



Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Física “Gleb Wataghin”

Gabriela Iunes Depetri

**Integrabilidade e ressonâncias:
aplicações dos métodos de Melnikov**

Campinas
2015

Gabriela Iunes Depetri

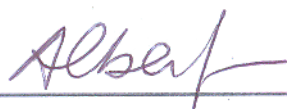
**Integrabilidade e ressonâncias:
aplicações dos métodos de Melnikov**

Tese apresentada ao Instituto de Física “Gleb Wataghin”
da Universidade Estadual de Campinas como parte dos
requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutora
em Ciências.

Orientador: Alberto Vazquez Saa

Co-orientador: Marcus Aloizio Martinez de Aguiar

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL.
TESE DEFENDIDA PELA ALUNA GABRIELA IUNES DEPETRI
E ORIENTADA PELO PROF. DR. ALBERTO VAZQUEZ SAA.



Campinas
2015

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CNPq, 141762/2011-0

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Física Gleb Wataghin
Lucimeire de Oliveira Silva da Rocha - CRB 8/9174

D441i Depetri, Gabriela lunes, 1987-
Integrabilidade e ressonâncias : aplicações dos métodos de Melnikov /
Gabriela lunes Depetri. – Campinas, SP : [s.n.], 2015.

Orientador: Alberto Vazquez Saa.
Coorientador: Marcus Aloizio Martinez de Aguiar.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física
Gleb Wataghin.

1. Teoria dos sistemas dinâmicos. 2. Mecânica clássica. 3. Gravitação. I.
Saa, Alberto Vazquez, 1966-. II. Aguiar, Marcus Aloizio Martinez de, 1960-. III.
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física Gleb Wataghin. IV.
Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Integrability and resonances : applications of the Melnikov
methods

Palavras-chave em inglês:

Theory of dynamic systems

Classical mechanics

Gravitation

Área de concentração: Física

Titulação: Doutora em Ciências

Banca examinadora:

Alberto Vazquez Saa [Orientador]

Iberê Luiz Caldas

Rero Marques Rubinger

Roberto Venegeroles Nascimento

Marcus Vinicius Segantini Bonança

Data de defesa: 25-09-2015

Programa de Pós-Graduação: Física

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE DOUTORADO DE **GABRIELA IUNES DEPETRI – RA: 115264** APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”, DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 25/09/2015.

COMISSÃO JULGADORA:

- Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa – (Orientador) – IMECC/UNICAMP
- Prof. Dr. Marcus Vinicius Segantini Bonança – IFGW/UNICAMP
- Prof. Dr. Roberto Venegeroles Nascimento – UFABC
- Prof. Dr. Rero Marques Rubinger – UNIFEI
- Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas – IF/USP

A Ata de Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no processo de vida acadêmica do aluno.

Agradecimentos

Aos meu avós, pelo exemplo, apoio incondicional e paciência, e à vovó Zilda em especial, pela melhor comida do mundo! Aos meus pais pelo suporte e compreensão, por me inspirarem todos os dias a ser uma pessoa melhor. Ao meu irmão, pelo companheirismo, por estar presente em todos os momentos da minha vida, e por sempre ser capaz de me arrancar uma risada. Aos meus tios, Deise, Jorge, Diane, Ivo, Patrizia, Carlos, pelo exemplo que são para mim, por sempre me indicarem o caminho nos momentos necessários. Aos meus primos, Jó, Bix, Fábio, Maya, Bruh, Nuno, Dani, por tantos momentos maravilhosos e tantas risadas que dividimos, por me proporcionarem uma infância incrível e por terem se tornado grandes amigos. Aos amigos de longuíssima data, Thiba, Lu, Fábía, por me permitirem acompanhar as histórias de vocês de pertinho por tantos anos. Aos companheiros de pedaladas, pela companhia serras adentro que ajudaram a manter o pique! Ao Rapha, por estar sempre disposto a passar perrengues com bom humor. Aos amigos acadêmicos, Paulo, Jana, Denise, Vini, Leo, Thiago, por tornarem o caminho mais leve e divertido! Aos companheiros de sala do LFNL, Bóris e Felipe, por todas as discussões sobre os mais variados assuntos. Aos professores Alberto Saa, pela sugestão de temas interessantes e apoio, e José Carlos Sartorelli pelas discussões valiosas e pelos dados experimentais apresentados neste trabalho.

Gratidão!

Finalmente, agradeço ao CNPq pelo suporte financeiro a este projeto.

Dedicated : to the thunders
to the pictures we love
to your deep eyes
to that big distance
to the martyr
to the other side of the street
to the dead sea
to my hands on you
to your voice on my eyes
to your fingers on my lips
to the safe space between us
to the keys of your heart

Mountains of salt



Resumo

“All that is important is this one moment in movement. Make the moment important, vital and worth living. Do not let it slip away unnoticed and unused.”

– Martha Graham

Nesta tese estudamos, através dos métodos de Melnikov, o comportamento de dois sistemas dinâmicos que são exemplos paradigmáticos de integrabilidade em Mecânica Clássica, quando sujeitos a perturbações: (i) o pêndulo plano simples, no caso em que o pivô oscila harmonicamente ao longo de um eixo inclinado em relação à direção vertical; e (ii) o problema de Kepler, no caso em que a massa do corpo que gera o campo gravitacional possui momento de quadrupolo.

Para o pêndulo simples parametricamente excitado ao longo de uma direção inclinada, analisamos a ocorrência de caos homoclínico, e também de oscilações subharmônicas, com o objetivo de comparar os nossos resultados com aqueles conhecidos para o caso em que a excitação ocorre ao longo da direção vertical. Verificamos que o critério para a ocorrência de caos homoclínico é numericamente muito próximo em ambos os casos, mas em relação à ocorrência de soluções oscilatórias subharmônicas notamos uma diferença relevante devido à quebra de simetria nas equações do movimento do sistema: enquanto para o caso vertical a condição de Melnikov garante apenas a existência de oscilações subharmônicas de ordem par, nada se podendo afirmar em relação às subharmônicas de ordem ímpar, para o caso inclinado ela garante a ocorrência de todo o espectro de ressonâncias. Sabemos que apesar de alguns autores reportarem a ocorrência de oscilações subharmônicas de ordem ímpar no caso vertical, estas são muito raras e difíceis de ser encontradas, ao contrário do que acontece com as oscilações

subharmônicas de ordem par. Entretanto, neste trabalho mostramos, através de simulações numéricas e dados experimentais, que no caso inclinado elas podem ser encontradas trivialmente em regiões de ressonância, provavelmente porque as bacias de atração dessas órbitas são de natureza diferente em cada caso. Os dados experimentais apresentados nesta tese foram tomados no Laboratório de Fenômenos Não-Lineares (LFNL) do Instituto de Física da Universidade de São Paulo (IFUSP), em colaboração com o Prof. Dr. José Carlos Sartorelli.

Para o problema de Kepler, as inhomogeneidades na distribuição da massa do corpo que gera o campo gravitacional são descritas através de expansão multipolar. Sabemos o termo de dipolo mantém o sistema integrável. O termo de quadrupolo, por sua vez, pode provocar a ocorrência de caos no sistema. Em um trabalho de 2001, Géron e Letelier afirmam, baseados em simulações numéricas, que no caso em que a perturbação é oblata, o sistema é integrável, enquanto se a perturbação é prolata, o sistema pode apresentar caos. Entretanto, em um trabalho mais recente, Letelier et al mostram, também numericamente, que ambos os casos podem apresentar trajetórias caóticas. Com o nosso trabalho, resolvemos esta inconsistência na literatura, determinando que a ocorrência de caos de fato não depende do tipo da deformação. Nosso resultado está de acordo com o caso mais geral estudado na literatura.

Palavras-chave: Teoria dos Sistemas Dinâmicos, Mecânica Clássica, Teoria de Perturbações, Método de Melnikov, Gravitação, Problema de Kepler, Pêndulo Paramétrico, Ressonâncias Paramétricas.

Abstract

“All that is important is this one moment in movement. Make the moment important, vital and worth living. Do not let it slip away unnoticed and unused.”

– Martha Graham

In this PhD thesis we study, through the Melnikov methods, the behaviour of two dynamical systems that are paradigms of integrability in Classical Dynamics, when subject to perturbations: (i) the planar simple pendulum, in the case that the pivot oscillates harmonically along a tilted direction; and (ii) the Kepler problem, in the case that the mass of the body generating the gravitational field is not homogeneous, but instead presents a quadrupole moment term.

To the simple pendulum parametrically excited along a tilted direction, we analyze the occurrence of homoclinic chaos, and also of subharmonic oscillatory solutions, willing to compare our results with those already known in the literature in the case the excitation is along the vertical direction. We verified the criterium to the occurrence of homoclinic chaos is numerically very close in both cases, but considering the occurrence of subharmonic oscillatory orbits we noted an important difference due to the symmetry breaking of the equations of motion describing the system: while in the vertical case the Melnikov conditions can only assure the occurrence of even subharmonic oscillations (nothing can be said about the odd subharmonic oscillating solutions), in the tilted case it guarantees the occurrence of all subharmonic oscillations. Still some authors report the occurrence of odd subharmonic oscillations in the vertical case, unlike the even oscillatory orbits, those are very rare and hard to find. In this work we show, through numeric simulations and experimental data, that in the tilted case they can be easily

found in resonance regions, probably because their basins of attraction have different characteristics in both cases. The experimental data presented in this thesis were taken at the Laboratory of Nonlinear Phenomena (LFNL) at the Physics Institute of the University of São Paulo (IFUSP), in collaboration with Prof. Dr. José Carlos Sartorelli.

To the Kepler problem, the inhomogeneities in the mass distribution of the heavy body generating the gravitational field are described through multipolar expansion. We know the dipole term keeps the integrability of the system. The quadrupole term, instead, can lead to the occurrence of chaotic orbits in the system. In 2001, Géron and Letelier, based on numeric simulations, assert that the system is integrable if the perturbation is of oblate type, but chaotic if it is of prolate type. However, in a more recent work, Letelier *et al* show, also via numeric computation, that both cases can present chaotic trajectories. We solve this inconsistency in the literature by determining that the occurrence of chaos in fact does not depend on the deformation type. Our results agree with the more general case studied in the literature.

Key words: Theory of Dynamical Systems, Classical Mechanics, Perturbation Theory, Melnikov Method, Gravitation, Kepler Problem, Parametric Pendulum, Parametric Resonances.

Lista de Figuras

| | | |
|-----|---|----|
| 1.1 | Espaço de parâmetros para o pêndulo simples parametricamente excitado na vertical. Figura extraída de [1]. | 22 |
| 2.1 | Figura adaptada de [2], representando os possíveis tipos de equilíbrio de um sistema dinâmico bidimensional em termos do traço (τ) e do determinante (Δ) da matriz Jacobiana. | 28 |
| 2.2 | Figura adaptada de [3], representando os possíveis tipos de equilíbrio de um ciclo limite. | 29 |
| 2.3 | Figura extraída de [4], representando as hipóteses necessárias para os teoremas de Melnikov. Veja que o sistema possui um ponto de sela, p_0 , uma órbita homoclínica $q^0(t)$ bi-assintótica a p_0 e uma família contínua de órbitas periódicas $q^\alpha(t)$, $\alpha \in (-1, 0)$ preenchendo o interior da órbita homoclínica. | 34 |
| 2.4 | Figura adaptada de [5], representando o espaço de configurações do sistema não perturbado em três dimensões. | 36 |
| 2.5 | Figura adaptada de [5], representando o espaço de configurações do sistema perturbado. | 37 |
| 2.6 | Figura adaptada de [6], representando a definição de distância entre as variedades estável e instável que definimos. | 38 |
| 3.1 | Foto do pêndulo simples do LFNL, exibindo a haste do pêndulo, a manivela e o motor que provocam a oscilação do pivô, e os encoders ópticos utilizados para a tomada de dados. | 51 |

Lista de Figuras

- 3.2 Diagrama representando um pêndulo plano simples parametricamente excitado, onde são indicados os parâmetros de controle do sistema e a variável usada para descrever o movimento. 52
- 3.3 Medida realizada para obter o atrito do nosso arranjo experimental. Em preto, temos a série temporal velocidade angular obtida experimentalmente, e em magenta, a envoltória desta série temporal, que queremos ajustar. 54
- 3.4 Espaço de fase $\theta \times \dot{\theta}$ do pêndulo simples plano. Note que as órbitas em azul representam trajetórias fechadas, enquanto as órbitas em verde, trajetórias abertas. A trajetória em vermelho é a separatriz entre movimento limitado e não limitado. Figura extraída de [7]. 57
- 3.5 Espaço de parâmetros para o pêndulo parametricamente excitado na direção vertical ($\phi = 0$). Note que aparecem apenas oscilações de período par em regiões amplas do espaço de parâmetros. 63
- 3.6 Espaço de parâmetros para o pêndulo parametricamente excitado na direção inclinada ($\phi = \pi/8$). Note que aparecem oscilações de período tanto par quanto ímpar em regiões amplas do espaço de parâmetros. 64
- 3.7 Diagrama de bifurcações $\langle |\omega| \rangle \times f_p$ para $A = 2.02$ obtido numericamente. Na linha vermelha a frequência da perturbação é crescente, e na linha azul, decrescente. Neste diagrama, medimos oscilações de período-1/2, 1 e 2. Nenhuma oscilação de período mais alto foi encontrada. 65
- 3.8 Diagrama de bifurcações $\langle |\omega|_{max} \rangle \times f_p$ para $A = 2.02$. Na linha vermelha a frequência da perturbação é crescente, e na linha azul, decrescente. Neste diagrama, medimos oscilações de período-1/2, 1 e 2. Nenhuma oscilação de período mais alto foi encontrada. . . 67

Lista de Figuras

- 3.9 Diagrama de Bifurcação $\langle |\omega|_{max} \rangle \times f_p$ para $A = 2.02$. Na linha vermelha a frequência da perturbação é crescente, e na linha azul, decrescente. Na região $f_p \approx 3f_0$ a oscilação de período T_p coexiste com a oscilação de período $3T_p$, representado pela linhas magenta, em que a frequência da perturbação é crescente, e ciano, em que esta é decrescente. 68
- 3.10 Diagrama de Bifurcação $\langle |\omega|_{max} \rangle \times f_p$ para $A = 2.02$. Na linha vermelha a frequência da perturbação é crescente, e na linha azul, decrescente. Na região $f_p \approx 3f_0$ a oscilação de período T_p coexiste com a oscilação de período $3T_p$, na região $f_p \approx 4f_0$ com o período $4T_p$, e na região $f_p \approx 5f_0$ com o período $5T_p$. Sobre as linhas magenta, a frequência da perturbação é crescente, e ciano, é decrescente. 69
- 3.11 Diagramas de bifurcações $\langle |\omega|_{max} \rangle \times f_p$ para $A = 2.02$ obtidos experimentalmente. Em (a) temos o diagrama obtido da maneira tradicional: na linha vermelha a frequência da perturbação é crescente, e na linha azul, decrescente. Em (b) temos o diagrama obtido colocando manualmente o pêndulo na bacia de atração das oscilações de períodos mais altos: na linha magenta a frequência da perturbação é crescente, e na linha ciano, decrescente. 70
- 3.12 Séries temporais ilustrando as oscilações de período-2, 3, 4 e 5 (à esquerda), com os respectivos mapas estroboscópicos (à direita). 71
- 3.13 Critério de Melnikov para a ocorrência de caos homoclínico para o pêndulo parametricamente excitado nos casos vertical (azul) e inclinado (vermelho). Note que as linhas são muito próximas. 76
- 3.14 Loci das bifurcações do tipo sela-nó onde nascem os atratores P3 e P4 obtidos numericamente através de continuação numérica [8] (linhas cheias azuis, denotadas por SN3 e SN4) e através do método de Melnikov (linhas formadas por círculos magenta, denotadas por R^3_{impar} e R^4_{par}). Os resultados concordam muito bem para valores pequenos de P ($P < 0.5$). 85

Lista de Figuras

| | | |
|-----|---|-----|
| 4.1 | Distribuição de massa anisotrópica com correção quadrupolar do tipo: (a) oblata; (b) prolata. | 89 |
| 4.2 | A integral (4.22) em função de A | 95 |
| A.1 | Vetor de Laplace-Runge-Lenz para uma órbita elíptica, solução geral do problema de dois corpos, em quatro pontos distintos. A conservação deste vetor impede a precessão da órbita. | 102 |

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introdução | 19 |
| 1.1 | Pêndulo parametricamente excitado | 19 |
| 1.2 | Problema de Kepler anisotrópico | 25 |
| 2 | Tópicos de Sistemas Dinâmicos | 27 |
| 2.1 | Alguns conceitos de sistemas dinâmicos | 27 |
| 2.2 | Algumas bifurcações locais em duas dimensões | 30 |
| 2.2.1 | Bifurcação sela-nó | 30 |
| 2.2.2 | Bifurcação pitchfork | 31 |
| 2.2.3 | Bifurcação de Hopf | 31 |
| 2.2.4 | Bifurcação duplicação de período | 31 |
| 2.3 | Os métodos de Melnikov | 31 |
| 2.3.1 | Método de Melnikov homoclínico | 34 |
| 2.3.2 | Método de Melnikov subharmônico | 41 |
| 2.3.3 | Generalização para órbita “homoclínica” aberta | 44 |
| 2.4 | O método da continuação numérica | 47 |
| 3 | Pêndulo simples parametricamente excitado | 49 |
| 3.1 | Aparato experimental | 52 |
| 3.1.1 | Determinação do atrito | 53 |
| 3.2 | Pêndulo simples revisitado | 55 |
| 3.3 | Equações do movimento | 59 |
| 3.4 | Espaços de parâmetros | 61 |
| 3.5 | Resultados experimentais | 65 |
| 3.5.1 | Diagramas de Bifurcação | 66 |

| | |
|--|------------|
| Sumário | 15 |
| 3.5.2 Séries temporais e mapas estroboscópicos | 70 |
| 3.6 Aplicação dos métodos de Melnikov | 72 |
| 3.6.1 Ocorrência de caos homoclínico | 72 |
| 3.6.2 Persistência das órbitas subharmônicas | 76 |
| 4 Problema de Kepler anisotrópico | 87 |
| 4.1 Problema de Kepler revisitado | 89 |
| 4.2 Método de Melnikov | 92 |
| 5 Comentários finais | 97 |
| A Vetor de Laplace-Runge-Lenz | 100 |
| Referências Bibliográficas | 103 |

Capítulo 1

Introdução

*“I want to lift the audience to the miraculous in human nature.
After all, we shouldn’t be here, with all the odds against us in nature.
It’s kind of unusual and wonderful!”*

– Paul Taylor

Nesta seção, apresentamos uma breve introdução histórica, enfatizando os temas que serão abordados por nós neste trabalho, a respeito dos problemas do pêndulo simples parametricamente excitado e do problema de Kepler anisotrópico.

1.1 Pêndulo parametricamente excitado

O pêndulo parametricamente excitado consiste em um pêndulo simples plano cujo pivô oscila harmonicamente. O termo “paramétrico” se deve ao fato de os parâmetros do sistema variarem com o tempo. Na aproximação de pequenas oscilações, e sem atrito, este sistema pode ser descrito pela equação de Mathieu,

$$\ddot{\theta} + (1 + P \cos \Omega_p t) \theta = 0.$$

Os parâmetros (adimensionais) de controle deste sistema são a amplitude, P , e a frequência, Ω_p , de oscilação do pivô. No caso mais geral e incluindo um termo

de atrito proporcional à velocidade temos

$$\ddot{\theta} + (1 + P \cos \Omega_p t) \sin(\theta) + \beta \dot{\theta} = 0. \quad (1.1)$$

Note que esta equação é simétrica em relação à mudança de variáveis $\theta \rightarrow -\theta$. Apesar de sua aparente simplicidade, este sistema é um paradigma no estudo de sistemas não lineares, apresentando uma grande variedade de fenômenos interessantes, como por exemplo a estabilização do ponto de sela $(\theta, \dot{\theta}) = (\pi, 0)$, primeiramente notado em 1908 por Stephenson [9], e estudado por diversos outros autores de forma analítica, numérica e experimental [10–14]. Koch e Leven levantam evidências numéricas [15] e experimentais [16, 17] de que o pêndulo parametricamente excitado apresenta comportamento caótico, e que uma das rotas para o caos característica do sistema é a cascata de period-doubling do atrator de rotação. Em [18], Clifford e Bishop classificam três tipos de movimentos caóticos encontrados nesse sistema: rotações e oscilações caóticas, que existem em regiões muito estreitas do espaço de parâmetros, e sempre coexistem com outros atratores periódicos; e o que os autores chamaram de “*tumbling chaos*”, em que o pêndulo pode alternar entre rotações nos dois sentidos e oscilações em torno da posição $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$. Este último, pode ser *transiente*, se a série temporal exibe este comportamento durante um tempo finito, e depois o sistema se estabiliza em um dos atratores periódicos, de oscilação ou de rotação, ou *persistente*, se este comportamento perdura por tempo indeterminado. Diferentemente das oscilações e rotações caóticas, o *tumbling chaos* se manifesta em um área muito maior do espaço de parâmetros, em alguns casos sendo o único movimento estável possível, o que lhe confere maior estabilidade estrutural. Há ainda o surgimento de ressonâncias subharmônicas, que podem ser encontradas através de aproximações lineares [19, 20], ou então, para casos mais gerais, através do método de Melnikov [21]. Muitos autores voltaram sua atenção também para o movimento de rotação. Em [22–25], diversos autores buscam soluções de rotação analíticas e numéricas, nos casos de excitação vertical e inclinada. Em [26–28], buscam-se métodos para extrair energia das ondas do mar através de osciladores paramétricos, transformando o movimento vertical de sobe-e-desce das ondas em rotações de conjuntos de pêndulos paramétricos.

Uma análise do comportamento das bifurcações locais e globais do sistema pode ser encontrada em [1, 29]. Veja a Figura 1.1, extraída da referência [1], para uma ilustração. As bifurcações locais que ocorrem nesta região do espaço de parâmetros são:

- (i) $sn2T$ é o locus da bifurcação do tipo sela-nó onde surge o atrator de oscilação de período-2, S_{2T} ;
- (ii) snR é o locus das bifurcações do tipo sela-nó onde surgem os atratores de rotação de período-1, S_R (nos sentidos horário, S'_R , e anti-horário, S''_R);
- (iii) H_1 e H_2 são as bifurcações de Hopf ¹ subcrítica e supercrítica, respectivamente, que delimitam a área em que o atrator S_0 do ponto fixo $(0,0)$ não existe;
- (iv) O atrator S_{2T} passa por uma bifurcação do tipo quebra de simetria sb , e em seguida desenvolve uma cascata de bifurcação de duplicação de período, representada pela linha pd_{2T} , que termina em uma zona de oscilações caóticas até cr_{2T} , a crise de fronteira em que este atrator desaparece;
- (v) O atrator S_R passa por uma cascata de bifurcação de duplicação de período, representada pela linha pd_R , que termina em uma zona de rotações caóticas até cr_R , a crise de fronteira em que este atrator desaparece.

Já as bifurcações globais, representadas por linhas coloridas, são:

- (i) $hom D_0$, o locus das tangências homoclínicas de Melnikov, relativas ao ponto de sela $D_0 = (\pi, 0)$;
- (ii) $hom D_R$, locus das tangências homoclínicas relativas às selas D_R , que acompanham os atratores de rotação período-1 nos sentidos horário e anti-horário;
- (iii) $het (I_0, D_R)$, locus das tangências heteroclínicas entre as variedades invariantes dos pontos de sela $I_0 = (0, 0)$ e D_R .

¹Alguns autores relatam esta bifurcação como sendo do tipo pitchfork [29]. Se o sistema for tratado como um sistema autônomo, com mais dimensões, esta pode ser vista como bifurcação pitchfork, enquanto se for tratado como um sistema não autônomo, ela pode ser vista como uma bifurcação de Hopf.

Na região compreendida entre as linhas cr_R e H_1 , o único movimento possível para o sistema é o *tumbling chaos*.

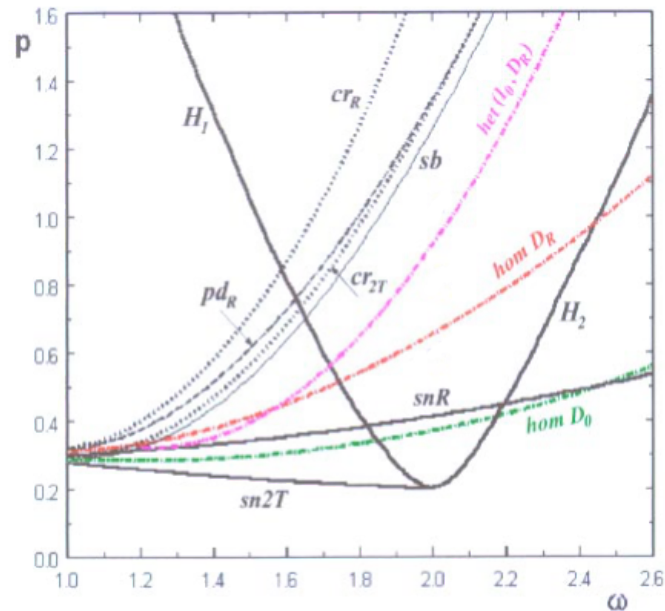


Figura 1.1: Espaço de parâmetros para o pêndulo simples parametricamente excitado na vertical. Figura extraída de [1].

Os métodos de Melnikov consistem em critérios analíticos acerca da ocorrência de caos homoclínico e da persistência de órbitas periódicas subharmônicas para sistemas dinâmicos inicialmente integráveis, quando sujeitos a pequenas perturbações dependentes do tempo e periódicas. Em [21], Koch e Leven calculam: (i) a condição de Melnikov para a ocorrência de caos homoclínico - o locus das tangências homoclínicas obtido está longe da área conhecida como *tumbling chaos*, mas sabemos que outras intersecções homoclínicas e heteroclínicas, associadas aos pontos de sela dos atratores de rotação, desempenham um papel mais relevante em relação às mudanças globais na estrutura do sistema [1], conforme a Figura 1.1; (ii) a condição de Melnikov acerca da persistência de órbitas subharmônicas, tanto de oscilação quanto de rotação - no caso das oscilações, as integrais de Melnikov garantem a existência de soluções de período par, ou seja, soluções cujo período é um múltiplo par do período da excitação, nada se podendo afirmar em relação às órbitas de período ímpar. Em um trabalho mais antigo [30],

Arneodo *et al.* encontram numericamente uma órbita de período-1, enquanto em [31], Bryant e Miles, não conseguem localizar, através de métodos numéricos, órbitas de período ímpar para este sistema. Em [32, 29], Bishop e Clifford encontram, através do uso de dinâmica simbólica, órbitas de período-3, deixando claro que estas são estáveis apenas em uma região muito estreita do espaço de parâmetros, o que dificulta sua verificação numérica e experimental. Desta maneira, vemos que apesar da existência de subharmônicas ímpares no caso vertical, não previstas pelo método de Melnikov, fica clara uma diferença entre as bacias de atração de oscilações pares e ímpares para o pêndulo parametricamente excitado na vertical: as órbitas pares são encontradas trivialmente em simulações numéricas e experimentos, enquanto as ímpares dependem de um ajuste muito fino dos parâmetros para serem obtidas.

Em [33, 34], Sartorelli *et al.*, fazem estudos numéricos e experimentais do pêndulo duplo sujeito a excitação paramétrica nos casos vertical e inclinado, levantando as diferenças na dinâmica do sistema provocadas pela quebra de simetria das equações do movimento que descrevem o sistema. Nota-se que enquanto para excitação vertical, o pêndulo se encontra parado (ponto fixo estável) fora das regiões de ressonância, para excitação inclinada o pêndulo oscila com período igual ao período da perturbação nessas mesmas regiões. Além disso, as bifurcações do tipo pitchfork subcrítica e supercrítica, que levam o pêndulo de ponto fixo a oscilação de período-2 e vice-versa, no caso vertical, são bifurcações do tipo duplicação de período, que levam o pêndulo de oscilação período-1 para oscilação período-2, no caso inclinado.

Neste trabalho, realizamos o mesmo tipo de análise, comparando a dinâmica do pêndulo simples paramétrico nos casos vertical e inclinado. Conforme veremos, no caso inclinado, sendo ϕ o ângulo que a direção em que se dá a excitação do pivô forma com a direção vertical, a equação do movimento é dada por²

$$\ddot{\theta} + (1 + P \cos \Omega_p t) \sin(\theta - \phi) + \beta \dot{\theta} = 0. \quad (1.2)$$

Note que neste caso a equação do movimento não é mais simétrica com respeito à mudança de variável $\theta \rightarrow -\theta$. Além disso, comparando as equações 1.1 e

²Para um derivação desta expressão, veja a Seção 3.3

1.2 vemos que no caso inclinado há a presença de um torque extra, dado por $-P \sin \phi \cos \Omega_p t \cos \theta$. Este é o termo responsável pelas mudanças no comportamento dinâmico do sistema não simétrico.

Para compararmos ambos os casos, analisamos os espaços de parâmetros $P \times \Omega_p$. Além de verificarmos as mesmas diferenças observadas para o pêndulo duplo, notamos ainda uma diferença fundamental com respeito às soluções oscilatórias: enquanto para o caso vertical encontramos apenas regiões de ressonância em que o pêndulo executa oscilações subharmônicas de ordem par, no caso inclinado verificamos a ocorrência de todo o espectro de ressonâncias, pares e ímpares. Estes resultados foram confirmados através de dados experimentais. Para explicar essa diferença, nós calculamos a condição de Melnikov para a persistência de oscilações subharmônicas, e mostramos que no caso em que a excitação ocorre ao longo de uma direção inclinada, a quebra da simetria nas equações do movimento, faz com que apareçam condições de Melnikov garantindo a existência de oscilações tanto pares quanto ímpares. A aplicação do método de Melnikov deixa claro que as ressonâncias ímpares surgem devido ao torque extra que aparece nas equações do movimento ao quebrarmos a simetria do sistema. Mostramos ainda que as bifurcações do tipo sela-nó em que surgem as oscilações subharmônicas de período 3 e 4 previstas por este método coincidem, com bastante precisão, dentro da aproximação de pequenas perturbações, com os loci das bifurcações sela-nó para os atratores de mesmo período computadas através do método de continuação numérica. Uma questão natural que surge, e que fica em aberto neste trabalho, é se a não existência de uma condição de Melnikov para a ocorrência de oscilações ímpares no caso vertical indica a não existência de atratores de oscilações ímpares para este sistema, ou então trás alguma informação a respeito das bacias de atração das órbitas ímpares.

Os experimentos que compõem esta Tese de Doutorado foram obtidos no Laboratório de Fenômenos Não-Lineares (LFNL) do Instituto de Física da Universidade de São Paulo, em colaboração com o Prof. Dr. José Carlos Sartorelli. Os dados experimentais consistem essencialmente em um diagrama de bifurcações em que demonstramos a ocorrência de ressonâncias de ordem tanto par quanto ímpar, assim como a coexistência de alguns atratores periódicos, para o pêndulo paramétrico inclinado.

1.2 Problema de Kepler anisotrópico

O problema de Kepler tem sido fonte de inspiração para físicos e matemáticos nos últimos três séculos [35]. Muitos trabalhos se dedicaram ao estudo do surgimento de caos em versões perturbadas deste problema, que incluem correções *quasihomogêneas* e anisotrópicas ao potencial (para uma revisão mais recente, veja [36] e referências nele citadas).

Para os propósitos da astronomia e da astrofísica, é natural considerar a aproximação de campo fraco, em que o campo gravitacional gerado por um corpo massivo pode ser decomposto em expansão multipolar. O problema de Kepler corresponde ao caso em que apenas o primeiro termo, de monopolo, está presente, e é um exemplo tradicional de integrabilidade em Mecânica Clássica: dependendo do valor da energia do sistema, a trajetória do corpo de teste pode ser uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole. O próximo termo na expansão, o dipolo, mantém a integrabilidade do sistema [37, 36, 38]. O termo de quadrupolo é normalmente considerado o termo de correção ao potencial Newtoniano mais simples que pode levar ao surgimento de movimento caótico no problema de Kepler (veja, por exemplo, [39]). Em coordenadas cilíndricas canônicas (r, z, ϕ) , o potencial Newtoniano perturbado por um termo de quadrupolo em torno do centro gravitacional pode ser escrito

$$U(r, z) = -\frac{\alpha}{\sqrt{r^2 + z^2}} - \frac{q}{2} \frac{2z^2 - r^2}{(r^2 + z^2)^{5/2}}, \quad (1.3)$$

onde α e q representam, respectivamente, a intensidade do monopolo, proporcional à massa gravitacional total, e a intensidade do quadrupolo. As coordenadas cilíndricas são ajustadas à direção do quadrupolo. Dois casos qualitativamente distintos podem ser classificados a partir do potencial (1.3): (i) deformações oblatas, como aquelas de corpos deformados em rotação, correspondendo a $q < 0$ e (ii) deformações prolatas, como distribuições de massa do tipo cigarro, correspondendo a $q > 0$. O estudo da integrabilidade das equações do movimento sujeito ao potencial (1.3) é um problema de relevância substancial à astronomia e à astrofísica [40].

Em [39], é reportado um estudo numérico sugerindo que o movimento sujeito

a perturbações prolatas é de fato caótico, enquanto por outro lado perturbações oblatas corresponderiam a um caso integrável. Tal conclusão seria enigmática, pois sabemos que para perturbações do tipo disco, que poderiam ser compreendidas como um caso limite de perturbações oblatas, o problema de Kepler é caótico [41, 42]. Essa diferença qualitativa entre os resultados para $q > 0$ e $q < 0$ é atribuída, em [39], a algumas diferenças qualitativas entre os pontos de sela do potencial efetivo em cada caso, mas sabemos também que esse tipo de argumento local tipicamente levam a condições que não são nem suficientes, nem mesmo necessárias, para a ocorrência de caos nesses sistemas [43]. Mais recentemente, foi publicado um novo estudo numérico sugerindo que perturbações oblatas também dariam origem a movimentos caóticos [44]. Neste trabalho, nós resolvemos esses resultados conflitantes aplicando o método de Melnikov [45] à órbita parabólica (variedade de energia nula) do potencial (1.3). Nós provamos que efetivamente as perturbações de quadupolo podem provocar o surgimento de movimento caótico, independentemente da perturbação ser do tipo oblata ($q < 0$) ou prolata ($q > 0$).

Capítulo 2

Tópicos de Sistemas Dinâmicos

“I am absorbed in the magic of movement and light. Movement never lies. It is the magic of what I call the outer space of the imagination. There is a great deal of outer space, distant from our daily lives, where I feel our imagination wanders sometimes.”

– Martha Graham.

Neste capítulo, abordaremos alguns tópicos da Teoria de Sistemas Dinâmicos que consideramos essenciais para o desenvolvimento deste trabalho. Começamos com algumas definições básicas. Em seguida descrevemos algumas bifurcações locais que aparecem no problema do pêndulo simples parametricamente excitado. Por fim, apresentamos os métodos de Melnikov, que são a ferramenta principal de teoria de perturbações abordada nesta tese.

2.1 Alguns conceitos de sistemas dinâmicos

Começaremos com alguns conceitos e definições fundamentais de Sistemas Dinâmicos que serão mencionados nas subseções que seguem. Em primeiro lugar, sabemos que para começar a compreender o espaço de fase de um sistema dinâmico, é necessário conhecer os seus *pontos de equilíbrio*, assim como o comportamento das trajetórias na vizinhança destas soluções.

Definição 2.1 (Ponto de equilíbrio). Considere o sistema dinâmico dado por

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (2.1)$$

Chamamos de *pontos de equilíbrio* (ou *pontos fixos*) as raízes x^* de $f(x)$. Os pontos de equilíbrio são classificados de acordo com os autovalores da matriz Jacobiana do sistema, $Df(x^*)$, que determinam a sua estabilidade através da análise do comportamento de soluções próximas ao equilíbrio.

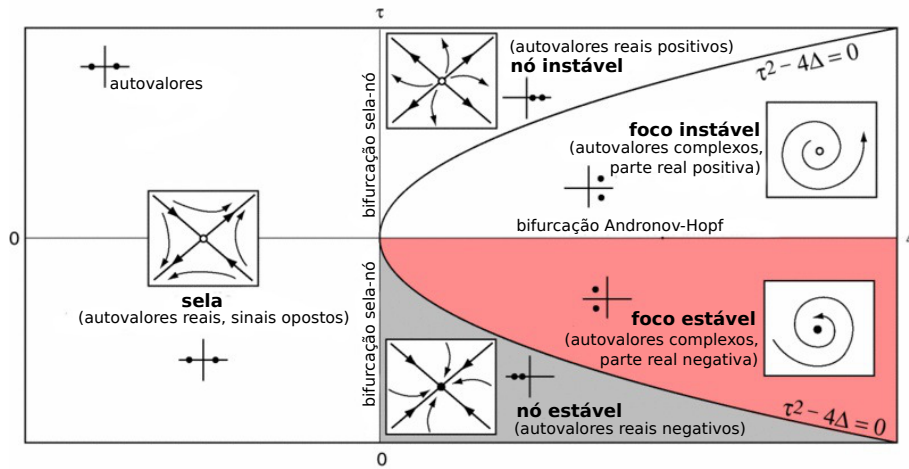


Figura 2.1: Figura adaptada de [2], representando os possíveis tipos de equilíbrio de um sistema dinâmico bidimensional em termos do traço (τ) e do determinante (Δ) da matriz Jacobiana.

- I. Se nenhum dos autovalores tiver parte real nula, o ponto fixo é chamado de *hiperbólico*. Neste caso, o comportamento das órbitas próximas ao equilíbrio é determinado através da linearização do sistema. O ponto de equilíbrio é chamado de *estável* se todos os autovalores possuem parte real negativa; de *instável* se pelo menos um dos autovalores possui parte real positiva e *ponto de sela* se pelo menos um dos autovalores possui parte real positiva e pelo menos um possui parte real negativa. Segue na Figura 2.1, adaptada de [2], um resumo dos possíveis tipos de equilíbrio para pontos fixos hiperbólicos em sistemas bidimensionais em termos do traço (τ) e do determinante (Δ) da matriz Jacobiana. As regiões coloridas representam soluções estáveis. O eixo $\Delta = 0$ e o semi-eixo $\tau = 0, \Delta > 0$ correspondem às bifurcações do tipo sela-nó e Andronov-Hopf, que levam ao surgimento de pontos de equilíbrio

não-hiperbólicos.

- II. Se pelo menos um dos autovalores tiver parte real nula, a matriz Jacobiana $Df(x^*)$ é singular e o ponto fixo é chamado de *não-hiperbólico*. Neste caso, o comportamento na vizinhança do ponto de equilíbrio depende dos termos não lineares de $f(x)$. Em particular, se o sistema possui um par de autovalores (complexo conjugados) puramente imaginários, o equilíbrio é do tipo *centro*.

Sistemas não lineares apresentam, além de pontos fixos, também a ocorrência de *ciclos limite*, que são trajetórias fechadas que, como os pontos fixos, podem ser *atratores* ou *repulsores* no espaço de fase.

Definição 2.2 (Ciclo limite). Chamamos de *ciclo limite* uma trajetória fechada isolada [3]. Isso significa trajetórias em sua vizinhança espiralam em torno desta solução à medida que $t \rightarrow \infty$ (*ciclo limite estável*) ou $t \rightarrow -\infty$ (*ciclo limite instável*), ou ainda que algumas trajetórias vizinhas espiralam em torno dela para $t \rightarrow \infty$, enquanto outras o fazem para $t \rightarrow -\infty$ (*ciclo limite semi-estável*). O ciclo limite é o conjunto limite das órbitas em sua vizinhança. Veja a Figura 2.2, adaptada de [3] para uma ilustração de ciclos limites estáveis, instáveis e semi-estáveis.

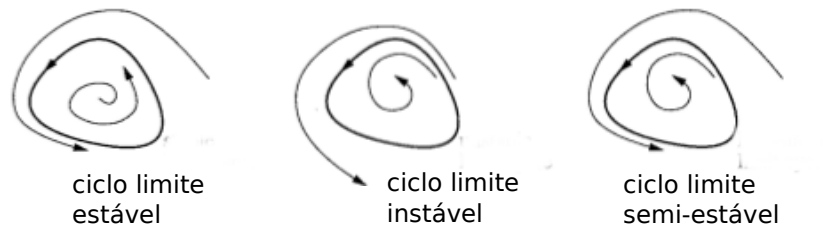


Figura 2.2: Figura adaptada de [3], representando os possíveis tipos de equilíbrio de um ciclo limite.

Considere que o sistema (2.1) possui um ponto de sela $p \in \mathbb{R}^n$ e gera o fluxo Φ_t . Vamos definir as variedades invariantes associadas a p .

Definição 2.3 (Variedades estável e instável). Chamamos de *variedade estável* de p o conjunto de pontos que convergem assintoticamente para p ,

$$W^E(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(x) = p\}$$

e de *variedade instável* de p o conjunto de pontos que divergem de p ,

$$W^I(p) = \{q \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi_t(x) = p\}$$

Definição 2.4 (Órbita homoclínica). Uma órbita $q^0(t)$ é chamada de *órbita homoclínica* se ela está contida na intersecção das variedades estável e instável, $q^0(t) \in W^E(p) \cap W^I(p)$, ou seja, se é uma curva bi-assintótica a p ,

$$q^0(t) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Phi_t(x) = p\}$$

2.2 Algumas bifurcações locais em duas dimensões

Agora considere o sistema dinâmico

$$\dot{x} = f_\mu(x), \quad (2.2)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^p$ são os parâmetros do sistema e $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$. A estrutura do espaço de fase do sistema depende de seus parâmetros.

Definição 2.5 (Bifurcação). O termo *bifurcação* é usado para designar mudanças topológicas na estrutura das soluções de um sistema dinâmico à medida que os parâmetros dos quais dependem este sistema são variados.

Bifurcações locais são aquelas que podem ser descritas a partir da análise da estabilidade de pontos fixos e soluções periódicas. *Bifurcações globais* são aquelas que provocam mudanças em regiões extensas do espaço de fase, não podendo ser descritas através de análise local.

A *Teoria de Bifurcações* consiste basicamente em separar o espaço de parâmetros em regiões em que os sistemas dinâmicos ali determinados são topologicamente equivalentes. Os pontos que não pertencem a essas regiões são chamados de *pontos de bifurcação* [46].

2.2.1 Bifurcação sela-nó

A bifurcação sela-nó, ocorre quando um autovalor se anula, de maneira que um ponto de sela e um nó coalescem e se aniquilam mutuamente.

2.2.2 Bifurcação pitchfork

A bifurcação pitchfork ocorre em sistemas simétricos, e provoca o surgimento, se a bifurcação for supercrítica, ou a destruição, se for subcrítica, de dois pontos fixos de mesma estabilidade. Na bifurcação pitchfork *supercrítica* um ponto fixo estável perde estabilidade, e dá origem a dois pontos fixos estáveis, e na *subcrítica*, dois pontos instáveis colidem com um estável, e o sistema passa a ter um único ponto fixo instável.

2.2.3 Bifurcação de Hopf

A bifurcação de Hopf, também conhecida como bifurcação de Andronov-Hopf, ocorre quando os dois autovalores cruzam o eixo imaginário, de maneira que um ponto de equilíbrio muda de estabilidade, dando origem a um ciclo limite estável, se a bifurcação for supercrítica, ou instável, se for subcrítica. Na bifurcação de Hopf *supercrítica*, um foco estável dá origem a um foco instável e um ciclo limite estável, e na *subcrítica*, um foco estável dá origem a um foco instável e um ciclo limite estável.

2.2.4 Bifurcação duplicação de período

A bifurcação conhecida como duplicação de período, ocorre quando a destruição de uma órbita periódica de período T_0 é seguida da criação de uma outra órbita periódica com o dobro do período da órbita original, $T = 2T_0$, se a bifurcação for *supercrítica*, ou então uma órbita de período $2T_0$ coalesce com uma órbita período T_0 e é destruída, restando no espaço de fase apenas a órbita de período T_0 , se a bifurcação for *subcrítica*.

2.3 Os métodos de Melnikov

Nesta seção, apresentaremos os métodos de Melnikov, homoclínico e subharmônico, que nos permitem compreender como são afetadas, respectivamente, a órbita homoclínica e a família de órbitas periódicas em seu interior, de um sistema

dinâmico inicialmente integrável, ao adicionarmos um termo perturbativo dependente do tempo e periódico. A perturbação tende a quebrar a estrutura degenerada em que as variedades estável e instável coincidem (sobre a órbita homoclínica), causando a sua cisão. Ao se separarem, podem ocorrer intersecções transversais entre elas, o que provocaria o surgimento de trajetórias caóticas neste sistema. Desta maneira, o método de Melnikov homoclínico é um critério analítico para a ocorrência de caos em sistemas dinâmicos. A seguir, mostramos os teoremas de Melnikov para o caso bidimensional, porém esses resultados podem ser generalizados para problemas com mais dimensões [48], problemas de 4 dimensões em que a perturbação não depende do tempo [49–53] e problemas em que o ponto crítico não é hiperbólico, e a órbita “homoclínica” é uma órbita aberta e não limitada, como por exemplo no problema de Kepler, em que a separatriz entre os movimentos aberto e periódico é uma parábola [45]. A nossa abordagem será baseada nos livros-texto canônicos sobre o assunto [4, 46, 5]. Considere então o sistema dinâmico integrável dado por

$$\dot{q} = f(q), \quad (2.3)$$

com

$$q = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad f(q) = \begin{pmatrix} f_1(q) \\ f_2(q) \end{pmatrix} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

Supomos que o campo vetorial $f(q)$ é derivado a partir de uma Hamiltoniana,

$$\dot{q} = JDH(q),$$

onde

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad DH = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Agora adicionamos um termo perturbativo dependente do tempo e periódico de período T_p , de maneira que as equações do movimento são então dadas por

$$\dot{q} = JDH(q) + \varepsilon g(q, t), \quad (2.4)$$

onde

$$g(q, t) = \begin{pmatrix} g_1(q, t) \\ g_2(q, t) \end{pmatrix}, \quad g(q, t + T_p) = g(q, t).$$

Este sistema pode ser reescrito de maneira autônoma através da mudança de variáveis dada por,

$$\begin{aligned} \dot{q} &= JDH(q) + \varepsilon g(q, \theta), \\ \dot{\theta} &= 1, \end{aligned} \quad (q, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1. \quad (2.5)$$

Este artifício torna natural a escolha do mapa de Poincaré definido por $\theta = t_0$,

$$P_\varepsilon^{t_0} : \Sigma^{t_0} \rightarrow \Sigma^{t_0}, \quad \Sigma^{t_0} = \{(q, \theta) \mid \theta = t_0 \in [0, T_p]\} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1.$$

Este mapa também é chamado de *mapa estroboscópico*.

Nosso objetivo é entender como a perturbação afeta a órbita homoclínica $q^0(t)$ e também as órbita subharmônicas $q^\alpha(t)$, $\alpha \in (-1, 0)$, que são soluções cujo período, T^α , é dado por

$$T^\alpha = \frac{m}{n} T_p,$$

Suponha então que o sistema não perturbado satisfaz as seguintes propriedades (veja na Figura 2.3):

Hipótese 1. Para $\varepsilon = 0$, o sistema integrável (2.3) possui uma órbita homoclínica $q^0(t)$ bi-assintótica a um ponto de sela hiperbólico p_0 .

Hipótese 2. Seja

$$\Gamma^0 = \{q \in \mathbb{R}^2 \mid q = q^0(t), t \in \mathbb{R}\} \cup \{p_0\} = W^E(p_0) \cap W^I(p_0) \cup \{p_0\}.$$

O interior de Γ^0 está preenchido por uma família contínua de órbitas perió-

dicas $q^\alpha(t)$, $\alpha \in (-1, 0)$. Definindo

$$d(x, \Gamma^0) = \inf_{q \in \Gamma^0} |x - q|,$$

vamos supôr que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \sup_{t \in \mathbb{R}} d(q^\alpha(t), \Gamma^0) = 0,$$

e que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} T^\alpha = \infty.$$

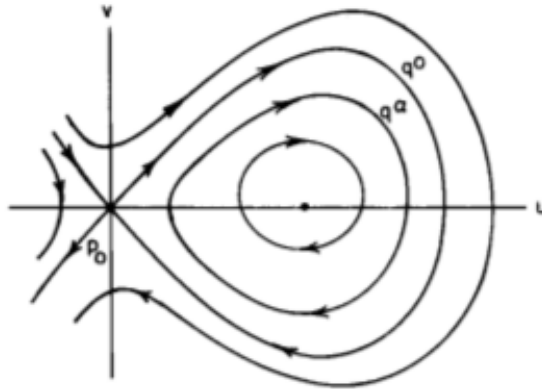


Figura 2.3: Figura extraída de [4], representando as hipóteses necessárias para os teoremas de Melnikov. Veja que o sistema possui um ponto de sela, p_0 , uma órbita homoclínica $q^0(t)$ bi-assintótica a p_0 e uma família contínua de órbitas periódicas $q^\alpha(t)$, $\alpha \in (-1, 0)$ preenchendo o interior da órbita homoclínica.

Nas Seções 2.3.1 e 2.3.2 apresentaremos os métodos de Melnikov homoclínico e subharmônico, respectivamente, e na Seção 2.3.3 mostramos como o método de Melnikov homoclínico pode ser estendido para o caso em que a órbita homoclínica é parabólica, tendo em vista a aplicação do método no problema de Kepler anisotrópico.

2.3.1 Método de Melnikov homoclínico

O método de Melnikov homoclínico consiste em um critério analítico para determinar a ocorrência de caos em um sistema dinâmico, inicialmente integrável, quando sujeito a perturbações dependentes do tempo. A ideia principal é

analisar de que maneira as variedades estável e instável, que coincidiam sobre a órbita homoclínica, se separam ao perturbarmos o sistema. Se, ao se separarem, elas se intersectam de forma transversal, reproduzindo assim a dinâmica do mapa da ferradura de Smale, há ocorrência de caos. Vale ressaltar que caso não haja intersecções transversais, nada se pode afirmar a respeito da integrabilidade do sistema. Para compreender de que forma acontece essa cisão, definimos uma medida da distância entre as variedades, e em seguida mostramos que a função de Melnikov está associada à aproximação em primeira ordem desta distância. Seguiremos principalmente a abordagem adotada em [4].

Para ganhar um pouco mais de intuição geométrica, nos baseamos na forma autônoma do sistema perturbado (2.5) e escrevemos o sistema não perturbado no espaço tridimensional $\mathbb{R}^2 \times S^1$

$$\begin{aligned} \dot{q} &= JDH(q), \\ \dot{\theta} &= 1, \end{aligned} \quad (q, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1, \quad (2.6)$$

de maneira que o ponto hiperbólico p_0 vira uma órbita periódica $\gamma(t) = (p_0, \theta(t) = t + t_0)$ e as variedades estável e instável, $W^E(p_0)$ e $W^I(p_0)$, se transformam em variedades bidimensionais, $W^E(\gamma(t))$ e $W^I(\gamma(t))$, que coincidem sobre uma superfície bidimensional que é a *variedade homoclínica*, Γ_γ .

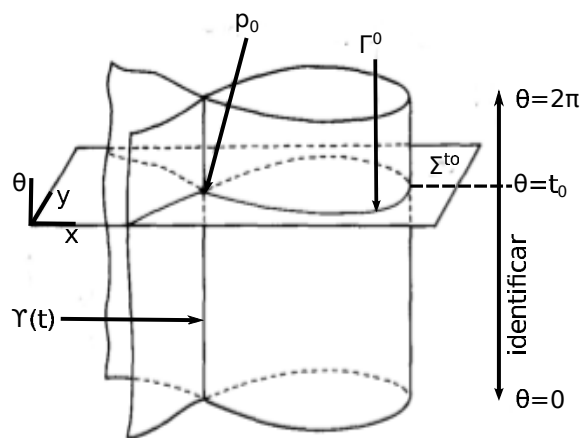


Figura 2.4: Figura adaptada de [5], representando o espaço de configurações do sistema não perturbado em três dimensões.

Por vezes compararemos projeções de trajetórias dos sistemas não perturbado e perturbado na seção de Poincaré Σ^{t_0} . Note que no caso não perturbado, temos

$$\gamma(t) \cap \Sigma^{t_0} = p_0, \quad \Gamma_\gamma \cap \Sigma^{t_0} = \Gamma^0.$$

Veja a Figura 2.4, adaptada de [5], para uma ilustração do espaço de fase do sistema não perturbado.

Em primeiro lugar, precisamos saber o que acontece com a órbita $\gamma(t)$ e as variedades estável e instável $W^E(\gamma(t))$ e $W^I(\gamma(t))$ ao adicionarmos o termo perturbativo. Consideramos então a seguinte proposição

Proposição 2.1. *Para ε suficientemente pequeno, a órbita periódica $\gamma(t)$ do sistema não perturbado (2.6) persiste como uma órbita periódica do sistema perturbado (2.5), $\gamma_\varepsilon(t) = \gamma(t) + O(\varepsilon)$, cuja estabilidade é a mesma de $\gamma(t)$. Equivalentemente, o mapa de Poincaré P^{t_0} possui um ponto de sela hiperbólico $p_\varepsilon^{t_0} = p_0 + O(\varepsilon)$. Além disso, as variedades locais estável e instável associadas a esta órbita periódica, $W_{loc}^E(\gamma_\varepsilon(t))$ e $W_{loc}^I(\gamma_\varepsilon(t))$, são “ C^r -próximas” às variedades locais estável e instável $W_{loc}^E(\gamma(t))$ e $W_{loc}^I(\gamma(t))$ do caso não perturbado.*

As demonstrações podem ser encontradas em [4]. As variedades globais estável e instável de $\gamma_\varepsilon(t)$ podem ser obtidas a partir da evolução temporal das respec-

tivas variedades locais estável e instável, de acordo com o fluxo $\phi_t[\cdot]$ gerado por (2.5),

$$W^E(\gamma_\varepsilon(t)) = \bigcup_{t \leq 0} \phi_t[W_{loc}^E(\gamma_\varepsilon(t))],$$

$$W^I(\gamma_\varepsilon(t)) = \bigcup_{t \geq 0} \phi_t[W_{loc}^I(\gamma_\varepsilon(t))]$$

Veja a Figura 2.5, adaptada de [5], para uma ilustração do espaço de fase do sistema perturbado. Ainda é possível mostrar que órbitas pertencentes às variedades estável, $q_\varepsilon^E(t, t_0) \in W^E(\gamma_\varepsilon)$, e instável, $q_\varepsilon^I(t, t_0) \in W^I(\gamma_\varepsilon)$, podem ser escritas como

$$q_\varepsilon^E(t, t_0) = q^0(t - t_0) + \varepsilon q_1^E(t, t_0) + O(\varepsilon^2) \quad t \in [t_0, \infty),$$

$$q_\varepsilon^I(t, t_0) = q^0(t - t_0) + \varepsilon q_1^I(t, t_0) + O(\varepsilon^2) \quad t \in (-\infty, t_0],$$

onde as correções de primeira ordem para $q_1^{E,I}$ satisfazem a equação variacional

$$\dot{q}_1^{E,I}(t, t_0) = Df(q_0(t - t_0))q_1(t, t_0) + g(q_0(t - t_0), t) \quad (2.7)$$

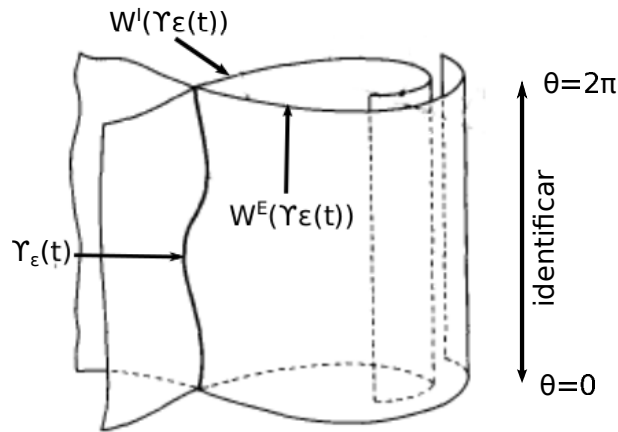


Figura 2.5: Figura adaptada de [5], representando o espaço de configurações do sistema perturbado.

Agora vamos definir uma medida da distância entre as variedades estável e

instável. Para isso, fixamos a seção de Poincaré Σ^{t_0} e tomamos como referência o ponto $q^0(0)$. Considere então a normal a Γ^0 no ponto $q^0(0)$, dada por

$$f^\perp(q^0(0)) = (-f_2(q^0(0)), f_1(q^0(0)))^T.$$

Para ε suficientemente pequeno, as variedades estável, $W_\varepsilon^E(p_\varepsilon^{t_0})$, e instável, $W_\varepsilon^I(p_\varepsilon^{t_0})$ cruzam $f^\perp(q^0(0))$ transversalmente em $q_\varepsilon^E \equiv q_\varepsilon^E(t_0, t_0)$ e $q_\varepsilon^I \equiv q_\varepsilon^I(t_0, t_0)$ ¹, de maneira que se definimos

$$d(t_0) = q_\varepsilon^I(t_0) - q_\varepsilon^E(t_0),$$

podemos reescrever $d(t_0)$ como

$$d(t_0) = \varepsilon \frac{f(q^0(0)) \times (q_\varepsilon^I(t_0) - q_\varepsilon^E(t_0))}{|f(q^0(0))|} + O(\varepsilon^2). \quad (2.8)$$

onde $f \times g = f_1 g_2 - f_2 g_1$. Veja a Figura (2.6), adaptada de [6], para uma ilustração.

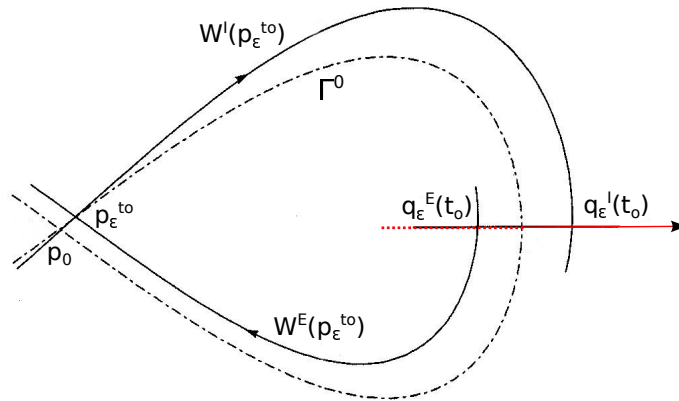


Figura 2.6: Figura adaptada de [6], representando a definição de distância entre as variedades estável e instável que definimos.

Seja então

¹Estes pontos são únicos apenas para ε pequeno! [5]

$$\begin{aligned}\Delta(t, t_0) &= f(q^0(t-t_0)) \times (q_1^I(t, t_0) - q_1^E(t, t_0)) = \\ &\equiv \Delta^I(t-t_0) - \Delta^E(t-t_0).\end{aligned}$$

Tomando a derivada temporal de Δ^E temos

$$\frac{d\Delta^E}{dt} = Df(q^0(t-t_0)) \dot{q}^0(t-t_0) \times q_1^E(t-t_0) + f(q^0(t-t_0)) \times \dot{q}_1^E(t-t_0),$$

onde usando $\dot{q}^0 = f(q^0)$, a expressão (2.17) e o fato de f ser um campo vetorial Hamiltoniano, (traço $[Df] = 0$), ao integrar ambos os lados no intervalo $[t_0, \infty)$ temos

$$\Delta^E(\infty, t_0) - \Delta^E(t_0, t_0) = \int_{t_0}^{\infty} f(q^0(t-t_0)) \times g(q^0(t-t_0), t) dt,$$

porém

$$\Delta^E(\infty, t_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(q^0(t-t_0)) = 0,$$

já que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q^0(t-t_0) = p_0, \quad f(p_0) = 0$$

enquanto $q_1^E(t, t_0)$ é limitado, de maneira que

$$\Delta^E(t_0, t_0) = - \int_{t_0}^{\infty} f(q^0(t-t_0)) \times g(q^0(t-t_0), t) dt$$

De maneira análoga, temos

$$\Delta^I(t_0, t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} f(q^0(t-t_0)) \times g(q^0(t-t_0), t) dt$$

Assim, podemos definir a integral de Melnikov como

$$M(t_0) = \Delta(t, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(q^0(t-t_0)) \times g(q^0(t-t_0), t) dt,$$

de maneira que a expressão para a distância entre as variedades (2.8) é dada por

$$d(t_0) = \frac{\varepsilon M(t_0)}{|f(q^0(0))|} + O(\varepsilon^2).$$

Como $|f(q^0(0))| = O(1)$, a integral de Melnikov nos dá uma boa estimativa da separação entre as variedades estável e instável no ponto $q^0(0)$ na seção de Poincaré Σ^{t_0} .

Teorema 2.1 (Teorema de Melnikov para órbita homoclínica). *Seja*

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(q^0(t-t_0)) \times g(q^0(t-t_0), t) dt \quad (2.8)$$

Se $M(t_0)$ possui zeros simples e não depende de ε , então para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, $W^E(p_\varepsilon^{t_0})$ e $W^I(p_\varepsilon^{t_0})$ se intersectam transversalmente. Se $M(t_0) \neq 0$ então $W^E(p_\varepsilon^{t_0}) \cap W^I(p_\varepsilon^{t_0}) = \emptyset$

Se $M(t_0)$ oscila em torno de zero de maneira limitada, isso significa que q_ε^E e q_ε^I estão trocando de posição com relação a $f^\perp(q^0(0))$ à medida que t_0 varia. Isso significa que para algum instante $t_0 = \tau$ $q_\varepsilon^E(\tau) = q_\varepsilon^I(\tau)$, e temos então um ponto homoclínico. Como todas as seções de Poincaré são equivalentes, então deve haver um ponto homoclínico para todo $t_0 \in [0, T_p]$. Além disso, se $M(t_0)$ possui zeros simples, então essas intersecções são transversais. Se o sistema possui órbitas homoclínicas transversais, isso significa que alguma iterada do mapa de Poincaré, $(P_\varepsilon^{t_0})^N$, reproduz a dinâmica do mapa da ferradura de Smale, que apresenta alta sensibilidade com relação às condições iniciais. Devido a isso, associamos zeros simples na integral de Melnikov à ocorrência de trajetórias caóticas no sistema [4].

Por fim, notamos que no caso em que o termo perturbativo $g(q, t)$ também é derivado de uma Hamiltoniana $G(q, t)$, temos

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \{H(q^0(t-t_0)), G(q^0(t-t_0), t)\} dt$$

onde $\{ \cdot, \cdot \}$ é o colchete de Poisson definido por

$$\{H, G\} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y}$$

Além disso, para sistemas de $2n$ graus de liberdade temos condições para a ocorrência de caos homoclínico derivadas das seguintes integrais

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \{K^{[\alpha]}(q^0(t-t_0)), G(q^0(t-t_0), t)\} dt,$$

onde $K^{[\alpha]}$, com $\alpha = 1, \dots, n$ são as integrais primeiras do movimento.

2.3.2 Método de Melnikov subharmônico

Agora podemos nos perguntar o que acontece com as órbitas periódicas da Hipótese 2 quando adicionamos o termo perturbativo. Vamos analisar a persistência de órbitas subharmônicas, que são aquelas cujo período é múltiplo do período da perturbação,

$$T_\alpha = \frac{m}{n} T_p.$$

Seguiremos aqui a abordagem adotada em [5]. Em primeiro lugar, consideramos uma proposição acerca da persistência de soluções próximas às trajetórias $q^\alpha(t)$.

Proposição 2.2. *Seja $q^\alpha(t-t_0)$ uma órbita periódica do sistema não perturbado de período T^α . Então para ε suficientemente pequeno e $\alpha \in (-1, 0)$, o sistema perturbado possui uma órbita $q_\varepsilon^\alpha(t, t_0)$, não necessariamente periódica, que pode ser expressa uniformemente em $t \in [t_0, t_0 + T^\alpha]$ como*

$$q_\varepsilon^\alpha(t, t_0) = q^\alpha(t-t_0) + \varepsilon q_1^\alpha(t-t_0) + O(\varepsilon^2).$$

Ainda é possível mostrar que $q_1^\alpha(t-t_0)$ satisfaz a equação variacional

$$\dot{q}_\varepsilon^\alpha(t, t_0) = JD^2H(q^\alpha(t-t_0))q_1^\alpha + g(q^\alpha(t-t_0), t) \quad (2.9)$$

para $t \in [t_0, t_0 + T^\alpha]$.

Agora, para ganhar mais intuição geométrica, vamos escrever o sistema não perturbado nas variáveis de ângulo-ação [54, 55], ou seja, fazemos uma mudança de variáveis

$$(x, y) \mapsto (\phi(x, y), I(x, y)),$$

de maneira que as equações do movimento ficam

$$\dot{I} = 0, \quad \dot{\phi} = \Omega(I),$$

cuja solução é

$$I = I_0 \quad \dot{\phi} = \phi_0 + \Omega(I_0)t.$$

Nessas variáveis, as equações do sistema perturbado são dadas por

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \varepsilon F(I, \phi, t), \\ \dot{\phi} &= \Omega(I) + \varepsilon G(I, \phi, t), \end{aligned}$$

onde F e G são periódicos de período 2π em ϕ e $T_p = 2\pi/\Omega_p$ em t . Reescrevendo de forma autônoma, ficamos com

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \varepsilon F(I, \phi, t), \\ \dot{\phi} &= \Omega(I) + \varepsilon G(I, \phi, \theta), \quad (I, \phi, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1. \\ \dot{\theta} &= 1, \end{aligned} \quad (2.10)$$

Escolhemos então a seção global

$$\Sigma^{t_0} = \{(I, \phi, \theta) \mid \theta = t_0\},$$

e, denotando $I_\varepsilon(t)$ e $\phi_\varepsilon(t)$ as soluções do sistema perturbado (2.10), o mapa de Poincaré é dado por

$$\begin{aligned} P_\varepsilon^{t_0} : \Sigma^{t_0} &\rightarrow \Sigma^{t_0}, \\ (I_\varepsilon(0), \phi_\varepsilon(0)) &\mapsto (I_\varepsilon(T_p), \phi_\varepsilon(T_p)) \end{aligned}$$

e a iteração m do mapa é dada por

$$(P_\varepsilon^{t_0})^m : \Sigma^{t_0} \rightarrow \Sigma^{t_0},$$

$$(I_\varepsilon(0), \phi_\varepsilon(0)) \mapsto (I_\varepsilon(mT_p), \phi_\varepsilon(mT_p)).$$

Queremos analisar o mapa $(P_\varepsilon^{t_0})^m$, e para isso precisamos determinar $I_\varepsilon(mT_p)$ e $\phi_\varepsilon(mT_p)$. Usando a proposição 2.2, escrevemos as soluções aproximadas para $I_\varepsilon(t)$ e $\phi_\varepsilon(t)$,

$$I_\varepsilon(t) = I_0 + \varepsilon I_1(t) + O(\varepsilon^2),$$

$$\phi_\varepsilon(t) = \phi_0 + \Omega(I_0)t + \varepsilon \phi_1(t) + O(\varepsilon^2),$$

onde I_1 e ϕ_1 podem ser obtidos através da equação variacional (2.9), que nas variáveis de ângulo e ação se torna uma equação matricial com coeficientes constantes (daí a vantagem deste método!), dada por

$$\begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{\phi}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial \Omega}{\partial I}(I_0) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ \phi_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F(I_0, \Omega(I_0)t + \phi_0, \theta(t)) \\ G(I_0, \Omega(I_0)t + \phi_0, \theta(t)) \end{pmatrix},$$

e assim, as soluções para $I_1(mT_p)$ e $\phi_1(mT_p)$ são

$$I_1(mT_p) = \int_0^{mT_p} F(I_0, \Omega(I_0)t + \phi_0, t + t_0) dt \equiv \bar{M}_1^{m/n}(I_0, \phi_0; t_0),$$

$$\begin{aligned} \phi_1(mT_p) &= \frac{\partial \Omega}{\partial I} \Big|_{I=I_0} \int_0^{mT_p} \int_0^t F(I_0, \Omega(I_0)\zeta + \phi_0, \zeta + t_0) d\zeta + \\ &+ \int_0^{mT_p} G(I_0, \Omega(I_0)t + \phi_0, t + t_0) dt \equiv \bar{M}_2^{m/n}(I_0, \phi_0; t_0). \end{aligned}$$

Finalmente, temos que o mapa $(P_\varepsilon^{t_0})^m$ é dado por

$$(P_\varepsilon^{t_0})^m : \Sigma^{t_0} \rightarrow \Sigma^{t_0},$$

$$(I_0, \phi_0) \mapsto (I_0, \phi_0 + mT_p \Omega(I_0)) + \varepsilon (\bar{M}_1^{m/n}(I_0, \phi_0; t_0), \bar{M}_2^{m/n}(I_0, \phi_0; t_0))$$

Voltando para as coordenadas originais, temos

$$\bar{M}_1^{m/n}(t_0) = \frac{1}{\Omega(I)} M_1^{m/n}(t_0)$$

onde

$$M_1^{m/n}(t_0) = \int_0^{mT} f(q^\alpha(t)) \times g(q^\alpha(t), t + t_0) dt \quad (2.11)$$

Teorema 2.2 (Teorema de Melnikov para soluções subharmônicas). *Seja*

$$M^{m/n}(t_0) = \int_0^{mT} f(q^\alpha(t)) \times g(q^\alpha(t), t + t_0) dt \quad (2.12)$$

Se $M^{m/n}(t_0)$ possui zeros simples e não depende de ε , então para $0 < \varepsilon < \varepsilon(n)$, o sistema perturbado possui uma órbita periódica de período mT_p . Se $n = 1$, este resultado é válido uniformemente em $0 < \varepsilon < \varepsilon(1)$.

Suponha que existe um ponto $(\bar{I}, \bar{\phi})$ em que $T(\bar{I}) = (m/n)T_p$. A argumentação para a demonstração do teorema acima consiste basicamente em mostrar que

$$(P_\varepsilon^{t_0})^m(\bar{I}, \bar{\theta}) \approx O(\varepsilon^2)$$

se $M^{m/n}(t_0)$ possui zeros simples, o que significa que a m -ésima iteração do mapa possui um ponto fixo, portanto a solução é uma órbita de período mT_p .

2.3.3 Generalização para órbita “homoclínica” aberta

Em [45], Cicogna e Santoprete apresentam uma releitura do método de Melnikov, demonstrando o teorema para a ocorrência de caos homoclínico de um ponto de vista completamente analítico, ou seja, menos geométrico. Através desta abordagem é possível estender o teorema original para algumas situações “degeneradas”, que ocorrem principalmente em Mecânica Celeste [56] e Relatividade Geral [57, 58], como por exemplo o caso em que os pontos críticos instáveis são não-hiperbólicos, ou então estão localizados no infinito. No problema de Kepler, que será abordado neste trabalho, o ponto crítico é dado por $r = \infty$ e $\dot{r} = 0$, e a separatriz entre movimento fechado e periódico e movimento aberto é uma parábola, que é uma órbita aberta e não limitada. Outra possibilidade seria fazer uma

transformação de coordenadas para regularizar a órbita homoclínica [59], mas o método apresentado aqui é mais geral e direto. Nesta seção, vamos ilustrar esta generalização, nos atendo ao caso em que a separatriz é uma órbita parabólica. Considere então uma Hamiltoniana do tipo

$$H = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{2} + \frac{p_\phi^2}{2} \right) + V(r)$$

onde $V(r)$ é um potencial da forma

$$V(r) = -\frac{1}{r}.$$

Vale notar que o procedimento aqui apresentado é válido para qualquer potencial de “longo alcance” da forma $V(r) \sim 1/r^\beta$. Neste tipo de problema ocorre a conservação do momento angular, e o movimento ocorre em um plano, que pode arbitrariamente ser escolhido como o plano $\theta = \pi/2$. Desta forma, as equações do movimento podem ser escritas como

$$\dot{r} = p_r, \quad \dot{p}_r = \frac{1}{r^2} + \frac{L^2}{r^3}, \quad \dot{\Phi} = \frac{L}{r^2}, \quad \dot{p}_\Phi = 0. \quad (2.13)$$

onde $p_\Phi = \text{constante} = L$. No caso do problema de Kepler, em que o ponto crítico se encontra no infinito, temos uma situação degenerada em que as órbitas homoclínicas, bi-assintóticas a esse ponto, são uma família de parábolas, que podem se escritas, em coordenadas esféricas canônicas, $u := (r, p_r, \Phi, p_\Phi, \theta, p_\theta)$, como

$$\chi := (R(t), \dot{R}(t), \Phi(t), L, \pi/2, 0) \quad (2.14)$$

onde $R(t)$ e $\Phi(t)$ resolvem as equações (2.13) com $R(\pm\infty) = \infty$ e $\Phi(0) = \pi$, respectivamente. Ao acrescentarmos uma perturbação dependente do tempo, que de forma compacta pode ser escrita como

$$\dot{u} = f(u) + \varepsilon g(u, t). \quad (2.15)$$

onde $\varepsilon \ll 1$ e $f = J\nabla_u H$, sendo J a matriz simplética,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nosso objetivo é entender como ocorrem as intersecções entre as variedades instável e estável, e para isso começamos analisando soluções suaves próximas à órbita homoclínica,

$$u(t) = \chi(t - t_0) + v(t - t_0). \quad (2.16)$$

Substituindo a expressão acima (2.16) em (2.15) obtemos a equação variacional

$$\dot{v} = A(t)v + G(t, t_0, \varepsilon) + O(\varepsilon^2, v^2), \quad (2.17)$$

onde $A = \nabla_u f(\chi(t))$ e $G(t, t_0, \varepsilon) = \varepsilon g(\chi(t), t + t_0)$. Todas as soluções de (2.17) podem ser escritas como [60]

$$v(t) = v_h(t) + \Psi(t) \int_{t_1}^t \Psi^{-1}(s) G(s, t_0, \varepsilon) ds,$$

onde t_1 é arbitrário, $v_h(t)$ é qualquer solução homogênea do problema homogêneo linear

$$\dot{v}_h(t) = A(t)v_h(t) \quad (2.18)$$

e $\Psi(t)$ é a matriz fundamental de soluções de (2.18). Este sistema apresenta n soluções limitadas para todo $t \in \mathbb{R}$, $\zeta^{[\alpha]}(t)$, e n soluções que divergem para $t \rightarrow \pm\infty$, $\eta^{[\alpha]}(t)$. Escrevendo a matriz $\Psi(t)$ em termos dessas soluções, temos

$$\begin{aligned} v(t) = v_h(t) + \sum_{\alpha} \zeta^{[\alpha]}(t) \int_{t_1}^t \left(\eta^{[\alpha]}(s) \cdot JG(s, t_0, \varepsilon) \right) ds \\ + \eta^{[\alpha]}(t) \int_{t_1}^t \left(\zeta^{[\alpha]}(s) \cdot JG(s, t_0, \varepsilon) \right) ds \end{aligned}$$

Queremos estudar o comportamento das variedades instável e estável. Para isso, procuramos soluções de (2.17) que são limitadas para $t \rightarrow -\infty$ ($v^-(t)$), ou para $t \rightarrow \infty$ ($v^+(t)$), respectivamente, ou seja, soluções do tipo

$$u^\pm(t) = \chi(t - t_0) + v^\pm(t - t_0)$$

A condição para que as soluções $v^\pm(t - t_0)$ não sejam divergentes, é dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\zeta^{[\alpha]}(s) \cdot JG(s, t_0, \varepsilon) \right) ds$$

Usando argumentos de simetria, a primeira dessas condições pode ser escrita como

$$M^{[1]}(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \{H, W\}(\chi(t), t + t_0) dt = 0, \quad (2.19)$$

e a outra condição, gerada a partir de uma integral primeira K , fica

$$M^{[2]}(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \{K, W\}(\chi(t), t + t_0) dt = 0 \quad (2.20)$$

Assim, temos duas condições do tipo da condição de Melnikov (2.12) para a ocorrência de caos homoclínico no caso bidimensional em que o ponto crítico é um ponto não hiperbólico que se encontra no infinito e a órbita “homoclínica” é uma parábola, ou seja, uma órbita aberta e não limitada. Neste caso, não é possível garantir a convergência das integrais (2.19) e (2.20), cada sistema deve ser analisado individualmente.

2.4 O método da continuação numérica

Para compreendermos melhor o espaço de parâmetros de um sistema dinâmico, determinando pontos de equilíbrio, soluções periódicas e bifurcações podemos, ao invés de integrar as equações do movimento varrendo todos os valores de parâmetros dentro de um intervalo, utilizar a técnica da continuação numérica. Para encontrar soluções de (2.2) através deste método, devemos primeiramente obter uma solução conhecida do sistema, integrada com alta precisão. A partir desta solução, a cada iteração os parâmetros μ são variados, e novas soluções do sistema são determinadas. Para mais informações, referimos o leitor para as referências [61, 62]. Os resultados de continuação numérica apresentados nesta tese

foram obtidos através do software AUTO 07p [8].

Capítulo 3

Pêndulo simples parametricamente excitado

“The pendulum of the mind alternates between sense and non-sense, not between right and wrong.”

– Carl Gustav Jung

Oscilações se manifestam de inúmeras maneiras na natureza, de forma que compreender fenômenos oscilatórios significa aprofundar nossa capacidade descritiva em diversas áreas do conhecimento, que vão da biologia à eletrônica. Apesar de o pêndulo simples ser um exemplo canônico de integrabilidade no estudo de sistemas dinâmicos, ao acrescentarmos um termo perturbativo nas equações do movimento, ainda que pequeno, podemos alterar qualitativamente a estrutura do sistema.

Chamamos de pêndulo simples paramétrico o sistema formado por um pêndulo simples plano cujo pivô oscila harmonicamente na direção vertical, tendo sua equação horária dada por

$$s(t) = A \cos \omega_p t.$$

Os parâmetros de controle do sistema são A , a amplitude, e ω_p , a frequência angular, que caracterizam a oscilação do pivô. A equação do movimento para o deslocamento angular do pêndulo no caso em que a excitação ocorre ao longo da direção vertical, reescrita de maneira adimensional e incluindo o termo de atrito,

é dada por

$$\dot{\theta} = -[1 + \varepsilon P \cos \Omega_p t] \sin \theta - \varepsilon \beta \dot{\theta}, \quad (3.1)$$

onde os parâmetros adimensionais P , Ω_p e β estão associados respectivamente à amplitude e frequência de oscilação do pivô, e ao coeficiente de atrito do sistema, e $0 < \varepsilon \ll 1$. Ao considerarmos que a excitação ocorre ao longo de uma direção inclinada de um ângulo ϕ em relação à vertical, ficamos com

$$\dot{\theta} = -[1 + \varepsilon P \cos \Omega_p t] \sin(\theta - \phi) - \varepsilon \beta \dot{\theta}. \quad (3.2)$$

Note que o sistema perde a simetria $\theta \rightarrow -\theta$. Estamos interessados nos efeitos dessa quebra de simetria na dinâmica do sistema.

Neste capítulo, faremos um estudo do pêndulo parametricamente excitado, no contexto de pequenas perturbações. Começamos revisitando a dinâmica do pêndulo plano simples, que é o nosso caso integrável, e em seguida derivamos as equações do movimento para o caso perturbado (3.2). Através de integração direta dessas equações, obtivemos os espaços de parâmetros $P \times \Omega_p$ em ambos os casos (ver Figuras 3.5 e 3.6). Para classificar as bifurcações encontradas, utilizamos o software AUTO 07p [8], que aplica a técnica da continuação numérica. A principal diferença que observamos a partir de certos resultados numéricos é que no caso vertical encontramos apenas regiões de ressonância em que o pêndulo executa oscilações subharmônicas em que o período é múltiplo par do período da excitação, enquanto no caso inclinado verificamos a ocorrência de todo o espectro de ressonâncias, pares e ímpares. Este resultado é surpreendente porque apesar de alguns autores reportarem a ocorrência de oscilações de período ímpar no caso vertical [30, 32], elas são muito difíceis de ser encontradas através de simulações ou experimentos no caso vertical. Nós mostramos, inclusive experimentalmente, que no caso inclinado (não simétrico) elas podem ser obtidas facilmente. Levantamos a hipótese da quebra de simetria ser responsável por uma mudança na natureza das bacias de atração das oscilações ímpares. Por fim, na tentativa de entender essa diferença entre os casos simétrico e não simétrico, analisamos como a estrutura global do sistema se altera ao adicionarmos os termos perturbativos, relacionados à excitação paramétrica e ao atrito. No caso em que a excitação é vertical, Koch e Leven mostram em [21] que o método de Melnikov é capaz de prever ape-

nas oscilações subharmônicas de ordem par, nada se podendo afirmar a respeito das oscilações subharmônicas de ordem ímpar. Nós calculamos as condições de Melnikov para a ocorrência de caos homoclínico e para a persistência de órbitas subharmônicas no caso inclinado. Mostramos que a quebra de simetria faz aparecerem condições garantindo a ocorrência de soluções oscilatórias subharmônicas tanto pares quanto ímpares, o que pode explicar os nossos resultados numéricos e experimentais.

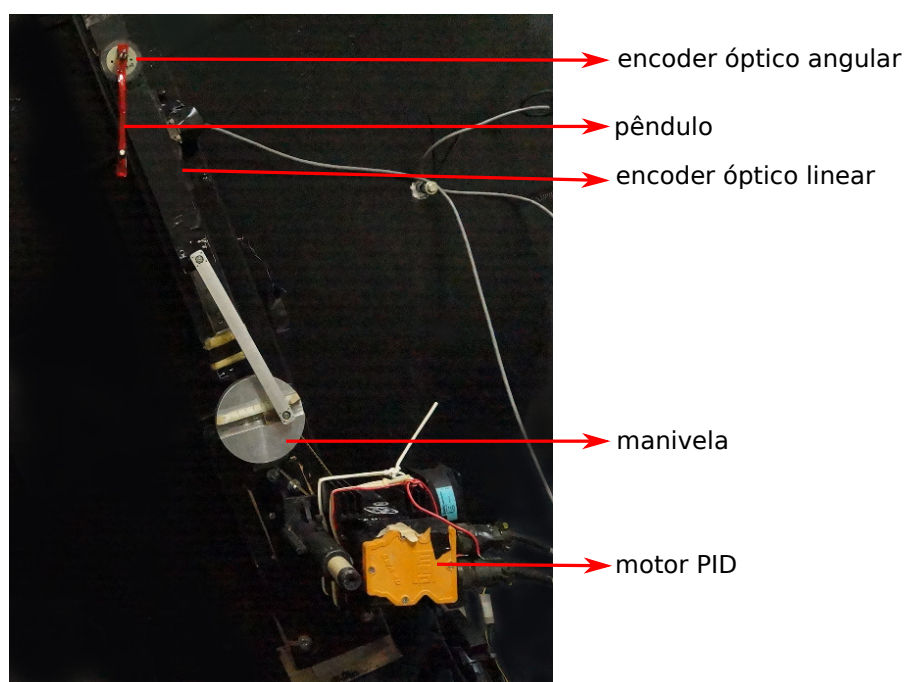


Figura 3.1: Foto do pêndulo simples do LFNL, exibindo a haste do pêndulo, a manivela e o motor que provocam a oscilação do pivô, e os encoders ópticos utilizados para a tomada de dados.

Os dados aqui apresentados e discutidos foram tomados no Laboratório de Fenômenos Não-Lineares (LFNL) do Instituto de Física da Universidade de São Paulo, em colaboração com o Prof. Dr. José Carlos Sartorelli. Serão exibidos diagramas de bifurcação, séries temporais e mapas estroboscópicos obtidos experimentalmente. Veja na Figura 3.1 uma foto do aparato experimental instalado no laboratório. O pêndulo é a haste em vermelho destacada na foto, e sua velocidade angular é medida através de um encoder angular óptico centralizado no pivô. A re-

gulagem da amplitude de oscilação é feita através da manivela, e da frequência de oscilação por um motor PID. Para termos um melhor controle acerca da excitação, utilizamos um encoder linear que mede a velocidade com a qual o pivô se desloca, a partir da qual podemos calcular a amplitude e a frequência da perturbação.

3.1 Aparato experimental

Na Figura 3.2, mostramos um diagrama representando o aparato experimental.

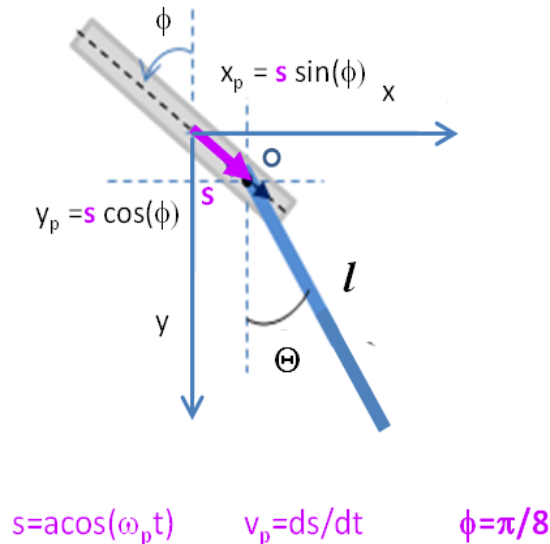


Figura 3.2: Diagrama representando um pêndulo plano simples parametricamente excitado, onde são indicados os parâmetros de controle do sistema e a variável usada para descrever o movimento.

O pêndulo consiste em uma haste de massa $m = 37.61 \pm 0.05$ g e centro de massa posicionado a uma distância $l = 5.05 \pm 0.05$ cm do eixo do pivô. A frequência natural de oscilação é $f_0 = 1.61$ Hz. O parâmetro de atrito, $b = 0.0376$ s⁻¹, foi obtido a partir do decaimento natural da série temporal no caso de pequenas oscilações, conforme descrito na Seção 3.1.1. O ângulo entre a haste do pêndulo e a direção vertical é θ . O pêndulo é periodicamente excitado de acordo com

$$s(t) = A \cos \omega_p t$$

ao longo de uma direção inclinada formando um ângulo $\phi = \pi/8$ com a direção vertical. A amplitude A e a frequência $f_p = \omega_p/2\pi$ da perturbação são os parâmetros de controle do sistema.

Para medir o valor absoluto da velocidade angular do pêndulo $\omega = \dot{\theta}$, foi colocado um encoder óptico angular, de resolução $\frac{2\pi}{2500}$ rad, preso à haste do pêndulo, concêntrico com o ponto de pivô. Para medir o valor absoluto da velocidade do pivô, $v_p = |\dot{s}|$, foi colocado um encoder óptico linear, de resolução $\frac{2.54}{500}$ cm, preso ao carrinho deslizante. A partir da série temporal de $v_p(t)$, é possível obter a frequência f_p e a amplitude A da perturbação externa. O sensor óptico do encoder angular fica anexo ao carrinho, enquanto o sensor óptico do encoder linear fica no sistema de referência do laboratório. O *input* induzido de cada encoder foi detectado usando uma placa ADC de 16 bits à taxa de 200 ksamples/s. Para valores fixos da amplitude A , a frequência da excitação f_p foi variada para frente e para trás com um servo motor que permitia a variação mínima de 0.01 Hz.

Para caracterizar a dinâmica de oscilação do pêndulo, nós utilizamos mapas de Poincaré estroboscópicos, onde são plotados os valores do módulo da velocidade angular do pêndulo a cada instante t^* no qual a excitação completa uma oscilação, i.e., a cada dois máximos de v_p . Veja a Figura 3.12 na Seção 3.5. O número de pontos no mapa estroboscópico nos dá a razão entre o período de oscilação, T_{osc} , e o período da perturbação, $T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}$.

3.1.1 Determinação do atrito

Para estimar o atrito do nosso arranjo experimental, deixamos o pêndulo oscilar livremente, sem forçamento, e medimos a velocidade angular $\omega(t)$, como na Figura 3.3. A equação do movimento para o caso em que o pêndulo realiza pequenas oscilações e está sujeito a uma força de atrito dinâmico proporcional à sua velocidade angular, é dada por

$$\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0.$$

No regime subcrítico, em que $\omega_0 \gg \frac{b}{2}$, a solução geral desta equação é dada por

$$\theta(t) = Ce^{-\frac{b}{2}t} \sin(\gamma t + \varphi) \quad (3.3)$$

onde

$$\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{4}}$$

e C e φ são determinados a partir das condições iniciais.

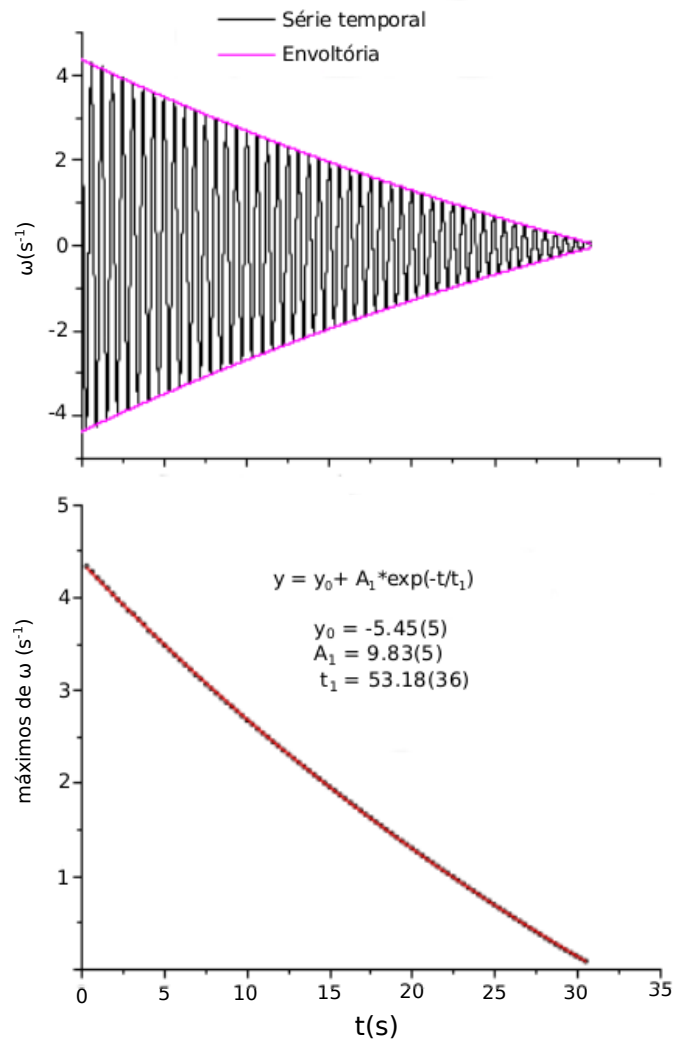


Figura 3.3: Medida realizada para obter o atrito do nosso arranjo experimental. Em preto, temos a série temporal velocidade angular obtida experimentalmente, e em magenta, a envoltória desta série temporal, que queremos ajustar.

A velocidade angular pode então ser escrita como

$$\omega(t) = Ce^{-\frac{b}{2}t} \left[\gamma \cos(\gamma t + \phi) - \frac{b}{2} \sin(\gamma t + \phi) \right],$$

ou, equivalentemente,

$$\omega(t) = C' e^{-\frac{b}{2}t} \cos(\gamma t + \phi'). \quad (3.4)$$

Ajustamos os dados experimentais para a envoltória de ω segundo a expressão

$$y = y_0 + A_1 e^{-\frac{t}{t_1}},$$

e comparando com (3.4) temos

$$b = \frac{2}{t_1} = \frac{2}{53.18}.$$

Desta maneira, obtivemos

$$b = 0.03761(25)s^{-1}.$$

Vale notar que ainda que esta estimativa tenha sido feita para o regime de pequenas oscilações, este valor descreve bem o atrito no rolamento do pêndulo, que é muito pequeno.

3.2 Pêndulo simples revisitado

Tendo em vista a aplicação dos métodos de Melnikov ao pêndulo simples parametricamente excitado, precisamos das expressões para a órbita homoclínica, bem como para a família de órbitas periódicas dentro dela, do sistema não perturbado. Isso significa que precisamos descrever analiticamente o espaço de fase do pêndulo simples plano, que consiste em um sistema formado por uma haste de massa m , presa a um pivô e sujeita à aceleração da gravidade g . A distância entre o centro do pivô e o centro de massa da haste é l , e denotamos I o momento de inércia do sistema. O ângulo formado com a direção vertical é descrito pela seguinte equação diferencial

$$I\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = 0,$$

que pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \omega, \\ \dot{\omega} &= -\omega_0^2 \sin \theta,\end{aligned}\tag{3.5}$$

onde $\omega_0^2 = mgl/I$ é a frequência de oscilação natural do pêndulo. Essas equações são derivadas de uma Hamiltoniana que, ao reescalarmos as equações de acordo com $t \rightarrow \omega_0 t$, é dada por

$$H(\theta, \omega) = \frac{\omega^2}{2} - \cos \theta,\tag{3.6}$$

Como se trata de um sistema autônomo, a própria Hamiltoniana é uma integral primeira do movimento. O espaço de fase $\theta \times \omega = \dot{\theta}$ é obtido a partir da relação

$$\frac{d\theta}{d\omega} = \frac{\dot{\theta}}{\dot{\omega}} = \frac{\omega}{-\sin \theta} \Rightarrow \sin \theta \, d\theta = \omega \, d\omega,$$

integrando-se ambos os lados,

$$\omega^2 - 2 \cos \theta = \frac{E}{2},$$

onde E é a energia do sistema. Veja a Figura 3.4, extraída de [7]. A partir do espaço de fase, podemos descrever os movimentos possíveis para o pêndulo.

- i. Os pontos do tipo $(m\pi, 0)$, com m par, representam pontos fixos estáveis do tipo centro, e neles o pêndulo se encontra parado;
- ii. Os pontos do tipo $(m\pi, 0)$, com m ímpar, representam pontos fixos instáveis do tipo sela;
- iii. As trajetórias em azul ($E < 1$) representam órbitas fechadas, em que o pêndulo executa oscilações;
- iv. As trajetórias em verde ($E > 1$) representam órbitas abertas, em que o pêndulo executa rotações;

- v. A trajetória em vermelho ($E = 1$) é uma órbita de período infinito que separa trajetórias abertas e fechadas, conhecida como *separatriz* ou *órbita homoclínica*.

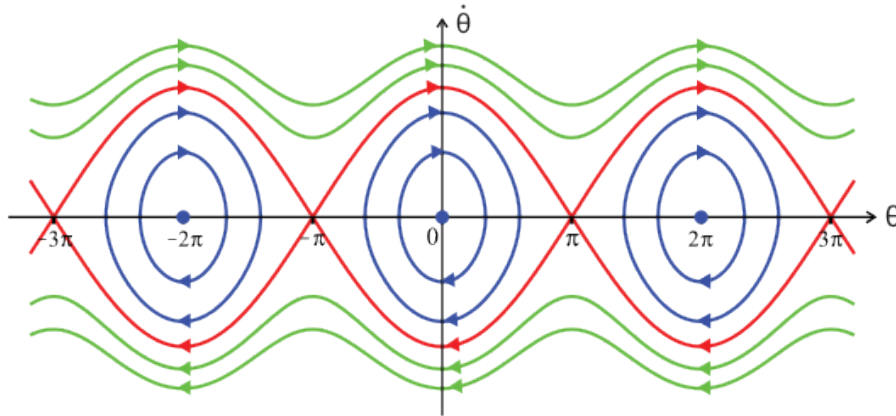


Figura 3.4: Espaço de fase $\theta \times \dot{\theta}$ do pêndulo simples plano. Note que as órbitas em azul representam trajetórias fechadas, enquanto as órbitas em verde, trajetórias abertas. A trajetória em vermelho é a separatriz entre movimento limitado e não limitado. Figura extraída de [7].

A *órbita homoclínica* do sistema, é a intersecção entre as variedades instável e estável associadas ao ponto de sela. Para encontrarmos sua expressão analítica, $q^0(t) = [\theta^h(t), \omega^h(t)]$, note que no ponto de sela, a Hamiltoniana (3.6) vale $H(\pi, 0) = 1$, e pela conservação da energia podemos escrever

$$\omega^h = \dot{\theta}^h = 2 \cos\left(\frac{\theta^h}{2}\right),$$

de maneira que integrando temos

$$\cos\left[\frac{\theta^h(t)}{2}\right] = \operatorname{sech}(t), \quad \sin\left[\frac{\theta^h(t)}{2}\right] = \tanh(t). \quad (3.7)$$

Assim, ω^h pode se escrito como

$$\omega^h(t) = \pm 2 \operatorname{sech}(t). \quad (3.8)$$

Agora, para encontrarmos a expressão para as órbitas de oscilação periódica dentro da separatriz, $q^\alpha = [\theta^\alpha, \omega^\alpha]$, note que o pêndulo atinge uma amplitude máxima θ_{max} quando $\omega = 0$, e que neste ponto temos $H(\theta_{max}, 0) = -\cos \theta_{max}$, e da conservação da energia temos

$$(\omega^\alpha)^2 = 4 \left[\sin^2 \left(\frac{\theta_{max}}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\theta^\alpha}{2} \right) \right]. \quad (3.9)$$

Definimos uma fase ψ monotonicamente crescente, de maneira que

$$\sin \left(\frac{\theta^\alpha}{2} \right) = k \sin \psi, \quad k = \sin \left(\frac{\theta_{max}}{2} \right), \quad (3.10)$$

onde k é o módulo das integrais elípticas [63]. Substituindo (3.10) em (3.9), e resolvendo a equação para ψ temos

$$\psi = \text{am}(\tau - \tau_0, k), \quad (3.11)$$

onde $\text{am}(u, k)$ é a função amplitude de Jacobi. Usando as relações entre as funções elípticas de Jacobi, a expressão (3.9) pode ser reescrita como

$$\omega^\alpha = \dot{\theta}^\alpha = 2k \text{cn}(\tau - \tau_0, k),$$

Assim, θ^α está implicitamente definido por

$$\cos \left[\frac{\theta^\alpha(t)}{2} \right] = \text{dn}(t, k), \quad \sin \left[\frac{\theta^\alpha(t)}{2} \right] = k \cdot \text{sn}(t, k), \quad (3.12)$$

e $\omega^\alpha(t)$ é dado por

$$\omega^\alpha(t) = 2k \text{cn}(t, k), \quad (3.13)$$

onde $\text{sn}(t, k)$, $\text{cn}(t, k)$ e $\text{dn}(t, k)$ são as funções elípticas de Jacobi. O período dessas soluções é quatro vezes o tempo que o pêndulo leva para ir de $\theta = 0$ até $\theta = \theta_{max}$, e pode ser escrito como

$$T_p = 4K(k), \quad (3.14)$$

onde $K(k)$ é a integral elíptica completa de primeira espécie. Note que a condição de ressonância para as oscilações subharmônicas é então dada por

$$4K(k) = \frac{m 2\pi}{n \omega_p}. \quad (3.15)$$

3.3 Equações do movimento

Para obter as equações do movimento, vamos escrever a Lagrangiana que descreve o sistema perturbado. Os parâmetros que o descrevem são a massa, m , e a distância do centro de massa ao pivô, l , que definem o momento de inércia, I ; o ângulo que o eixo de excitação forma com a vertical, ϕ ; e o parâmetro de atrito, b . Os parâmetros de controle são a amplitude, A , e a frequência, ω_p , da excitação. Sejam então as coordenadas generalizadas

$$x = l \sin \theta + x_p$$

$$y = l \cos \theta + y_p$$

onde θ é o ângulo que a linha que passa pelo pivô e pelo centro de massa forma com a vertical, e x_p e y_p são as projeções do movimento do pivô, $s(t)$, nas direções x e y :

$$x_p = A \sin \phi \cos \omega_p t,$$

$$y_p = A \cos \phi \cos \omega_p t.$$

A energia cinética do sistema é dada por

$$T = \frac{I}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{m}{2} (\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2) + ml\dot{\theta} (\cos \theta \dot{x}_p - \sin \theta \dot{y}_p),$$

enquanto para a energia potencial temos

$$V = mgl(1 - \cos \theta) - mgx_p,$$

de maneira que a Lagrangiana, a menos de transformação de calibre, fica

$$L = \frac{I}{2} \dot{\theta}^2 + ml\dot{\theta} (\cos \theta \dot{x}_p - \sin \theta \dot{y}_p) + mgl \cos \theta.$$

Substituindo nas equações de Euler-Lagrange ficamos com

$$\ddot{\theta} = -\frac{\omega_0^2}{g} [(g - \ddot{y}_p) \sin \theta + \ddot{x}_p \cos \theta], \quad \omega_0^2 = \frac{mgl}{I},$$

onde ω_0^2 é a frequência de oscilação natural do sistema. Acrescentando um termo de atrito proporcional à velocidade e substituindo as expressões para x_p e y_p temos

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin \theta - \frac{\omega_0^2}{g} p \cos(\omega t) \sin(\theta - \phi) - b\dot{\theta}, \quad p = A\omega_p^2 \quad (3.16)$$

Podemos reescrever a equação acima de maneira adimensional através da mudança de variável $t \rightarrow \omega_0 t$, e ficamos com

$$\ddot{\theta} = -\sin \theta - \varepsilon P \cos(\Omega_p t) \sin(\theta - \phi) - \varepsilon \beta \dot{\theta}, \quad \varepsilon P = \alpha \Omega_p^2 \quad (3.17)$$

onde $0 < \varepsilon \ll 1$ é o parâmetro perturbativo, e

$$\Omega_p = \frac{\omega_p}{\omega_0}, \quad \alpha = \frac{\omega_0^2}{g} A, \quad \varepsilon \beta = \frac{b}{\omega_0}$$

são os parâmetros adimensionais do sistema. Note que temos uma equação diferencial ordinária (EDO) de segundo grau. Alternativamente, podemos reescrever (3.17) como um sistema de duas EDO's de primeiro grau da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega, \\ \dot{\omega} &= -\sin \theta - \varepsilon [P \cos(\Omega_p t) \sin(\theta - \phi) + \beta \omega] \end{aligned} \quad (3.18)$$

Podemos ainda remover a propriedade do sistema acima (3.18) de ser não autônomo, sob o custo de acrescentarmos dois graus de liberdade ao sistema. Para isso, utilizamos a forma normal da bifurcação de Hopf, que em coordenadas polares é dada por

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(r_0 - r^2) \\ \dot{\phi} &= \Omega_p \end{aligned} \tag{3.19}$$

Note que o sistema acima possui como atrator uma órbita periódica de raio $r = \sqrt{r_0}$, para $r_0 > 0$. Para que esta órbita seja o círculo unitário centrado na origem, escolhemos $r_0 = 1$, e definindo

$$X = r \cos \phi, \quad Y = r \sin \phi,$$

ao substituir em (3.19), vemos que X e Y satisfazem

$$\begin{aligned} \dot{X} &= X - \Omega_p Y - X(X^2 + Y^2), \\ \dot{Y} &= \Omega_p X + Y - Y(X^2 + Y^2), \end{aligned}$$

com $X(0) = 1$ e $Y(0) = 0$, de maneira que o sistema (3.18) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega, \\ \dot{\omega} &= -\sin \theta - \varepsilon [PX \sin(\theta - \phi) + \beta \omega] \\ \dot{X} &= X - \Omega_p Y - X(X^2 + Y^2), \\ \dot{Y} &= \Omega_p X + Y - Y(X^2 + Y^2), \end{aligned} \tag{3.20}$$

com $X(0) = 1$ e $Y(0) = 0$. Esta versão autônoma das equações do movimento é a forma mais conveniente para fins numéricos.

3.4 Espaços de parâmetros

Ao considerarmos as oscilações subharmônicas para o pêndulo simples parametricamente excitado, notamos uma diferença em relação às órbitas pares e ímpares: enquanto as oscilações pares parecem poder ser encontradas facilmente

através de integração numérica, o mesmo não ocorre para as oscilações ímpares. Bryant e Miles relatam apenas a ocorrência de soluções de período par para o pêndulo parametricamente excitado na vertical [31]. Este resultado chama atenção porque a equação de Mathieu, que descreve o pêndulo paramétrico na aproximação de pequenas oscilações e na ausência de atrito, apresenta todo o espectro de ressonâncias, exibindo oscilações de período tanto par quanto ímpar [64, 65, 19, 20]. Além disso, para o pêndulo sujeito a torque externo [66] e para o pêndulo excitado na direção horizontal [67], os mesmos autores encontram oscilações pares e ímpares. Em [30], Arneodo *et al* encontram numericamente uma solução oscilatória de período-1 para o sistema, e em [32] Clifford e Bishop encontram, através do uso de dinâmica simbólica algumas oscilações de período ímpar, mas em ambos os casos essas soluções são raras e dependem de ajuste fino dos parâmetros de controle para serem encontradas. Fica evidente uma diferença entre o comportamento de oscilações pares e ímpares para o pêndulo parametricamente excitado na vertical.

Para verificarmos esses resultados, computamos o espaço de parâmetros para este sistema, através de integração direta das equações (3.20), com $\phi = 0$, utilizando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem. Fixamos as condições iniciais em $\theta_i = 0.55$ e $\omega_i = 0$ e variamos os parâmetros de controle P , no intervalo $[0, 2]$, e Ω_p , no intervalo $[1, 4.5]$, cada um com passo 0.025. Cada ponto na Figura 3.5 foi integrado por 1000 s, dos quais apenas os últimos 100 s foram analisados, garantindo assim que a solução transiente fosse descartada. A periodicidade da solução foi calculada a partir do mapa estroboscópico $t^* = N * T_p$ para a velocidade angular do pêndulo. O resultado está na Figura 3.5, onde FP significa que o pêndulo não oscila, mantendo-se parado no ponto fixo $\theta = \omega = 0$; On significa que ele oscila periodicamente com período $-n$, ou seja, período igual a n vezes o período da perturbação; Rn significa que ele executa rotações periódicas de período $-n$; IO significa que ele oscila em torno da posição invertida; e CH significa que ele executa o movimento que foi definido como *tumbling chaos* persistente, alternando entre rotações em ambos os sentidos e oscilações em torno da posição de equilíbrio, mesmo após descartarmos a solução transiente. As linhas de transição foram obtidas através da técnica de continuação numérica com o software AUTO-07P [8]. Note que fora das regiões de ressonância, o pêndulo não oscila, ou seja, a

solução é o ponto fixo estável. Da direita para esquerda, a primeira linha de cor preta é o locus da bifurcação sela-nó em que surge o atrator O4, e a segunda é o locus da bifurcação pitchfork em que o ponto fixo perde estabilidade e surge o atrator O2. De fato, não observamos oscilações de período ímpar em amplas regiões do espaço de parâmetros. Em seguida temos as rotações R1 e R2, e então as regiões de *tumbling chaos* persistente e transiente. A região $1 < \Omega_p < 2.6$ é extensivamente discutida em [1], e o nosso resultado está de acordo com o que foi reportado pelos autores.

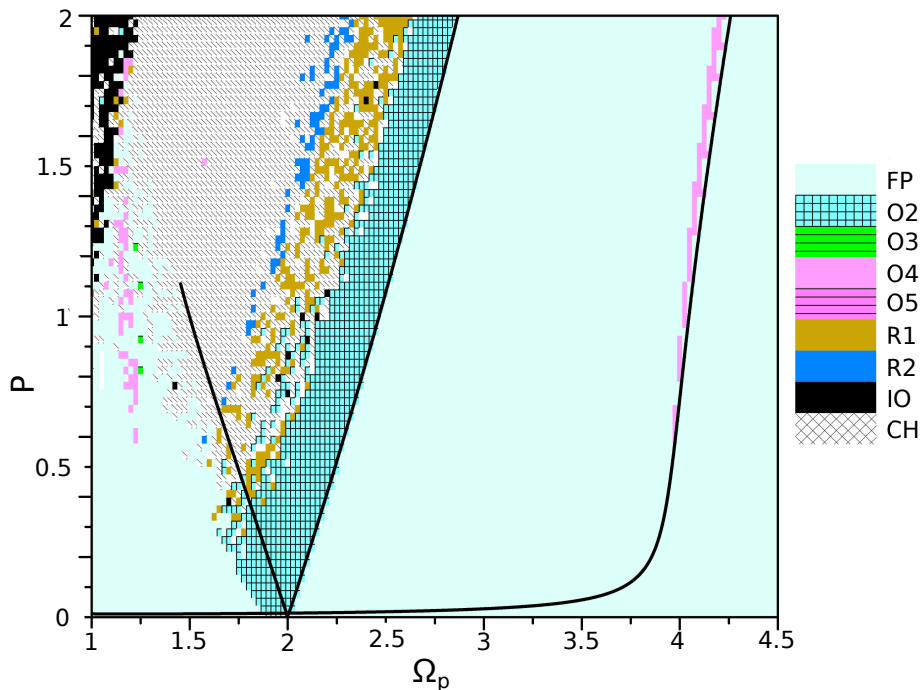


Figura 3.5: Espaço de parâmetros para o pêndulo parametricamente excitado na direção vertical ($\phi = 0$). Note que aparecem apenas oscilações de período par em regiões amplas do espaço de parâmetros.

Em seguida, computamos da mesma maneira o espaço de parâmetros para o caso inclinado, integrando numericamente as equações (3.20), com $\phi = \pi/8$. O método de integração, o tempo transiente, e o método para calcular a periodicidade foram os mesmos do caso anterior. O resultado está na Figura 3.6. Da direita para esquerda, as linhas de cor preta são os loci das bifurcações sela-nó em que surgem os atratores O4, O3 e $O^{5/2}$, em seguida temos o locus da bifurcação

duplicação de período em que o atrator O1 perde estabilidade e surge o atrator O2. Novamente, na sequência, temos as rotações R1 e R2, e então as regiões de *tumbling chaos* persistente e transiente. Evidenciam-se três diferenças principais em relação ao caso simétrico. A primeira delas é que fora das regiões de ressonância, o pêndulo passa a oscilar com o mesmo período da excitação, ao invés de ficar parado. A segunda, é que não ocorre mais uma bifurcação do tipo pitch-fork, e esta dá lugar à bifurcação do tipo duplicação de período. Essas mesmas diferenças também foram observadas estudando-se os espaços de parâmetros do pêndulo duplo parametricamente excitado ao longo da vertical e de uma direção inclinada por Sartorelli *et al.* Por último, a principal diferença é que para o caso não simétrico, obtemos todo o espectro de ressonâncias, de maneira que tanto as oscilações pares, quanto as ímpares, se manifestam em amplas regiões do espaço de parâmetros.

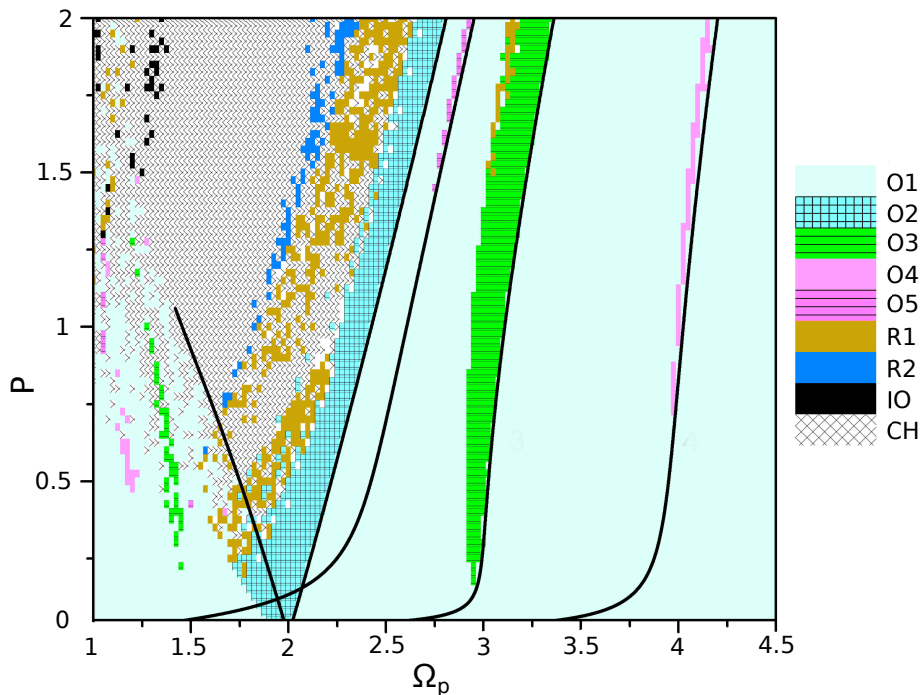


Figura 3.6: Espaço de parâmetros para o pêndulo parametricamente excitado na direção inclinada ($\phi = \pi/8$). Note que aparecem oscilações de período tanto par quanto ímpar em regiões amplas do espaço de parâmetros.

Finalmente, vale observar que ainda podem existir outros atratores periódicos,

que não estão representados nas Figuras 3.5 e 3.6, por não possuírem o ponto inicial $\theta_i = 0.55$, $\omega_i = 0$ em sua bacia de atração. Este fato será discutido posteriormente. A seguir, mostraremos os resultados experimentais comprovando a ocorrência de oscilações ímpares estáveis para o nosso sistema.

3.5 Resultados experimentais

Nesta Seção, descrevemos como foram realizados os experimentos para comprovar a ocorrência de oscilações ímpares para o pêndulo parametricamente excitado inclinado. Primeiramente, computamos o diagrama de bifurcações $\langle |\omega| \rangle \times f_p$ numericamente, para termos uma referência durante a tomada de dados. O resultado está na Figura 3.7. Fixamos a amplitude em $A = 2$ cm e variamos a frequência: (i) de 0.5 a 11.5 Hz (linha vermelha). (ii) de 11.5 a 0.5 Hz (linha azul). Desta maneira, não encontramos nenhuma oscilação de período- n , para $n > 2$. Para obtê-las, foi necessário partir de uma solução conhecida com o período desejado, e a partir de então aumentar (linha magenta) e diminuir (linha ciano) a frequência.

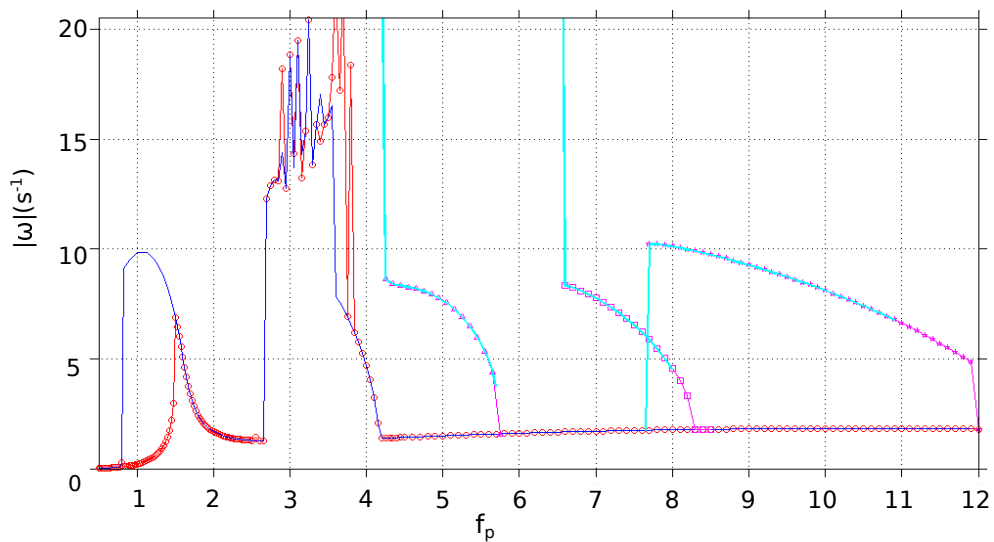


Figura 3.7: Diagrama de bifurcações $\langle |\omega| \rangle \times f_p$ para $A = 2.02$ obtido numericamente. Na linha vermelha a frequência da perturbação é crescente, e na linha azul, decrescente. Neste diagrama, medimos oscilações de período- $1/2$, 1 e 2. Nenhuma oscilação de período mais alto foi encontrada.

A seguir, mostramos os diagramas de bifurcação obtidos experimentalmente. Veremos que, de maneira análoga ao estudo numérico, para encontrar oscilações com períodos altos, é essencial saber em que região de condições iniciais suas bacias de atração se encontram. Por fim, mostramos algumas séries temporais e mapas estroboscópicos para o pêndulo oscilando com período-2, 3, 4 e 5.

3.5.1 Diagramas de Bifurcação

As figuras a seguir são os diagramas de bifurcações $\langle |\omega| \rangle \times f_p$ do nosso sistema, em que mostramos como se comporta o valor médio do valor absoluto módulo da velocidade angular do pêndulo à medida que variamos a frequência de perturbação. A amplitude da perturbação é fixa e vale $A = 2.02\text{cm}$. Primeiramente, partimos da situação em que o pêndulo está em repouso, ou seja, as condições iniciais são $(\theta_i, \omega_i = (0, 0))$, e ligamos o motor. A linha em vermelho foi obtida aumentando o valor da frequência da perturbação, no intervalo $[0.5, 11.5]$ Hz, e a linha em azul, diminuindo a frequência da perturbação, no intervalo $[11.5, 0.5]$ Hz. O resultado obtido está na Figura 3.8. Note que observamos apenas oscilações de período-1 e 2, nenhuma oscilação de período mais alto foi encontrada. Vamos seguir a linha vermelha. Quando ligamos o motor, o pêndulo começa a oscilar, com amplitude pequena, com período igual aos período da perturbação, T_p , e também com a mesma fase. Em $f_p = f_0/2 = 0.8$ Hz, ocorre uma bifurcação sela-nó e o pêndulo passa a oscilar com período $T = T_p/2$, e depois volta a oscilar com período T_p . Em seguida, ocorre uma bifurcação sela-nó em $f_p = f_0 = 1.6$ Hz, e o pêndulo continua oscilando com período T_p , porém nesta região ele oscila fora de fase em relação à perturbação, e depois volta a acertar a fase. Em seguida, o pêndulo tenta entrar no regime caótico, e nesse momento precisamos evitar que ele comece a girar, porque quando isso acontece o ganho de energia é muito alto e ele pode escapar. Passado isso, ele entra novamente em ressonância na região $f_p \approx 2f_0 = 3.2$ Hz, onde oscila com período $T = 2T_p$. Depois disso ele volta a oscilar com amplitude pequena com período T_p , e segue assim até o final da tomada de dados. Seguindo a linha azul, observamos os mesmos fenômenos, e fica clara a ocorrência de histerese para as ressonâncias f_0 e $2f_0$. É importante notar que no caso em que a perturbação é vertical, o pêndulo não oscila fora das regiões

de ressonância: ao invés disso, ele fica parado no ponto fixo estável $\theta = \omega = 0$. Essa diferença também ocorre para o pêndulo duplo nos casos vertical e inclinado [33, 34]. As outras ressonâncias, de período $T = 3T_p$, $T = 4T_p$ e $T = 5T_p$ não aparecem neste diagrama de bifurcações porque ao passarmos pelas regiões de ressonância $f_p \approx 3f_0$, $f_p \approx 4f_0$ e $f_p \approx 5f_0$, o pêndulo oscila no regime de pequenas oscilações, e conforme veremos, ângulos pequenos estão fora da bacia de atração desses atratores.

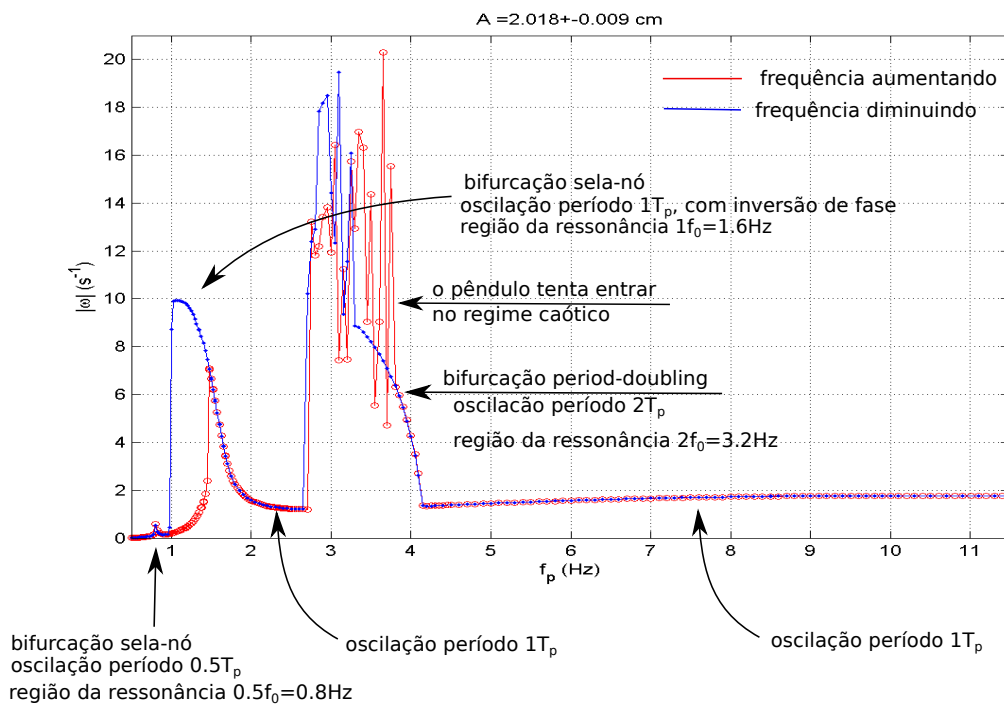


Figura 3.8: Diagrama de bifurcações $\langle |\omega|_{max} \rangle \times f_p$ para $A = 2.02$. Na linha vermelha a frequência da perturbação é crescente, e na linha azul, decrescente. Neste diagrama, medimos oscilações de período-1/2, 1 e 2. Nenhuma oscilação de período mais alto foi encontrada.

Agora queremos encontrar oscilações de período-3. Analisando o espaço de parâmetros 3.6, vemos que essas soluções se encontram na região $f_p \approx 3f_0$, e também que a bacia de atração deste atrator contém o ponto $(\theta_i, \omega_i = 0.55, 0)$. Assim, fazendo o motor oscilar perto desta frequência da ressonância, colocamos manualmente o pêndulo aproximadamente nesta posição. A partir do momento em que achamos a solução de período-3, aumentamos (linha magenta) e diminuimos (linha ciano) a frequência da perturbação. Veja a Figura 3.9. Note que o atrator de soluções oscilatórias de período-3 coexiste com o de período-1 obtido anteriormente. Procedendo da mesma forma, encontramos as soluções de período-4 e 5. Veja a Figura 3.10. Note inclusive que há uma região onde coexistem os atratores de período $T = T_p$, $T = 4T_p$ e $T = 5T_p$, no intervalo $7.85 < f_p < 8.05$ Hz.

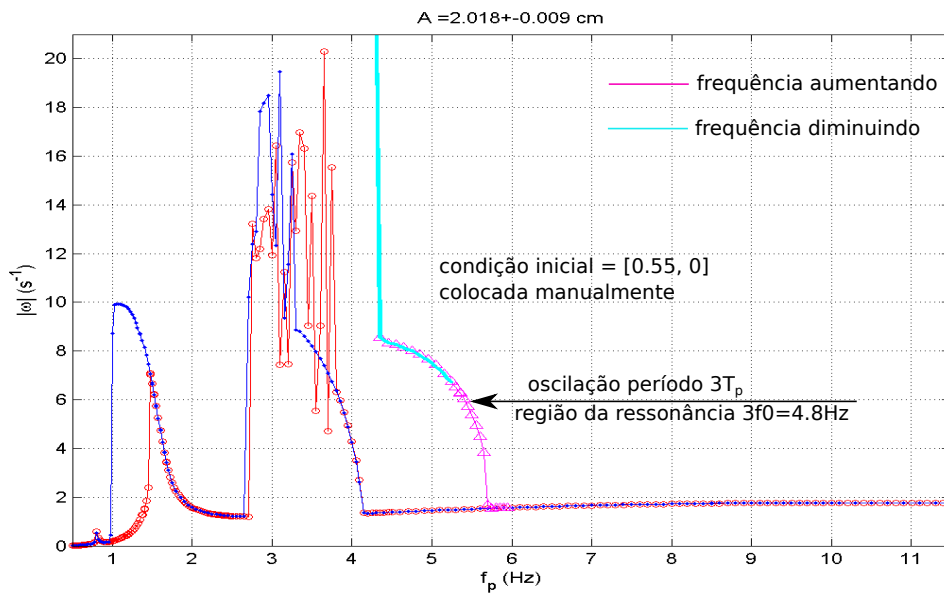


Figura 3.9: Diagrama de Bifurcação $\langle |\omega|_{max} \rangle \times f_p$ para $A = 2.02$. Na linha vermelha a frequência da perturbação é crescente, e na linha azul, decrescente. Na região $f_p \approx 3f_0$ a oscilação de período T_p coexiste com a oscilação de período $3T_p$, representado pela linhas magenta, em que a frequência da perturbação é crescente, e ciano, em que esta é decrescente.

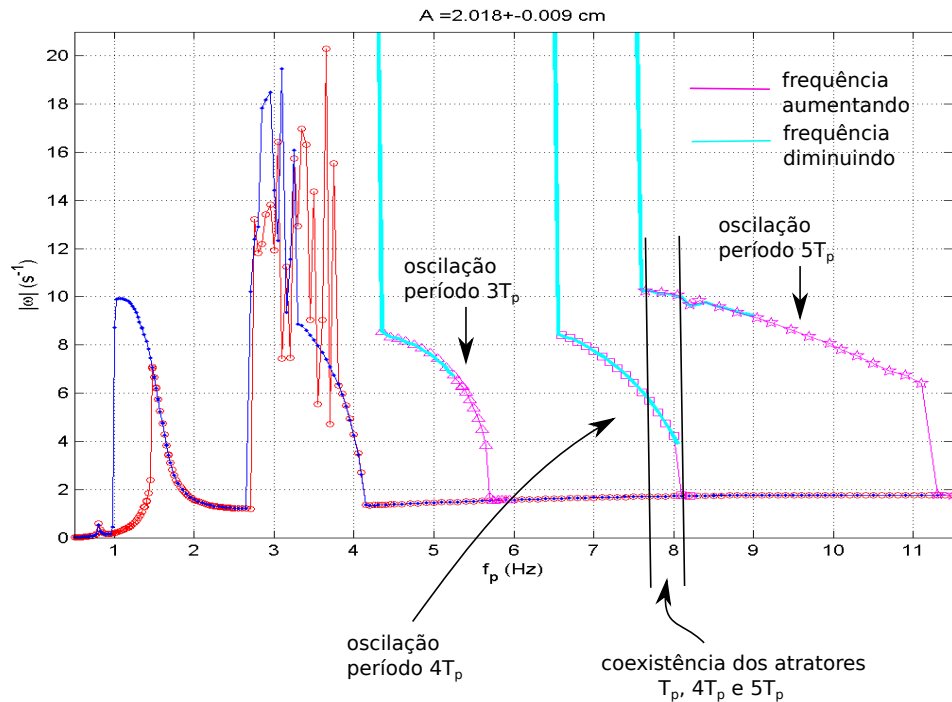


Figura 3.10: Diagrama de Bifurcação $\langle |\omega|_{max} \rangle \times f_p$ para $A = 2.02$. Na linha vermelha a frequência da perturbação é crescente, e na linha azul, decrescente. Na região $f_p \approx 3f_0$ a oscilação de período T_p coexiste com a oscilação de período $3T_p$, na região $f_p \approx 4f_0$ com o período $4T_p$, e na região $f_p \approx 5f_0$ com o período $5T_p$. Sobre as linhas magenta, a frequência da perturbação é crescente, e ciano, é decrescente.

Finalmente, mostramos na Figura 3.11 um resumo de todos os resultados então listados. Em (a), temos o diagrama de bifurcações obtido da maneira tradicional, partindo de $f_p = 0.5$ Hz e aumentando a frequência até $f_p = 11.5$ Hz (linha vermelha), e em seguida diminuindo de volta até $f_p = 0.5$ Hz (linha azul). Verificamos a ocorrência de ressonâncias em que o pêndulo oscila com período-1/2, 1 e 2. Em (b), somamos a este resultado as medidas das ressonâncias em que o pêndulo oscila com período-3, 4 e 5, obtidas ao colocarmos manualmente o pêndulo para oscilar com amplitudes mais altas, e partir de então deixarmos a frequência aumentar (linha magenta) e diminuir (linha ciano).

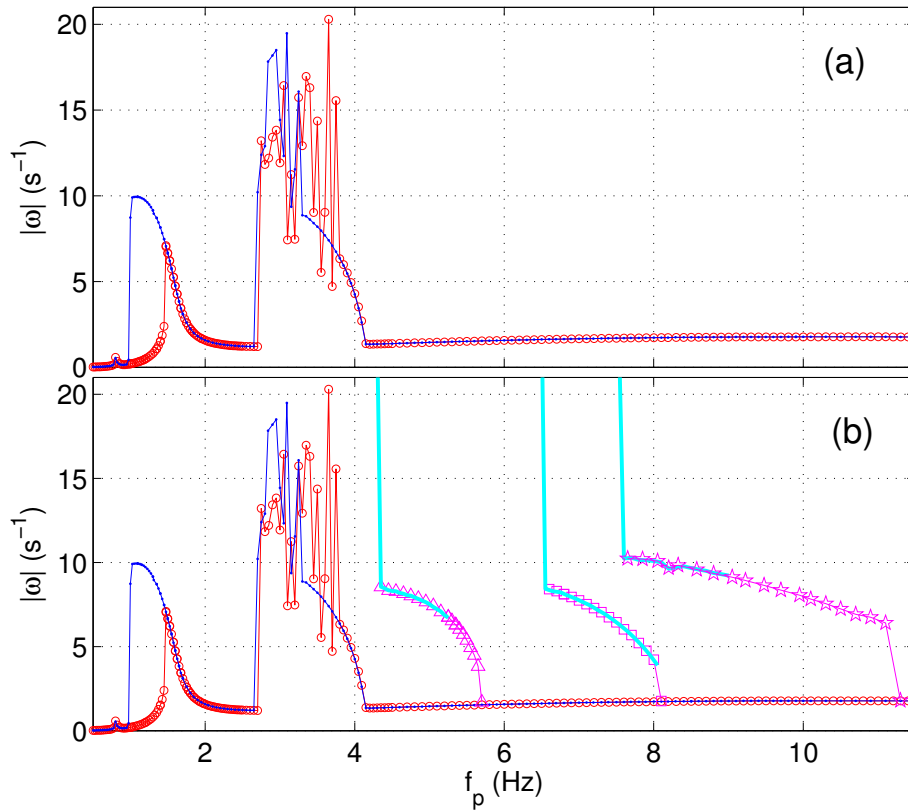


Figura 3.11: Diagramas de bifurcações $\langle |\omega|_{max} \rangle \times f_p$ para $A = 2.02$ obtidos experimentalmente. Em (a) temos o diagrama obtido da maneira tradicional: na linha vermelha a frequência da perturbação é crescente, e na linha azul, decrescente. Em (b) temos o diagrama obtido colocando manualmente o pêndulo na bacia de atração das oscilações de períodos mais altos: na linha magenta a frequência da perturbação é crescente, e na linha ciano, decrescente.

3.5.2 Séries temporais e mapas estroboscópicos

A seguir, ilustramos as oscilações de período-2, 3, 4 e 5, exibindo uma série temporal, com seu respectivo mapa estroboscópico, para cada uma dessas soluções.

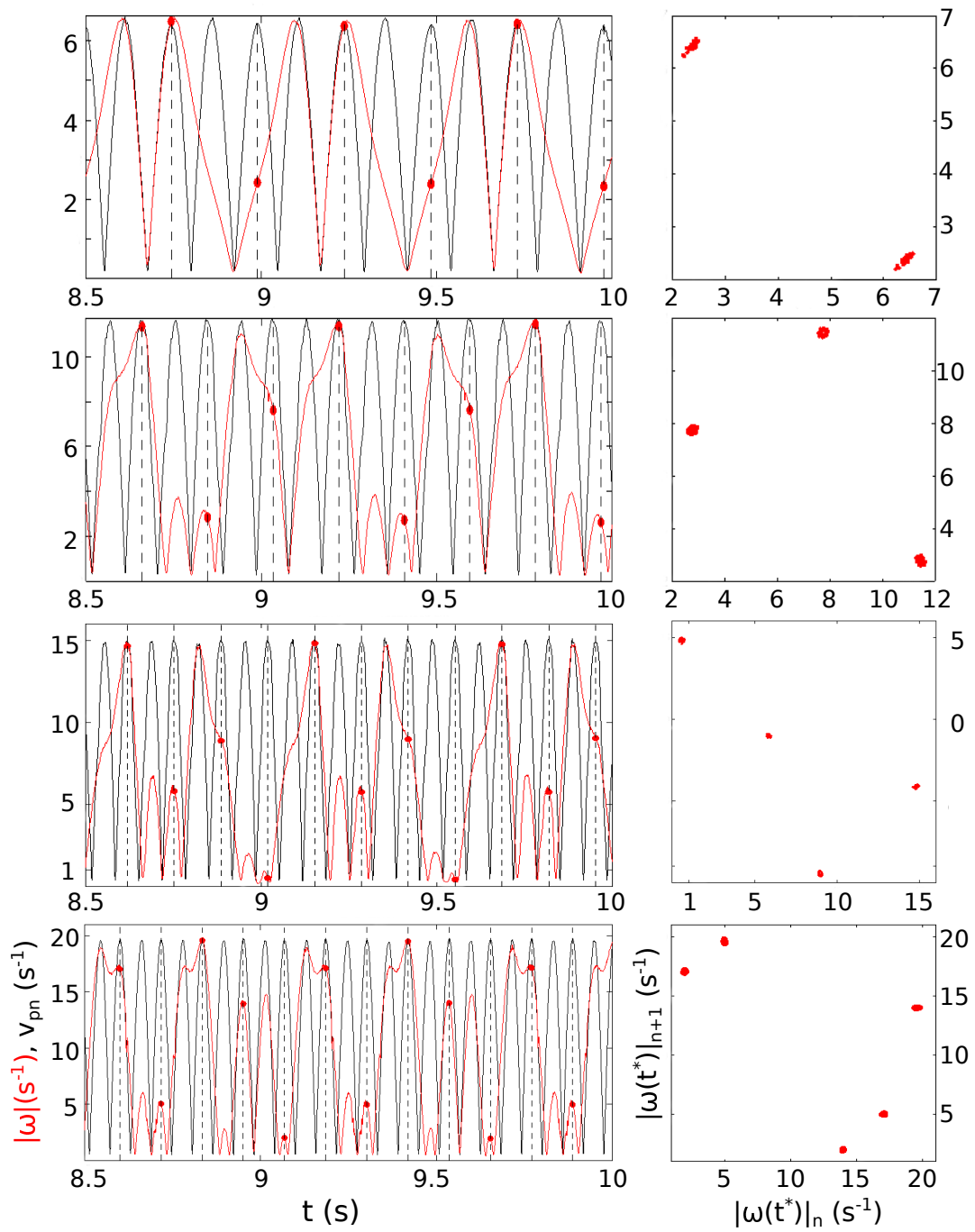


Figura 3.12: Séries temporais ilustrando as oscilações de período-2, 3, 4 e 5 (à esquerda), com os respectivos mapas estroboscópicos (à direita).

3.6 Aplicação dos métodos de Melnikov

Vamos aplicar os métodos de Melnikov para o pêndulo simples parametricamente excitado ao longo de uma direção inclinada para compreender melhor o comportamento global deste sistema. Primeiramente, aplicamos o método acerca da ocorrência de caos homoclínico para comparar o resultado com o conhecido para o caso vertical [21, 1]. Em seguida, aplicamos o método acerca da persistência das órbitas subharmônicas na tentativa de explicar as diferenças observadas nos espaços de parâmetros para o caso vertical (ver Figura 3.5) e inclinado (ver Figura 3.6).

Relembrando as equações do movimento (3.18), vemos que os campos vectoriais para a parte integrável do sistema, $f(\theta, \omega)$, e para o termo perturbativo $g(\theta, \omega, t)$, que inclui o forçamento periódico e o atrito, podem ser escritos como

$$f(\theta, \omega) = \begin{bmatrix} \omega \\ -\sin \theta \end{bmatrix},$$

$$g(\theta, \omega, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -P\Omega_p^2 \cos(\Omega_p t) \sin(\theta - \phi) - \beta\omega \end{bmatrix},$$

de maneira que o produto vetorial $f(\theta, \omega) \times g(\theta, \omega, t)$ é dado por

$$f \times g = -\omega \cdot [P\Omega_p^2 \cos(\Omega_p t) \sin(\theta - \phi) + \beta\omega]. \quad (3.21)$$

3.6.1 Ocorrência de caos homoclínico

Em [21], Koch e Leven calcularam o critério de Melnikov para a ocorrência de caos homoclínico para o pêndulo simples parametricamente excitado na vertical, e determinaram que este sistema apresenta, de fato, comportamento caótico. A região do espaço de parâmetros em que o único atrator do sistema é um atrator caótico é aquela que apresenta soluções do tipo *tumbling chaos* persistente, conforme mostrado por Clifford e Bishop em [18], cuja fronteira está longe do locus do critério para caos homoclínico determinado por Melnikov. Em [1], W. Szemplińska-Stupnicka *et al* esclarecem que, devido ao surgimento dos atratores

de rotação à medida que variamos os parâmetros do sistema, são outras as bifurcações globais que estão associadas a esta região. Segundo os autores, como a linha determinada pelo critério de Melnikov é muito próxima ao locus das bifurcações do tipo sela-nó onde surgem os atratores de rotação (veja as linhas snR e $hom D_0$ na Figura 1.1), não se sabe se é possível observar experimentalmente os efeitos esperados da bifurcação homoclínica de Melnikov. Nós vamos calcular o critério de Melnikov para pêndulo paramétrico com quebra de simetria para verificar se este desempenha um papel mais relevante, ou possivelmente mensurável, em relação ao comportamento global do sistema neste caso.

Para aplicar o Teorema 2.2 da Seção 2.3.1, precisamos calcular a integral de Melnikov

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(q^0(t)) \times g(q^0(t), t + t_0) dt.$$

onde o produto vetorial do integrando é dado por (3.21). Assim, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} -\omega^h(t) \left[P\Omega_p^2 \cos(\Omega_p(t + t_0)) \sin(\theta^h(t) - \phi) + \beta\omega \right] dt,$$

sendo $q^0(t) = [\theta_{\pm}^h, v_{\pm}^h]$ a órbita homoclínica do pêndulo simples definida por (3.7) e (3.8). Podemos definir

$$\sin y = \tanh(t), \quad \cos y = \operatorname{sech}(t),$$

de maneira que

$$\begin{aligned} \sin \theta^h &= \sin(2y) = 2 \tanh(t) \operatorname{sech}(t), \\ \cos \theta^h &= \cos(2y) = 2 \operatorname{sech}^2(t) - 1. \end{aligned}$$

Assim, escrevemos a integral $M(t_0)$ como a soma de quatro termos,

$$M(t_0) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

A primeira integral é dada por

$$\begin{aligned} I_1 &= -4P \cos \phi \int_{-\infty}^{\infty} \cos[\Omega_p(t+t_0)] \tanh(t) \operatorname{sech}^2(t) dt \\ &= 8P \cos \phi \sin(\Omega_p t_0) \int_0^{\infty} \sin(\Omega_p t) \tanh(t) \operatorname{sech}^2(t) dt, \end{aligned}$$

e usando

$$\int_0^{\infty} \sin(\Omega_p t) \tanh(t) \operatorname{sech}^2(t) dt = \frac{\pi}{4} \Omega_p^2 \operatorname{csch} \left(\frac{\pi \Omega_p}{2} \right),$$

ficamos com

$$I_1 = 2\pi \cos \phi P \Omega_p^2 \operatorname{csch} \left(\frac{\pi \Omega_p}{2} \right) \sin(\Omega_p t_0).$$

Para a segunda integral temos

$$\begin{aligned} I_2 &= 4P \sin \phi \int_{-\infty}^{\infty} \cos[\Omega_p(t+t_0)] \operatorname{sech}^3(t) dt = \\ &= 8P \sin \phi \cos(\Omega_p t_0) \int_0^{\infty} \cos(\Omega_p t) \operatorname{sech}^3(t) dt \end{aligned}$$

Usando

$$\int_0^{\infty} \cos(\Omega_p t) \operatorname{sech}^3(t) dt = \frac{\pi}{4} (1 + \Omega_p^2) \operatorname{sech} \left(\frac{\pi \Omega_p}{2} \right),$$

ficamos com

$$I_2 = 2\pi \sin \phi P (1 + \Omega_p^2) \operatorname{sech} \left(\frac{\pi \Omega_p}{2} \right) \cos(\Omega_p t_0).$$

Já para a terceira integral,

$$\begin{aligned} I_3 &= -2P \sin \phi \int_{-\infty}^{\infty} \cos[\Omega_p(t+t_0)] \operatorname{sech}(t) dt = \\ &= -4P \sin \phi \cos(\Omega_p t_0) \int_0^{\infty} \cos(\Omega_p t) \operatorname{sech}(\omega_0 t) dt, \end{aligned}$$

e usando

$$\int_0^{\infty} \cos(\Omega_p t) \operatorname{sech}(t) dt = \frac{\pi}{2} \operatorname{sech}\left(\frac{\pi\Omega_p}{2}\right),$$

ficamos com

$$I_3 = -2\pi \sin \phi P \operatorname{sech}\left(\frac{\pi\Omega_p}{2}\right) \cos(\Omega_p t_0).$$

Note que I_3 cancela o segundo termo de I_2 , de maneira que

$$I_2 + I_3 = 2\pi \sin \phi P \Omega_p^2 \operatorname{sech}\left(\frac{\pi\Omega_p}{2}\right) \cos(\Omega_p t_0)$$

Ainda, para I_4 temos

$$I_4 = 4\beta \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(t) dt = 8\beta.$$

Finalmente, juntando todos os termos,

$$M(t_0) = 2\pi P \Omega_p^2 \left[\cos \phi \operatorname{csch}\left(\frac{\pi\Omega_p}{2}\right) \sin(\Omega_p t_0) + \sin \phi \operatorname{sech}\left(\frac{\pi\Omega_p}{2}\right) \cos(\Omega_p t_0) \right] - 8\beta.$$

O termo entre colchetes na expressão acima pode ser escrito como

$$C \sin(\Omega_p t_0 + \alpha),$$

onde

$$C^2 = \left[\cos^2 \phi \operatorname{csch}^2\left(\frac{\pi\Omega_p}{2}\right) + \sin^2 \phi \operatorname{sech}^2\left(\frac{\pi\Omega_p}{2}\right) \right].$$

Vemos assim que o mínimo valor de P (*threshold*) para o qual podem acontecer intersecções homoclínicas é dado por

$$P = R^0(\Omega_p) = \frac{4\pi}{\Omega_p^2} \frac{1}{C} \quad (3.20)$$

Para reproduzirmos o resultado para o caso vertical, basta fazer $\phi = 0$. Veja que assim temos $I_2 = I_3 = 0$, e temos [21]

$$P_{vert} = R_{vert}^0(\Omega) = \frac{4}{\pi\Omega_p^2} \sinh\left(\frac{\pi\Omega_p}{2}\right) \quad (3.21)$$

Na Figura 3.13, exibimos as curvas P (em vermelho) e P_{vert} (em azul) em função da frequência de excitação. Veja que apesar de as expressões (3.20) e (3.21) serem razoavelmente diferentes, elas são numericamente muito próximas.

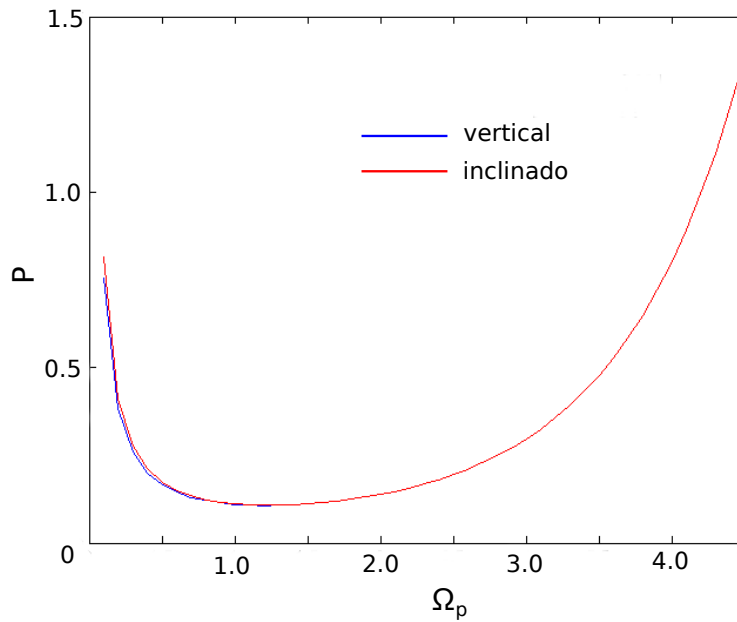


Figura 3.13: Critério de Melnikov para a ocorrência de caos homoclínico para o pêndulo parametricamente excitado nos casos vertical (azul) e inclinado (vermelho). Note que as linhas são muito próximas.

Desta forma, concluímos que os *thresholds* para a ocorrência de caos homoclínico em ambos os casos não são determinantes para a ocorrência de *tumbling chaos* no sistema. Ainda, em ambos os casos, esses critérios são seguidos do surgimento dos atratores de rotação, de maneira que os efeitos devido ao caos homoclínico previsto pela teoria, muito provavelmente não são observáveis.

3.6.2 Persistência das órbitas subharmônicas

Em [21], Koch e Leven calcularam o critério de Melnikov para a persistência das órbitas oscilatórias subharmônicas para o pêndulo simples parametricamente

excitado na vertical, através do qual obtiveram uma condição acima da qual está garantida a ocorrência de oscilações subharmônicas pares, nada se podendo afirmar em relação às ímpares. Uma questão que surge naturalmente é se as oscilações ímpares ocorrem ou não. Em [31], Bryant e Miles relatam apenas a ocorrência de oscilações de período par para este sistema. Apesar de Arneodo *et al* [30] e Clifford e Bishop [32] reportarem a ocorrência de oscilações de período ímpar, fica evidente uma diferença de comportamento entre oscilações pares e ímpares no caso vertical. Tendo isso em mente, nós estudamos o espaço de parâmetros para os casos em que o pêndulo é excitado na vertical e ao longo de uma direção inclinada, e verificamos uma diferença essencial entre ambos: enquanto no caso simétrico observamos apenas as ressonâncias pares - o que é surpreendente, uma vez que a equação de Mathieu, que descreve o sistema na aproximação de pequenas oscilações, apresenta todo o espectro de frequências, no caso inclinado observamos ressonâncias tanto pares quanto ímpares. Para mais detalhes, veja a Seção 3.4. Na tentativa de tentar explicar essa diferença, calculamos os critérios de Melnikov acerca da persistência de órbitas subharmônicas para o caso não simétrico.

Para aplicarmos o Teorema 2.11 da Seção 2.3.2, precisamos calcular a integral de Melnikov (2.11)

$$M^{m/n}(t_0) = \int_0^{mT} f(q^\alpha(t)) \times g(q^\alpha(t), t + t_0) dt$$

Substituindo os campos vetoriais do nosso sistema dinâmico (3.21) na expressão acima temos

$$M^{m/n}(t_0) = \int_0^{mT_p} -\omega^\alpha(t) [P \cos(\Omega_p(t + t_0)) \sin(\theta^\alpha(t) - \phi) + \beta \omega^\alpha(t)] dt,$$

e substituindo as expressões para as soluções oscilatórias do sistema não perturbado, (3.12) e (3.13), ficamos com

$$M^{m/n}(t_0) = -4k^2 P \cos \phi I_1 + 2kP \sin \phi I_2 - 4k^3 P \sin \phi I_3 - 4k^2 \beta I_4, \quad (3.22)$$

onde

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^{mT_p} \cos[\Omega_p(t+t_0)] \operatorname{cn}(t,k) \operatorname{sn}(t,k) \operatorname{dn}(t,k) dt, \\
 I_2 &= \int_0^{mT_p} \cos[\Omega_p(t+t_0)] \operatorname{cn}(t,k) dt, \\
 I_3 &= \int_0^{mT_p} \cos[\Omega_p(t+t_0)] \operatorname{cn}(t,k) \operatorname{sn}^2(t,k) dt, \\
 I_4 &= \int_0^{mT_p} \operatorname{cn}^2(t,k) dt.
 \end{aligned}$$

Para calcular as expressões I_1 , I_2 and I_3 , expandimos as integrais elípticas de Jacobi em série de Fourier e usamos as propriedades de ortogonalidade entre as funções seno e cosseno. Começaremos calculando a integral I_1 . Sabemos que [63]

$$d[\operatorname{cn}(t)] = -\operatorname{sn}(t) \operatorname{dn}(t) dt,$$

de maneira que, após integração por partes, esta integral pode ser reescrita como

$$I_1 = -\frac{\Omega_p}{2} \int_0^{mT_p} \sin[\Omega_p(t+t_0)] \operatorname{cn}^2(t,k) dt. \quad (3.23)$$

De [68, 69], temos

$$\operatorname{sn}^2(t,k) = \frac{1}{k^2} \left(1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right) - \frac{2\pi^2}{k^2 K^2(k)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{pq^p}{1-q^{2p}} \cos \left[(2p) \frac{\pi t}{2K(k)} \right],$$

onde [68]

$$q = \exp \left[-\pi \frac{K'(k)}{K(k)} \right], \quad (3.24)$$

sendo $K'(k) = K(k')$ e $k'^2 = 1 - k^2$ o módulo complementar das funções elípticas.

Note que

$$\frac{q^p}{1-q^{2p}} = \frac{1}{2} \operatorname{csch} \left[2p \frac{\pi K'}{2K} \right].$$

Usando a expressão acima e a condição de ressonância (3.15), ficamos com

$$\operatorname{sn}^2(t, k) = \frac{1}{k^2} \left(1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right) - \frac{\pi^2}{k^2 K^2(k)} \sum_{p=1}^{\infty} p \operatorname{csch} \left[(2p) \frac{n}{m} \Omega_p K'(k) \right] \cos \left[(2p) \frac{n}{m} \Omega_p t \right], \quad (3.25)$$

e finalmente, usando a relação [63],

$$\operatorname{cn}^2(t, k) = 1 - \operatorname{sn}^2(t, k),$$

ficamos com

$$\begin{aligned} \operatorname{cn}^2(t, k) &= -\frac{1}{k^2} \left[k'^2 - \frac{E(k)}{K(k)} \right] + \\ &+ \frac{\pi^2}{k^2 K^2(k)} \sum_{p=1}^{\infty} p \operatorname{csch} \left[(2p) \frac{n}{m} \Omega_p K'(k) \right] \cos \left[(2p) \frac{n}{m} \Omega_p t \right], \end{aligned} \quad (3.26)$$

Substituindo (3.26) na expressão para I_1 em (3.23) temos

$$I_1 = -\frac{\Omega_p}{2} [(I_1)^i + (I_1)^{ii}],$$

onde

$$(I_1)^i = -\frac{1}{k^2} \left[k'^2 - \frac{E(k)}{K(k)} \right] \int_0^{mT_p} \sin[\Omega_p(t+t_0)] dt = 0,$$

e

$$(I_1)^{ii} = \frac{\pi^2}{k^2 K^2(k)} \sum_{p=1}^{\infty} p \operatorname{csch} \left[(2p) \frac{n}{m} \Omega_p K'(k) \right] \int_0^{mT_p} \sin[\Omega_p(t+t_0)] \cos \left[(2p) \frac{n}{m} \Omega_p t \right] dt.$$

Usando as relações de ortogonalidade entre as funções trigonométricas, temos

$$\int_0^{mT_p} \sin(\Omega_p t) \cos \left[(2p) \frac{n}{m} \Omega_p t \right] dt = 0,$$

e

$$\int_0^{mT_p} \cos(\Omega_p t) \cos \left[(2p) \frac{n}{m} \Omega_p t \right] dt = \begin{cases} \frac{mT_p}{2} = 2K(k), & \text{se } n = 1 \text{ e } m = 2p, \\ 0, & \text{outro caso,} \end{cases}$$

onde usamos novamente a condição de ressonância (3.15). Assim, se m for ímpar $(I_1)^{ii} = 0$, e portando $I_1 = 0$, enquanto se m for par temos

$$I_1 = \pi \frac{\Omega_p^2}{k^2} \operatorname{csch}[\Omega_p K'(k)] \sin(\Omega_p t_0), \quad m \text{ par.} \quad (3.27)$$

Para calcularmos a integral I_2 , utilizaremos a expansão de $\operatorname{cn}(t, k)$ em série de Fourier, dada por [68]

$$\operatorname{cn}(t, k) = \frac{2\pi}{kK(k)} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{q^{p+1/2}}{1+q^{2p+1}} \cos \left[(2p+1) \frac{\pi t}{2K(k)} \right],$$

e usando a definição (3.24) e a condição de ressonância (3.15), temos

$$\operatorname{cn}(t, k) = \frac{\pi}{kK(k)} \sum_{p=0}^{\infty} \operatorname{sech} \left[(2p+1) \frac{n}{m} \Omega_p K'(k) \right] \cos \left[(2p+1) \frac{n}{m} \Omega_p t \right]. \quad (3.28)$$

Substituindo a série (3.28) e usando as relações de ortogonalidade entre as funções trigonométricas,

$$\int_0^{mT_p} \sin(\Omega_p t) \cos \left[(2p+1) \frac{n}{m} \Omega_p t \right] dt = 0,$$

e, usando novamente a condição de ressonância (3.15)

$$\int_0^{mT_p} \cos(\Omega_p t) \cos \left[(2p+1) \frac{n}{m} \Omega_p t \right] dt = \begin{cases} 2K(k), & \text{se } n = 1 \text{ e } m = 2p+1, \\ 0, & \text{outro caso,} \end{cases}$$

temos que se m for par, $I_2 = 0$, enquanto se m for ímpar ficamos com

$$I_2 = \frac{2\pi}{k} \operatorname{sech}[\Omega_p K'(k)] \cos(\Omega_p t_0), \quad m \text{ ímpar} \quad (3.29)$$

Agora, para calcularmos a integral I_3 , a partir da expansões em série de Fourier para $\text{sn}^2(t, k)$ (3.25) e $\text{cn}(t, k)$ (3.28), vamos obter a expansão em série do produto das funções de Jacobi $\text{sn}^2(t, k) \text{cn}(t, k) \equiv \alpha + \beta$, onde

$$\alpha = \frac{1}{k^2} \left[1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right] \text{cn}(t, k),$$

e

$$\beta = \left(\frac{\pi}{kK(k)} \right)^3 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \text{sech} \left[(2l+1) \frac{n}{m} \Omega_p K'(k) \right] \text{csch} \left[(2p) \frac{n}{m} \Omega_p K'(k) \right] \times \\ \cos \left[(2l+1) \frac{n}{m} \Omega_p t \right] \sin \left[(2p) \frac{n}{m} \Omega_p t \right].$$

Seja então

$$I_3^i = \int_0^{mT_p} \cos[\Omega_p(t+t_0)] \alpha dt,$$

e também

$$I_3^{ii} = \int_0^{mT_p} \cos[\Omega_p(t+t_0)] \beta dt.$$

Veja que

$$I_3^i = \frac{1}{k^2} \left[1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right] \int_0^{mT_p} \cos[\Omega_p(t+t_0)] \text{cn}(t, k) dt = \frac{1}{k^2} \left[1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right] I_2,$$

e da expressão (3.29) temos

$$I_3^i = \frac{2\pi}{k^3} \left[1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right] \text{sech}[\Omega_p K'(k)] \cos(\Omega_p t_0) \quad m \text{ ímpar} \quad (3.30)$$

O cálculo da expressão (3.33) exige cautela. Em primeiro lugar, note que

$$\int_0^{mT_p} \sin(\Omega_p t) \cos \left[(2l+1) \frac{n}{m} \Omega_p t \right] \cos \left[(2p) \frac{n}{m} \Omega_p t \right] dt = 0,$$

de maneira que

$$I_3^{ii} = \left(\frac{\pi}{kK(k)} \right)^3 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \operatorname{sech} \left[(2l+1) \frac{n}{m} \Omega_p K'(k) \right] \operatorname{csch} \left[(2p) \frac{n}{m} \Omega_p K'(k) \right] I \cos(\Omega_p t_0), \quad (3.31)$$

onde

$$I = \int_0^{mT_p} \cos(at) \cos(bt) \cos(ct) dt = 0 \quad (3.32)$$

$$a = \Omega_p, \quad b = (2l+1) \frac{n}{m} \Omega_p, \quad c = (2p) \frac{n}{m} \Omega_p.$$

A integral I da expressão (3.32) acima vale

$$I = \frac{1}{4} \left\{ \frac{\sin[(a-b-c)t]}{(a-b-c)} + \frac{\sin[(a+b-c)t]}{(a+b-c)} + \frac{\sin[(a-b+c)t]}{(a-b+c)} + \frac{\sin[(a+b+c)t]}{(a+b+c)} \right\} \Big|_0^{mT_p = m2\pi\Omega_p},$$

que se anula EXCETO se

- $a = b + c$ ou, equivalentemente, $2p = m - (2l + 1)$, válido para $0 \leq l \leq \frac{1}{2}(m-3)$;
- $c = a + b$ ou, equivalentemente, $2p = (2l + 1) - m$, válido para $\frac{1}{2}(m+1) \leq l \leq 0$;
- $b = a + c$ ou, equivalentemente, $2p = (2l + 1) + m$, válido para $0 \leq l \leq \infty$;

onde usamos $1 \leq p < \infty$. Note que para que as condições acima possam ser satisfeitas, m deve ser ímpar. Se $a = b + c$, a integral (3.32) vale

$$I = \frac{1}{4} \left[t + \frac{\sin(2bt)}{2b} + \frac{\sin(2ct)}{2c} + \frac{\sin[2(b+c)t]}{2(b+c)} \right] \Big|_0^{mT_p} = \frac{t}{4} \Big|_0^{4K(k)} = K(k),$$

e procedendo de maneira análoga para os outros casos, temos

$$I = K(k) \left[\delta \left(p, \frac{m - (2l + 1)}{2} \right) + \delta \left(p, \frac{(2l + 1) - m}{2} \right) + \delta \left(p, \frac{(2l + 1) + m}{2} \right) \right]$$

onde devemos levar em conta os devidos limites de validade de cada função δ . Substituindo este resultado em (3.31), ficamos com

$$I_3^{ii} = -\frac{\pi^3}{k^3 K^2(k)} S \cos(\Omega_p t_0), \quad m \text{ ímpar} \quad (3.33)$$

onde S é a soma dada por

$$S = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_+(l)}{2} \operatorname{csch} \left[\frac{a_+(l)}{m} \Omega_p K'(k) \right] + \operatorname{sech} \left[\frac{b(l)}{m} \Omega_p K'(k) \right] + \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq \frac{m-1}{2}}}^{\infty} \frac{a_-(l)}{2} \operatorname{csch} \left[\frac{a_-(l)}{m} \Omega_p K'(k) \right] \operatorname{sech} \left[\frac{b(l)}{m} \Omega_p K'(k) \right],$$

com $a_+(l) = 2l + 1 + m$, $a_-(l) = 2l + 1 - m$ e $b(l) = 2l + 1$. Das expressões (3.30) e (3.33) temos

$$I_3 = \frac{\pi}{k^3} \left\{ 2 \left[1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right] \operatorname{sech}(\Omega_p K'(k)) - \frac{\pi^2 S}{K^2(k)} \right\} \cos(\Omega_p t_0) \quad m \text{ ímpar} \quad (3.34)$$

Por fim, para calcularmos a expressão I_4 , usamos a tabela de integrais em [63], de onde temos a integral indefinida

$$\int \operatorname{cn}^2(t, k) dt = \frac{1}{k^2} [E(t, k) - k'^2 t]$$

onde $k'^2 = 1 - k^2$ é o módulo complementar. Desta maneira, usando $E(0, k) = 0$, $E(4K, k) = 4E(k)$ e a condição de ressonância (3.15), temos

$$I_4 = \frac{4}{k^2} [E(k) - k'^2 K(k)] \quad (3.35)$$

Substituindo as expressões (3.27), (3.29), (3.34) e (3.35) na integral de Melnikov (3.22), temos:

(i) se $n = 1$ e m é par, então $I_2 = I_3 = 0$, e

$$M^m(t_0) = 4\pi P \cos \phi \operatorname{csch}(\Omega_p K'(k)) \sin(\Omega_p t_0) - 16\beta[E(k) - k'^2 K(k)]; \quad (3.36)$$

(ii) se $n = 1$, e m é ímpar, então $I_1 = 0$ e

$$M^m(t_0) = 4\pi P \sin \phi \left\{ \frac{\pi^2 S}{K^2(k)} - 2 \left[1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right] \operatorname{sech}(\Omega_p K'(k)) \right\} \cos(\Omega_p t_0) - 16\beta[E(k) - k'^2 K(k)]. \quad (3.37)$$

Fazendo $\phi = 0$, temos $I_2 = I_3 = 0$, e obtemos apenas a expressão (3.38). Neste caso, nada se pode afirmar a respeito da existência de órbitas subharmônicas ímpares. Este resultado está de acordo com o obtido por Koch e Leven em [21]. Entretanto, com a quebra de simetria da equação do movimento no caso inclinado, temos a expressão (3.38) para m par, e (3.39) para m ímpar, o que indica que devemos esperar todo o espectro de ressonâncias primárias no espaço de parâmetros neste caso. Podemos determinar a curva onde temos os mínimos valores de P a partir dos quais há ocorrência de uma órbita subharmônica de período mT_p no espaço de parâmetros como

$$P > R_{osc}^m(\Omega_p)$$

onde

$$R_{par}^m(\Omega_p) = \frac{4}{\pi \cos \phi \Omega_p^2} [E(k) - k'^2 K(k)] \sinh(\Omega_p K'(k)), \quad (3.38)$$

se m é par, e

$$R_{impar}^m(\Omega_p) = \frac{4\beta[E(k) - k'^2 K(k)]}{\pi \sin \phi \left\{ \left[\frac{2E(k)}{K(k)} - 1 \right] \operatorname{sech}(\Omega_p K'(k)) + \frac{\pi^2 S}{K^2(k)} \right\}}, \quad (3.39)$$

onde, novamente

$$S = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_+(l)}{2} \operatorname{csch} \left[\frac{a_+(l)}{m} \Omega_p K'(k) \right] \operatorname{sech} \left[\frac{b(l)}{m} \Omega_p K'(k) \right] + \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq \frac{m-1}{2}}}^{\infty} \frac{a_-(l)}{2} \operatorname{csch} \left[\frac{a_-(l)}{m} \Omega_p K'(k) \right] \operatorname{sech} \left[\frac{b(l)}{m} \Omega_p K'(k) \right],$$

com $a_+(l) = 2l + 1 + m$, $a_-(l) = 2l + 1 - m$ e $b(l) = 2l + 1$, se m é ímpar.

A comparação entre os loci das bifurcações do tipo sela-nó onde nascem os atratores P3 e P4 obtidos numericamente através de continuação numérica [8] (ver Figura 3.6) com os previstos pelo método de Melnikov para ocorrência de órbitas subharmônicas pode ser vista na Figura 3.14. As linhas cheias azuis correspondem às linhas SN3 e SN4 da Figura 3.6, e as linhas formadas por círculos magenta representam as curvas R_{impar}^3 e R_{par}^4 determinadas por (3.39) e (3.38), respectivamente. Observa-se que os resultados concordam muito bem para $P < 0.5$, o que é esperado já que o método de Melnikov é um método perturbativo.

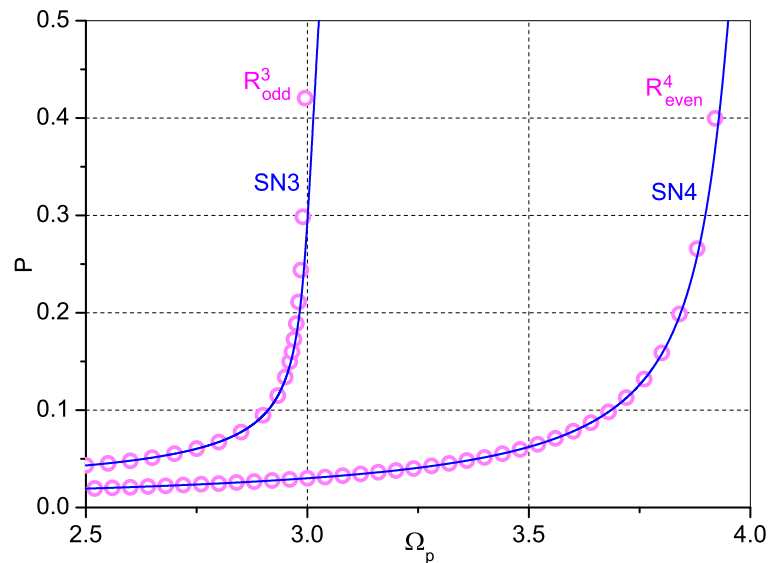


Figura 3.14: Loci das bifurcações do tipo sela-nó onde nascem os atratores P3 e P4 obtidos numericamente através de continuação numérica [8] (linhas cheias azuis, denotadas por SN3 e SN4) e através do método de Melnikov (linhas formadas por círculos magenta, denotadas por R_{impar}^3 e R_{par}^4). Os resultados concordam muito bem para valores pequenos de P ($P < 0.5$).

Vemos assim que no caso inclinado a ocorrência de oscilações ímpares é esperada. Além disso, note que as integrais I_2 e I_3 , que dão origem à expressão para o *threshold* para a ocorrência de oscilações pares, são aquelas cujos integrandos se devem ao torque extra que surge ao quebrarmos a simetria do sistema.

A não existência de uma condição de Melnikov que garanta a ocorrência de oscilações ímpares no caso vertical não implica a sua não ocorrência. Entretanto, temos aqui evidências de que, para este sistema, a sua não existência possivelmente trás alguma informação a respeito das bacias de atração dessas soluções. Este fato deverá ser explorado brevemente em um trabalho futuro.

Capítulo 4

Problema de Kepler anisotrópico

“We have the capacity to receive messages from the stars and the songs of the night winds.”

– Ruth St. Denis

O problema de Kepler descreve o movimento de dois corpos sujeitos à ação gravitacional mútua e é um exemplo clássico de um sistema (super) integrável em Mecânica Clássica. O sistema pode ser reduzido ao problema de um único corpo fixando-se o centro de massa. Neste caso as equações do movimento são escritas em termos da massa reduzida e da coordenada relativa entre os dois corpos. Para os propósitos gerais da astronomia e da astrofísica, podemos considerar que um dos corpos possui massa bem menor que o outro (chamado de “corpo de teste”), de maneira que a massa reduzida e a coordenada relativa são a massa e a posição do corpo de teste em relação ao corpo que gera o campo gravitacional. A solução analítica para a trajetória do corpo de teste é uma cônica cuja excentricidade, dada por

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}, \quad (4.1)$$

depende do valor da energia total do sistema, E . Na expressão acima, m é a massa do corpo de teste, L é o momento angular do sistema e k é uma constante proporcional à constante de gravitação universal. Note que a órbita é hiperbólica (aberta) se $E > 0$, e elíptica e periódica se $E < 0$. A separatriz entre os dois tipos

de movimento, aberto e periódico, é a órbita parabólica, correspondente a $E = 0$. No caso em que a órbita é periódica, além da energia, posição do centro de massa, momento linear total e momento angular total, temos ainda a conservação do vetor de Laplace-Runge-Lenz, que garante a não precessão da solução [54]. Para mais detalhes, veja o Apêndice A.1. É interessante observar que isso não ocorre no contexto da Relatividade Geral [70], de maneira que uma solução simples como essa pode ser considerada decisiva diante da observação da precessão do periélio de Mercúrio. Para ser mais preciso, cálculos clássicos perturbativos preveem uma precessão do periélio de Mercúrio devido a interação gravitacional com outros planetas [71], mas o valor previsto pela Relatividade Geral é o que concorda com o valor observado, de $43''$ por século.

Em situações mais realísticas, não devemos esperar que a densidade do corpo que gera o campo gravitacional seja constante, mas sim que sua distribuição de massa apresente inhomogeneidades. Uma forma de tratar este problema é considerar a aproximação de campo fraco, em que os desvios em relação à distribuição de massa homogênea podem ser descritos através de expansão multipolar. Sabemos que se acrescentarmos momento de dipolo a esta massa, o problema continua sendo integrável [36–38], de maneira que a correção considerada mais simples que pode levar ao surgimento de trajetórias caóticas é o termo de quadrupolo. O potencial corrigido com o termo quadrupolar é dado por [39]

$$U(r, z) = -\frac{\alpha}{\sqrt{r^2 + z^2}} - \frac{q}{2} \frac{2z^2 - r^2}{(r^2 + z^2)^{5/2}}, \quad (4.2)$$

onde α e q representam a intensidade do monopolo e do quadrupolo, respectivamente. Dois casos qualitativamente distintos podem ser classificados: perturbação oblata, se $q < 0$, como na Figura 4.1a, ou prolata, se $q > 0$ como na Figura 4.1b (distribuição do tipo cigarro).

Segundo simulações numéricas em [39], no caso prolato ($q > 0$) o sistema apresentaria órbitas caóticas, enquanto no caso oblato ($q < 0$) as trajetórias seriam integráveis. Já em [44], o caso oblato também apresentaria órbitas caóticas. Neste trabalho, usando a técnica da integral de Melnikov, mostramos que o sistema apresenta órbitas caóticas independentemente do valor de q .

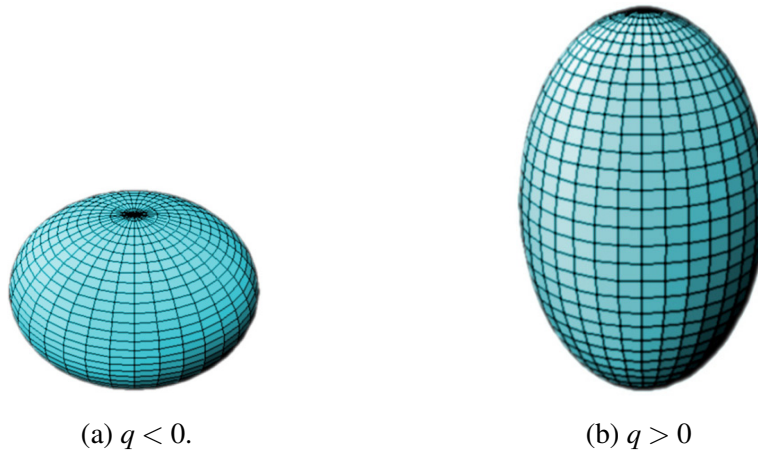


Figura 4.1: Distribuição de massa anisotrópica com correção quadrupolar do tipo: (a) oblata; (b) prolata.

4.1 Problema de Kepler revisitado

Considere o problema de 2 corpos, de massas m_1 e m_2 e vetores posição \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 , respectivamente. Podemos passar para o referencial do centro de massa do sistema sem nenhuma perda de generalidade para a solução. Seja $M = m_1 + m_2$ a massa total do sistema e

$$\mathbb{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{M}$$

a posição do centro de massa. De acordo com a 3ª lei de Newton temos $\ddot{\mathbb{R}} = 0$, ou seja, o centro de massa se desloca com velocidade constante, sendo este portanto um referencial inercial. Sejam também o vetor da posição relativa e a massa reduzida

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}.$$

As equações do movimento podem ser reescritas como

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \frac{Gm_1 m_2}{|\mathbf{r}|^2} \hat{\mathbf{r}},$$

ou seja, o problema se torna equivalente ao problema de um único corpo de massa μ e vetor posição \mathbf{r} sujeito à força central $\mathbb{F} = f(r)\hat{\mathbf{r}}$, com $f(r) = -\frac{k}{r^2}$. Podemos

determinar \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 fazendo

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1(t) &= \mathbb{R}(t) + \frac{m_2}{M} \mathbf{r}(t) \\ \mathbf{r}_2(t) &= \mathbb{R}(t) - \frac{m_1}{M} \mathbf{r}(t)\end{aligned}$$

Vamos então para o referencial do centro de massa. A Lagrangiana de um sistema dinâmico, formado por 1 único corpo, em coordenadas polares, é

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - V(r).$$

Como ϕ é uma coordenada cíclica (resultado válido no caso geral de forças centrais), da equação de Euler-Lagrange para esta variável temos que o momento canônico conjugado a ela se conserva, ou seja,

$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi} \equiv L, \quad (4.3)$$

onde L é o módulo do momento angular total do sistema. A conservação do momento angular garante que o movimento se dá no plano definido por $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Agora note que a área dA varrida quando o corpo realiza um deslocamento angular $d\phi$ é dada por $dA = \frac{1}{2}r(rd\phi)$, e de (4.3) temos

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\phi} = \text{constante},$$

que é a *Lei das Áreas* de Kepler. Além disso, da equação de Euler-Lagrange para a variável r , usando a expressão (4.3) temos

$$m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} = -\frac{\partial V}{\partial r}. \quad (4.4)$$

Como o sistema é autônomo, temos garantida também a conservação da energia, ou seja,

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + V(r) = \text{constante}. \quad (4.5)$$

Reescrevendo (4.5) encontramos uma expressão para \dot{r} . Mas como estamos inte-

ressados em determinar a forma da órbita que é solução para o problema, vamos usar (4.3) para obter a dependência entre dr e $d\varphi$, e assim

$$d\varphi = \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2m}{L^2}(E - V) - \frac{1}{r^2}}}.$$

Integrando ambos os lados e aplicando a mudança de variáveis $u = \frac{1}{r}$ temos

$$\varphi = \varphi_0 - \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{2mku}{L^2} - u^2}},$$

e usando [72],

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \arccos \left(-\frac{\beta + 2\gamma x}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} \right)$$

com $\alpha = \frac{2mE}{L^2}$, $\beta = \frac{2mk}{L^2}$ e $\gamma = -1$ obtemos uma expressão para φ como função de u . Invertendo e voltando para a variável r temos

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{L^2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}} \cos(\varphi - \varphi_0) \right]. \quad (4.6)$$

Comparando com a expressão geral para uma cônica com um dos focos na origem [73], vemos que a solução para o problema de Kepler é uma cônica cuja excentricidade é dada por

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}. \quad (4.7)$$

Este resultado é conhecido como a *Lei das Órbitas de Kepler*. Note que se

$$\begin{cases} \varepsilon = 0, & \text{a solução é uma circunferência,} \\ 0 < \varepsilon < 1, & \text{a solução é uma elipse,} \\ \varepsilon = 1, & \text{a solução é uma parábola,} \\ \varepsilon > 1, & \text{a solução é uma hipérbole,} \end{cases}$$

de maneira que a órbita é aberta se $E > 0$ e periódica se $E < 0$. A órbita parabólica é a separatriz entre esses dois tipos de movimento no espaço de fase.

4.2 Método de Melnikov

Nesta seção, aplicamos o método de Melnikov generalizado para o caso em que órbita que faz o papel da órbita homoclínica é uma órbita aberta (ver Seção 2.3.3). Vimos que no caso do problema de Kepler, a órbita “homoclínica” é uma parábola, correspondendo ao ponto crítico $r = \infty$, $\dot{r} = 0$ do potencial. A nossa Hamiltoniana total, com o potencial corrigido dado por (4.2), fica

$$H = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + \dot{z}^2) + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} - q \frac{2z^2 - r^2}{2(r^2 + z^2)^{5/2}}. \quad (4.8)$$

onde L é o momento angular total do sistema. Fazendo $L = 0$, o nosso resultado reproduz o caso particular $\beta = 3$ da análise mais geral para perturbações anisotrópicas realizada em [36]. Façamos uma mudança de coordenadas,

$$\begin{aligned} r &= R \cos \theta, \\ z &= R \sin \theta. \end{aligned} \quad (4.9)$$

de maneira que a Hamiltoniana do sistema pode ser reescrita como

$$H = H_0 + qW_1(R) + qW_2(R, \theta),$$

onde H_0 é a Hamiltoniana não perturbada ($q = 0$) e W_1 e W_2 são os termos perturbativos. Temos

$$H_0 = \frac{1}{2} \left(p_R^2 + \frac{p_\theta^2}{R^2} \right) + \frac{L_z^2}{2R^2 \cos^2 \theta} - \frac{\alpha}{R}, \quad (4.10)$$

com $p = \dot{R}$ e $p_\theta = R^2 \dot{\theta}$. É importante observar que a Hamiltoniana (4.10) é integrável, pois termos do tipo $f(\theta)/r^2$ preservam a conservação da energia do sistema [36]. Concluimos daí que correções vindas do termo de dipolo também

mantém a integrabilidade do sistema. Já os termos perturbativos ficam

$$-\frac{q}{R^3} + \frac{3q \cos^2 \theta}{2R^3} \equiv qW_1(R) + qW_2(R, \theta). \quad (4.11)$$

Para aplicar o método de Melnikov, precisamos saber quais são as grandezas conservadas no nosso caso integrável. Sejam então

$$H_0 = \frac{\dot{R}^2}{2} + \frac{G^2}{2R^2} - \frac{1}{R}, \quad (4.12a)$$

$$G^2 = R^4 \dot{\theta}^2 + \frac{L^2}{\cos^2 \theta}. \quad (4.12b)$$

Temos $\{G^2, H_0\} = 0$, de maneira que G é o nosso “momento angular generalizado” (para $L = 0$, $G = p_\theta$). Além disso, obviamente $\{H_0, H_0\} = 0$. O próximo passo é encontrar o equivalente à órbita homoclínica $R(t)$ da nossa Hamiltoniana integrável (4.10). Para os nossos propósitos, não precisamos determinar $R = R(t)$, basta conhecermos a expressão para $R = R(\theta)$ e sua paridade. Das expressões (4.12), fazendo $H_0 = h$ e $G = g$, temos

$$\frac{dR}{\sqrt{2\left(h + \frac{1}{R}\right) - \frac{G^2}{R^2}}} = \pm dt, \quad (4.13a)$$

$$\frac{1}{R^2} \frac{dR}{\sqrt{2\left(h + \frac{1}{R}\right) - \frac{g}{R^2}}} = \frac{d\theta}{\sqrt{g^2 - \frac{L^2}{\cos^2 \theta}}}, \quad (4.13b)$$

onde, para a parábola, $h = 0$. Note que de (4.12), vemos que o valor mínimo de R para $H_0 = 0$ satisfaz $G^2 = 2R_{min}$. Integrando as expressões (4.13) ficamos com

$$\pm t = \frac{\sqrt{2}}{3} \left(R - \frac{R_{min}}{2} \right) \sqrt{R - R_{min}} + \text{const}, \quad (4.14a)$$

$$\frac{1}{4A} \ln \left| \frac{A + \sin \theta}{A - \sin \theta} \right| + \text{const} = \arctan \sqrt{\frac{R}{R_{min}} - 1}. \quad (4.14b)$$

onde $A = \sqrt{1 - \frac{L^2}{G^2}}$. De (4.12), vemos que $0 < A \leq 1$. Ajustando a constante em (4.14b) de tal forma que $R = R_{min}$ para $\theta = 0$, encontramos a seguinte expressão

para $R(\theta)$

$$R(\theta) = R_{min} \sec^2 \left[\frac{1}{4A} \ln \left| \frac{A + \sin \theta}{A - \sin \theta} \right| \right]. \quad (4.15)$$

De (4.15), fica claro que $R(\theta)$ é uma função par, e que a órbita parabólica pode ser parametrizada com $-\theta^* < \theta < \theta^*$, onde $R(\theta^*) = \infty$, o que nos leva a

$$\sin \theta^* = A \tanh A\pi. \quad (4.16)$$

As condições de Melnikov para detectar a integrabilidade de um sistema Hamiltoniano como (4.8), correspondem à existência de zeros simples das quantidades [45]

$$M_1(\theta_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \{H_0, W_2\} dt, \quad M_2(\theta_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \{G, W_2\} dt, \quad (4.17)$$

onde as integrais são avaliadas sobre a variedade de energia zero. Para cada valor de A , esta é uma variedade bi-dimensional parametrizada por $R = \mathcal{R}(t - t_0)$ e $\vartheta = \Theta(t - t_0) + \theta_0$, com t_0 e θ_0 arbitrários. Para M_1 temos:

$$M_1(\theta_0) = - \int_{-\infty}^{\infty} \left[\dot{\mathcal{R}} \frac{\partial W_2}{\partial R} + \dot{\Theta} \frac{\partial W_2}{\partial \theta} \right] dt = -W_2 \Big|_{t=-\infty}^{t=\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial W_2}{\partial t} dt = 0,$$

e para M_2 ficamos com

$$M_2(\theta_0) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial W_2}{\partial \theta} \frac{\partial G}{\partial p_\theta} dt, \quad (4.18)$$

onde

$$\frac{\partial W_2}{\partial \theta} = \frac{3 \sin(2\vartheta)}{2 \mathcal{R}^3}, \quad \frac{\partial G}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{G} = \frac{\mathcal{R}^2 \dot{\Theta}}{G} \quad (4.19)$$

Substituindo as expressões (4.19) em (4.18), temos

$$\begin{aligned} M_2(\theta_0) &= \frac{3}{2g} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin[2(\Theta + \theta_0)]}{\mathcal{R}} \dot{\Theta} dt \\ &\equiv \frac{3}{2g} [I_1 \cos(2\theta_0) + I_2 \sin(2\theta_0)], \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde, mudando a variável de integração, temos

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\Theta}{\mathcal{R}} \dot{\Theta} dt, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2\Theta}{\mathcal{R}} \dot{\Theta} dt. \quad (4.21)$$

Note que $I_1 = 0$, uma vez que a função $R(\theta)$ é par. Finalmente, temos que a contribuição não nula para a integral de Melnikov (4.20) vem da integral I_2 , dada por

$$I_2 = \frac{1}{R_{\min}} \int_{-\theta^*}^{\theta^*} \cos(2\theta) \cos^2 \left[\frac{1}{4A} \ln \left| \frac{A + \sin \theta}{A - \sin \theta} \right| \right] d\theta, \quad (4.22)$$

onde θ^* é dado por (4.16). É suficiente mostrar que $I_2 \neq 0$ para algum valor de A para concluir que $M_2(\theta_0)$ dado por (4.20) possui uma quantidade infinita de zeros simples, o que implicaria que o movimento é de fato caótico, independentemente do valor de q . A Figura 4.2 mostra o resultado da integração numérica de (4.22) como função do parâmetro A , e podemos verificar que $I_2 \neq 0$ para $0 < A < 1$.

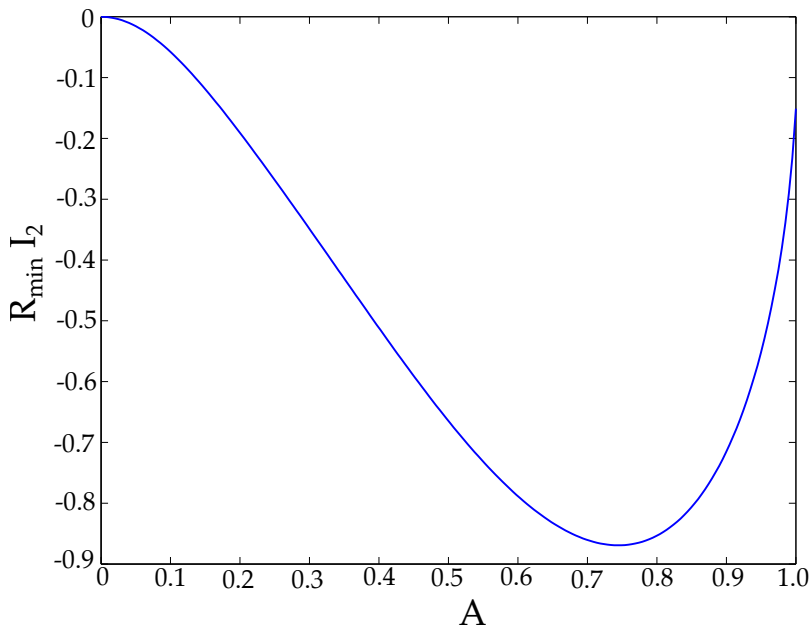


Figura 4.2: A integral (4.22) em função de A .

Usando o método da integral de Melnikov adaptado para órbitas parabólicas

[45], nós provamos que o fluxo Hamiltoniano na variedade de energia zero do problema de Kepler perturbado com correções do tipo quadrupolo, é de fato caótico, independente da perturbação ser do tipo oblata ou prolata. Desta maneira, nós resolvemos o conflito entre os resultados numéricos apresentados em [39] e [44]. É importante ressaltar que $I_2 = 0$ apenas para $A = 0$ e $A = 1$, sendo o último o correspondente ao caso $L_z = 0$ e, portanto, $\beta = 3$, considerado em [36].

Capítulo 5

Comentários finais

“The best routes are the ones you haven’t ridden. You could pedal the same loops year after year. Many people do, literally or figuratively. But to grow, you need new rides. Risks. Turn down lanes you’ve long seen but never traveled. Get lost once or twice, then double back to where you started and try again. Live like this and you come to see unknown territory not as threatening, but as intriguing.”

– Mark Remy.

Neste trabalho, estudamos o efeito de pequenas perturbações em sistemas que são exemplos de integrabilidade em Mecânica Clássica: o pêndulo simples e o problema de Kepler. No pêndulo simples, estudamos o caso em que o pivô é parametricamente excitado ao longo de uma direção inclinada de um ângulo $\phi = \pi/8$ em relação à vertical. No problema de Kepler anisotrópico, consideramos o caso em que a massa do corpo que gera o campo gravitacional é assimétrica, apresentando momento de quadrupolo. Utilizamos para isso os métodos de Melnikov, que são ferramentas de teoria de perturbações que fornecem critérios analíticos para a ocorrência de caos homoclínico e a persistência de órbitas subharmônicas ao perturbarmos sistemas dinâmicos inicialmente integráveis.

Para o pêndulo simples parametricamente excitado, nós buscamos sempre comparar o comportamento do sistema no caso não simétrico, em que o pivô oscila ao longo da direção inclinada, com o caso simétrico, em que este oscila ao longo da direção vertical, determinando assim o que muda com a quebra de

simetria do sistema. Nós primeiramente calculamos o critério para a ocorrência de caos homoclínico no sistema e mostramos que, assim como no caso vertical, os efeitos devido às intersecções transversais entre as variedades estável e instável associadas ao ponto de sela $(\pm\pi, 0)$ dificilmente podem ser observados, já que muito próximo ao locus das bifurcações homoclínicas de Melnikov, estão os loci das bifurcações sela-nó em que surgem os atratores de rotação, e a partir de então outras bifurcações globais passam a ser determinantes na mudança de comportamento do sistema. Além disso nós observamos, através de simulações numéricas, que no caso vertical, o espaço de parâmetros apresenta apenas ressonâncias pares, enquanto no caso inclinado, todo o espectro de ressonâncias está presente. Oscilações subharmônicas de período ímpar são raramente encontradas no caso vertical [31], o que justifica a surpresa ao encontrar ressonâncias ímpares para o pêndulo paramétrico inclinado, surgindo como efeito da quebra de simetria do sistema. Nós mostramos, através do método de Melnikov acerca da persistência de soluções subharmônicas, que no caso inclinado oscilações ímpares, assim como as pares, são, de fato, esperadas. No caso vertical, o método de Melnikov garante apenas a ocorrência de oscilações subharmônicas pares, nada se podendo afirmar a respeito das oscilações ímpares (já que se trata de uma condição suficiente, mas não necessária) [21]. Apesar então de termos evidências da ocorrência de oscilações ímpares para o pêndulo excitado na vertical [30, 32], ao que parece as bacias de atração dessas soluções não são contínuas neste caso. A questão que fica em aberto neste trabalho, é se a não existência de uma condição de Melnikov garantindo a ocorrência de uma determinada solução trás alguma informação a respeito da bacia de atração desta solução. Este tema deverá ser abordado em um trabalho futuro.

Para o problema de Kepler anisotrópico, calculamos o critério de Melnikov para a ocorrência de caos homoclínico para este sistema e mostramos que, independentemente do tipo da deformação que a perturbação apresenta, o sistema pode apresentar trajetórias caóticas. Resolvemos assim, uma inconsistência na literatura, já que em [39] os autores afirmavam, baseados em evidências numéricas, que apenas deformações prolatas poderiam provocar a ocorrência de caos no sistema, enquanto em [44] mostra-se que ambos os casos podem apresentar caos. Para um desenvolvimento futuro deste trabalho, pretendemos analisar a ocorrência de caos

homoclínico no modelo relativístico análogo a este para um estudo comparativo.

Apêndice A

Vetor de Laplace-Runge-Lenz

É interessante notar que o problema de Kepler é um exemplo de um problema *super integrável*. Além das 10 integrais primeiras necessárias para garantir a integrabilidade do sistema segundo Liouville [55], temos também a conservação do vetor de Laplace-Runge-Lenz, que garante a não precessão das órbitas periódicas [54]. Através de teoria de perturbações, é possível prever a precessão do periélio de Mercúrio devido principalmente a suas interações com outros planetas, porém o valor previsto não concorda com o valor medido [71]. A teoria da Relatividade Geral prevê uma precessão de 43'' por século [70], e o resultado previsto, somado aos demais efeitos, passa a concordar com o resultado observado experimentalmente. Desta maneira, a precessão do periélio de Mercúrio serve como um teste em favor desta teoria.

Neste Apêndice, mostramos a conservação do vetor de Laplace-Runge-Lenz no problema de Kepler, evidenciando o quão singular é este fato. Considere o caso geral de forças centrais, em que a força agindo sobre um corpo de teste é dada por $\mathbb{F} = f(r)\hat{r}$. Tomando o produto vetorial $\mathbb{p} \times \mathbb{L}$ temos

$$\mathbb{p} \times \mathbb{L} = \frac{mf(r)}{r} [\mathbb{r} \times (\mathbb{r} \times \dot{\mathbb{r}})] = \frac{mf(r)}{r} [\mathbb{r}(r\dot{r}) - r^2\dot{\mathbb{r}}]$$

onde usamos a identidade vetorial $\mathbb{a} \times (\mathbb{b} \times \mathbb{c}) = \mathbb{b}(\mathbb{a} \cdot \mathbb{c}) - \mathbb{c}(\mathbb{a} \cdot \mathbb{b})$. Usando que

forças centrais conservam momento angular, temos

$$\frac{d}{dt}(\mathbb{p} \times \mathbb{L}) = -mf(r)r^2 \left[\frac{\dot{r}}{r} - \frac{\dot{r}}{r^2}r \right] = -mf(r)r^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{r}{r} \right)$$

Veja que *somente* para o caso do problema de Kepler, em que $f(r) = -k/r^2$

$$-mf(r)r^2 = mk = \text{constante},$$

Assim, se definirmos

$$\mathbb{A} = \mathbb{p} \times \mathbb{L} - mk \frac{r}{r}, \quad (\text{A.1})$$

então de (A.1) temos

$$\frac{d\mathbb{A}}{dt} = 0. \quad (\text{A.2})$$

Note que

- $\mathbb{A} \cdot \mathbb{L} = 0 \therefore \mathbb{A}$ pertence ao plano do movimento.
- $\mathbb{A} \cdot r = A \cos \theta = L^2 - mkr$, se θ for o ângulo entre \mathbb{A} e r , de maneira que

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{L^2} \left(1 + \frac{A}{mk} \cos \theta \right), \quad (\text{A.3})$$

que é exatamente a solução (4.6) se tomarmos $A = mk\varepsilon$.

Assim concluímos que \mathbb{A} é um vetor no plano da órbita de módulo $mk\varepsilon$. Veja que a conservação do vetor de Laplace-Runge-Lenz implica a não precessão do periélio.

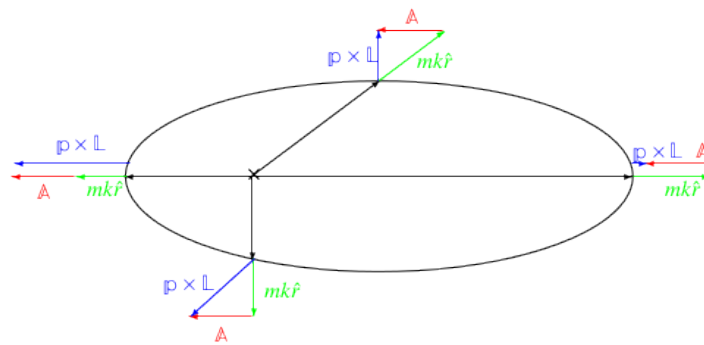


Figura A.1: Vetor de Laplace-Runge-Lenz para uma órbita elíptica, solução geral do problema de dois corpos, em quatro pontos distintos. A conservação deste vetor impede a precessão da órbita.

Referências Bibliográficas

- [1] W. Szemplińska-Stupnicka, E. T. & Zubrzycki, A. The global bifurcations that lead to transient tumbling chaos in a parametrically driven pendulum. *Int. J. Bifurcation Chaos* **10**, 2161–2175 (2000). URL <http://dx.doi.org/10.1142/S0218127400001365>.
- [2] Izhikevich, E. M. Equilibrium (2007). URL <http://www.scholarpedia.org/article/Equilibrium>.
- [3] Strogatz, S. H. *Nonlinear Dynamics and Chaos: with applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Studies in Nonlinearity (Westview Press, 2001), 1st ed.
- [4] Guckenheimer, J. & Holmes, P. *Nonlinear oscillations, Dynamical Systems, and bifurcations of vector fields*. Applied Mathematical Sciences (Springer-Verlag, 1983), 1st ed.
- [5] Wiggins, S. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Applied Mathematical Sciences (Springer, 2003), 2nd ed.
- [6] Delshams, A. & Ramirez-Ros, R. Poincaré-melnikov-arnold method for analytic planar maps. *Nonlinearity* **9**, 1–26 (1996). URL <http://iopscience.iop.org/0951-7715/9/1/001>.
- [7] Proto, V. *Estudo de estabilidade e bifurcações em sistemas não-lineares*. Tese de doutorado, Unesp.
- [8] Doedel, E. J. *et al.* Auto-07p: Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations. Relatório técnico (2007).

- [9] Stephenson, A. Xx. on induced instability. *Philosophical Magazine Series 6* **15**, 233–236 (1908).
- [10] H.J.T. Smith, J. B. Xx. on induced instability. *Am. J. Phys.* **60**, 909–911 (1992). URL <http://dx.doi.org/10.1119/1.17012>.
- [11] H.J.T. Smith, J. B. Multiple-nodding oscillations of a driven inverted pendulum. *D. J. Acheson* **448**, Proc. R. Soc. Lond. A (1995). URL <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1995.0005>.
- [12] Bishop, M. C. S. Inverted oscillations of a driven pendulum. *Proc. R. Soc. Lond. A* **454**, 2811–2817 (1998). URL <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1998.0282>.
- [13] Bishop, S. & Sudor, D. The 'not quite' inverted pendulum. *Int. J. Bifurcation Chaos* **9**, 273 (1999). URL <http://dx.doi.org/10.1142/S0218127499000158>.
- [14] Butikov, E. On the dynamics of stabilization of an inverted pendulum. *Am. J. Phys.* **68** (2001). URL <http://dx.doi.org/10.1119/1.1365403>.
- [15] Leven, R. & Koch, B. Chaotic behaviour of a parametrically excited damped pendulum. *Physics Letters A* **86**, 71–74 (1981). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375960181901675>.
- [16] B.P. Koch, B. P., R.W. Leven & Wilke, C. Experimental evidence for chaotic behaviour of a parametrically forced pendulum. *Physics Letters A* **96**, 219–224 (1983). URL [http://dx.doi.org/10.1016/0375-9601\(83\)90336-5](http://dx.doi.org/10.1016/0375-9601(83)90336-5).
- [17] R.W. Leven, C. W., B. Pompe & Koch, B. Experiments on periodic and chaotic motions of a parametrically forced pendulum. *Phys. D: Nonl. Phen.* **16**, 371–384 (1985). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167278985900156>.
- [18] Bishop, S. & Clifford, M. Zones of chaotic behaviour in the parametrically excited pendulum. *J. Sound Vib.* **189**, 142–147 (1996). URL <http://dx.doi.org/10.1006/jsvi.1996.0011>.

- [19] Butikov, E. Subharmonic resonances of the parametrically driven pendulum. *J. Phys. A: Math. Gen.* **35**, 6209 (2002). URL <http://dx.doi.org/10.1088/0305-4470/35/30/301>.
- [20] Verhulst, F. Perturbation analysis of parametric resonance. In Meyers, R. A. (editor) *Mathematics of Complexity and Dynamical Systems* (Springer, 2011).
- [21] Koch, B. & Leven, R. Subharmonic and homoclinic bifurcations in a parametrically forced pendulum. *Phys. D: Nonl. Phen.* **16**, 1–13 (1985). URL [http://dx.doi.org/10.1016/0167-2789\(85\)90082-X](http://dx.doi.org/10.1016/0167-2789(85)90082-X).
- [22] Clifford, M. & Bishop, S. Rotating periodic orbits of the parametrically excited pendulum. *Phys. Let. A* **201**, 191–196 (1995). URL [http://dx.doi.org/10.1016/0375-9601\(95\)00255-2](http://dx.doi.org/10.1016/0375-9601(95)00255-2).
- [23] S. Lenci, G. R., E. Pavlovskaia & Wiercigroch, M. Rotating solutions and stability of parametric pendulum by perturbation method. *J. Sound and Vibration* **310**, 243–259 (2008). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X0700630X>.
- [24] E. Pavlovskaia, M. W. S. L., B. Horton & Rega, G. Approximate rotational solutions of pendulum under combined vertical and horizontal excitation. *Int. J. Bifurcation Chaos* **22**, 1250100 (2012). URL <http://dx.doi.org/10.1142/S0218127412501003>.
- [25] Xu Xu, M. W. & Cartmell, M. P. Rotating orbits of a parametrically-excited pendulum. *Chaos, Solitons and Fractals* **23**, 1537–1548 (2005). URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.chaos.2004.06.053>.
- [26] Xu, X. *Nonlinear Dynamics of Parametric Pendulum for Wave Energy Extraction*. Tese de doutorado, University of Aberdeen.
- [27] Horton, B. W. & Wiercigroch, M. Effects of heave excitation on rotations of a pendulum for wave energy extraction. In *IUTAM Symposium on Fluid-Structure Interaction in Ocean Engineering*.

- [28] M. Wiercigroch, A. N. & Vaziri, V. Nonlinear dynamics of pendulums system for energy harvesting. In *The 10th International Conference on Vibration Problems*.
- [29] Bishop, S. & Clifford, M. The use of manifold tangencies to predict orbits, bifurcations and estimate escape in driven systems. *Chaos, Solitons and Fractals* **7**, 1537–1553 (1996). URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0960-0779\(96\)00023-9](http://dx.doi.org/10.1016/S0960-0779(96)00023-9).
- [30] A. Arneodo, C. T. A. L. J. M., P. Couillet & d'Humières, D. On the observation of an uncompleted cascade in a rayleigh-bénard experiment. *Phys. D: Nonl. Phen.* **6**, 385–392 (1983). URL [http://dx.doi.org/10.1016/0167-2789\(83\)90020-9](http://dx.doi.org/10.1016/0167-2789(83)90020-9).
- [31] Bryant, P. & Miles, J. On a periodically forced, weak damped pendulum. part 3: vertical forcing. *J. Austral. Math. Soc. Ser. B* **32**, 42–60 (1990). URL <http://dx.doi.org/10.1017/S0334270000008201>.
- [32] Clifford, M. & Bishop, S. Locating oscillatory orbits of the parametrically-excited pendulum. *J. Austral. Math. Soc. Ser. B* **37**, 309–319 (1996). URL http://journals.cambridge.org/article_S0334270000010687.
- [33] Sartorelli, J. & Lacarbonara, W. Parametric resonances in a base-excited double pendulum. *Nonlinear Dynamics* **69**, 1679–1692 (2012). URL <http://dx.doi.org/10.1007/s11071-012-0378-2>.
- [34] J. C. Sartorelli, B. S. & Lacarbonara, W. Parametric double pendulum. In *Sixth EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference, June 30 – July 4, Saint Petersburg, Russia* (2008).
- [35] Abraham, R. & Marsden, J. E. *Foundations of Mechanics* (Westview Press, 1994), 2nd ed.
- [36] F. Diacu, M. S., E. Pérez-Chavela. The kepler problem with anisotropic perturbations. *J. of Math. Phys.* **46**, 072701 (2005). URL <http://dx.doi.org/10.1063/1.1952580>.

- [37] Landau, L. D. & Lifshitz, E. M. *Mechanics*. Course of Theoretical Physics S (Butterworth-Heinemann, 1976), 3rd ed.
- [38] Vieira, W. & Letelier, P. On the integrability of halo dipoles in gravity. *Phys. Lett. A* **228**, 22–24 (1997). URL <http://dx.doi.org/10.1016/S0375-9601>.
- [39] Guéron, E. & Letelier, P. Chaotic motion around prolate deformed bodies. *Phys. Rev. E* **63**, 035201 (2001). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.63.035201>.
- [40] Boccalletti, D. & Pucacco, G. *Theory of Orbits. Volume 2: Perturbative and Geometrical Methods*. Astronomy and Astrophysics Library (Springer, 2002), corrected ed.
- [41] Saa, A. & Venegeroles, R. Chaos around the superposition of a black-hole and a thin disk. *Phys. Lett. A* **259**, 201–206 (1999). URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0375-9601\(99\)00447-8](http://dx.doi.org/10.1016/S0375-9601(99)00447-8).
- [42] Saa, A. Chaos around the superposition of a monopole and a thick disk. *Phys. Lett. A* **269**, 204–208 (2000). URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0375-9601\(00\)00256-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0375-9601(00)00256-5).
- [43] Saa, A. On the viability of local criteria for chaos. *Ann. Phys.* **314**, 508–516 (2004). URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.aop.2004.08.008>.
- [44] P.S. Letelier, J. R.-C. & López-Suspes, F. Chaotic motion in axially symmetric potentials with oblate quadrupole perturbations. *Phys. Lett. A* **375**, 3655–3658 (2011). URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.physleta.2011.08.050>.
- [45] Cicogna, G. & Santoprete, M. Mel’nikov method revisited. *Reg. Chaot. Dyn.* **6**, 377–387 (2001). URL <http://dx.doi.org/10.1070/RD2001v006n04ABEH000184>.
- [46] Wiggins, S. *Global Bifurcations and Chaos: Analytical Methods*. Applied Mathematical Sciences (Springer-Verlag, 1988).

- [47] Elmer, F. J. Stability and bifurcation (2007). URL <https://elmer.unibas.ch/pendulum/bif.htm>.
- [48] Gründler, J. The existence of homoclinic orbits and the method of mel'nikov for systems in \mathbb{R}^n . *SIAM J. Math. Anal.* **16**, 907–931 (1985). URL <http://dx.doi.org/10.1137/0516069>.
- [49] Marsden, J. E. Chaos in dynamical systems by the poincare-melnikov-arnold method. In Chandra, J. (editor) *Chaos in Nonlinear Dynamical Systems*, 19–31 (1984). URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1984cnads.proc...19M>.
- [50] Holmes, P. & Marsden, J. Horseshoes in perturbations of hamiltonian systems with two degrees of freedom. *Communications in Mathematical Physics* **82**, 523–544 (1982). URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF01961239>.
- [51] Holmes, P. & Marsden, J. Horseshoes and arnold diffusion for hamiltonian systems on lie groups. *Indiana Univ. Math. J.* **32**, 273–310 (1983). URL <http://dx.doi.org/10.1512/iumj.1983.32.32023>.
- [52] Lerman, L. & Umanskii, I. On the existence of separatrix loops in four-dimensional systems similar to the integrable hamiltonian systems. *J. App. Math. Mech.* **47**, 335–340 (1983). URL [http://dx.doi.org/10.1016/0021-8928\(83\)90059-X](http://dx.doi.org/10.1016/0021-8928(83)90059-X).
- [53] Robinson, C. Horseshoes for autonomous hamiltonian systems using the melnikov integral. *Ergod. Th. Dyn. Sys.* **8**, 395–409 (1988). URL <http://dx.doi.org/10.1017/S0143385700009500>.
- [54] Goldstein, H. *Classical Mechanics* (Addison-Wesley, 1980), 2nd ed.
- [55] Arnold, V. I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Graduate Texts in Mathematics (Springer, 1997), 2nd ed.
- [56] Cicogna, G. & Santoprete, M. An approach to mel'nikov theory in celestial mechanics. *J. Math. Phys.* **41**, 805–815 (2000). URL <http://dx.doi.org/10.1063/1.533163>.

- [57] Letelier, P. & Vieira, W. Chaos in black holes surrounded by gravitational waves. *Class. and Quantum Gravity* **14**, 1249–1257 (1997). URL <http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/14/5/026>.
- [58] Santoprete, M. & Cicogna, G. Chaos in black holes surrounded by electromagnetic fields. *Gen. Rel. and Grav.* **34**, 1107–1119 (2002). URL <http://dx.doi.org/10.1023/A:1016570106387>.
- [59] Vieira, W. & Letelier, P. On the integrability of halo dipoles in gravity. *Phys. Lett. A* **228**, 22–24 (1997). URL <http://dx.doi.org/10.1016/S0375-9601>.
- [60] Coddington, E. & Levinson, N. *Theory of ordinary differential equations*. Pure and Applied Mathematics (McGraw-Hill, 1955), 1st ed.
- [61] Kuznetsov, Y. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Applied Mathematical Sciences (Springer-Verlag New York, 2004), 3rd ed.
- [62] Govaerts, W. *Numerical Methods for Bifurcations of Dynamical Equilibria*. Applied Mathematical Sciences (Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987), 1st ed.
- [63] Byrd, P. F. & Friedman, M. D. *Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists* (Springer, 1954), 1st ed.
- [64] Richards, J. *Analysis of Periodically Time-Varying Systems*. Communications and Control Engineering (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1983), 1st ed.
- [65] Ruby, L. Applications of the mathieu equation. *Am. J. Phys.* **64**, 39–44 (1996). URL <http://scitation.aip.org/content/aapt/journal/ajp/64/1/10.1119/1.18290>.
- [66] Bryant, P. & Miles, J. On a periodically forced, weak damped pendulum. part 1: applied torque. *J. Austral. Math. Soc. Ser. B* **32**, 1–22 (1990). URL <http://dx.doi.org/10.1017/S0334270000008183>.

- [67] Bryant, P. & Miles, J. On a periodically forced, weak damped pendulum. part 2: horizontal forcing. *J. Austral. Math. Soc. Ser. B* **32**, 23–41 (1990). URL <http://dx.doi.org/10.1017/S0334270000008195>.
- [68] NIST Digital Library of Mathematical Functions. <http://dlmf.nist.gov/>, Release 1.0.9 of 2014-08-29. URL <http://dlmf.nist.gov/>. Online companion to [69].
- [69] F. W. J. Olver, R. F. B., D. W. Lozier & Clark, C. W. (editores) *NIST Handbook of Mathematical Functions* (Cambridge University Press, New York, NY, 2010). Print companion to [68].
- [70] Weinberg, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity* (John Wiley & Sons, 1972), 1st ed.
- [71] Clemence, G. The relativity effect in planetary motions. *Rev. Mod. Phys.* **19**, 361–364 (1947). URL <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.19.361>.
- [72] Gradshteyn, I. & Ryzhik, I. *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, 2007), 7th ed.
- [73] Camargo, I. & Boulos, P. *Geometria Analítica: um tratamento vetorial* (Pearson Education, 2005), 3rd ed.