experimento da fenda dupla, informação sobre o caminho e complementaridade.

Se considerarmos a Fig. 2.1, onde esboçamos um experimento de fenda dupla usual em que partículas (tais como elétrons) se aproximam da esquerda, vemos que, após a

passagem, elas são detectadas em uma tela deixando suas marcas. Como previsto pela mecânica quântica e confirmado através de experimentos, existem dois regimes limites.

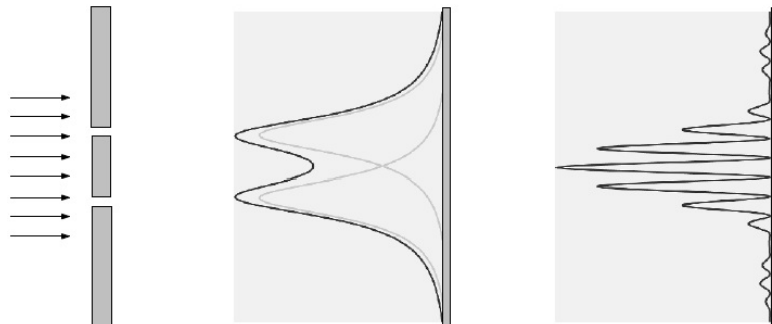


Figura 2.1: Arranjo experimental da fenda dupla. O padrão de interferência pode ou não ser observado, dependendo do quanto sabemos sobre o caminho das partículas.

1. Cenário ondulatório. Se nos abstermos de medir por qual fenda o elétron passou, a densidade de partículas observada na tela corresponde a um padrão de interferência dado por $\rho(x) = \frac{1}{2}|\psi_1(x) + \psi_2(x)|^2$, ou seja, temos uma densidade de probabilidade referente à superposição de ondas parciais, $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$, representando a passagem através da fenda 1 e 2, respectivamente.
2. Cenário de partícula. Se posicionarmos um detector próximo a uma das fendas para descobrir por qual fenda a partícula passou, o padrão de interferência desaparece. Neste caso, a densidade de partículas na tela é simplesmente uma soma clássica dos padrões criados pelas partículas caso elas passassem somente pela fenda 1 ou 2 de cada vez, $\rho(x) = \frac{1}{2}|\psi_1(x)|^2 + \frac{1}{2}|\psi_2(x)|^2$. A explicação para o segundo caso é que, segundo a teoria quântica, o estado de uma partícula que está sujeita a atravessar duas possíveis fendas é dada pela superposição $\psi(x) = (\psi_1(x) + \psi_2(x))/\sqrt{2}$ das ondas parciais, $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$, correspondentes à passagem pelas fendas 1 e 2, respectivamente. Se medirmos a posição da partícula em uma região próxima a uma das fendas e realmente a encontrarmos lá, localizamos (colapsamos) a função de onda $\psi(x)$ nesta região, alterando a configuração estendida que ela possuía antes da medida. Esta é uma consequência de um dos postulados mais fundamentais da teoria: A medida colapsa a superposição $\psi(x)$ em uma das componentes $\psi_1(x)$ ou $\psi_2(x)$. Note que

esta é uma versão simplificada aplicada apenas a dois possíveis estados. De qualquer forma, o fato é que não poderemos obter um padrão de interferência se uma medida da posição da partícula for efetuada junto às fendas. Em outras palavras, sempre que tentamos obter informação sobre o caminho da partícula para saber por qual das fendas ela passou, não poderemos evitar que a partícula perca as suas propriedades quânticas. Este fenômeno é conhecido como decoerência, que será o tema do próximo capítulo. Neste contexto, utilizando as palavras de Bohr [4], “existe uma complementaridade entre a informação sobre o caminho (característica de partícula) e a interferência (característica de onda)”.

O princípio da complementaridade e as suas aplicações têm sido objeto de vários estudos desde a sua concepção até os dias atuais. Aqui, gostaríamos de salientar a lendária discussão entre Einstein e Bohr acerca deste princípio na quinta conferência de Solvay em 1927 [6]. Nesta conferência, Einstein desafiou Bohr com uma experiência de pensamento envolvendo a fenda dupla. Ele argumentou que, baseado na lei de conservação do momento, a passagem da partícula através da fenda de cima (ou de baixo) causaria um recuo da fenda devido à colisão com a partícula, caso as fendas estivessem livres para se mover, supondo também que poderíamos medir a direção de recuo da fenda. O aparato descrito permitiria, pelo menos em princípio, descobrir qual das fendas foi atravessada pela partícula, obtendo-se, dessa forma, informação sobre o caminho. Einstein também argumentou que, uma vez que o padrão de interferência é devido somente à interferência entre os dois pacotes de onda emergindo das fendas, seria possível obter tanto a informação sobre o caminho quanto o padrão de interferência, em aparente contradição com a ideia da complementaridade que viria a ser publicada no ano seguinte.

Naquela ocasião, Bohr prontamente contornou o desafio com o seguinte argumento. O recuo nas fendas causado pela colisão com as partículas seria muito pequeno. Para se observar uma variação de momento desta ordem, teríamos que conhecer o momento inicial das fendas com uma precisão da ordem da variação causada pela colisão. De acordo com o princípio da incerteza de Heisenberg, que era a grande celebração da época, tal precisão no momento acarretaria uma grande incerteza sobre a posição das fendas. Esta incerteza, segundo os cálculos demonstrados por Bohr, seria da ordem (ou mesmo maior)

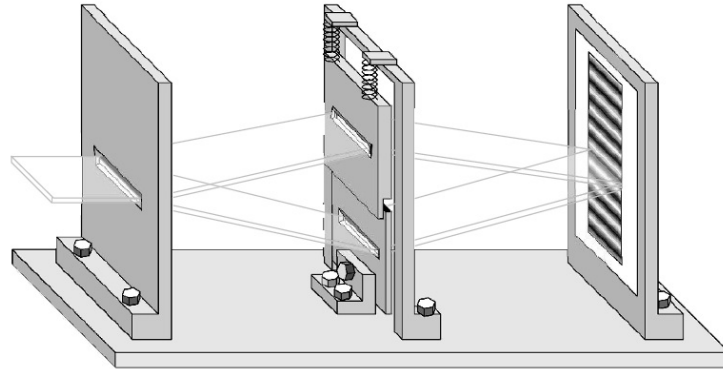


Figura 2.2: Experiência de pensamento de Einstein para se obter, simultaneamente, informação sobre o caminho e interferência em um arranjo de fenda dupla.

do tamanho característico das franjas de interferência. Dessa forma, nenhum padrão de interferência poderia ser observado: a posição de um máximo de interferência para uma possível posição coincide com a posição de um mínimo do padrão de outra possível posição, e, conseqüentemente, o padrão resultante não exibiria interferência. E, mais uma vez, a teoria quântica triunfava contra os ataques de Einstein!

O ponto central no argumento de Bohr é que obter informação sobre o caminho, inevitavelmente, perturba o sistema, o que também se mostrou verdade na discussão acima. Entretanto, como demonstrado por Wootters e Zurek [8] e investigado por Scully e Drühl [9], em certas situações é também possível obter informação sobre o caminho de tal maneira que não exista uma mudança significativa na função de onda da partícula, moderando o efeito da incerteza sobre a posição e o momento apontados por Bohr. Exploraremos esse tópico de uma maneira mais elaborada na seção 2.4.

2.2 Emaranhamento quântico

Vamos agora discutir o conceito de emaranhamento, que é de suma importância para o entendimento deste e do próximo capítulo. Começemos pela ideia principal. Suponha que temos um sistema quântico S , descrito por um estado $|\Psi\rangle$, que é composto de dois subsistemas S_1 e S_2 . O estado $|\Psi\rangle$ do sistema S é dito emaranhado com respeito a S_1 e

S_2 , se ele não puder ser escrito como um produto tensorial dos estados desses dois subsistemas individuais, ou seja, se não existir nenhum estado $|\psi\rangle_1$ de S_1 e $|\phi\rangle_2$ de S_2 tal que $|\Psi\rangle = |\psi\rangle_1 |\phi\rangle_2$. Em outras palavras, um estado de S_1 e S_2 é dito emaranhado se ele não puder ser escrito na forma $|\Psi\rangle = |\psi\rangle_1 |\phi\rangle_2$, com $|\psi\rangle_1$ e $|\phi\rangle_2$ denotando estados dos subsistemas S_1 e S_2 , respectivamente. Como exemplo, considere duas partículas de spin meio descritas através da base $|0\rangle_i$ e $|1\rangle_i$, com $i = 1, 2$, de seus respectivos espaços bidimensionais. Os estados $|0\rangle_i$ e $|1\rangle_i$ correspondem a partícula i tendo o seu spin apontando “up” ou “down”, respectivamente, ao longo de um dado eixo no espaço. Existem quatro tipos de estados emaranhados para um sistema composto de duas partículas de spin meio que estão maximamente emaranhados (que será explicado seguir). Esses estados são comumente chamados de estados de Bell e são dados por:

$$|\phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1 |0\rangle_2 \pm |1\rangle_1 |1\rangle_2), \quad (2.1)$$

$$|\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1 |1\rangle_2 \pm |1\rangle_1 |0\rangle_2). \quad (2.2)$$

Não é difícil ver que esses estados não podem ser escritos como um produto tensorial dos estados dos subsistemas, pois, nas equações acima, os estados $|0\rangle_1$ e $|1\rangle_1$ dos subsistema S_1 têm uma correlação um a um com os estados $|0\rangle_2$ e $|1\rangle_2$ do subsistema S_2 .

Mas, afinal, o que esta definição de emaranhamento significa? Se $|\Psi\rangle = |\psi\rangle_1 |\phi\rangle_2$, ou seja, se S_1 e S_2 não estiverem emaranhados, então podemos considerar os subsistemas S_1 e S_2 como entidades individuais e independentes. Cada subsistema possui seu próprio estado, que constitui uma completa descrição do estado físico do sistema, e não existem propriedades físicas do sistema como um todo que não possam ser obtidas medindo-se os subsistemas individualmente. Em outras palavras, os subsistemas, apesar de serem considerados como uma parte do sistema composto, retêm completamente suas individualidades. O sistema composto é simplesmente a soma das duas partes, sem correlações entre elas. Este é também o tipo de composição encontrado na física clássica. Por outro lado, se o estado do sistema não puder ser escrito na forma $|\Psi\rangle = |\psi\rangle_1 |\phi\rangle_2$, todas essas características clássicas deixam de existir, e os subsistemas são dependentes entre si. Dessa forma, não

podemos atribuir estados quânticos aos subsistemas S_1 e S_2 isoladamente e dizemos que eles estão emaranhados. O termo emaranhamento foi cunhado por Schrödinger em 1935 ao enfatizar suas propriedades não clássicas [10]:

“Quando dois sistemas quânticos interagem temporariamente e se separam novamente, pode ser que eles não possam mais ser descritos independentemente como era no princípio; eles de certa forma trocam e retêm informações entre si. Eu não diria que esta é uma das características fundamentais da mecânica quântica, mas que é simplesmente a única; aquela que a difere de qualquer linha de pensamento clássico.”

As particularidades do emaranhamento têm sido confirmadas em vários experimentos, por exemplo, utilizando pares de fótons emaranhados separados por uma distância de vários quilômetros [11]. O emaranhamento é também o coração de várias possíveis tecnologias a serem implementadas no futuro, tais como a computação quântica e a criptografia quântica. Esta última promete ser a primeira grande aplicação da mecânica quântica a nível fundamental.

2.3 Esquema de medida de von Neumann

Se tivermos dois sistemas separados (não emaranhados), como é possível que eles se tornem emaranhados? Como é possível que esses sistemas percam as suas individualidades e se tornem correlacionados? O emaranhamento quântico pode ser visto como um produto do princípio da superposição em conjunto com a dinâmica linear da evolução temporal da equação de Schrödinger. O processo resultante é representado em termos do esquema de medida de von Neumann, um processo idealizado por von Neumann durante os primeiros anos de criação da teoria quântica e discutido em seu seminal livro de 1932 [12]. A meta de von Neumann era descrever o ato da medida em termos puramente quânticos como a interação física entre o sistema e o aparato de medida, tratando ambos como entidades quânticas. É importante notar que esse tratamento está em completa contradição com a

interpretação de Copenhague, que havia postulado que aparatos devem ser objetos clássicos, e que portanto não são regidos pelas leis da mecânica quântica.

Apesar dessa contradição, o esquema de von Neumann é a maneira mais simples de entender como o emaranhamento surge. Além disso, ele nos permite introduzir o formalismo básico da decoerência, onde o papel do aparato de medida é feito pelo ambiente externo que interage com o sistema. Como já mencionado, esse tópico será desenvolvido no próximo capítulo.

Após esta breve introdução, vamos apresentar o esquema de medida. Os ingredientes necessários são: um sistema S , descrito por um espaço de Hilbert H_S com vetores base $\{|s_i\rangle\}$, e um aparato de medida A (usualmente macroscópico), formalmente representado por vetores base $\{|a_i\rangle\}$ num espaço de Hilbert H_A . Como se espera, o propósito do aparato é medir o estado do sistema S . Podemos considerar o aparato como sendo um apontador que se move para a posição “ i ”, representado pelo estado $|a_i\rangle$, se o sistema estiver no estado $|s_i\rangle$. Assumindo que antes da medida o aparato está no estado “pronto” $|a_p\rangle$, a interação de medida entre o sistema e o aparato será da seguinte forma:

$$|s_i\rangle |a_p\rangle \rightarrow |s_i\rangle |a_i\rangle, \quad (2.3)$$

para todo “ i ”. Os estados inicial e final são produtos tensoriais dos espaços de Hilbert, H_S e H_A , descrevendo o sistema total SA . Como vemos, a medida tem uma correspondência, um a um, entre os estados do sistema e os estados do aparato. Note também que, quando escrevemos o lado direito da equação (2.3), assumimos que a interação não muda o estado do sistema. Devido a essas restrições, este esquema de medida é considerado como sendo ideal.

Agora vem o ponto chave! Até aqui a interação 2.3 não gerou nenhum emaranhamento: o estado final do sistema e do aparato ainda é separável. Entretanto, vamos considerar o que acontece se o sistema começa em uma superposição de estados base $|s_i\rangle$,

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |s_i\rangle. \quad (2.4)$$

Neste caso, a linearidade da equação de Schrödinger implica que a combinação do sistema

e do aparato vão evoluir de acordo com o seguinte processo:

$$|\psi\rangle |a_r\rangle = \left(\sum_i c_i |s_i\rangle \right) |a_r\rangle \rightarrow \sum_i c_i |s_i\rangle |a_i\rangle. \quad (2.5)$$

Esta evolução também representa o esquema de medida de von Neumann.

A inspeção do lado direito de (2.5) mostra que o estado final do sistema e do aparato é um estado emaranhado no sentido que foi definido acima, ou seja, não podemos atribuir um estado individual ao sistema ou ao aparato. Dessa forma, o emaranhamento surgiu naturalmente da dinâmica do sistema. A superposição, inicialmente presente apenas no sistema, foi amplificada de tal forma que, ao final do processo, passou a envolver o aparato. É importante mencionar o fato de que em (2.5) a medida não foi completada, no sentido de fornecer um resultado. Apenas a interação entre o sistema e o aparato foi concluída. Dessa forma, é comum chamar este processo de *pré-medida*.

2.4 Descrição do experimento da fenda dupla em termos do emaranhamento

Na seção 2.1 havíamos nos questionado sobre a possibilidade de se obter informação sobre o caminho da partícula no experimento da fenda dupla e ao mesmo tempo verificar o padrão de interferência na tela de detecção. A resposta a essa pergunta, como mencionamos naquela seção, é afirmativa. Entretanto, para discutir e explicar esta característica, o simples postulado do colapso da função de onda é insuficiente. De fato, o colapso é algo descontínuo e irreversível. Assim, é improvável que tal transformação esteja envolvida num suave e contínuo processo de mudança na interferência e na quantidade de informação sobre o caminho. Ao invés, tentaremos descrever esse fenômeno através do esquema de medida de von Neumann [12] e do emaranhamento. Esta descrição será também a base do nosso estudo sobre decoerência no próximo capítulo. Lá a informação sobre o caminho (ou estado) do sistema será dada através da interação entre o sistema e o ambiente externo.

Vamos denotar os estados da partícula passando pelas fendas 1 e 2 por $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$, respectivamente. Como antes, colocamos um detector próximo a cada fenda, com ambos

detectores inicialmente no estado “pronto” ($|pronto\rangle$). Se denotarmos os estados dos detectores acusando a passagem da partícula pelas fendas 1 e 2 por $|1\rangle$ e $|2\rangle$, respectivamente, poderemos escrever

$$|\psi_1\rangle |pronto\rangle \rightarrow |\psi_1\rangle |1\rangle \quad (2.6)$$

e

$$|\psi_2\rangle |pronto\rangle \rightarrow |\psi_2\rangle |2\rangle, \quad (2.7)$$

descrevendo a dinâmica do sistema quando somente a fenda 1 (ou 2) está aberta. Utilizando (2.6) e (2.7), obtemos a evolução dinâmica do esquema de von Neumann, levando a um sistema partícula-detector que está emaranhado.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) |pronto\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle |1\rangle + |\psi_2\rangle |2\rangle). \quad (2.8)$$

Note que os estados dos detectores $|1\rangle$ e $|2\rangle$ atuam como “apontadores” dos estados $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ da partícula. Como podemos descrever o comportamento da partícula ao realizarmos uma medida sobre a posição dela numa tela de detecção? Nesse caso, a quantidade de interesse é a matriz densidade reduzida da partícula, que é dada por¹

$$\rho_{particula} = \frac{1}{2}[|\psi_1\rangle \langle\psi_1| + |\psi_2\rangle \langle\psi_2| + |\psi_1\rangle \langle\psi_2| \langle 2|1\rangle + |\psi_2\rangle \langle\psi_1| \langle 1|2\rangle]. \quad (2.9)$$

Esta matriz densidade corresponde a uma densidade de partículas $\rho(x)$ na tela de detecção dada por:

$$\rho(x) = \langle x|\rho_{particula}|x\rangle = \frac{1}{2}|\psi_1(x)|^2 + \frac{1}{2}|\psi_2(x)|^2 + Re\{\psi_1(x)\psi_2^*(x) \langle 2|1\rangle\}, \quad (2.10)$$

onde $\psi_i(x) = \langle x|\psi_i\rangle$, com $i = 1, 2$. O último termo descreve um padrão de interferência, e podemos ver que a visibilidade do padrão é quantificada pelo produto interno $\langle 2|1\rangle$. Em particular, o caso limite da distinguibilidade perfeita entre os estados do detector $|1\rangle$ e $|2\rangle$, $\langle 2|1\rangle = 0$, corresponde ao comportamento de partícula:

$$\rho(x) = \langle x|\rho_{particula}|x\rangle = \frac{1}{2}|\psi_1(x)|^2 + \frac{1}{2}|\psi_2(x)|^2. \quad (2.11)$$

¹O conceito de matriz densidade reduzida é mais comumente vinculado ao estudo da decoerência, que será o tema do capítulo 3. Por isso, decidimos adiar a sua demonstração para a seção 3.2, deixando a critério do leitor dirigir-se à referida seção para entendê-la antes de continuar deste ponto, ou aceitar o presente resultado, provisoriamente, sem prejuízos.

Por outro lado, se $|1\rangle$ e $|2\rangle$ são completamente incapazes se distinguir o caminho da partícula, $\langle 2|1\rangle = 1$, temos um cenário de onda, ou seja, temos um padrão de interferência perfeito.

$$\rho(x) = \langle x|\rho_{particula}|x\rangle = \frac{1}{2}|\psi_1(x)|^2 + \frac{1}{2}|\psi_2(x)|^2 + Re\{\psi_1(x)\psi_2^*(x)\}. \quad (2.12)$$

Na situação em que o detector obtém alguma informação sobre o caminho com pouca resolução, tem-se uma distinguibilidade entre os estados dos detectores dada por um número entre zero e um. Podemos observar de (2.9) que conseguiremos ver um padrão de interferência, mas sua visibilidade decai progressivamente quando o produto interno $\langle 2|1\rangle$ decresce, ou seja, quando os estados dos detectores $|1\rangle$ e $|2\rangle$ tornam-se mais distinguíveis (a informação sobre o caminho aumenta).

Assim, conseguimos demonstrar que é possível observar um padrão de interferência e ao mesmo tempo obter alguma informação sobre o caminho das partículas no experimento da fenda dupla, uma vez que esta informação seja incompleta. Se a informação for precisa, o padrão desaparece. Em sua análise sobre a complementaridade neste tipo de experimento, Wootters e Zurek [8] mostraram que podemos obter uma quantidade de informação sobre o caminho relativamente precisa, e ao mesmo tempo conseguir um padrão de interferência visível. Especificamente, eles mostraram que 90% de certeza sobre o caminho ainda permite um contraste de 50% no padrão de interferência.

Em resumo, a visibilidade de um padrão de interferência é simplesmente determinada pela quantidade de informação sobre o caminho disponível em algum sistema emaranhado com o objeto de interesse. Assim, a complementaridade pode ser considerada como uma consequência do emaranhamento quântico.

2.5 Apagador quântico (“Quantum erasure”)

No exemplo que analisamos na última seção, vimos que durante a criação do emaranhamento, a superposição de estados, inicialmente restrita a um dos sistemas, se expande e passa a ser uma propriedade do sistema composto. A possibilidade de uma possível reversão da expansão é baseada no fato de que a evolução do conjunto sistema-detectores, ou

sistema-ambiente (caso mais genérico), é completamente unitária. O que queremos dizer é que a aplicação de uma transformação unitária apropriada à combinação sistema-ambiente pode desemaranhar o sistema do ambiente, e, conseqüentemente, a própria dinâmica é capaz de recuperar o estado inicial do sistema, ou seja, um estado separável entre o sistema e o ambiente.

O fenômeno que trataremos nesta seção ilustra esse fato. O exemplo que segue é um caso particular do que se chama *apagador quântico* [13]. Trata-se de um sistema simples de entender, que esclarece muito bem a fenomenologia do problema, mas que até os dias atuais não foi realizado experimentalmente na sua formulação original.

Considere um feixe de átomos como indicado na Fig 2.3. Os átomos passam por duas cavidades (em ressonância com dois dos níveis de energia dos átomos, onde necessariamente tem-se a emissão de um fóton durante a passagem) separadas por uma combinação de dois obstrutores e um detector. Porém, antes de entrar em uma das cavidades, todos os átomos são excitados por um laser. Note que esse é um experimento de fenda dupla onde é possível, em princípio, determinar o caminho traçado pelos átomos, ou seja, nenhum padrão de interferência deverá ser observado na tela de detecção. No entanto, como veremos, esta é a configuração na qual o apagador quântico é possível. Em particular, considere que os obstrutores são arranjos de tal maneira que a radiação emitida pelo átomo será confinada ou na cavidade de cima ou na de baixo quando os obstrutores estiverem fechados. Considere também que ao abriremos os obstrutores, a radiação poderá ocupar todo o espaço das duas cavidades, bem como interagir com o detector localizado no centro desse novo volume. Dessa forma, como veremos, a radiação que estava confinada em uma das cavidades será (ou não) detectada, e a informação sobre o caminho seria apagada.

A pergunta agora é: seria possível recuperar o padrão de interferência? A resposta é sim, e será matematicamente explicada como segue. Com os obstrutores fechados, o estado quântico total do sistema, que é composto pelo átomo, pelo fóton emitido e pelo detector, que será considerado como um sistema quântico de dois níveis: fundamental $|d\rangle$ (quando

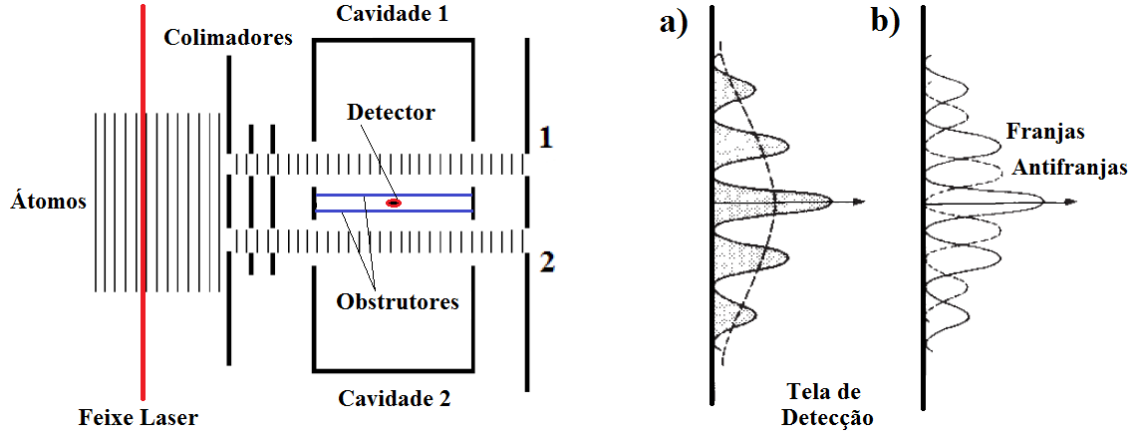


Figura 2.3: Configuração do apagador quântico no qual dois obstrutores separam duas cavidades ressonantes de um detector centralizado. a) Com este aparato é possível resgatar um padrão de interferência de um padrão clássico. b) A densidade de átomos encontrados na tela depende do registro do detector.

não detectar um fóton) e excitado $|e\rangle$ (quando detectar um fóton), é dado por:

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_1(\vec{r}) |1\rangle + \psi_2(\vec{r}) |2\rangle] |d\rangle. \quad (2.13)$$

Temos que $\psi_1(\vec{r})$ e $\psi_2(\vec{r})$ representam as funções de onda espaciais dos átomos emergindo das fendas 1 e 2, respectivamente. Por sua vez, $|1\rangle$ e $|2\rangle$ representam os estados onde existe um fóton depositado nas cavidades 1 e 2, respectivamente. Omitimos o estado de energia do átomo, uma vez que todos estarão necessariamente no seu estado fundamental após à passagem pelas cavidades.

É conveniente introduzir estados atômicos simétricos $\psi_+(\vec{r})$ e antissimétricos $\psi_-(\vec{r})$ como:

$$\psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_1(\vec{r}) \pm \psi_2(\vec{r})]. \quad (2.14)$$

Analogamente, introduzimos estados simétricos $|+\rangle$ e antissimétricos $|-\rangle$ dos campos de radiação contidos nas cavidades.

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|1\rangle \pm |2\rangle]. \quad (2.15)$$

Em termos das equações (2.13), (2.14) e (2.15), podemos escrever:

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_+(\vec{r}) |+\rangle + \psi_-(\vec{r}) |-\rangle] |d\rangle. \quad (2.16)$$

Agora considere a interação entre o campo de radiação existente na cavidade e o detector (Isso deverá ocorrer se abirmos os obstrutores). Por razões de simetria, apenas um campo de radiação simétrico $|+\rangle$ é capaz de produzir um “clique” no detector, sendo que campos antissimétricos $|-\rangle$ são nulos na região de detecção.

Assim, encontramos que a ação do detector produz o estado

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_+(\vec{r})|0\rangle|e\rangle + \psi_-(\vec{r})|-\rangle|d\rangle], \quad (2.17)$$

ou seja, a função de onda simétrica se acopla com o campo de vácuo $|0\rangle$, e a antissimétrica permanece inalterada.

Se quisermos saber a densidade de probabilidade na tela de detecção, temos

$$P(\vec{r}) = \frac{1}{2}[\psi_+^*(\vec{r})\psi_+(\vec{r}) + \psi_-^*(\vec{r})\psi_-(\vec{r})] = \frac{1}{2}[\psi_1^*(\vec{r})\psi_1(\vec{r}) + \psi_2^*(\vec{r})\psi_2(\vec{r})], \quad (2.18)$$

que, como esperávamos, não exibe um padrão de interferência. Porém, se nos perguntamos qual a densidade de probabilidade $P_e(\vec{r})$ de encontrar o detector excitado e um átomo na tela de detecção, a resposta é:

$$P_e(\vec{r}) = \frac{1}{2}|\psi_1(x)|^2 + \frac{1}{2}|\psi_2(x)|^2 + Re\{\psi_1(x)\psi_2^*(x)\}, \quad (2.19)$$

que exibe franjas de interferência com o mesmo padrão do experimento da fenda dupla simples. Por outro lado, a densidade de probabilidade $P_d(\vec{r})$ de encontrar o detector no estado fundamental e um átomo na tela de detecção é dada por

$$P_d(\vec{r}) = \frac{1}{2}|\psi_1(x)|^2 + \frac{1}{2}|\psi_2(x)|^2 - Re\{\psi_1(x)\psi_2^*(x)\}, \quad (2.20)$$

que são antifranjas. Como vemos, o padrão geral $P(\vec{r})$ é igual à média das densidades $P_e(\vec{r})$ e $P_d(\vec{r})$, que é um padrão clássico e sem franjas.

Vamos agora analisar, fenomenologicamente, o cálculo que fizemos. Após os átomos atravessarem o conjunto das cavidades e das fendas, deixando um fóton capaz de acusar o caminho percorrido, marcamos a posição do átomo na tela de detecção. Então, retornamos às cavidades, abrimos os obstrutores e permitimos que o fóton seja (ou não) absorvido pelo detector posicionado no centro do volume disponível. Suponha que fazemos isso com o

primeiro átomo, e que o fóton deixado por ele na cavidade foi detectado após à abertura dos obstrutores. Neste caso, marcamos de azul a posição do átomo na tela de detecção. Agora, suponhamos que o segundo átomo deixa um fóton que não é detectado após à abertura dos obstrutores. Neste caso, marcamos de vermelho a posição do átomo na tela de detecção. Observe que, de acordo com os cálculos, cada um dos casos descritos acima deverá ocorrer com a mesma probabilidade.

Suponha que repetimos este processo várias vezes. O que deverá ser observado é que os pontos azuis deixados pelos átomos cujo fóton pode ser detectado formarão um padrão de franjas característico de um experimento de fenda dupla simples. Já os pontos vermelhos, deixados por átomos cujo fóton não pode ser detectado, formarão um padrão de antifranjas (máximos de interferência coincidindo com os mínimos do padrão de franjas). Outro ponto importante é que os dois padrões somados não formam nenhum padrão de interferência. Ou seja, se não houvésemos marcado a tela com diferentes cores, obteríamos um padrão clássico. Logo, demonstramos que é possível obter padrões de interferência a partir de um padrão clássico, desde que “apaguemos” a informação sobre o caminho dos átomos. Note que isto pode ser feito mesmo após o átomo ter sido detectado. Na teoria quântica, essa característica é, às vezes, chamada de medida de atraso (“delay choice measurement”) [14].

2.6 Uma nova visão sobre complementaridade e apagador quântico no experimento da fenda dupla

Esta seção tem um caráter original onde propomos uma experiência, no mesmo espírito da estudada na seção anterior, para examinarmos a complementaridade de um feixe de átomos, onde apenas dois dos níveis de energia nos interessam. Esses níveis estão correlacionados com a função de onda espacial dos átomos ao serem submetidos a um experimento de fenda dupla. Notavelmente, este experimento nos permitiria medir fenômenos complementares com um mesmo aparato experimental, apontando para uma reinterpretação do princípio da complementaridade. Recentemente, alguns resultados similares têm sido demonstrados [15] e experimentalmente confirmados [16, 17] para fótons. Até onde sabe-

mos, esta seria a primeira demonstração desta característica para ondas de matéria. Além disso, contrário ao que vem sendo publicado na literatura [15, 16, 17], demonstramos que a observação de tal comportamento não exige que o aparato de medida seja uma entidade quântica em um estado superposto. O resultado que segue também pode ser entendido como um simples experimento de apagador quântico.

2.6.1 Proposta experimental

Nossa proposta experimental, que é uma versão modificada do experimento explorado na seção anterior, consiste em um feixe de átomos preparados em uma superposição de dois estados de energia $|g\rangle$ (fundamental) e $|e\rangle$ (excitado), que correspondem a dois estados circulares de Rydberg, devido à passagem através de uma cavidade ressonante e radiativa fornecendo um pulso de radiação $\pi/2$. Após esse estágio, como ilustrado na figura 2.4, uma série de colimadores é utilizada para selecionar o feixe atômico de tal forma que ele possa atravessar um arranjo de fenda dupla, onde um padrão de interferência poderia ser medido. Entretanto, entre os colimadores e as fendas, os átomos atravessam duas outras cavidades ressonantes, posicionadas próximo às fendas, no estado de vácuo. A configuração dessas cavidades é tal que elas garantem que se o átomo está, por exemplo, no estado excitado antes de sua chegada à cavidade, ele certamente irá emitir um fóton lá, fornecendo informação sobre o caminho, e deixando a cavidade no estado fundamental após a sua passagem. Por outro lado, se o átomo estava no estado fundamental antes da sua chegada à cavidade, nenhum fóton será emitido, nenhuma informação sobre o caminho é fornecida, e, como no caso anterior, o átomo deixará a cavidade no estado fundamental. Assumimos que os átomos possuem estados de Rydberg em nossa análise devido ao fato desse tipo de estado possuir tempos longos de decaimento. Isso é importante porque não queremos que os átomos irradiem fora das cavidades. A presença, aparentemente ingênua, da cavidade radiativa no início do aparato é, efetivamente, a única diferença entre o caso que tratamos na seção anterior e o que estamos tratando agora. Entretanto, como veremos, isto muda radicalmente o comportamento quântico dos átomos quando comparados com o caso anterior. Aqui, uma vez que os átomos são preparados em um estado que é uma combinação

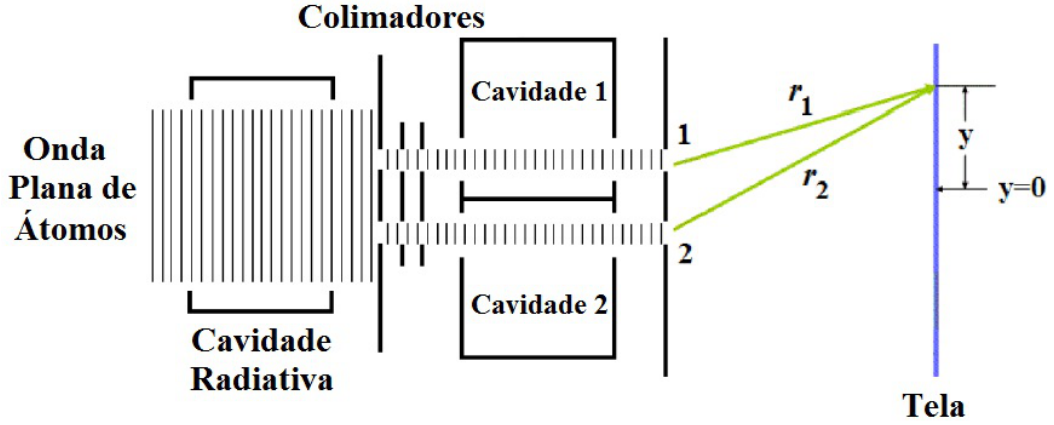


Figura 2.4: Esquema do experimento. Uma onda plana de átomos passa através de um grupo de cavidades antes de ser submetida a um arranjo de fenda dupla. Os colimadores guiam os átomos ao longo do caminho apropriado.

dos estados fundamental e excitado, e a informação sobre o caminho é fornecida em uma das cavidades apenas se os átomos colapsarem no estado excitado, seguindo a interpretação de Bohr [4], isto leva os átomos a estarem em uma superposição de comportamentos de partícula e de onda ao mesmo tempo. Por exemplo, se os átomos são preparados no estado $\frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle + |e\rangle)$ após a passagem pela cavidade radiativa, no final do processo temos o seguinte estado final

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|particula\rangle + |onda\rangle) |g\rangle, \quad (2.21)$$

com $|particula\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle |1\rangle + |\psi_2\rangle |2\rangle)$ e $|onda\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle |0\rangle + |\psi_2\rangle |0\rangle)$, onde $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ representam os estados quânticos dos átomos correspondendo à passagem pelas fendas 1 e 2, respectivamente. O ket $|0\rangle$ representa um estado no qual não existe nenhum fóton nas cavidades, e os kets $|1\rangle$ e $|2\rangle$ representam os estados no qual um fóton pode ser encontrado nas cavidades 1 e 2, respectivamente.

A matriz densidade para o sistema é dada por $\rho = |\psi\rangle \langle\psi|$. Entretanto, se estivermos interessados em descrever o comportamento dos átomos na tela de detecção, a matriz reduzida¹ relacionada à função de onda espacial dos átomos se faz importante. Ela é obtida calculando-se o traço da matriz densidade em relação aos estados do fóton na cavidade, e

¹Como mencionamos anteriormente, o formalismo da matriz reduzida será desenvolvido na seção 3.2.

da energia dos átomos na seguinte forma:

$$\rho_r = Tr_{n,E} |\psi\rangle \langle\psi| = \sum_{i=1}^3 \langle a_i|\psi\rangle \langle\psi|a_i\rangle, \quad (2.22)$$

onde $|a_1\rangle = |g\rangle|0\rangle$, $|a_2\rangle = |g\rangle|1\rangle$ e $|a_3\rangle = |g\rangle|2\rangle$. Sendo $\langle a_i|a_j\rangle = \delta_{ij}$, podemos obter $\rho_r = \frac{1}{4}\{2(|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + |\psi_2\rangle\langle\psi_2|) + |\psi_2\rangle\langle\psi_1| + |\psi_1\rangle\langle\psi_2|\}$. Esta matriz densidade corresponde à densidade de partículas $\rho(y)$ na tela de detecção, que é dada por:

$$\begin{aligned} \rho(y) &\equiv \langle y|\rho_r|y\rangle = \frac{1}{4}\{2(|\psi_1(y)|^2 + |\psi_2(y)|^2) \\ &+ \psi_2^*(y)\psi_1(y) + \psi_1^*(y)\psi_2(y)\}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde $\psi_i(y) = \langle y|\psi_i\rangle$, com $i = 1, 2$. Se tivéssemos um conjunto de átomos no estado excitado entrando nas cavidades, isto é, átomos com caráter de partícula, o comportamento do sistema seria descrito pela seguinte matriz reduzida $\rho_p = Tr_{n,E} |particula\rangle \langle particula| = \sum_{i=1}^3 \langle a_i|particula\rangle \langle particula|a_i\rangle$. Isto nos dá uma densidade de átomos na tela descrita por

$$\rho_p(y) \equiv \langle y|\rho_p|y\rangle = \frac{1}{2}\{|\psi_1(y)|^2 + |\psi_2(y)|^2\}. \quad (2.24)$$

Este foi exatamente o caso explorado na última seção, quando não se havia considerado o apagador quântico e nenhuma interferência podia ser observada [13]. Por outro lado, se todos os átomos estiverem no estado fundamental antes de entrarem nas cavidades, a matriz reduzida é escrita como $\rho_w = Tr_{n,E} |onda\rangle \langle onda| = \sum_{i=1}^3 \langle a_i|onda\rangle \langle onda|a_i\rangle$, que nos dá a seguinte densidade de átomos

$$\begin{aligned} \rho_w(y) &\equiv \langle y|\rho_w|y\rangle = \frac{1}{2}\{|\psi_1(y)|^2 + |\psi_2(y)|^2 \\ &+ \psi_2^*(y)\psi_1(y) + \psi_1^*(y)\psi_2(y)\}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Os últimos dois termos dão origem à interferência. Note que este é o caso do experimento da fenda dupla simples, onde a informação sobre o caminho tomado pelos átomos não está disponível. Porém, para o caso geral que apresentamos aqui, podemos escrever a densidade de átomos com estados de energia superpostos, equação (2.25), como

$$\rho(y) = \frac{1}{2}\{\rho_p(y) + \rho_w(y)\}, \quad (2.26)$$

que representa um padrão de interferência com visibilidade reduzida. Para que possamos ter alguma visualização, vamos assumir que a função de onda dos átomos após eles terem passado através de alguma fenda é uma onda do tipo esférica tal que podemos escrever

$$\psi_j(r_j) = \langle r_j | \psi_j \rangle = \frac{e^{ikr_j}}{r_j}, \quad (2.27)$$

com r_j representando a distância da fenda $j = 1, 2$ ao ponto em questão, e k o número de onda de de Broglie.

Agora, se considerarmos que a distância entre as fendas e a tela é muito maior que a distância entre as duas fendas, podemos usar limite de difração de Fraunhofer [18] e escrever $r_{1,2} \approx L \mp \theta y$, onde a coordenada y , o ângulo θ e a distância L são definidos na figura 2.5. Desta maneira, a equação (2.27) pode ser escrita como

$$\psi_{1,2}(y) = \langle y | \psi_{1,2} \rangle \approx \frac{e^{ik(L \mp \theta y)}}{L \mp \theta y}. \quad (2.28)$$

Com essas aproximações, se substituirmos (2.28) em (2.24), (2.25) e (2.26) e notarmos que os denominadores podem ser absorvidos em um fator de fase geral, podemos escrever a distribuição de probabilidade de átomos na tela de detecção, em torno do ponto $y = 0$, com caráter de partícula, de onda e misto, respectivamente como $\rho_p(y) \doteq 1$, $\rho_w(y) \doteq 1 + \cos(2k\theta y)$ e $\rho(y) \doteq \frac{1}{2}\{2 + \cos(2k\theta y)\}$. O símbolo \doteq significa igual, a menos de um fator. A figura 2.5 ilustra esses resultados. Como vemos, os átomos em uma superposição de estados de energia apresentam uma mistura de características de partícula e de onda. Assim, contrária à opinião de Bohr [4] - “O estudo da complementaridade exige arranjos experimentais mutuamente exclusivos”-, em nossa proposta experimental o arranjo não necessita ser alterado para se obter as duas propriedades. Podemos medir ambas propriedades com o mesmo experimento (Veja a equação (2.21)). Este resultado não é obtido na proposta de Scully *et al.* [13], no qual todos os átomos eram preparados no estado excitado (comportamento de partícula), necessariamente emitindo um fóton nas cavidades e, conseqüentemente, exibindo um padrão sem franjas de interferência. Para recuperar as franjas, eles propuseram que as cavidades deveriam ser conectadas, abrindo os obstrutores que as separavam inicialmente, e, dessa forma, modificando o aparato experimental em conformidade com a complementaridade de Bohr. Assim, agora podemos ver

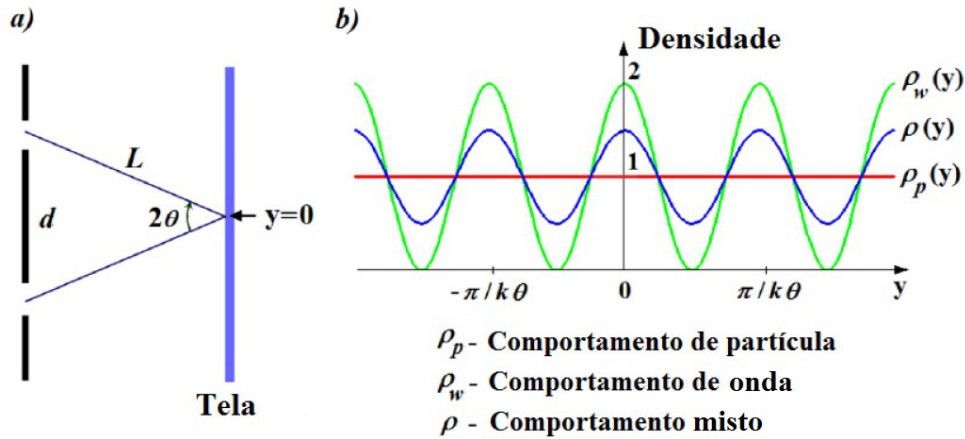


Figura 2.5: Nesta figura mostramos a) a distância L e o ângulo θ que determinam o arranjo da fenda dupla na figura 2.4, e b) um esboço da densidade aproximada de átomos com caráter de partícula, de onda e misto.

que o papel fundamental da cavidade radiativa no início do nosso experimento proposto é tornar possível medidas simultâneas dos comportamentos da partícula e de onda dos átomos com o mesmo arranjo experimental.

Recentemente, Ionicioiu e Terno demonstraram que fótons exibem um comportamento similar quando submetidos a um interferômetro Mach-Zehnder, no qual o segundo divisor de feixe é um objeto quântico em uma superposição de estados [15]. Essas previsões foram experimentalmente confirmadas em paralelo por Peruzzo *et al.* [16] e por Kaiser *et al.* [17] utilizando técnicas diferentes. Porém, todos esses trabalhos fortalecem a ideia de que medidas de fenômenos complementares com um único aparato experimental só é possível quando se empregam dispositivos de medida quânticos em um estado superposto, ou seja, que foram preparados assim. Contrariamente, isto não foi necessário aqui. Demonstramos que nenhum dispositivo de medida quântico se fez necessário para que os átomos manifestassem propriedades de partícula e de onda no mesmo experimento. Ao invés, vimos que apenas o fato do sistema quântico - os átomos em nosso caso - estar em uma superposição de estados que estão correlacionados um a um com os comportamentos de partícula e de onda, é suficiente para satisfazer a exigência. Este fato, sem dúvida, acarreta uma maior simplicidade do arranjo experimental.

Sabemos que átomos no estado $|\psi\rangle$ podem ter comportamento de onda ou de partícula com a mesma probabilidade. Entretanto, este resultado pode ser generalizado para uma superposição arbitrária. Realizamos isso variando o tempo de interação entre o átomo e a cavidade radiativa. Durante esse estágio do experimento, a energia do átomo oscila entre $|g\rangle$ and $|e\rangle$ devido a chamada oscilação de Rabi [19]. O estado do átomo como função do tempo pode ser escrito como $|\psi\rangle = c_g(t) |g\rangle + c_e(t) |e\rangle$, onde $c_g(t)$ e $c_e(t)$ são amplitudes de probabilidade dependentes do tempo. Dessa forma, selecionando a velocidade dos átomos, podemos controlar o tempo de interação com a cavidade radiativa de tal forma que, após à passagem através das cavidades não radiativas, obtemos o seguinte estado

$$|\psi'\rangle = (\cos\alpha |particula\rangle + \sin\alpha |onda\rangle) |g\rangle. \quad (2.29)$$

Neste caso, a densidade de átomos na tela de detecção é dada por

$$\rho(\alpha, y) = \rho_p(y)\cos^2\alpha + \rho_w(y)\sin^2\alpha. \quad (2.30)$$

Assim, variando α , ou seja, variando a velocidade dos átomos, podemos modificar continuamente o padrão de interferência na tela. Desta maneira, os átomos apresentam um comportamento mutável entre partícula e onda em um mesmo arranjo experimental, que parece ser uma nova característica para ondas de matéria. Este comportamento também foi recentemente demonstrado para fótons [15].

2.6.2 Apagador quântico (revisitado)

É interessante analisar este experimento como um apagador quântico. Diferentemente da proposta original [9], não tivemos que apagar a informação sobre o caminho, conectando as cavidades, para recuperar o padrão de interferência. De fato, em nossa proposta, precisamos apenas verificar se existe algum fóton dentro de alguma das cavidades, sem a necessidade de mudar a sua estrutura, como proposto originalmente. Além disso, esta verificação pode ser feita após os átomos já terem sido detectados na tela, ou seja, podemos descobrir se o átomo se comportou como partícula ou como onda, por exemplo, um longo tempo após a sua detecção na tela. Para melhor esclarecer esse ponto, imagine que após

um átomo ter sido detectado na tela, analisamos as cavidades e verificamos se existe algum fóton. Se então decidirmos marcar na tela apenas os átomos que não deixaram nenhum fóton nas cavidades, ignorando os átomos que deixaram fótons, um padrão de interferência puro seria obtido. Por outro lado, se for decidido marcar apenas os átomos que deixaram fótons nas cavidades, a tela apresentaria um padrão puramente clássico, ou seja, sem franjas.

Para ser mais específico, enfatizamos do ponto de vista experimental a diferença crucial entre o que propomos nesta seção e o que foi apresentado na seção anterior. Para recuperar o padrão de interferência, a nossa proposta exige apenas que observemos dentro das cavidades para verificar quais átomos deixaram fótons para trás; ao passo que a proposta anterior exige que o par de obstrutores entre as cavidades seja aberto, formando uma única cavidade (modificando o aparato) e permitindo que o fóton seja absorvido (ou não) pelo detector posicionado à meia distância entre as duas cavidades que se tinha inicialmente. Razoavelmente, entendemos que a proposta atual é muito mais simples de ser realizada experimentalmente, desde que não vemos nenhum obstáculo que não possa ser contornado utilizando a tecnologia atual. Contrariamente, a proposta anterior parece ser bastante sutil e árdua. Como já mencionamos anteriormente, a proposta anterior nunca foi realizada na sua forma original.

2.6.3 Discussão

De forma mais abrangente, podemos dizer que propomos e analisamos uma nova versão do apagador quântico proposto por Scully *et al.*, onde algumas importantes modificações foram apontadas. Primeiro, estendemos o comportamento mutável entre partícula e onda, recentemente descoberto para fótons [15], para as ondas de matéria (átomos). Isto sugere que tanto a matéria quanto a radiação pode exibir comportamentos complementares simultâneos quando observados em um mesmo experimento, apontando para uma reinterpretação do princípio da complementaridade. Entretanto, contrariamente ao que vem sendo apresentado na literatura recente [15, 16, 17], demonstramos que essa característica não requer um aparato quântico de medida preparado em um estado superposto. Ao invés,

vimos que, mesmo na ausência de dispositivos quânticos, um sistema cujo estado de energia está em uma superposição de autoestados que estão correlacionados um a um com funções de onda espaciais do tipo partícula e do tipo onda, também possui esta propriedade.

Segundo, nossa proposta se mostrou um simples apagador quântico, onde as cavidades serviram como fornecedores da informação sobre o caminho. O padrão de interferência pode ser totalmente recuperado, simplesmente relacionando os dados dos átomos detectados na tela com o número de fótons no interior das cavidades, e negligenciando as detecções que correspondem aos átomos com comportamento de partícula, ou seja, aqueles que depositaram um fóton em uma das cavidades. Particularmente, consideramos que a nossa proposta do apagador quântico é mais simples que a proposta original [13], pois o obstáculo experimental de conectar as cavidades antes da medida não se fez necessário aqui.

Capítulo 3

Decoerência e a transição entre os mundos quântico e clássico

Um dos elementos mais revolucionários introduzidos na teoria quântica foi o princípio da superposição, matematicamente fundamentado na linearidade do espaço de Hilbert. Se $|1\rangle$ e $|2\rangle$ são dois estados, então a mecânica quântica nos diz que qualquer combinação linear $\alpha|1\rangle + \beta|2\rangle$ também corresponde a um possível estado. Como tais superposições têm sido exaustivamente estudadas do ponto de vista experimental para sistemas microscópicos (por exemplo, através da observação dos efeitos de interferência), a aplicação do formalismo aos sistemas macroscópicos parece levar imediatamente a contradições com a nossa experiência da vida diária. Esta tese nunca será observada numa superposição de estar localizada “aqui” e “ali” (ou seja, numa superposição de posições macroscopicamente distinguíveis), nem um gato de Schrödinger estará em uma superposição de vivo e morto. Dessa forma, o problema é como reconciliar a variedade de possibilidades disponíveis a um espaço de Hilbert de possíveis estados com o, comparativamente reduzido, grupo de estados macroscópicos clássicos, caracterizado por ter um pequeno número de propriedades robustas, como posição e momento. Por que o mundo nos parece clássico, apesar de ter uma natureza quântica por trás de tudo, que, em princípio, permite superposições arbitrárias?

Em essência, o problema da medida lida com a transição do mundo quântico, descrito essencialmente por superposições arbitrárias de vetores de estado, para a nossa percepção dos estados “clássicos” do mundo macroscópico, ou seja, um pequeno subgrupo dos estados

permitidos pelo princípio da superposição da mecânica quântica. A questão do porquê e como a nossa experiência do mundo clássico surge da mecânica quântica encontra-se no coração dos fundamentos da teoria.

A teoria da decoerência tem sido apontada como a explicação para esta transição, considerando que a quase inevitável interação do sistema quântico com o ambiente ao seu redor leva as propriedades quânticas a desaparecerem dando lugar ao surgimento das manifestações clássicas. Neste capítulo vamos explorar um pouco a respeito de como a transição entre os mundos clássico e quântico é justificada pela teoria da decoerência. A partir da próxima seção veremos um pouco do formalismo matemático necessário para o desenvolvimento da teoria.

3.1 O conceito e a interpretação da matriz densidade

A matriz densidade, especialmente a matriz densidade reduzida (ou simplesmente matriz reduzida), faz um papel importante na descrição formal da decoerência. A principal razão para isso é fato de que o emaranhamento entre o sistema e o ambiente torna impossível a atribuição de um estado quântico individual ao sistema. Porém, como veremos, a matriz reduzida fornece um método elegante para representar a estatística de medidas do sistema.

3.1.1 Matriz densidade

Vamos começar com o conceito fundamental de estado quântico. Como se sabe, o estado $|\psi\rangle$ carrega a máxima informação disponível sobre o estado do sistema. Este talvez seja o postulado mais fundamental da teoria quântica. Podemos, como bem, definir o operador densidade ρ que corresponde ao estado $|\psi\rangle$ como

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|, \quad (3.1)$$

que é simplesmente o operador projeção do estado $|\psi\rangle$. Nesta tese, vamos utilizar os termos matriz densidade e operador densidade indistintamente. Mas, estritamente falando,

a matriz densidade refere-se à representação matricial do operador densidade em uma base particular.

Se expressarmos $|\psi\rangle$ como uma superposição dos estados base $|\psi_i\rangle$,

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |\psi_i\rangle, \quad (3.2)$$

a matriz densidade correspondente escrita na base $\{|\psi_i\rangle\}$ se lê

$$\rho = |\psi\rangle \langle\psi| = \sum_{ij} c_i c_j^* |\psi_i\rangle \langle\psi_j|. \quad (3.3)$$

Os termos $i \neq j$ no lado direito da equação incorporam a coerência quântica entre as diferentes componentes $|\psi_i\rangle$. Dessa forma, eles são usualmente chamados de termos de interferência, ou termos não-diagonais (uma vez que eles se encontram fora da diagonal da matriz densidade na base $\{|\psi_i\rangle\}$).

Entretanto, é importante ter em mente que tais termos de interferência estão sempre relacionados com uma base específica, ou seja, coerência e interferência estão presentes entre certas componentes $|\psi_i\rangle$. Existe sempre uma base no qual a matriz densidade torna-se diagonal, e, dessa maneira, não haverá termos de interferência nessa base. Assim, a nossa associação entre interferência (coerência) e o caráter quântico do sistema não deve nos levar ao erro de pensar que a ausência de interferência na matriz densidade escrita em uma determinada base implica que o sistema “não tem propriedades quânticas”, ou se “comporta classicamente”. A base na qual a matriz densidade assume sua forma diagonal pode não corresponder àquela cujos estados representam as quantidades comuns em nossa experiência diária, como posição e momento. Se expressa em uma base diferente, termos de interferência vão em geral reaparecer, mostrando que a coerência quântica permanece entre os novos estados base.

Vamos agora introduzir a operação do traço, denotada por “Tr”. Esta operação sempre atua em algum operador e é implementada da seguinte forma: Escolha uma base ortonormal do espaço de Hilbert do sistema, e efetue a operação

$$Tr(A) = \sum_i \langle\phi_i|A|\phi_i\rangle. \quad (3.4)$$

É fácil mostrar que esta operação é linear,

$$\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B), \quad (3.5)$$

e que é independente da escolha da base $\{|\phi_i\rangle\}$. Assim, podemos utilizar qualquer grupo arbitrário de vetores base para calcular o traço.

Qual a razão de introduzirmos a operação do traço? Para respondermos essa questão, vamos considerar o operador $A = \rho O$, formado pelo produto de uma matriz densidade e um operador hermitiano O representando algum observável que é medido no sistema. Vamos escolher os autoestados $|o_i\rangle$ de O , com autovalores o_i (vamos assumir um espectro discreto aqui), como a base ortonormal para se calcular o traço de ρO . Isso nos dá

$$\text{Tr}(\rho O) = \sum_i \langle o_i | (|\psi\rangle \langle \psi| O) | o_i \rangle = \sum_i o_i |\langle o_i | \psi \rangle|^2. \quad (3.6)$$

Porém, o termo $|\langle o_i | \psi \rangle|^2$ é simplesmente a densidade de probabilidade de obtermos um autovalor o_i em uma medida representada por O . Assim $\text{Tr}(\rho O)$ representa uma média sobre todos os possíveis resultados o_i desta medida, com os pesos dados pela densidade de probabilidade. Mas, esta é justamente a definição de valor esperado $\langle O \rangle$ de um observável. Esta conexão entre o processo matemático do traço do operador O e o conceito físico do valor esperado de uma medida é conhecido como a “regra do traço”,

$$\langle O \rangle = \text{Tr}(\rho O). \quad (3.7)$$

Se escolhermos $O = I$, obtemos um resultado esperado: $\text{Tr}\rho = 1$. Esta relação simplesmente reflete o fato de que estados puros são normalizados, ou seja, que $|\langle \psi | \psi \rangle|^2 = 1$. Antes de prosseguir, é importante enfatizar que o conceito e a interpretação do traço se baseia fundamentalmente na definição de probabilidade na mecânica quântica.

3.2 Matriz densidade reduzida

Como mencionamos anteriormente, a matriz reduzida tem um papel importante na descrição da decoerência. Porém, ela foi estabelecida nos primeiros anos da mecânica

quântica [20]. Vejamos um exemplo genérico. Considere um sistema quântico A que está correlacionado quanticamente, ou seja, emaranhado, com outro sistema B . Neste caso, suponha que o estado quântico do sistema total AB pode ser completamente conhecido. Entretanto, se um observador tiver acesso apenas ao subsistema A , e não ao subsistema B , tudo que pode ser conhecido sobre o estado do sistema como um todo só pode ser extraído através de medidas locais em A , ou seja, o observador tem acesso apenas à distribuição de probabilidade relacionada com medidas sobre o subsistema A . A pergunta-chave agora é: qual é o objeto matemático na teoria quântica que contém, corretamente, toda a informação que pode ser extraída pelo observador do subsistema A ? A resposta é que esse objeto é a matriz reduzida do subsistema A , que é dada por

$$\rho_A \equiv Tr_B(\rho). \quad (3.8)$$

Aqui, o subscrito “ B ” significa que o traço deve ser tomado utilizando uma base ortonormal do espaço de Hilbert H_B de B apenas. Dessa forma, a operação Tr_B é chamada também de traço parcial sobre B e pode ser interpretada como uma média sobre os graus de liberdade do sistema não observado, B . Assim, a equação (3.8) implica que a estatística de medidas para todos os observáveis pertencendo apenas ao subsistema A está completamente contida na matriz reduzida ρ_A , obtida a partir do traço parcial da matriz densidade total sobre os estados de B .

3.2.1 Relevância no estudo da decoerência

Antes de demonstrar a equação (3.8), vamos discutir a importância do conceito da matriz reduzida na descrição da decoerência. Lembre-se que a decoerência surge a partir das interações entre dois sistemas, o sistema de interesse e o ambiente. Tipicamente, tais interações levarão ao emaranhamento entre o sistema e o ambiente. Usualmente, o observador realizará medidas apenas no sistema de interesse, ao passo que o ambiente é tipicamente inacessível e não pode ser completamente medido, ou é simplesmente sem interesse para o observador. Como exemplo, podemos considerar o ambiente como sendo constituído de fótons que são espalhados pelo sistema de interesse. Na prática, é impossível

interceptar todos esses fótons espalhados, e, dessa forma, o observador será capaz de medir observáveis que pertencem somente ao sistema, ou talvez a uma pequena fração dos fótons.

É neste ponto que a matriz reduzida mostra o seu poder. Calculando-se o traço da matriz densidade do par sistema-ambiente sobre todos os estados possíveis do ambiente, obtemos uma completa descrição sobre a estatística das medidas para o sistema de interesse em termos da matriz reduzida desse sistema. Toda influência do ambiente nas medidas locais realizadas no sistema serão automaticamente incorporadas na matriz reduzida. Uma vez que o sistema está emaranhado com o ambiente, nenhum estado quântico individual pode ser atribuído ao sistema. Assim, a matriz reduzida é tudo que é disponível na descrição da estatística das medidas do sistema, e esta matriz, necessariamente, não conterá os termos de coerência (ou interferência) responsáveis pelas propriedades quânticas na presença do emaranhamento entre o sistema e o ambiente.

3.2.2 Demonstração da matriz densidade reduzida

Vamos agora derivar a equação (3.8) para a matriz reduzida. Para isso, consideraremos o estado de dois sistemas A e B da forma

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a_1\rangle |b_1\rangle + |a_2\rangle |b_2\rangle), \quad (3.9)$$

onde $|a_i\rangle$ e $|b_i\rangle$, $i = 1, 2$, são estados normalizados de A e B (mas não necessariamente ortogonais), respectivamente. Da equação (3.1), podemos escrever a matriz densidade como:

$$\rho = |\psi\rangle \langle\psi| = \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^2 |a_i\rangle \langle a_j| b_i\rangle \langle b_j|. \quad (3.10)$$

Consideremos também $\{|\psi_k\rangle\}$ e $\{|\phi_l\rangle\}$ como bases ortonormais dos espaços de Hilbert H_A e H_B referentes a A e B , respectivamente.

Vamos agora assumir que observáveis atuando somente no sistema A , que pode ser escrito como $O_A \otimes I_B$, onde I_B é o operador identidade no espaço de Hilbert de B . Seguindo nossa antiga questão, gostaríamos de saber a respeito da existência de um possível objeto matemático capaz de nos fornecer resultados estatístico acerca de um dos subsistemas individualmente.

Já é sabido que o valor esperado $\langle O \rangle$ de qualquer observável pode ser calculado utilizando a regra do traço, (3.7). Assim, uma vez que $O = O_A \otimes I_B$, a parte do traço pertencente ao sistema B pode imediatamente ser conduzida. Explicitamente, obtemos que

$$\begin{aligned}
\langle O \rangle &= Tr(\rho O) \\
&= \sum_{kl} \langle \phi_l | \langle \psi_k | \rho(O_A \otimes I_B) | \psi_k \rangle | \phi_l \rangle \\
&= \sum_k \langle \psi_k | \left(\sum_{l=1} \langle \phi_l | \rho | \phi_l \rangle \right) O_A | \psi_k \rangle \\
&= \sum_k \langle \psi_k | [Tr_B(\rho)] O_A | \psi_k \rangle \\
&= \sum_k \langle \psi_k | \rho_A O_A | \psi_k \rangle \\
&= Tr_A(\rho_A O_A),
\end{aligned} \tag{3.11}$$

onde ρ_A é precisamente a matriz reduzida apresentada na equação (3.8).

O conceito de matriz reduzida pode ser generalizado a partir de dois subsistemas emaranhados para estados contendo N subsistemas. Considere um observável O que pertence apenas ao subsistema i ,

$$O = I_1 \otimes I_2 \otimes \dots \otimes I_{i-1} \otimes O_i \otimes I_{i+1} \otimes \dots \otimes I_N. \tag{3.12}$$

A estatística de medidas de O gerada aplicando a regra do traço será então dada por

$$\rho_i = Tr_{1,2,\dots,i-1,i+1,\dots,N}(\rho), \tag{3.13}$$

onde a operação do traço foi aplicada em relação a todos os subsistemas, exceto i . Dessa maneira, em analogia com a equação (3.11), podemos escrever

$$\langle O \rangle = Tr(\rho O) = Tr_i(\rho_i O_i). \tag{3.14}$$

3.2.3 Medidas locais de interferência e distinguibilidade

No caso de dois subsistemas, equação (3.9), podemos facilmente calcular ρ_A a partir da expressão da matriz densidade total (3.10). Expandindo os estados $|b_i\rangle$, $i = 1, 2$, de B em

termos da base $\{|\phi_l\rangle\}$ de estados ortonormais de H_B ,

$$|b_i\rangle = \sum_l c_l^{(i)} |\phi_l\rangle, \quad (3.15)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \rho_A &= Tr_B \left(\frac{1}{2} \sum_{ij=1}^2 |a_i\rangle \langle a_j| \otimes |b_i\rangle \langle b_j| \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^2 |a_i\rangle \langle a_j| \sum_k \langle \phi_k| \left(\sum_{l'} c_l^{(i)} (c_{l'}^{(j)})^* |\phi_l\rangle \langle \phi_{l'}| \right) |\phi_k\rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^2 |a_i\rangle \langle a_j| \sum_k c_k^{(i)} (c_k^{(j)})^* \\ &= \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^2 |a_i\rangle \langle a_j| \langle b_j| b_i \rangle \\ &= \frac{1}{2} (|a_1\rangle \langle a_1| + |a_2\rangle \langle a_2| + |a_1\rangle \langle a_2| \langle b_2| b_1 \rangle + |a_2\rangle \langle a_1| \langle b_1| b_2 \rangle). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Este resultado pode se facilmente generalizado para o caso no qual o sistema composto AB não é descrito apenas pelo estado de duas componentes, mas por um estado com N componentes dado por $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N |a_n\rangle |b_n\rangle$ com $N > 2$. Então, a matriz reduzida resultante toma a seguinte forma

$$\rho_A = \frac{1}{N} \sum_{ij=1}^N |a_i\rangle \langle a_j| \langle b_j| b_i \rangle. \quad (3.17)$$

Podemos ver da equação (3.16) que a influência do sistema B na estatística das medidas é agora efetivamente incluída no produto interno $\langle b_2| b_1 \rangle = \langle b_1| b_2 \rangle^*$ dos estados do sistema B , $|b_1\rangle$ e $|b_2\rangle$, que multiplicam os termos não-diagonais $|a_1\rangle \langle a_2|$ e $|a_2\rangle \langle a_1|$ da matriz reduzida. Como já mencionamos, esses termos não-diagonais correspondem à interferência entre os estados $|a_1\rangle$ e $|a_2\rangle$.

Assim, obtemos um resultado muito importante: A quantidade de superposição entre os estados relativos $|b_1\rangle$ e $|b_2\rangle$ de B , que são correlacionados um a um com os estados $|a_1\rangle$ e $|a_2\rangle$ pertencentes ao subsistema A , quantificam o grau da interferência na base $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$, que pode ser medida no subsistema A . Dessa forma, temos uma conexão íntima entre o

grau de emaranhamento, a distinção entre os estados, e o grau da interferência que pode ser observada fazendo medidas em apenas um dos subsistemas.

Como exemplo, temos o caso limite em que a superposição dos estados $|b_1\rangle$ e $|b_2\rangle$ é nula (perfeita distinguibilidade), e a matriz densidade (3.16) torna-se diagonal na base $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$

$$\rho_A = \frac{1}{2}[|a_1\rangle\langle a_1| + |a_2\rangle\langle a_2|]. \quad (3.18)$$

Como os termos não-diagonais $|a_1\rangle\langle a_2|$ e $|a_2\rangle\langle a_1|$ estão ausentes, não há observável local $O = O_A \otimes I_B$ que possibilite medir interferência entre os estados $|a_1\rangle$ e $|a_2\rangle$.

3.3 O ambiente como monitor do estado

Considere este papel. Ele está imerso em um grande ambiente de moléculas de ar, luz, fótons térmicos, neutrinos cósmicos e até mesmo a radiação cósmica de fundo. A cada segundo, uma quantidade enorme de partículas colidirá e será espalhada por ele. Cada uma dessas colisões irá defletir as partículas de alguma forma, dependendo da posição e da orientação dele. Considere uma única molécula de ar. Ela começa em uma posição inicial com uma certa velocidade, é espalhada pelo papel, e então se afasta ao longo de uma trajetória defletida de um certo ângulo com respeito ao caminho inicial.

Suponha que o papel estava orientado em um ângulo diferente. Agora, a molécula de ar se afastaria descrevendo uma trajetória diferente da do primeiro caso. Assim, esses dois caminhos distintos da molécula espalhada nos permitiria distinguir a existência de orientações espaciais diferentes do papel. Em outras palavras, as moléculas espalhadas carregam informação sobre a posição e a orientação do objeto espalhador, que aqui está representado pelo papel. Utilizando uma terminologia familiar, as moléculas carregam informação sobre o estado do sistema.

Uma única molécula de ar colidindo com o papel pode não carregar muita informação sobre a orientação dele, mesmo porque o espalhamento ocorre em uma região muito pequena comparada com o seu tamanho. A completa informação sobre o estado (ou a posição) carregada em todas as moléculas, quando reunida, certamente será suficiente para distinguir

duas diferentes posições (ou orientações) do papel, mesmo que ambas sejam muito similares.

Vamos expressar nosso argumento em termos do formalismo quântico. Considere as N partículas que serão espalhadas deste papel no decorrer de um segundo. Vamos representar o estado quântico de todas antes da colisão por $|A_0\rangle$. Após a colisão, cada partícula se afastará ao longo de uma certa trajetória com uma dada velocidade. Se o papel estivesse orientado de maneira diferente, as partículas seriam espalhadas de uma maneira um pouco diferente. Assim, dependendo da orientação do papel, e supondo que N partículas são espalhadas, denotamos o estado do ambiente após as colisões por $|A_1\rangle$ e $|A_2\rangle$, respectivamente.

Seguindo os argumentos expostos acima, esses dois estados são claramente distinguíveis, uma vez que a informação contida neles é suficiente para discriminar entre os dois estados de orientação do papel. Dessa forma, a superposição entre $|A_1\rangle$ e $|A_2\rangle$ será desprezível. Vemos claramente que, em conexão com o que expomos na seção 3.2.3: os estados do ambiente $|A_1\rangle$ e $|A_2\rangle$ simplesmente correspondem aos estados que fornecem informação sobre a orientação do sistema.

O ponto crucial é que esses estados do ambiente estão sempre presentes na natureza. Cada objeto interage com seu ambiente, que por sua vez obtém informação sobre certas propriedades físicas do sistema. Poderíamos, em princípio, blindar este papel em relação às moléculas de ar colocando-o em um bom vácuo, bloquear os fótons e reduzir a influência dos fótons térmicos através de resfriamento. Mesmo assim, partículas provenientes de outras fontes permaneceriam de tal forma a medir o estado de posição ou orientação do papel. Em outras palavras, o ambiente é um medidor onipresente.

Suponha, por exemplo, que o sistema é descrito por uma superposição coerente de dois estados quânticos $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ representando a localização em torno de duas posições x_1 e x_2 (no caso da fenda dupla, os estados correspondentes seriam $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$, representando as funções de onda emergindo das fendas). Antes do espalhamento das partículas do ambiente ocorrerem, os estados do sistema e do ambiente assumem a seguinte forma

$$|\psi\rangle |A_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) |A_0\rangle. \quad (3.19)$$

Seguindo a nossa discussão sobre o esquema de medida de von Neumann (seção 2.3), a interação entre o sistema e o ambiente é dada por

$$|\psi_1\rangle |A_0\rangle \rightarrow |\psi_1\rangle |A_1\rangle \quad (3.20)$$

e

$$|\psi_2\rangle |A_0\rangle \rightarrow |\psi_2\rangle |A_2\rangle. \quad (3.21)$$

Ou seja, o estado do ambiente evolui para $|A_1\rangle$ e $|A_2\rangle$ dependendo do estado do sistema. Então, a linearidade da equação de Schrödinger implica que

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) |A_0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle |A_1\rangle + |\psi_2\rangle |A_2\rangle). \quad (3.22)$$

Como vemos, os estados relativos $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ do sistema se tornaram emaranhados com os estados do ambiente $|A_1\rangle$ e $|A_2\rangle$ que carregam informação sobre o caminho. A superposição inicialmente restrita ao sistema agora se expandiu, passando a ser uma propriedade conjunta do sistema e do ambiente. Frequentemente se diz que a coerência foi “deslocalizada” de tal forma que também envolva o ambiente. A dinâmica de evolução do sistema e do ambiente descrita por (3.22) é a forma básica de representação do processo de decoerência. Suas consequências serão vistas na próxima seção.

3.4 Decoerência e supressão local da interferência

A matriz reduzida ρ_{part} do sistema (partícula) para o estado (3.22) é dada por

$$\rho_{part} = \frac{1}{2} [|\psi_1\rangle \langle\psi_1| + |\psi_2\rangle \langle\psi_2| + |\psi_1\rangle \langle\psi_2| \langle A_2|A_1\rangle + |\psi_2\rangle \langle\psi_1| \langle A_1|A_2\rangle] \quad (3.23)$$

Como usual, os últimos dois termos correspondem à interferência entre os estados $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$. Dado que o ambiente carrega informação sobre o estado do sistema, os estados finais do ambiente $|A_1\rangle$ e $|A_2\rangle$ serão aproximadamente ortogonais, $\langle A_2|A_1\rangle \approx 0$. Então, a interferência na matriz reduzida (3.23) será suprimida,

$$\rho_{part} \approx \frac{1}{2} [|\psi_1\rangle \langle\psi_1| + |\psi_2\rangle \langle\psi_2|]. \quad (3.24)$$

Apenas medidas que incluíssem tanto o sistema quanto o ambiente poderiam possivelmente revelar a persistência da coerência entre as componentes da superposição de estados. Entretanto, na prática, é impossível incluir em nossas observações todos os graus de liberdade do ambiente que interagiram com o sistema. Assim, os termos de interferência permanecem presentes em nível global entre o sistema e o ambiente, mas são inobserváveis em nível local do sistema como descrito pela matriz reduzida (3.24).

Devido ao grande número de graus de liberdade do ambiente interagindo com o sistema e a nossa falta de habilidade de manipulá-los diretamente, a criação do emaranhamento entre o sistema e o ambiente descrito na equação (3.22) é efetivamente impossível de reverter na prática. Assim, o ambiente induziu a perda local da coerência, ou seja, a relação de fase bem definida entre as componentes do estado que o sistema tinha no início. Para fins práticos, consideramos esta supressão como irreversível. Isso é o que se chama decoerência, de fato.

Diz-se que a decoerência é quase onipresente pelo fato de que, na natureza, todos os sistemas quânticos são abertos e interagem fortemente com o ambiente que os rodeia. Em nosso exemplo, quanto maior o sistema, maior o número de partículas espalhados por ele, e maior a quantidade de informação sobre o seu estado carregada pelo ambiente. Assim, sistemas mesoscópicos e macroscópicos são excessivamente susceptíveis à decoerência, o que explica o fato de que as superposições e as interferências espaciais sejam extremamente difíceis de se observar na natureza.

O formalismo que descrevemos sobre decoerência foi baseado no argumento intuitivo de que os estados relativos do ambiente $|A_1\rangle$ e $|A_2\rangle$ tornam-se distinguíveis tal que o ambiente pode atuar como um monitor do estado do sistema. Vários pesquisadores têm se dedicado à formulação de modelos de interação entre sistemas e ambientes em várias situações físicas de interesse. Isso nos dá uma descrição precisa da evolução temporal dos estados do ambiente e da influência sobre a dinâmica da matriz reduzida do sistema. Tipicamente, esses modelos mostram que os diferentes estados relativos do ambiente $|A_i(t)\rangle$ tornam-se distinguíveis em escalas de tempo muito curtas, como resultado da interação entre o sistema e o ambiente.

Especificamente, para muitos modelos de interação, a superposição entre os diferentes

estados relativos do ambiente $|A_i(t)\rangle$ exibe um decaimento exponencial no tempo, ou seja,

$$\langle A_i(t)|A_j(t)\rangle \propto e^{-t/\tau_d}, \quad (3.25)$$

com $i \neq j$. Considere que $t = 0$ corresponde ao tempo no qual a interação é “acionada”. O fator τ_d denota o tempo característico de decoerência, que pode ser calculado numericamente de acordo com os parâmetros aplicados no modelo.

Analisando a equação (3.25), esses decaimentos das superposições entre os estados do ambiente $|A_i(t)\rangle$ têm uma influência direta na dependência temporal da supressão da coerência entre os estados do sistema, que são correlacionados um a um com os do ambiente. Para estudarmos qualitativamente a dinâmica da decoerência para um dado par sistema-ambiente, devemos estimar a forma explícita de $|A_i(t)\rangle$.

Para citarmos um exemplo, temos o caso da superposição dos estados relativos do ambiente no que diz respeito à decoerência espacial devido ao espalhamento de fótons ou de moléculas de ar [21].

$$\langle A_x(t)|A_{x'}(t)\rangle \propto e^{-\Lambda|x-x'|^2t}. \quad (3.26)$$

Aqui, $|A_x(t)\rangle$ denota os estados relativos do ambiente que são relacionados um a um com os estados do sistema que descrevem a posição do centro de massa na posição x . A constante Λ é determinada por propriedades físicas particulares do tipo de espalhamento. Podemos ver que o produto interno (3.26) decresce exponencialmente com o tempo. Esta expressão é um exemplo do decaimento exponencial, que é frequentemente encontrado. As partículas do ambiente se espalham continuamente a partir do objeto, aumentando a quantidade de informação sobre o estado (ou posição) que está contida no ambiente.

Também podemos observar da equação (3.26) que a escala de tempo característico da decoerência τ_d é inversamente proporcional ao quadrado da separação coerente $|x - x'|$ entre as posições x e x' do sistema. Este resultado pode ser entendido através do seguinte argumento intuitivo. Se as posições x e x' estão próximas, o estados finais relativos das partículas espalhadas é muito parecido, fazendo com que seja dificilmente resolvido pelo ambiente. Dessa forma, um decaimento notável do produto interno $\langle A_x(t)|A_{x'}(t)\rangle$ requer a acumulação de um grande número de espalhamentos, cada um carregando uma

informação incompleta sobre o estado do sistema. Contrariamente, quanto mais separadas forem as posições x e x' , mais facilmente o ambiente será capaz de distinguir entre essas duas posições. No limite onde $|x - x'|$ é suficientemente grande, tal que cada espalhamento é capaz de resolver essas posições individualmente, o decaimento exponencial do produto interno $\langle A_x(t)|A_{x'}(t)\rangle$ torna-se independente da separação $|x - x'|$, e é simplesmente proporcional à taxa total de espalhamento Γ_{tot} . Neste limite, a expressão (3.26) pode ser substituída por

$$\langle A_x(t)|A_{x'}(t)\rangle \propto e^{-\Gamma_{tot}t}. \quad (3.27)$$

Com isso, encerramos a nossa breve introdução à decoerência.

3.5 Decoerência temporal em um interferômetro de duas partículas

Como mencionamos no capítulo 2, fenômenos de interferência em mecânica quântica são, segundo Feynman [5], o único mistério da teoria, que é impossível de explicar por vias clássicas. Naquela ocasião, Feynman se referia ao experimento da fenda dupla. Recentemente, mais precisamente a partir dos anos 1990, uma nova classe de fenômenos de interferência foi descoberta: a interferência de duas partículas [22, 23, 24]. Diferentemente dos usuais interferômetros de uma partícula, essa nova classe produzia interferência na taxa de coincidência na detecção das duas partículas (para uma boa revisão, o artigo de Mandel é indicado [25]). Desde aquela época, vários experimentos desse tipo foram realizados, iniciando uma importante e promissora área na ótica quântica.

Neste contexto, seria importante nos questionarmos como se dá o efeito da decoerência para esse caso. É sabido que os sistemas de duas ou mais partículas possuem importantes propriedades como emaranhamento e medidas de interferência de altíssima precisão [26], que podem fazer desses sistemas ótimos candidatos a objeto de estudo da decoerência. A maneira na qual o ambiente perturba o padrão de interferência de uma única partícula já está bem fundamentada com o que expomos até aqui. Entretanto, um estudo profundo da maneira na qual a decoerência atua em um sistema de duas ou mais partículas ainda é

algo a ser explorado.

Nesta seção estabeleceremos uma conexão direta entre a decoerência e a interferência de duas partículas de uma maneira bastante simples. Para isso, discutiremos uma experiência de pensamento devido originalmente a Horne e Zeilinger [27], que permitiu o uso de cálculos simples na descrição do comportamento do sistema após a interação com o ambiente, que aqui será representado por um “banho de fótons” com energia bem definida. Particularmente, uma vez que a interferência nesse tipo de sistema está relacionada com o tempo no qual as partículas são detectadas, ao invés de uma distribuição espacial na tela de detecção, chamaremos esse tipo de distúrbio de decoerência quântica temporal (DQT), em analogia com o efeito da decoerência temporal comum em ótica clássica [18].

3.5.1 Proposta experimental

A nossa proposta, que se baseia em outra bem explorada por Gottfried [28], consiste em analisar as partículas produzidas no seguinte processo de decaimento $A \rightarrow a + b$, no qual as partículas filhas são, cada uma, submetidas a um experimento de fenda dupla como mostrado na figura 3.1. Se considerarmos que A estava aproximadamente em repouso, podemos ver que, devido à conservação do momento, a e b se propagarão, aproximadamente, em direções opostas. Dessa forma, se a passa através de uma das fendas no lado direito, b deve passar através da fenda no lado esquerdo que se encontra diametralmente oposta àquela atravessada por a . Vamos denotar os estados quânticos da partícula a correspondendo à passagem através das fendas 1 e 2 na direita por $|R_1\rangle$ e $|R_2\rangle$, e os estados quânticos da partícula b por $|L_1\rangle$ e $|L_2\rangle$ correspondendo à passagem através das fendas 1 e 2 no lado esquerdo, respectivamente. Assim, podemos escrever o estado quântico das duas partículas no seguinte estado emaranhado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|R_1\rangle |L_2\rangle + |R_2\rangle |L_1\rangle). \quad (3.28)$$

A matriz densidade $\rho = |\psi\rangle \langle\psi|$ para este sistema é dada por

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\substack{ij=1, \\ i \neq j}}^2 |R_i\rangle |L_j\rangle \langle L_j| \langle R_i| + \frac{1}{2} \sum_{\substack{ij=1, \\ i \neq j}}^2 |R_i\rangle |L_j\rangle \langle L_i| \langle R_j|. \quad (3.29)$$

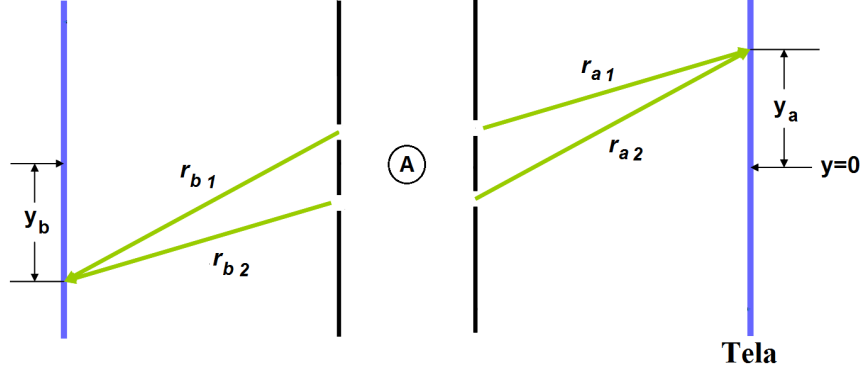


Figura 3.1: Esquema da proposta experimental mostrando o decaimento da partícula A , que estava em repouso, em duas partículas a e b . Devido à conservação do momento, as partículas filhas devem se propagar em direções diametralmente opostas. Cada partícula é submetida a um arranjo de fenda dupla e são posteriormente detectadas nas posições y_a e y_b .

Se estivermos interessados em descrever o comportamento da partícula a , teremos que recorrer à matriz reduzida ρ_a relacionada com esta partícula. Ela é obtida efetuando o traço da equação (3.29) em relação aos estados da partícula b (que é uma base) na seguinte forma

$$\rho_a = \text{Tr}_b |\psi\rangle \langle \psi| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \langle L_i | \psi \rangle \langle \psi | L_i \rangle. \quad (3.30)$$

Uma vez que $\langle L_1 | L_2 \rangle = 0$, podemos obter $\rho_a = 1/2 \sum_{i=1}^2 |R_i\rangle \langle R_i|$. Esta matriz densidade corresponde a uma densidade de partículas $\rho(y_a)$ na tela de detecção dada por

$$\rho(y_a) \equiv \langle y_a | \rho_a | y_a \rangle = \frac{1}{2} |\psi_{a1}(y_a)|^2 + \frac{1}{2} |\psi_{a2}(y_a)|^2, \quad (3.31)$$

onde $\psi_{ai}(y_a) = \langle y_a | R_i \rangle$, com $i = 1, 2$. Como podemos ver, a distribuição da posição da partícula a na tela da direita não exhibe um padrão espacial de interferência. Além disso, pela simetria do sistema, podemos ver que a partícula b deve exibir o mesmo comportamento. A ausência de interferência nas detecções individuais são devido ao fato de que a partícula A estava aproximadamente em repouso no início. Então, de acordo com o princípio da incerteza, não tínhamos quase nenhuma informação sobre a posição de A , ou seja, a partícula A comporta-se como uma grande fonte de partículas tal que os caminhos relativos 1 e 2 para cada partícula não era bem definido, e, conseqüentemente, o padrão

especial de interferência não podia ser observado. Uma outra interpretação é o fato de que, como as posições das partículas estão emaranhadas, poderíamos usar a medida na posição de uma para saber a posição da outra, ou seja, obteríamos informação sobre o caminho, que, como vimos, destrói o padrão de interferência.

Vamos analisar o sistema como um todo. Neste caso, a densidade de probabilidade de detectar a partícula a em y_a e a partícula b em y_b ao mesmo tempo é dada por

$$\rho(y_a, y_b) \equiv \langle y_b | \langle y_a | \rho | y_a \rangle | y_b \rangle. \quad (3.32)$$

Por substituição da equação (3.29) na equação (3.32), obtemos

$$\begin{aligned} \rho(y_a, y_b) &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{ij=1, \\ i \neq j}}^2 \langle y_a | R_i \rangle \langle y_b | L_j \rangle \langle L_j | y_b \rangle \langle R_i | y_a \rangle \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\substack{ij=1, \\ i \neq j}}^2 \langle y_a | R_i \rangle \langle y_b | L_j \rangle \langle L_i | y_b \rangle \langle R_j | y_a \rangle. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Vamos assumir que as funções de onda das partículas após elas terem passado através de alguma fenda sejam ondas esféricas de tal forma que

$$\psi_{aj}(r_{aj}) = \langle r_{aj} | R_j \rangle = \frac{e^{ikr_{aj}}}{r_{aj}} \quad (3.34)$$

e

$$\psi_{bj}(r_{bj}) = \langle r_{bj} | L_j \rangle = \frac{e^{ikr_{bj}}}{r_{bj}}, \quad (3.35)$$

com $r_{(a,b)j}$ representando a distância entre a fenda e o ponto na tela, k o número de onda, e $j = 1, 2$.

Aqui, se considerarmos que a distância entre as fendas e a tela é muito maior que a distância entre as fendas, podemos utilizar o limite de difração de Fraunhofer [18] e escrever $r_{a(1,2)} \approx L \mp \theta y_a$ e $r_{b(1,2)} \approx L \mp \theta y_b$, onde a coordenada y , o ângulo θ e a distância L são definidos de acordo com as figuras 3.1 e 3.2. Dessa maneira, as equações (3.34) e (3.35) são escritas como

$$\langle y_a | R_{1,2} \rangle \approx \frac{e^{ik(L \mp \theta y_a)}}{L \mp \theta y_a} \quad (3.36)$$

e

$$\langle y_b | L_{1,2} \rangle \approx \frac{e^{ik(L \mp \theta y_b)}}{L \mp \theta y_b}. \quad (3.37)$$

Assim, com essas aproximações, se substituirmos as equações (3.36) e (3.37) na equação (3.33), e notarmos que os denominadores podem ser absorvidos em um fator de fase irrelevante, podemos escrever a distribuição de probabilidade para encontrar a partícula a em y_a e a partícula b em y_b em coincidência, para pequenos ângulos de difração, como

$$\rho(y_a, y_b) \doteq |\cos[k\theta(y_a - y_b)]|^2, \quad (3.38)$$

onde o símbolo \doteq representa “igual a menos de um fator”. Esta equação mostra que a taxa de coincidência na chegada às telas de detecção é caracterizada por uma interferência na posição y_a e y_b . Este comportamento curioso é devido ao fato de que as partículas filhas são emitidas em direções opostas pela partícula A , e existem duas maneiras delas atingirem as telas. É a interferência entre essas duas possibilidades de alcançar as telas que cria a oscilação na taxa de coincidência. Este comportamento tem sido verificado em vários experimentos [22, 23, 24].

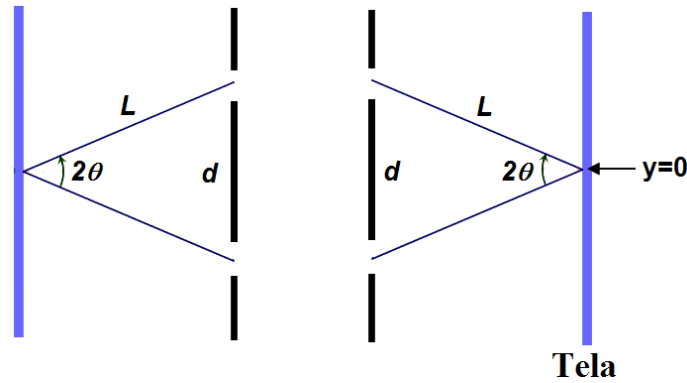


Figura 3.2: Nesta figura mostramos a distância L e o ângulo θ que determinam o arranjo da figura 3.1.

Vamos agora fazer uma análise desse efeito quando esse sistema de partículas interage com o ambiente ao seu redor. Como veremos, o efeito da decoerência aparecerá para destruir a coerência temporal do sistema.

Primeiramente, consideraremos a adição de uma fonte de luz na região da direita entre a fenda dupla e a tela. Nesta situação, se colocarmos dois detectores, cada um próximo de uma das fendas, um fóton pode ser espalhado pela partícula a em uma das regiões e ser detectado pelo detector mais próximo. Aqui, os fótons farão o papel do ambiente, e as colisões entre a partícula a e os fótons representam a interação entre o sistema e o ambiente. Em segundo lugar, vamos, de início, supor que a luz tem um comprimento do onda curto o suficiente para que possamos considerar que um fóton espalhado próximo à fenda 1 não pode ser detectado pelo detector 2 e vice versa.

De acordo com a introdução que demos, a interação entre o sistema e o ambiente é dada por

$$|R_1\rangle |L_2\rangle |A_0\rangle \rightarrow |R_1\rangle |L_2\rangle |A_1\rangle \quad (3.39)$$

e

$$|R_2\rangle |L_1\rangle |A_0\rangle \rightarrow |R_2\rangle |L_1\rangle |A_2\rangle, \quad (3.40)$$

onde os estados do ambiente $|A_0\rangle$, $|A_1\rangle$ e $|A_2\rangle$ simplesmente correspondem ao estado quântico de N fótons antes do espalhamento, o estado no qual o detector 1 absorve um fóton devido à passagem da partícula a pela fenda 1, e o estado em que o detector 2 registra um fóton devido à passagem da partícula pela fenda 2, respectivamente. Observe que o estado do ambiente evolui para $|A_1\rangle$ ou $|A_2\rangle$ dependendo do estado do sistema. É importante observar que as equações (3.39) e (3.40) são válidas se a partícula a espalha o fóton logo após a sua passagem por uma das fendas, sem outra futura colisão. De outra forma, não poderíamos escrever $|R_{(1,2)}\rangle$ (que, de acordo com a equação (3.36), gera ondas esféricas emergindo das fendas 1 e 2, respectivamente) no lado direito dessas equações. Com esta restrição, a linearidade da equação de Schrödinger implica no esquema de medida de von Neumann [29, 30].

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}}(|R_1\rangle |L_2\rangle + |R_2\rangle |L_1\rangle) |A_0\rangle \rightarrow \\ & |\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|R_1\rangle |L_2\rangle |A_1\rangle + |R_2\rangle |L_1\rangle |A_2\rangle). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Vemos que os estados do sistema têm se emaranhado com os do ambiente, que agora

carregam informação sobre o caminho. Assim, a coerência inicial entre as componentes $|R_2\rangle|L_1\rangle$ e $|R_1\rangle|L_2\rangle$ do sistema é agora uma propriedade compartilhada entre o sistema e o ambiente.

Agora vamos analisar o comportamento do sistema. Se calcularmos a matriz reduzida para a partícula a , $\rho_a = Tr_{bA} |\phi\rangle \langle \phi|$, onde Tr_{bA} significa traço sobre os estados da partícula b e do ambiente, e calcularmos $\langle y_a | \rho_a | y_a \rangle$, obtemos que a densidade de probabilidade de encontrar a partícula a na tela, $\rho(y_a)$, é a mesma que foi dada na equação (3.31). Ou seja, o emaranhamento entre o sistema e o ambiente não mudou este comportamento. Por outro lado, se calcularmos a matriz reduzida para as duas partículas $\rho_{ab} = Tr_A |\phi\rangle \langle \phi|$, onde Tr_A significa traço sobre os estados do ambiente, encontramos

$$\rho_{ab} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \langle A_k | (O_{ij} + Q_{ij}) | A_k \rangle, \quad (3.42)$$

com $O_{ij} = \sum_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j}}^2 |R_i\rangle|L_j\rangle|A_i\rangle \langle A_i| \langle L_j| \langle R_i|$ e $Q_{ij} = \sum_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j}}^2 |R_i\rangle|L_j\rangle|A_i\rangle \langle A_j| \langle L_i| \langle R_j|$. Se um dado fóton é registrado no detector 1, obviamente, este fóton não poderá ser registrado no detector 2. Matematicamente, isto quer dizer que $\langle A_i | A_j \rangle = 0$ para $i \neq j$. Assim, a equação (3.42) pode ser escrita como

$$\rho_{ab} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{ij=1, \\ i \neq j}}^2 |R_i\rangle|L_j\rangle \langle L_j| \langle R_i|, \quad (3.43)$$

tal que, utilizando as equações (3.36) e (3.37), encontramos que a densidade de probabilidade de detectar a partícula a na posição y_a e a partícula b na posição y_b em coincidência é dada por

$$\rho(y_a, y_b) \equiv \langle y_a | \langle y_b | \rho_{ab} | y_b \rangle | y_a \rangle = const. \quad (3.44)$$

Esta distribuição de probabilidade é independente das posições nas telas de detecção. Assim, vemos que a interação entre o sistema e o ambiente destrói a interferência na taxa de coincidência que o sistema tinha quando estava isolado. Baseado nesta característica, denominamos este fenômeno como decoerência quântica temporal (DQT).

Alguns aspectos interessantes podem surgir quando começamos a analisar as propriedades do ambiente. Aqui analisaremos como a DQT é influenciada pela energia dos fótons,

ou, similarmente, pelo comprimento de onda da luz. Até aqui temos estudado o limite em que, implicitamente, consideramos que o comprimento de onda da luz é curto em relação à separação d das fendas. Se não impusermos esta condição, devido ao efeito da difração, existe uma probabilidade não nula de um fóton espalhado na fenda 1 alcançar o detector 2, e vice versa. Em tais casos, dizemos que o ambiente não carrega uma quantidade de informação suficiente para descrever a separação entre as fendas, ou seja, não se pode dizer por qual fenda a partícula a passou.

Para levarmos em conta essas duas possibilidades, escrevemos o estado do sistema como

$$\begin{aligned} |\varphi\rangle &= n |R_1\rangle |L_2\rangle |A_1\rangle + m |R_1\rangle |L_2\rangle |A_2\rangle \\ &+ n |R_2\rangle |L_1\rangle |A_2\rangle + m |R_2\rangle |L_1\rangle |A_1\rangle, \end{aligned} \quad (3.45)$$

onde n e m representam as amplitudes de probabilidade para que um fóton espalhado próximo a uma dada fenda seja registrado pelo detector mais próximo, e o mais distante, respectivamente. Note que, por razões de simetria, o par de amplitudes é o mesmo para ambas as fendas. Neste caso, se calcularmos a matriz reduzida $\rho_{ab}^{(\varphi)} = \text{Tr}_E |\varphi\rangle \langle\varphi|$, com a condição de que $\langle A_1|A_2\rangle = 0$ ainda se mantém, obtemos que

$$\begin{aligned} \rho_{ab}^{(\varphi)} &= (|n|^2 + |m|^2) \sum_{\substack{ij=1, \\ i \neq j}}^2 |R_i\rangle |L_j\rangle \langle L_j| \langle R_i| \\ &+ (nm^* + n^*m) \sum_{\substack{ij=1, \\ i \neq j}}^2 |R_i\rangle |L_j\rangle \langle L_i| \langle R_j|. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Agora estamos prontos. Podemos calcular $\langle y_b | \langle y_a | \rho_{ab}^{(\varphi)} | y_a \rangle | y_b \rangle$ para encontrar a densidade de probabilidade de detectar a partícula a em y_a e a partícula b em y_b em coincidência, como função das amplitudes n and m . O segundo termo na equação (3.46) corresponde aos elementos não-diagonais da matriz $\rho_{ab}^{(\varphi)}$ na base $\{|R\rangle |L\rangle\}$. Esses elementos, como já mencionamos, são chamados de termos de interferência. De fato, no limite de comprimentos de onda curtos temos que $n = 1/\sqrt{2}$ e $m = 0$. Esta é a situação na qual a DQT é máxima e não há interferência na taxa de coincidência. Por outro lado, se considerarmos comprimentos de onda muito longos, temos que $n = m = 1/2$, que significa que os fótons têm a mesma

probabilidade de alcançar ambos os detectores, independente da fenda na qual eles foram espalhados. Nesta situação, a equação (3.46) se reduz à equação (3.43), a DQT é mínima, e a coincidência na detecção é caracterizada pela presença de interferência (Veja a equação (3.38)). Para o caso intermediário no qual os detectores obtêm alguma, mas não uma completa informação, temos $m \neq 0$ e $n > m$. Aqui, a taxa de coincidência é parcialmente efetiva e poderíamos observar uma distribuição intermediária contendo características das equações (3.38) e (3.44):

$$\begin{aligned} \rho(y_a, y_b) &\equiv \langle y_a | \langle y_b | \rho_{ab} | y_b \rangle | y_a \rangle \\ &\doteq |n|^2 + |m|^2 + (nm^* + mn^*) \cos[2k\theta(y_a - y_b)]. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Um outro parâmetro de interesse seria a intensidade da fonte de luz, ou o número de fótons na região após às fendas da direita. Até agora assumimos implicitamente que a intensidade é alta o suficiente para considerarmos que o espalhamento ocorre com 100 % de probabilidade. Se não impusermos esta condição, as propriedades do sistema devem ser descritas pela matriz densidade que corresponde ao seguinte estado misto $\rho = w_1 |\phi\rangle \langle \phi| + w_2 |\alpha\rangle \langle \alpha|$, onde $|\alpha\rangle = |\psi\rangle |A_0\rangle$, e $w_{(1,2)}$ são as probabilidades da partícula a espalhar, e não espalhar, um fóton após a sua passagem através das fendas, respectivamente. Se procedermos calculando a matriz reduzida, $\rho_{ab} = Tr_E(\rho)$, e a densidade de probabilidade de detectar as duas partículas em coincidência, considerando as equações (3.36) e (3.37) como sendo as funções de onda, encontramos

$$\begin{aligned} \rho(y_a, y_b) &\equiv \langle y_a | \langle y_b | \rho_{ab} | y_b \rangle | y_a \rangle \\ &\doteq w_1 + 2w_2 |\cos[k\theta(y_a - y_b)]|^2, \end{aligned} \quad (3.48)$$

que, como esperado, contém características das equações (3.38) e (3.44).

É importante mencionar o caso em que há luz e detectores em ambos os lados do experimento. Neste caso, o processo para descrever o comportamento do sistema é o mesmo. Entretanto, ao invés da equação (3.45), a equação para o sistema como um todo seria $|\varphi'\rangle = \sum_{j=1}^2 c_j |A'_j\rangle |\varphi\rangle$, com $|\varphi\rangle$ dado pela equação (3.45). Os vetores $|A'_j\rangle$ representam os novos graus de liberdade adquiridos pelo ambiente devido à introdução da outra fonte

de luz, e os c_j são as amplitudes associadas aos possíveis pares fenda-detector no lado esquerdo. Note que, se as duas fontes de luz forem idênticas, os termos contendo os vetores $|L_i\rangle |A'_j\rangle$, no qual $i = j$, são dados por $c_j = n$. Se $i \neq j$, temos $c_j = m$.

3.5.2 Discussão

Demonstramos uma classe de processos de decoerência em mecânica quântica no qual a interação sistema-ambiente destrói a interferência na taxa de coincidência em um interferômetro de duas partículas, onde o ambiente foi considerado como sendo composto por uma grande quantidade de fótons. Denominamos este processo como decoerência quântica temporal (DQT). Além disso, demonstramos como a energia e a quantidade desses fótons são fatores decisivos neste tipo de processo. Para isso, utilizamos o formalismo da matriz reduzida, o qual se mostrou bastante eficiente na análise deste tipo de sistema composto. Assim, acreditamos fortemente que esta técnica pode ser estendida sem grandes esforços para outros tipos de sistemas de duas partículas, bem como para sistemas de muitas partículas.

Em conclusão, acreditamos que experimentos deste tipo podem ser bastante promissores no estudo da decoerência com alta precisão. Como demonstrado por Mandel [25], medidas como esta podem atingir uma resolução temporal da ordem de femtosegundos, que é milhões de vezes mais precisas que as dos detectores associados com a eletrônica. Além disso, diferentemente dos interferômetros de uma partícula, os de duas partículas não exigem que a diferença de caminho seja menor do que o comprimento de onda de de Broglie das partículas [26].

Capítulo 4

Um paralelo entre a mecânica quântica e a ótica ondulatória

Neste capítulo vamos descrever um pouco da teoria quântica que surgiu durante os anos 1920, bem como as similaridades que emergiram mais recentemente no estudo da ótica ondulatória.

4.1 Mais um pouco de mecânica quântica

Existem postulados fundamentais na mecânica quântica que descrevem totalmente tudo que gostaríamos de calcular. Essas ideias parecem estranhas e sempre causam desconforto quando encaradas de início. Bohr certa vez disse: “Aqueles que não se chocam quando se deparam com a mecânica quântica pela primeira vez, possivelmente não a entenderam”.

Os postulados são:

- 1- O estado de um sistema físico é completamente descrito por um vetor de estado $|\psi\rangle$ que pertence ao espaço complexo de Hilbert.
- 2- Os observáveis de um sistema físico, ou seja, as grandezas que podemos medir, como, por exemplo, a posição e o momento de uma partícula, são representados por operadores hermitianos.

3- Quando fazemos medidas em um sistema, obtemos, probabilisticamente, a resposta de acordo com o módulo quadrado da função de onda. Este é o chamado postulado de Born.

4- Um sistema, quando não medido, evolui de acordo com a equação de Schrödinger.

Esses postulados não são intuitivamente claros. Porém, para nós, é suficiente dizer que eles são válidos simplesmente porque estão em perfeito acordo com todos os resultados experimentais até hoje. Neste capítulo, em que estaremos interessados apenas na dinâmica espacial do sistema, podemos simplificar o enunciado do primeiro postulado da seguinte forma: “Os estados dos sistemas físicos são representados por funções complexas, chamadas de funções de onda.” Dessa forma, a descrição do comportamento da função de onda será o nosso alvo a seguir.

A mecânica quântica é, de longe, a mais precisa descrição da natureza que possuímos. Com isso em mente, vamos prosseguir, e começaremos discutindo a equação de Schrödinger que aparece na quarta regra. Na verdade, ela foi desenvolvida antes dos outros postulados serem enunciados.

4.1.1 Equação de Schrödinger

Se partículas se comportam como ondas, então seria razoável esperar a existência de uma equação de onda para descrever tal comportamento. Assim, precisamos entender como as ondas se manifestam em primeiro lugar.

As ondas, de maneira geral, já eram entendidas pelos físicos do século XIX. Uma equação de onda é normalmente uma equação que envolve derivadas segunda no espaço e no tempo. Ela se dá da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2}. \quad (4.1)$$

Aqui, v é a velocidade na qual a onda se propaga. Se a equação acima descrever uma onda de luz, então a velocidade é a da luz. O mesmo é válido para ondas sonoras e várias outras.

Uma solução para a equação (4.1) é a chamada onda plana:

$$f(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}, \quad (4.2)$$

tal que $\omega = vk$. Aqui, ω é a frequência das oscilações da onda e $k = 2\pi/\lambda$ é o número de onda. A é conhecida como a amplitude da onda, que por enquanto vamos tratar como uma constante arbitrária. O número i é o número imaginário cujo valor é $\sqrt{-1}$.

A onda plana $f(x, t)$ é uma função complexa. Um campo elétrico, por exemplo, pode ser escrito da seguinte forma (o mesmo é válido para campos magnéticos):

$$E = E_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \omega t + \theta\right), \quad (4.3)$$

onde todos os símbolos têm o seu significado usual, e θ é a fase inicial, que pode assumir qualquer valor. Em mecânica quântica, as ondas têm uma natureza genuinamente complexa, e esta é uma das diferenças chave entre as físicas clássica e quântica.

Vamos tomar o exemplo do elétron e tentar derivar uma equação de onda descrevendo o seu comportamento. Esta foi a maneira utilizada por Schrödinger. A energia cinética de um elétron é dada por:

$$E_c = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad (4.4)$$

mas de Broglie também nos diz que a energia deveria ser do tipo “onda”, ou seja,

$$E_c = \hbar\omega. \quad (4.5)$$

Igualando essas duas equações, temos:

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}. \quad (4.6)$$

Agora a frequência dos elétrons é proporcional a k^2 , e não a k como na nossa equação da onda (4.1). Se uma onda deve estar associada ao elétron na forma de onda plana, ela deve ser escrita como

$$\Psi = e^{i(kx - \hbar k^2 t / 2m)}. \quad (4.7)$$

Agora pensamos: que equação diferencial no espaço e no tempo teria como solução a equação (4.7)? Esta foi exatamente a tarefa enfrentada por Schrödinger.

Se analisarmos um pouco, vemos que é necessária uma derivada segunda no espaço, como tínhamos antes, porém, diferente da equação (4.1), precisamos de uma derivada primeira no tempo. Isto porque precisamos de uma equação que seja válida independente do valor de k (ou ω). Assim,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi = -k^2 e^{i(kx - \hbar k^2 t)/2m} = -k^2 \Psi, \quad (4.8)$$

enquanto

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi = -i \frac{\hbar k^2}{2m} e^{i(kx - \hbar k^2 t)/2m} = -i \frac{\hbar k^2}{2m} \Psi. \quad (4.9)$$

Dessa forma, a partir das duas equações acima, podemos escrever que

$$-\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi = i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi. \quad (4.10)$$

Esta é a célebre equação de Schrödinger, porém, na sua forma restrita.

Se a partícula estiver sendo submetida a uma força, cujo potencial é $V(x)$, a equação é modificada da seguinte forma:

$$\left[-\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \Psi = i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi, \quad (4.11)$$

que é a equação de Schrödinger completa, com toda a sua glória. Esta é apenas a sua versão unidimensional, mas, como se sabe, ela pode ser estendida para duas e três dimensões, onde se é possível resolver problemas realistas como, por exemplo, encontrar o espectro de emissão do átomo de hidrogênio.

Como vemos, a equação mais fundamental da mecânica quântica é similar à equação da onda (4.1), mas, diferente daquela, o espaço e o tempo são incorporados na equação de Schrödinger de uma maneira assimétrica. De fato, a sua forma se assemelha mais com a equação da difusão. Isto sugere que um pacote de onda se alarga, ou difunde, ao longo do tempo. Entretanto, a característica mais intrigante da equação é o fato dela conter o número imaginário i . Ele nunca havia aparecido em nenhuma das equações clássicas de Newton ou Maxwell. O significado desse fator foi muito preocupante tanto para Schrödinger, quanto para toda a comunidade científica da época.

4.1.2 Postulado de Born

No início parecia bastante difícil atribuir qualquer realidade física à função de onda Ψ . Ela é uma função complexa, e números complexos nunca aparecem em medidas feitas em laboratórios. Nós sempre medimos algum observável físico, tal como a posição de uma partícula, cujo resultado é sempre real. Notavelmente, o significado da função de onda não era claro para Schrödinger, apesar de ter sido o seu criador.

O físico alemão Max Born resolveu este problema em seguida, dessa forma, sendo reconhecido pela sua “interpretação de Born”. Ele anunciou que o módulo quadrado da função de onda é a densidade de probabilidade de encontrar a partícula na posição x . Assim, a probabilidade de encontrar a partícula entre as posições x e $x + dx$ é dada por

$$|\Psi(x)|^2 dx. \quad (4.12)$$

A probabilidade de encontrar a partícula entre as posições x_1 e x_2 é conseqüentemente

$$p = \int_{x_1}^{x_2} |\Psi(x)|^2 dx. \quad (4.13)$$

Uma consequência direta é o fato de que

$$p = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx = 1. \quad (4.14)$$

Isto significa que a probabilidade total de encontrar a partícula em algum lugar deve ser um. Esta é a chamada condição de normalização.

4.2 Uma visão geral do estudo da ótica

Na teoria clássica, a luz é descrita como um fenômeno eletromagnético, assim como todas as outras formas de radiação. A radiação eletromagnética se propaga na forma de dois campos vetoriais (elétrico e magnético) mutuamente acoplados. Entretanto, é possível descrever muitos fenômenos óticos utilizando uma teoria escalar no qual a luz é descrita por uma função de onda escalar. Esse método simplificado de tratar a luz é chamado de “ótica ondulatória”.

Quando ondas de luz se propagam através de objetos cuja dimensão é muito maior que o seu comprimento de onda, a natureza ondulatória passa a ser ocultada de tal forma que um tratamento de “ótica geométrica” se faz suficiente. Estritamente falando, a ótica geométrica é o caso limite da ótica ondulatória quando o comprimento de onda da luz é infinitamente pequeno. Dessa maneira, a teoria eletromagnética da luz incorpora a ótica ondulatória, que, por sua vez, incorpora a ótica geométrica, como ilustrado na figura 4.1.

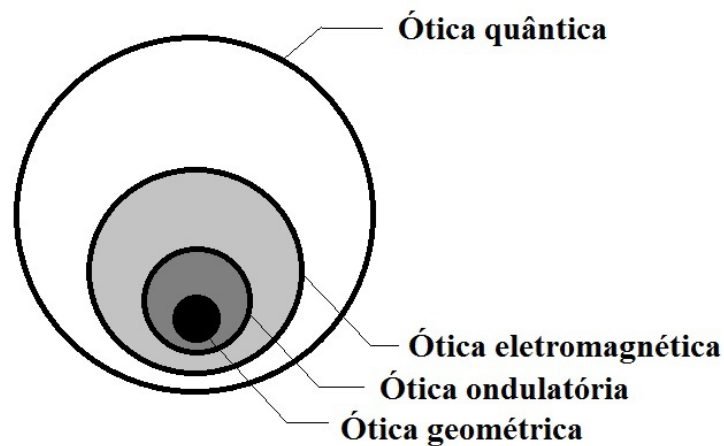


Figura 4.1: A teoria da ótica quântica nos dá, em princípio, a explicação para todos os fenômenos óticos. A teoria eletromagnética da luz nos dá o melhor dos tratamentos da luz no escopo da física clássica. A ótica ondulatória é a aproximação escalar da ótica eletromagnética. E, finalmente, a ótica geométrica é o formalismo limite da descrição ondulatória quando o comprimento de onda é muito curto.

Apesar da ótica eletromagnética fornecer o tratamento mais completo da luz na teoria clássica, existem certos fenômenos óticos que são de origem puramente quântica, como aqueles que apresentamos no capítulo de introdução, que não podem ser explicados por vias clássicas. Esses fenômenos são descritos pela “eletrodinâmica quântica”. No caso dos fenômenos óticos, esta teoria é chamada de “ótica quântica”.

Historicamente, a ótica se desenvolveu, razoavelmente, da seguinte maneira: (1) ótica geométrica; → (2) ótica ondulatória; → (3) ótica eletromagnética; → (4) ótica quântica. De maneira não surpreendente, esses modelos são progressivamente mais difíceis e sofisticados, tendo sido desenvolvidos para fornecer explicações para o resultado de experimentos cada

vez mais precisos.

4.3 Ótica ondulatória

Na ótica ondulatória, como mencionamos, a luz é tratada como uma função escalar, chamada de função de onda, que obedece à equação da onda. O preciso significado físico desta função não é bem definido, porém, é suficiente dizer que ela pode ser representada por qualquer componente dos campos elétrico ou magnético. A ótica ondulatória é a base da descrição de vários fenômenos óticos ondulatórios como a interferência e a difração, bem como todos aqueles referentes à ótica geométrica.

Entretanto, este formalismo possui as suas limitações. Ele não é capaz de descrever completamente, nem os fenômenos de reflexão e refração da luz nas fronteiras entre meios dielétricos, nem aqueles fenômenos que necessariamente exigem uma descrição vetorial da luz, como os efeitos da polarização.

4.4 Alicerces da ótica ondulatória

4.4.1 Equação da onda

A luz se propaga na forma de onda. No espaço livre, as ondas de luz viajam com velocidade c_0 . Um meio homogêneo e transparente, como o vidro, é caracterizado por uma constante: o seu índice de refração $\mathcal{N} (> 1)$. Em um meio com índice de refração \mathcal{N} , a luz se propaga com uma velocidade de fase reduzida dada por:

$$c = \frac{c_0}{\mathcal{N}}. \quad (4.15)$$

Uma onda ótica é descrita matematicamente por uma função real da posição $\vec{r} = (x, y, z)$ e do tempo, que é denotada por $u(\vec{r}, t)$ e é conhecida como “função de onda”. Ela satisfaz a equação da onda,

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (4.16)$$

onde ∇^2 é o operador laplaciano, $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$. Qualquer função satisfazendo a equação (4.16) representa uma onda ótica possível.

Como a equação da onda é linear, o “princípio da superposição” se aplica, ou seja, se $u_1(\vec{r}, t)$ e $u_2(\vec{r}, t)$ representam ondas óticas, então $u(\vec{r}, t) = u_1(\vec{r}, t) + u_2(\vec{r}, t)$ também representa uma possível onda ótica.

Na fronteira entre dois meios diferentes, a função de onda muda de uma maneira que depende dos índices de refração envolvidos. Entretanto, as leis que governam esta mudança dependem do significado atribuído à função (ou seja, a componente do campo eletromagnético que ela representa).

A função de onda também é aplicável em meios cujo índice de refração é dependente da posição, uma vez que essa variação seja pequena para distâncias da ordem do comprimento de onda. Neste caso, o meio é dito ser localmente homogêneo. Para tais meios, \mathcal{N} e c nas equações (4.15) e (4.16) devem ser substituídos por funções dependentes da posição $\mathcal{N}(\vec{r})$ e $c(\vec{r})$, respectivamente. Utilizaremos essa propriedade neste capítulo.

4.4.2 Intensidade, potência e energia

A intensidade ótica $I(\vec{r}, t)$, definida como a potência por unidade de área, é proporcional à média do quadrado da função de onda,

$$I(\vec{r}, t) = 2\langle u^2(\vec{r}, t) \rangle. \quad (4.17)$$

A operação $\langle . \rangle$ denota a média sobre um período de oscilação ótica; porém, mais curtos que qualquer outro tempo de interesse (a duração de um pulso de luz, por exemplo).

Apesar do significado físico da função de onda $u(\vec{r}, t)$ não ser bem definido, a equação (4.17) representa uma conexão com uma quantidade física acessível através de medidas - a intensidade ótica. Existe uma arbitrariedade na definição da função de onda em relação à intensidade ótica. A equação (4.17) poderia, por exemplo, ter sido escrita sem o fator 2 e a função renormalizada com um fator $\sqrt{2}$, tal que a intensidade permaneça a mesma.

A potência ótica $P(t)$ através de uma dada área A , normal à direção de propagação da luz, é a intensidade integrada

$$P(t) = \int_A I(\vec{r}, t) dA. \quad (4.18)$$

A energia ótica absorvida em um dado intervalo de tempo é a integral da potência ótica nesse intervalo.

4.4.3 Ondas monocromáticas

Uma onda monocromática é representada por uma função de onda com dependência harmônica no tempo,

$$u(\vec{r}, t) = a(\vec{r})\cos[2\pi\nu t + \varphi(\vec{r})], \quad (4.19)$$

onde $a(\vec{r})$ é a amplitude, $\varphi(\vec{r})$ é a fase, e ν é a frequência de oscilação. Tanto a amplitude quanto a fase podem ser dependentes da posição. Já a função de onda é uma função harmônica do tempo com frequência ν em todas as posições.

4.4.4 Representação complexa

É conveniente expressar a função de onda real $u(\vec{r}, t)$ da equação (4.19) em termos de uma função complexa

$$U(\vec{r}, t) = a(\vec{r})\exp[i\varphi(\vec{r})]\exp(2i\pi\nu t), \quad (4.20)$$

tal que

$$u(\vec{r}, t) = \text{Re}\{U(\vec{r}, t)\} = \frac{1}{2}[U(\vec{r}, t) + U^*(\vec{r}, t)]. \quad (4.21)$$

A função $U(\vec{r}, t)$, conhecida como função de onda complexa, descreve a onda completamente; a função $u(\vec{r}, t)$ é simplesmente sua parte real. Assim como a função de onda $u(\vec{r}, t)$, a função complexa $U(\vec{r}, t)$ também deve satisfazer à equação da onda,

$$\nabla^2 U - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0. \quad (4.22)$$

As duas funções satisfazem as mesmas condições de contorno.

4.4.5 Equação da onda

A equação (4.20) pode ser escrita na forma

$$U(\vec{r}, t) = U(\vec{r})\exp(2i\pi\nu t), \quad (4.23)$$

onde o fator independente do tempo $U(\vec{r}) = a(\vec{r})exp(i\varphi(\vec{r}))$ é a “amplitude complexa”. A função de onda $u(\vec{r}, t)$ é, dessa forma, relacionada com a amplitude complexa por

$$u(\vec{r}, t) = Re\{U(\vec{r})exp(2i\pi\nu t)\} = \frac{1}{2}[U(\vec{r})exp(2i\pi\nu t) + U^*(\vec{r})exp(-2i\pi\nu t)]. \quad (4.24)$$

Em uma dada posição \vec{r} , a amplitude complexa $U(\vec{r})$ é uma variável complexa cuja magnitude $|U(\vec{r})| = a(\vec{r})$ é a amplitude da onda, e cujo argumento $arg\{U(\vec{r})\} = \varphi(\vec{r})$ é a fase.

4.4.6 Equação de Hemholtz

Substituindo $U(\vec{r}, t) = U(\vec{r})exp(2i\pi\nu t)$ na equação (4.22), obtemos a seguinte equação diferencial

$$(\nabla^2 + k^2)U(\vec{r}) = 0, \quad (4.25)$$

que é a chamada “equação de Helmholtz”, onde

$$k = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{\omega}{c} \quad (4.26)$$

é o número de onda.

4.4.7 Intensidade ótica

A intensidade ótica é determinada pelo uso da equação (4.17). Quando tomamos a média de

$$2u^2(\vec{r}, t) = 2a^2(\vec{r})cos^2[2\pi\nu t + \varphi(\vec{r})] = |U(\vec{r})|^2\{1 + cos(2[2\pi\nu t + \varphi(\vec{r})])\} \quad (4.27)$$

em um intervalo de tempo maior que um período ótico, $1/\nu$, o segundo termo da equação (4.27) desaparece, tal que

$$I(\vec{r}) = |U(\vec{r})|^2. \quad (4.28)$$

Assim, a intensidade ótica de uma onda monocromática é o módulo quadrado da sua amplitude complexa. A intensidade de uma onda monocromática não varia com o tempo.

4.5 Ondas elementares

As soluções mais simples da equação de Helmholtz em um meio homogêneo são as ondas planas e as esféricas.

4.5.1 Onda plana

A onda plana tem uma amplitude complexa dada por

$$U(\vec{r}) = A \exp(-i\vec{k}\cdot\vec{r}) = A \exp[-i(k_x x + k_y y + k_z z)], \quad (4.29)$$

onde a amplitude A é uma constante complexa chamada “envelope complexo” e $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ é chamado de “vetor de onda”. Para a equação (4.29) satisfazer a equação de Helmholtz, é necessário que $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$, tal que a magnitude do vetor de onda \vec{k} é o número de onda k .

A fase $\arg\{U(\vec{r})\} = \arg\{A\} - \vec{k}\cdot\vec{r}$ acarreta frentes de onda dadas por $\vec{k}\cdot\vec{r} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$. Esta equação descreve planos paralelos que são perpendiculares ao vetor de onda \vec{k} (por isso o nome “onda plana”). Essas ondas planas são separadas por uma distância $\lambda = 2\pi/k$, tal que

$$\lambda = \frac{c}{\nu}, \quad (4.30)$$

onde λ é o comprimento de onda. A onda plana tem uma intensidade constante $I(\vec{r}) = |A|^2$ em toda parte do espaço, tal que ela carrega uma potência infinita. Esta onda claramente é uma idealização, uma vez que ela existe em toda parte e o tempo todo.

Se o eixo z é tomado como sendo a direção do vetor de onda \vec{k} , então $U(\vec{r}) = A \exp(-ikz)$, e a função de onda correspondente obtida da equação (4.24) é dada por

$$u(\vec{r}, t) = |A| \cos[2\pi\nu t - kz + \arg\{A\}] = |A| \cos[2\pi\nu(t - z/c) + \arg\{A\}]. \quad (4.31)$$

A função de onda é, dessa forma, periódica no tempo com período $1/\nu$, e periódica no espaço com período $2\pi/k$, que é igual ao comprimento de onda λ . Uma vez que a fase da função complexa, $\arg\{U(\vec{r}, t)\} = 2\pi\nu(t - z/c) + \arg\{A\}$, varia com o tempo e com a posição como função da variável $t - z/c$, c é chamada de velocidade da fase da onda.

Em um meio com índice de refração \mathcal{N} , a velocidade de fase $c = c_0/\mathcal{N}$ e o comprimento de onda $\lambda = c/\nu = c_0/\mathcal{N}\nu$, tal que $\lambda = \lambda_0/\mathcal{N}$, onde $\lambda_0 = c_0/\nu$ é o comprimento de onda no espaço livre. Para uma dada frequência ν , o comprimento de onda no meio é reduzido em relação àquele no espaço livre por um fator \mathcal{N} . Como consequência, o número de onda $k = 2\pi/\lambda$ aumenta em relação ao do espaço livre ($k_0 = 2\pi/\lambda_0$) por um fator \mathcal{N} . Em resumo, quando uma onda monocromática se propaga através de um meio com diferentes índices de refração, sua frequência permanece a mesma, mas a sua velocidade, seu comprimento de onda, e o seu número de onda são alterados: $c = c_0/\mathcal{N}$, $\lambda = \lambda_0/\mathcal{N}$ e $k = \mathcal{N}k_0$.

4.5.2 Ondas esféricas

Outra solução simples da equação de Helmholtz é a onda esférica

$$U(\vec{r}) = \frac{A}{r} \exp(-ikr), \quad (4.32)$$

onde r é a distância da origem e $k = 2\pi\nu/c = \omega/c$ é o número de onda. A intensidade $I(\vec{r}) = |A|^2/r^2$ é inversamente proporcional ao quadrado da distância. Neste caso, as frentes de onda são esferas concêntricas separadas por uma distância radial $\lambda = 2\pi/k$, que avançam radialmente com velocidade c . Também temos o caso em que $U(\vec{r}) = \frac{A}{r} \exp(ikr)$, que representa um grupo de frentes de onda esféricas colapsando na origem.

4.6 Ondas paraxiais

Uma onda é dita paraxial se as linhas normais às suas frentes de onda são raios paraxiais. Uma maneira de construir uma onda paraxial é começar com uma onda plana, e modificar (ou modular) o seu envelope complexo A , fazendo-o uma função lentamente variável com a posição, $A(\vec{r})$, tal que a amplitude complexa da onda modulada torna-se

$$U(\vec{r}) = A(\vec{r}) \exp(-ikz). \quad (4.33)$$

A variação de $A(\vec{r})$ com a posição deve ser lenta para distâncias da ordem do comprimento de onda, tal que a onda mantenha, aproximadamente, a sua natureza de onda plana.

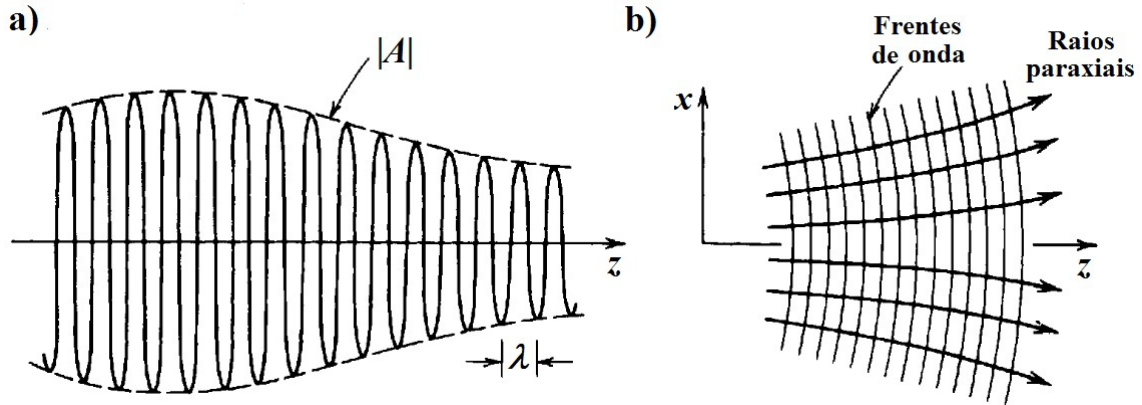


Figura 4.2: a) A magnitude da onda paraxial em função da distância z . b) As frentes de onda e os raios da onda paraxial.

A função de onda $u(\vec{r}, t) = |A(\vec{r})|\cos[2\pi\nu t - kz + \arg\{A\}]$ de uma onda paraxial é mostrada na figura 4.2(a) como função de z para $t = 0$ e $x = y = 0$. Esta é uma função sinusoidal em z com amplitude $|A(0, 0, z)|$ que varia lentamente com z . Uma vez que a mudança na fase, $\arg\{A(x, y, z)\}$, é pequena dentro de um comprimento de onda, as frentes de onda planares se distorcem muito lentamente, tal que as suas normais são raios paraxiais.

4.6.1 Equação paraxial de Helmholtz

Para a onda paraxial (4.33) satisfazer a equação de Helmholtz (4.25), o envelope complexo $A(\vec{r})$ deve satisfazer a outra equação diferencial parcial obtida através da substituição da equação (4.33) na equação (4.25). O fato de assumirmos que $A(\vec{r})$ varia lentamente com relação a z significa que dentro de uma distância $\Delta z = \lambda$, a variação ΔA é muito menor que o próprio A ; ou seja, $\Delta A \ll A$. Esta desigualdade de variáveis complexas se aplica às magnitudes das partes real e imaginária separadamente. Uma vez que $\Delta A = (\partial A / \partial z)\Delta z = (\partial A / \partial z)\lambda$, temos que $\partial A / \partial z \ll A / \lambda$, e, dessa forma,

$$\frac{\partial A}{\partial z} \ll kA. \quad (4.34)$$

Similarmente, a derivada $\partial A/\partial z$ varia lentamente na distância λ , tal que $\partial^2 A/\partial z^2$ satisfaz

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \ll k^2 A. \quad (4.35)$$

Substituindo (4.33) em (4.25), e negligenciando $\partial^2 A/\partial z^2$ em comparação com $k\partial A/\partial z$ ou $k^2 A$, obtemos

$$\nabla_T^2 A - 2ik \frac{\partial A}{\partial z} = 0, \quad (4.36)$$

onde $\nabla_T^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ é o operador lapaciano transversal.

A equação (4.36) é uma aproximação da equação de Helmholtz quando o envelope complexo varia lentamente. Vamos chamar esta equação simplesmente de “equação paraxial de Helmholtz”. Note que esta equação diferencial tem a mesma forma da equação de Schrödinger (4.10) da teoria quântica. Esta similaridade matemática acarreta muitas analogias físicas entre a ótica clássica e a mecânica quântica. Este é o ponto chave deste capítulo, e, a partir dele, estabeleceremos o estudo que seguirá.

4.7 Momento angular orbital da luz

Um feixe de luz monocromática viajando ao longo de um eixo z pode transportar momento angular na direção de propagação de duas formas diferentes [31, 32, 33]. A primeira é a forma clássica (do tipo spin) associada com a polarização circular da luz, com cada fóton carregando $\pm\hbar$ de momento angular, dependendo do sentido de giro da polarização. O segundo tipo é a forma “orbital”, associada com o perfil da fase ótica do feixe em um plano ortogonal ao eixo de propagação, ou seja, paralelo ao plano xy . Utilizando uma notação complexa, o campo elétrico de um feixe carregando um valor bem definido do momento angular orbital pode ser escrito como $\vec{E}(\rho, \varphi) = \vec{E}_0(\rho) \exp(il\varphi)$, onde ρ e φ são as coordenadas polares no plano xy , e l é um número inteiro. Para tais campos, comumente chamados de “modos helicoidais”, foi demonstrado que cada fóton carrega um momento angular orbital quantizado de $l\hbar$ na direção z [33, 34, 35]. A frente de onda deste campo é composta de $|l|$ superfícies helicoidais intercaladas, cuja helicidade é dada pelo sinal de l . Além disso, esses campos apresentam uma singularidade de fase topológica (um

“vórtice ótico”) no eixo do feixe [36, 37]. É comum na literatura se referir ao número l como a “carga topológica” do vórtice.

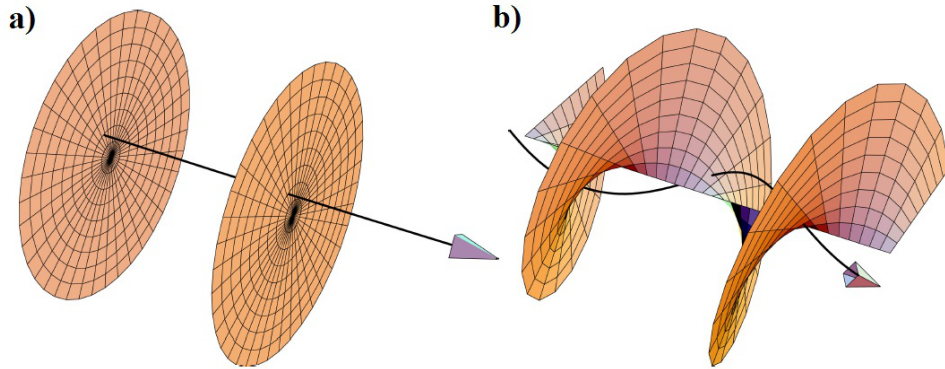


Figura 4.3: a) Frente de onda de uma onda plana. b) Frente de onda de um vórtice ótico carregando $+\hbar$ de momento angular orbital.

Em geral, uma onda ótica pode ser decomposta em modos circularmente polarizados e helicoidais, carregando tanto o momento angular de spin, quanto o orbital. Um exemplo particularmente importante são os modos de Laguerre-Gauss, que são soluções exatas da equação paraxial de Helmholtz [43]. Na verdade, a equação paraxial admite soluções em 17 sistemas de coordenadas [44]. Muitas dessas soluções têm sido estudadas tanto do ponto de vista teórico, quanto do experimental, com propósitos científico e tecnológico. Os feixes de Bessel-Gauss (BG), Hipergeométricos (HyG), Hipergeométricos Gaussianos (HyGG), Ince-Gauss (IG), Laplace-Gauss (LG) e de Mathieu são alguns dos mais recentes exemplos [45, 46, 47].

Ao longo da última década, os feixes com momento angular orbital têm recebido cada vez mais atenção. Já se aplicam suas propriedades nas mais diversas áreas como: litografia ótica, cirurgias médicas, aprisionamento ótico e pinças óticas [38, 39, 40, 41, 42].

4.8 Transmissão de dados por modos hipergeométricos através de um meio com índice de refração hiperbólico

Nesta seção apresentaremos uma nova família de feixes óticos que formam uma base ortogonal de soluções da equação paraxial, e que também carregam momento angular orbital (MAO). Os perfis de modo transversal são proporcionais à função hipergeométrica confluyente. Modos com perfis similares têm sido estudados previamente (HyG, HyGG, HyGG-II)[46, 47, 48]. Entretanto, diferente desses, obtivemos soluções que são ortogonais e com potência finita, cuja amplitude decai exponencialmente na direção radial ρ . Chamamos esta nova classe de “modos hipergeométricos do segundo tipo” (HyG-II) [49]. Para gerar esses modos, demonstramos que a luz se propagando em um meio com índice hiperbólico decai neles (ou numa combinação linear deles). Entretanto, devido ao MAO conduzido nos modos, propomos que fibras óticas com este perfil de índice, em determinadas situações, podem carregar mais informação que as fibras com índice quadrático.

4.8.1 Equação do feixe

Considere um meio com simetria cilíndrica, cujo índice de refração \mathcal{N} pode ser descrito por

$$\mathcal{N}^2(\mathbf{r}) = n_0^2 \left(1 + \frac{n_1}{n_0 \rho} \right), \quad (4.37)$$

onde $\rho^2 = x^2 + y^2$ é a coordenada transversal. Para obtermos este perfil de índice, aproximadamente, o meio deve ter uma linha muito fina e opaca ao longo do eixo z , uma vez que um índice de refração infinito implica ausência de propagação. Em volta desta região, poderíamos ter silício com alta concentração de dopagem (dióxido de germânio, por exemplo [50]) para aumentar o índice de refração ao máximo e, com o aumento do raio, a concentração da dopagem deveria diminuir de forma que se obtenha o perfil hiperbólico desejado. Dessa forma, a equação da onda para o campo elétrico toma a seguinte forma

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \left(1 + \frac{n_1}{n_0 \rho} \right) \mathbf{E} = 0, \quad (4.38)$$

com $k = 2\pi n_0/\lambda$ sendo o número de onda longe do eixo ótico. Neste ponto, quando a aproximação paraxial é utilizada [51, 52], assumimos uma solução da forma

$$E(\rho, \varphi, z) = \psi(\rho, \varphi) \exp(-i\beta z). \quad (4.39)$$

Se escrevermos $\psi(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$, a equação da onda é dada por

$$\frac{1}{R} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\Phi \rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{k^2 n_1}{n_0 \rho} + (k^2 - \beta^2) = 0. \quad (4.40)$$

Utilizando a separação das variáveis, temos

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \Phi(\varphi) = -l^2 \Phi(\varphi), \quad (4.41)$$

que nos dá

$$\Phi(\varphi) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{il\varphi}, l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (4.42)$$

e

$$\frac{d^2}{d\rho^2} R(\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} R(\rho) + \left[(k^2 - \beta^2) + \frac{k^2 n_1}{n_0 \rho} - \frac{l^2}{\rho^2} \right] R(\rho) = 0. \quad (4.43)$$

Note que a equação (4.43) tem a forma da equação de Schrödinger em duas dimensões para o átomo de hidrogênio [53] (O perfil do índice de refração na equação paraxial faz o papel da energia potencial na equação da mecânica quântica). Primeiramente, vamos analisar o caso em que $k^2 > \beta^2$. Vamos definir

$$m \equiv \left[\frac{2(k^2 - \beta^2)n_0^2}{k^4 n_1^2} \right]^{1/2}, \quad (4.44)$$

$$s \equiv \frac{k^2 n_1}{2n_0}, \quad (4.45)$$

$$b = -i/m, \quad (4.46)$$

$$x = i2ms\rho, \quad (4.47)$$

então, escrevemos a equação (4.43) como

$$\frac{d^2}{dx^2} R(x) + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} R(x) + \left[\left(-\frac{1}{4} + \frac{b}{x} \right) - \frac{l^2}{x^2} \right] R(x) = 0. \quad (4.48)$$

A sua solução regular é

$$R_{ml}(\rho) = C_{ml}(2ms\rho)^{|l|} \exp(-ims\rho) {}_1F_1(i/m + |l| + 1/2; 2|l| + 1, i2ms\rho). \quad (4.49)$$

A constante C_{ml} pode ser calculada a partir da condição de normalização da função delta

$$\int_0^\infty R_{ml}(\rho) R_{m'l}(\rho) \rho d\rho = \delta(m - m'), \quad (4.50)$$

que nos dá [54]

$$C_{ml} = s \left[\frac{2m}{1 + e^{-2\pi/m}} \right]^{1/2} \prod_{p=0}^{|l|-1} [(p + 1/2)^2 + 1/m^2]^{1/2}; \quad (4.51)$$

para $l = 0$, o produto pode ser substituído pela unidade. As soluções dadas pela equação (4.49) não são estados confinados. Assim, neste caso, o perfil do índice de refração causa difração do feixe.

Agora vamos analisar o caso em que $k^2 < \beta^2$. Definindo as transformações

$$k^2 - \beta^2 = -\frac{k^4 n_1^2}{4n_0^2 N^2}, \quad (4.52)$$

$$\rho = \frac{N n_0}{k^2 n_1} x \quad (4.53)$$

e

$$R(x) = x^{|l|} e^{-x/2} G(x), \quad (4.54)$$

a equação (4.43) se escreve como

$$x \frac{d^2 G}{dx^2} + [(2|l| + 1) - x] \frac{dG}{dx} - (-N + |l| + 1/2)G = 0. \quad (4.55)$$

A solução desta equação é a função hipergeométrica confluyente [55]

$$G(x) = {}_1F_1(-N + |l| + 1/2; 2|l| + 1, x). \quad (4.56)$$

Esta solução é bem comportada em $x = 0$ e exponencialmente divergente para $x \rightarrow \infty$. Ela torna-se de quadrado integrável, o que é necessário para se obter feixes com energia

finita, apenas se $-N + |l| + 1/2$ for zero ou negativo. Assim, temos $N = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$. Vamos definir um inteiro n como

$$n = N + 1/2 = 1, 2, 3, \dots \quad (4.57)$$

Para um dado n , $|l|$ pode assumir os valores

$$|l| = 0, 1, 2, \dots, n - 1. \quad (4.58)$$

A constante de propagação β_n do modo n é obtida das equações (4.52) e (4.57)

$$\beta_n = k \left(1 + \left[\frac{1}{(n - 1/2)} \frac{kn_1}{2n_0} \right]^2 \right)^{1/2}. \quad (4.59)$$

A solução radial normalizada é dada por

$$R_{nl}(\rho) = \frac{\alpha_n}{(2|l|)!} \left[\frac{(n + |l| - 1)!}{(2n - 1)(n - |l| - 1)!} \right]^{1/2} (\alpha_n \rho)^{|l|} \exp(-\alpha_n \rho / 2) {}_1F_1(-n + |l| + 1; 2|l| + 1, \alpha_n \rho), \quad (4.60)$$

onde

$$\alpha_n = \frac{1}{(n - 1/2)} \frac{k^2 n_1}{n_0}. \quad (4.61)$$

Então, o campo complexo total é dado por

$$E_{nl}(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} R_{nl}(\rho) \exp[-i(\beta_n z - l\varphi)]. \quad (4.62)$$

Note que, diferente da solução para um meio homogêneo ($n_1 = 0$) [56], a largura do feixe não depende de z . Este fato é devido à ação focalizadora da variação do índice de refração que se opõe à tendência natural de alargamento do feixe. Para melhor esclarecer, mostraremos abaixo os primeiros modos do campo elétrico E_{nl} explicitamente:

$$\begin{aligned} E_{10} &= [\alpha_1 / (2\pi)^{1/2}] e^{-\alpha_1 \rho / 2} \exp[-i(\beta_1 z)], \\ E_{20} &= [\alpha_2 / (6\pi)^{1/2}] (1 - \alpha_2 \rho) e^{-\alpha_2 \rho / 2} \exp[-i(\beta_2 z)], \\ E_{21} &= (\alpha_2^2 / (12\pi)^{1/2}) \rho e^{-\alpha_2 \rho / 2} \exp[-i(\beta_2 z - \varphi)], \\ E_{30} &= [\alpha_3 / 2(10\pi)^{1/2}] (2 - 4\alpha_3 \rho + \alpha_3^2 \rho^2) e^{-\alpha_3 \rho / 2} \exp[-i(\beta_3 z)], \\ E_{31} &= (\alpha_3^2 / (60\pi)^{1/2}) \rho (3 - \alpha_3 \rho) e^{-\alpha_3 \rho / 2} \exp[-i(\beta_3 z - \varphi)], \\ E_{32} &= [\alpha_3^3 / (5! 2\pi)^{1/2}] \rho^2 e^{-\alpha_3 \rho / 2} \exp[-i(\beta_3 z - 2\varphi)]. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Para um dado plano z , as distribuições de intensidade do feixe HyG-II são dadas por $I_{nl}(\rho, \varphi, z) = 2\pi\rho|E_{nl}(\rho, \varphi, z)|^2$, tal que eles preservam a sua estrutura apesar da propagação. Os perfis de intensidade dos primeiros modos são mostrados na figura (4.4).

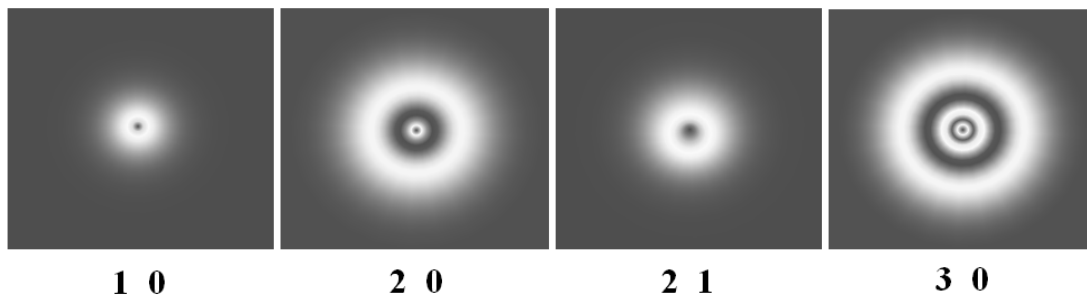


Figura 4.4: Distribuição transversa de intensidade para alguns modos HyG-II na mesma escala. Eles são caracterizados tanto pelos anéis concêntricos brilhantes, quanto pela singularidade no centro. Devido ao rápido decaimento radial de intensidade, os perfis dos modos de ordem mais alta não são significativamente diferentes desses.

4.8.2 Propriedades de transmissão

As vantagens de um sistema de comunicação por fibra ótica em longas distâncias são inegáveis. Entretanto, dois fatores normalmente limitam o número de pulsos óticos que podem ser transmitidos por unidade de tempo: a dispersão modal e a dispersão da velocidade de grupo. Neste tópico, analisaremos esses fatores para o caso de uma fibra com índice hiperbólico.

1. Dispersão modal. A dependência de β com o modo n faz com que diferentes modos tenham diferentes velocidades de fase, $v_n = \omega/\beta_n$, bem como diferentes velocidades de grupo, $(v_g)_n = d\omega/d\beta_n$. Se considerarmos que a região de alto índice de refração é muito fina, tal que

$$\frac{1}{(n - 1/2)} \frac{kn_1}{2n_0} \ll 1, \quad (4.64)$$

podemos aproximar a equação (4.59) como

$$\beta_n = k + \frac{k^3}{8} \left[\frac{1}{(n - 1/2)} \frac{n_1}{n_0} \right]^2. \quad (4.65)$$

Assim, como $k = \omega n_0/c$, podemos obter a expressão da velocidade de grupo

$$(v_g)_n = \frac{c/n_0}{1 + \frac{3}{8}k^2 \left[\frac{1}{(n-1/2)} \frac{n_1}{n_0} \right]^2}. \quad (4.66)$$

Para a transmissão de informação através de trens pulsos óticos em uma fibra com índice hiperbólico, é importante obter informação sobre a dispersão modal desse tipo de meio. Então, se os pulsos enviados na entrada da fibra ($z = 0$) excitarem vários modos, temos que cada modo irá se propagar com a velocidade de grupo $(v_g)_n$. Considerando que modos de $n = 1$ até $n = n_{max}$ são excitados, os pulsos de saída em $z = L$ são alargados da seguinte forma

$$\Delta\tau \cong L \left[\frac{1}{(v_g)_1} - \frac{1}{(v_g)_{n_{max}}} \right]. \quad (4.67)$$

Agora, utilizamos a equação (4.66) para obter

$$\Delta\tau \cong \frac{3k^2 n_1^2}{8cn_0} L \left[\frac{4}{9} - \frac{1}{(n_{max} - 1/2)^2} \right]. \quad (4.68)$$

O número máximo de pulsos por segundo transmitidos sem uma superposição significativa entre pulsos vizinhos é $f_{max} \sim 1/\Delta\tau$. Por exemplo, para uma fibra de 1 Km com índice hiperbólico ($n_0 = 1.5$ e $n_1 = 1.1\mu m$), se enviarmos pulsos de $\lambda = 1\mu m$, excitando um grande número de modos, não importa se dezenas ou centenas deles, da equação (4.68), temos $\Delta\tau \approx 4 \times 10^{-5} s$, e $f_{max} \sim 2.5 \times 10^4$ pulsos por segundo como sendo a taxa máxima de envio. Ela é significativamente menor que a capacidade de uma fibra com índice quadrático ($f_{max} \sim 10^7$ pulsos por segundo), que carrega modos de Hermite-Gauss (HG) [56].

2. Dispersão da velocidade de grupo. O alargamento modal do pulso pode ser removido, por exemplo, se apenas um modo é excitado. Neste caso, apesar da possibilidade de uma alta transmissão de dados, o alargamento do pulso ainda permanece devido à dispersão da velocidade de grupo. Se considerarmos um pulso com uma largura espectral $\Delta\omega$, após uma distância L , ele irá se alargar de [56]

$$\Delta\tau' \approx \frac{2L}{v_g^2} \left| \frac{dv_g}{d\omega} \right| \Delta\omega. \quad (4.69)$$

Uma vez que v_g depende implicitamente de ω , devido à dependência do índice de refração com ω , que nos dá $dv_g/d\omega = \partial v_g/\partial\omega + \partial v_g/\partial n_0 (dn_0/d\omega)$, temos das equações (4.66) e

(4.69) que

$$\Delta\tau' \approx \frac{2L}{c} \left[\frac{3n_1^2 k}{4c(n-1/2)^2} + \frac{dn_0}{d\omega} \right] \Delta\omega, \quad (4.70)$$

onde no segundo termo assumimos que $k^2[(n_1/n_0)/(n+1/2)]^2 \ll 1$. Em fibras óticas típicas, o alargamento do pulso é dominado pelo termo da dispersão do material $dn_0/d\omega$. Entretanto, para a excitação de um único modo, tanto a fibra com índice quadrático, quanto a com índice hiperbólico, devem apresentar uma dispersão da velocidade de grupo da mesma ordem [56, 57]. Entretanto, somente a última pode suportar a transmissão de MAO. Observe que, uma vez que a dispersão modal na equação (4.68) não depende de l , para cada número modal excitado n , existe um subespaço de modos de dimensão $n-1$ que está disponível para conduzir informação adicional sem dispersão modal.

4.8.3 Discussão

Em conclusão, estudamos uma nova família de vórtices óticos, chamados de modos HyG-II, que são soluções da equação paraxial de Helmholtz em duas dimensões para um perfil hiperbólico de índice de refração. Esta família constitui um grupo ortogonal de modos, cujo perfil de intensidade é caracterizado por anéis concêntricos brilhantes com um decaimento exponencial de intensidade na direção radial. Encontramos que, em geral, o perfil de índice hiperbólico causa um grande alargamento modal de pulsos quando comparado com as fibras de índice quadrático. Por outro lado, para a excitação de um único modo, ambos os tipos de fibra se comportam efetivamente da mesma maneira. Entretanto, é notável que, devido à presença de estados com MAO, certas excitações de vários modos nas fibras com o perfil de índice hiperbólico poderiam carregar mais informação que nas fibras com o perfil de índice quadrático.

Capítulo 5

Conclusão

Agora que chegamos ao fim desta tese, é interessante parar para refletirmos o que foi exposto. A nossa jornada começou ao falarmos do estabelecimento dos pilares da física moderna - as teorias relativística e quântica - como descrição teórica de certos resultados experimentais inexplicáveis até o fim do século XIX. O sucesso dessas teorias foi tal que podemos reconhecer o século passado como “o século da física”.

Neste texto, nos detemos em traçar alguns dos fundamentos da teoria quântica com uma abordagem mais contemporânea, bem como apontar algumas aplicações da mesma. Sempre que possível, procuramos seguir uma ordem histórica na apresentação do conteúdo, de modo a conceder um caráter pedagógico à leitura. Além disso, ao contrário de um texto muito técnico, acreditamos que esta postura dá ao leitor uma melhor noção de como a ciência funciona.

Podemos destacar que o nosso foco principal foi o entendimento do princípio da complementaridade, da decoerência, e da analogia entre a mecânica quântica e a ótica ondulatória. Porém, ao final de cada apresentação, também demos um pouco de contribuição no avanço de cada um desses temas.

No segundo capítulo demonstramos o comportamento mutável entre partícula e onda, recentemente descoberto para fótons, para a matéria (átomos). Entretanto, contrário ao que vem sendo apresentado na literatura recente, demonstramos que esta característica não exige que um componente do aparato seja quântico e que esteja preparado em uma superposição de estados classicamente possíveis. Em adição, esta proposta aparenta ser

um experimento de seleção posterior factível, uma vez que não vislumbramos nenhum obstáculo que não possa ser contornado com a tecnologia atual.

No terceiro capítulo vimos um tipo de processo de decoerência no qual a interação sistema-ambiente destrói a interferência na taxa de coincidência de detecção em um interferômetro de duas partículas, onde assumimos que o ambiente era composto de um grande número de fótons. Denominamos este processo “decoerência quântica temporal”. Além disso, foi verificado que a energia desses fótons é um fator decisivo para a efetivação da decoerência. Para este estudo, utilizamos o formalismo da matriz densidade reduzida, que se mostrou uma ferramenta bastante poderosa na análise deste tipo de sistema quântico composto.

No quarto capítulo obtivemos uma nova família de “vórtices óticos” que são soluções da equação paraxial de Helmholtz para um meio com perfil hiperbólico de índice de refração. Os feixes sempre se apresentam como anéis concêntricos com decaimento exponencial de intensidade. Por fim, encontramos que o perfil hiperbólico apresenta um alargamento modal de pulsos maior que o quadrático. Porém, devido a maior degenerescência dos modos, em certos casos, o perfil hiperbólico pode levar vantagem em relação ao perfil quadrático na capacidade de transmitir dados.

Nestas linhas finais, gostaria de expressar o prazer e o privilégio de poder estudar e tentar contribuir com o desenvolvimento da teoria quântica, que, sem dúvida, é uma das mais importantes heranças intelectuais que possuímos. Além da sua importância, espero ter transmitido ao leitor um pouco da sua beleza e do método científico nela utilizado. Entretanto, também é importante ter em mente que a física é sedutora e perversa ao mesmo tempo. De fato, conhecendo a sua história da maneira como a conhecemos, não devemos considerar impossível que a mecânica quântica venha a falhar um dia. Por outro lado, evidências contraditórias são uma das coisas mais excitantes que podem acontecer; elas significam que estamos no início do caminho para uma teoria melhor. Assim, é possível que a base do estudo apresentado aqui seja superada, o que seria uma grande e nova euforia científica.

Referências Bibliográficas

- [1] A. C. Elitzur and L. Vaidman, *Foundations of Physics*, “Quantum Mechanical Interaction-Free Measurements,” **23**, 987 (1993).
- [2] P. Kwiat *et al.*, “Interaction-Free Measurement,” *Physical Review Letters* **74**, 4763 (1995).
- [3] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 3rd Edition (Prentice Hall, Upper Saddle River, 1999).
- [4] N. Bohr, “Das Quantenpostulat und die neuere Entwicklung der Atomistik,” *Naturwissenschaften*, **16**, 245 (1928).
- [5] R. P. Feynman, *Lectures on Physics* Vol. 3 (Addison Wesley, Reading, Massachusetts, 1965).
- [6] M. Jammer, *The Philosophy of Quantum Mechanics*, 1st Edition, (John Wiley & Sons, New York, 1974).
- [7] W. Heisenberg, *The Physical Principles of the Quantum Theory* (University of Chicago Press, 1930).
- [8] W. K. Wootters and W. H. Zurek, “Complementarity in the double-slit experiment: Quantum nonseparability and a quantitative statement of Bohr’s principle,” *Phys. Rev. D* **19**, 473 (1979).

- [9] M. O. Scully and K. Drühl, “Quantum eraser: A proposed photon correlation experiment concerning observation and “delayed choice” in quantum mechanics,” *Phys. Rev. A* **25**, 2208 (1982).
- [10] E. Schrödinger, “Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik,” *Naturwissenschaften* **23**, 807 (1935).
- [11] R. Kaltenbaek *et al.*, *SPIE Proceedings on Quantum Communications and Quantum Imaging*, (International Society for Optical Engineering, p. 252, 2003).
- [12] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, (Springer, Berlin, 1932).
- [13] M. O. Scully, B.-G. Englert, and A. Walther, “Quantum optical tests of complementarity,” *Nature* **351**, 111 (1991).
- [14] J. A. Wheeler, *Quantum Theory and Measurement*, edited by J. A. Wheeler and W. H. Zurek (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1984).
- [15] R. Ionicioiu and D. R. Terno, “Proposal for a Quantum Delayed-Choice Experiment,” *Phys. Rev. Lett.* **107**, 230406 (2011).
- [16] A. Peruzzo *et al.*, “A Quantum Delayed-Choice Experiment,” *Science* **338**, 634 (2012).
- [17] F. Kaiser *et al.*, “Entanglement-Enabled Delayed-Choice Experiment,” *Science* **338**, 637 (2012).
- [18] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, 7th Ed. (Cambridge University Press, 1999).
- [19] J. M. Raimond, M. Brune, and S. Haroche, “Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity,” *Rev. Mod. Phys.* **73**, 565 (2001).

- [20] L. D. Landau, “The damping problem in wave mechanics,” *Z. Phys.* **45**, 430 (1927).
- [21] W. H. Zurek, “Decoherence and the transition from quantum to classical,” *Phys. Today* **44**, 36 (1991).
- [22] J. G. Rarity and P. R. Tapster, “Experimental violation of Bell’s inequality based on phase and momentum,” *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2495, (1990).
- [23] P. G. Kwiat, W. A. Vareka, C. K. Hong, H. Nathel and R. Y. Chiao, “Correlated two-photon interference in a dual-beam Michelson interferometer,” *Phys. Rev. A* **41**, 2910 (1990).
- [24] Z. Y. Ou, X. Y. Zou, L. J. Wang and L. Mandel, “Observation of nonlocal interference in separated photon channels,” *Phys. Rev. Lett.* **65**, 321 (1990).
- [25] L. Mandel, “Quantum effects in one-photon and two-photon interference,” *Rev. Mod. Phys.* **71** S274 (1999).
- [26] C. K. Hong, Z. Y. Ou, and L. Mandel, “Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference,” *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2044 (1987).
- [27] M. A. Horne and A. Zeilinger, *Symposium on the Foundations of Modern Physics*, 435 (World Scientific, Singapore, 1985).
- [28] K. Gottfried, “Two-particle interference,” *Am. J. Phys.* **68** 143 (2000).
- [29] W. H. Zurek, “Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical,” *Rev. Mod. Phys.* **75** 715 (2003).
- [30] M. Schlosshauer, “Decoherence, the measurement problem, and interpretations of quantum mechanics,” *Rev. Mod. Phys.* **76** 1267 (2005).

- [31] J. Humblet, “Sur le moment d’impulsion d’une onde electromagnetique,” *Physica (Amsterdam)* **10**, 585 (1943).
- [32] G. Abbate, P. Maddalena, L. Marrucci, L. Saetta, and E. Santamato, “Photodynamical Effects Induced by the Angular Momentum of Light in Liquid Crystals,” *Phys. Scr.* **T39**, 389 (1991).
- [33] L. Allen, M.W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw, and J. P. Woerdman, “Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes,” *Phys. Rev. A* **45**, 8185 (1992).
- [34] L. Allen, M. J. Padgett, and M. Babiker, “The orbital angular momentum of light,” *Prog. Opt.* **39**, 291 (1999).
- [35] A. T. O Neil, I. MacVicar, L. Allen, and M. J. Padgett, “Intrinsic and Extrinsic Nature of the Orbital Angular Momentum of a Light Beam,” *Phys. Rev. Lett.* **88**, 053601 (2002).
- [36] J. F. Nye and M.V. Berry, “Dislocations in wave trains,” *Proc. R. Soc. A* **336**, 165 (1974).
- [37] V.Y. Bazhenov, M.V. Vasnetsov, and M. S. Soskin, “Laser beams with screw dislocations in their wavefronts,” *JETP Lett.* **52**, 429 (1990).
- [38] J. Salo, J. Fagerholm, A. T. Friberg, and M. M. Salomaa, “Nondiffracting bulk-acoustic X waves in crystals,” *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1171 (1999).
- [39] G. D. M. Jeffries, J. S. Edgar, Y. Zhao, J. P. Shelby, C. Fong, and D. T. Chiu, Chiu, “Using polarization-shaped optical vortex traps for single-cell nanosurgery,” *Nano. Lett. Proc. R. Soc. London Ser. A* **7**, 415 (2007).
- [40] J. A. Davis, D. E. McNamara, D. M. Cottrell, and J. Campos, “Image processing with the radial Hilbert transform-theory and experiments,” *Opt. Lett.* **25**, 99 (2000).

- [41] H. He, N. R. Heckenberg, and H. Rubinsztein-Dunlop, “Optical particle trapping with higher-order doughnut beams produced using high efficiency computer-generated holograms,” *J. Mod. Opt.* **42**, 217 (1995).
- [42] Y. Zhao, J. S. Edgar, G. D. M. Jeffries, D. McGloin, and D. T. Chiu, “Spin-to-orbital angular momentum conversion in a strongly focused optical beam,” *Phys. Rev. Lett.* **99**, 073901 (2007).
- [43] B. E. A. Saleh, *Fundamentals of photonics* (Wiley, 1991).
- [44] W. Miller Jr., *Symmetry and Separation of Variables* (Addison-Wesley, 1977).
- [45] M. A. Bandres and J. C. Gutiérrez-Vega, “Circular beams,” *Opt. Lett.* **33**, 177-179 (2008).
- [46] V. V. Kotlyar, R. V. Skidanov, S. N. Khonina and V. A. Soifer, “Hypergeometric modes,” *Opt. Lett.* **32**, 742 (2007).
- [47] E. Karimi, G. Zito, B. Piccirillo, L. Marrucci and E. Santamato, “Hypergeometric-Gaussian modes,” *Opt. Lett.* **32**, 3053 (2007).
- [48] E. Karimi, B. Piccirillo, L. Marrucci and E. Santamato, “Improved focusing with hypergeometric-Gaussian type-II optical modes,” *Opt. Exp.* **16**, 21069 (2007).
- [49] Bertúlio de Lima Bernardo, Fernando Moraes, “Data transmission by hypergeometric modes through a hyperbolic-index medium,” *Opt. Exp.* **19**, 11264 (2011).
- [50] Chai Yeh, *Handbook of fiber optics: theory and applications* (Academic Press, San Diego, 1990).
- [51] Melvin Lax, William H. Louisell and William B. McKnight, “From Maxwell to paraxial wave optics,” *Phys. Rev. A*, **11**, 1365 (1975).

- [52] S.J. van Enk and G. Nienhuis, *Optics Communications*, “Eigenfunction description of laser beams and orbital angular momentum of light,” **94** 147 (1992).
- [53] X. L. Yang, S. H. Guo, F. T. Chan, K.W. Wong and W. Y. Ching, “Analytic solution of a two-dimensional hydrogen atom. I. Nonrelativistic theory,” *Phys. Rev. A* **43**, 1186 (1991).
- [54] L. S. Davityan, G.S. Pogosyan, A. N. Sisakyan and V. M. Ter-Antonyan, “Transformations between parabolic bases of the two-dimensional hydrogen atom in the continuous spectrum,” *Theor. Math. Phys.* **74**, 240 (1988).
- [55] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, 1970).
- [56] A. Yariv, *Optical Electronics* (Saunders College Publishing, 1991).
- [57] L. G. Cohen and H. M. Presby, “Shuttle pulse measurements of pulse spreading in a low loss graded-index fiber,” *Appl. Opt.* **14**, 1361 (1975)