ESTUDO DA INFLUÊNCIA DE LASERS NO APRISIONAMENTO DE PORTADORES, POR IMPUREZAS EM SEMICONDUTORES SUBMETIDOS A CAMPOS MAGNÈTICOS FORTES.

Antônio Boulhosa Nassar

Orientador: Prof. Dr. Luiz Carlos de M. Miranda

Tese apresentada ao Instituto de Física Gleb Wataghin da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Física.

JULHO/1980

RESUMO

Neste trabalho estudou-se a blindagem de impurezas carregadas em semicondutores, submetidos a campos magnéticos fortes uniformes e radiação laser, em baixas temperaturas, e sua influência no aprisionamento dos portadores, no limite ultra-quântico.

Verificou-se que a energia de ligação reduz-se drasticamente, quando a frequência do laser situa-se próxima da frequência ciclotrônica e aumenta enormemente quando próxima da frequência de plasma.

ABSTRACT

In this work the features of the screening of an ionized impurity is presented for semiconductors in the simultaneous presence of a laser field and a strong d.c. magnetic field at very low temperatures, taking into account these effects on the carriers freezeout in the ultra-quantum regime. It has been show specially that the carriers binding energy reduces abruptly when the laser is close to the cyclotron frequency and conversely diverges when is close to the plasma frequency.

"O mundo moderno, com seu fanatismo do progresso material, não desconhece o que deve ao trabalho dos homens de ciência. Nos países novos este fanatismo é levado ao auge e mesmo pessoas muito instruidas ignoram por completo que exista um ideal científico superior ao do homem que fabrica mil automóveis por dia ou do que opera uma apendicite em dez minutos. Daí a opinião quase unanimemente admitida entre nós: a ciência é útil porque dela precisam os engenheiros, os médicos, os industriais, os militares; mas não vale a pena fazê-la no Brasil porque é mais cômodo e mais barato importá-la na Europa, na quantidade que for estritamente suficiente para o nosso consumo. Tal a mentalidade dominante entre aqueles que nos educam e, por mais forte razão, entre aqueles que nos governam".

Amoroso Costa, "Pela Ciência Pura", maio de 1923.

- Ao Prof. Dr. Luiz Carlos Miranda, orientador da tese, pela sugestão do tema, pelo apoio, incentivo e contribuição valiosa à minha formação científica, e com quem foi um prazer trabalhar.
- Aos Profs. Drs. José Maria Bassalo e Paulo de Tarso Alencar, por suas amizades, constantes interesses, incentivo e encorajamento no decorrer destes anos. Meu respeito e admiração por tudo que têm feito pela formação e educação científica no Estado do Pará, e através dos quais dei os primeiros passos no aprendizado de física.
- Aos amigos Luiz Sérgio Cancela, Carlos Ferrari, Antônio Sampaio, Mário Tenan e Mirinã Lima pela boa vontade demonstrada quando recorria às suas opiniões e críticas relacionadas a este trabalho.
- Ao amigo Palmeira e ao amigo Carlos André Turcinelli pelo seu trabalho de xerografia.
- Enfim a todos os amigos paraenses pela solidariedade e camaradagem com que contei em todas as horas, contribuição vital e indelével para o início e conclusão deste trabalho.

Os efeitos de campos magnéticos fortes, sôbre as propriedades físicas de condução elétrica, em semicondutores extrínsecos, têm sido amplamente investigados, principalmente a partir de Yafet et al [1]*, onde foi apresentado uma teoria concernente ao efeito de tais campos, sôbre os níveis de energia e funções de onda de uma impureza, tipo hidrogenóide. Conclui-se, que a variação nos níveis de energia, de um estado de impureza, p. ex. , para o caso de um semicondutor dopado tipo n, se devia ao decréscimo do número de elétrons, na banda de condução, em presença de campos magnéticos fortes e em baixas temperaturas.*

Tentativas experimentais de observação deste efeito foram feitas por Amirkhanov et al [2]*, medindo a constante de Hall, em amostras de GaAs, dopado (tipo n), com concentração da ordem de* 10^{16} *cm*$^{-3}$*, temperatura de 4,2 K e campos magnéticos próximos a 80 kG. Concluiram, que o aumento bastante acentuado, na constante de Hall, sem dúvida, vinha do fato de que os elétrons de condução passavam a um estado de congelamento, quando da aplicação do campo. O valor crítico de tal campo, para o aparecimento do efeito, dependia da concentração da impureza doadora. Aumentando-se a concentração maior seria o valor do campo magnético para atingir o aprisionamento dos portadores às impurezas do semicondutor.*

Em suma, a diferença entre o nível de impureza doadora, no caso, e a banda de condução, aumenta com a introdução do campo magnético forte, daí a distribuição dos elétrons entre a banda de condução e os estados de impureza ficar alterada, até o completo congelamento (freeze out).

Na discussão do efeito Hall, é relevante um outro efeito galvanomagnético: magneto-resistência. Wallace [3] *afirma um efeito notório que, depois de um certo valor alto do campo magnético, p. ex., 80 kG para uma amostra de GaAs - n, a 2 K, concen-*

tração de 10^{16} cm^{-3}, a curva de magnetoresistência versus campo, que aumenta com segunda potência de sua intensidade, decresce rapidamente. Tal decréscimo foi atribuido ao efeito de blindagem , no potencial da impureza. Daí um modêlo teórico mais abrangente do que o de Yafet et al, deve ser elaborado considerando-se os efeitos de blindagem. Pois, por um lado o campo magnético aumenta a energia de ligação e por outro, a blindagem pelos elétrons de condução a faz diminuir

Dyakonov et al [4], Poehler [5] e Fenton/Haering[5] corroboram dizendo que se os níveis de impurezas estão suficientemente próximos à banda de condução, pode ocorrer a presença de um número consideravelmente grande de elétrons de condução, de maneira a se notar os efeitos de blindagem. E mais: para um valor qualquer do campo, nós podemos esperar que exista uma concentração crítica de elétrons de condução, tal que não haja mais estados ligados. Obviamente, esta concentração deve crescer se o campo for aumentado.

Como em exemplo elucidativo, consideremos um semicondutor dopado a 0 K. Neste caso, como em um metal, a blindagem dos potenciais dos íons de impurezas, por elétrons quase livres , é suficiente para impedir a ligação dos elétrons de condução a estas impurezas. Se um campo magnético é aplicado e continuamente aumentado a partir do zero, chegaremos a uma situação na qual a concentração dos elétrons de condução é a concentração crítica necessária, para impedir a ligação dos portadores àquelas impurezas. Um acréscimo infinitesimal no campo, além do valor crítico, introduz um estado ligado. Assim elétrons que tornaram-se ligados às impurezas, reduzem o número de portadores na banda de condução, que por consequência imediata aumentam a energia de ligação, devido à diminuição da blindagem.

O processo é regenerativo e em 0 K, o número de elétrons na banda de condução, como função do campo magnético varia descontinuamente. Isto então é uma transição de Mott, introduzida pelo aumento de campo. Se a temperatura não é 0 K, não ocorre mais descontinuidade no número de elétrons de condução, devido a excitação térmica manter alguns elétrons na banda de condução , em campos onde a energia de ligação é pequena. No entanto, uma variação bem acentuada na densidade dos portadores pode ser esperada em temperaturas finitas sob condições adequadas.

Assim, tendo-se em vista toda a discussão expositiva acima, a exemplo de Wallace [(3)] e Jog/Wallace [(7)], consideraremos os efeitos da blindagem, no potencial da impureza.

No Capítulo I nos dedicamos ao entendimento detalhado dos efeitos da blindagem sôbre o potencial da impureza, agora na presença simultânea de campos magnéticos fortes e radiação de laser - M. Lima et al [(12)]. Isto é feito resolvendo-se o problema quântico de um elétron submetido à ação de campos externos. Primeiramente supomos campo magnético estático e uniforme e radiação eletromagnética (laser), daí a forma explícita de como se reflete sobre a blindagem coulombiana - elétron-impureza, no semicondutor, a presença de um campo de laser, associado ou não a um campo magnético. Para tal usa-se formalismo caracterizado pelo uso de transformações unitárias associadas a translações espaciais e de momentum - Miranda [(17)]. A impureza interage com o meio através de um potencial fenomenológico, eliminando-se a dependência no campo eletromagnético do termo de energia cinética na Hamiltoniana transferindo-se para o termo da energia potencial aplicando-se ao vetor posição um deslocamento que é função do campo, assim os efeitos dos campos magnéticos e laser é feito em tratamento não perturbativo, i. e., sem aproximações.

No Capítulo II estudamos o problema de estados ligados a uma impureza isolada, no regime ultra-quântico, usando o potencial blindado coulombiano do Capitulo I - Jog/Wallace [(7)] e potencial blindado coulombiano do Capítulo I - Jog/Wallace [7] e Wallace [3]. A luz deste modêlo, que mostra ser tal potencial efetivo enormemente assimétrico, no regime ultra-quântico - pois enquanto o alcance do potencial na direção transversal, aos campos eletromagnéticos e magnéticos é comparavel ao raio ciclotrônico, o alcance do mesmo ao longo desta direção é pequeno comparado com as dimensões da função de onda - vamos em busca da expressão para a Energia de Ligação dos portadores, usando a aproximação δ (delta) para o potencial na direção dos campos magnéticos e radiação eletromagnética. No Apendice B tecemos algumas considerações específicas a respeito de tal aproximação.

Por fim, nos dois capítulos subsequentes 3 e 4, para alguns valores de campos magnéticos fortes verificamos a dependência da energia de ligação quanto à frequência do laser, para intensidades bem pequenas ou expressivamente intensas. Mostramos assim que quando a frequência do laser aproxima-se à frequência ciclotrônica há o colapso da interação ou quase nenhum aprisionamento dos portadores, de modo a encontrarmos a energia de ligação muito pequena - Capítulo III. E quando a frequência do laser tende a frequência de plasma encontramos o colapso da blindagem ou forte aprisionamento dos portadores, de maneira inversa, com energia de ligação muito alta - Capítulo IV. Restando salientar sempre que viu-se uma dependência primordial, quando nestas ressonâncias, à frequência do laser e não às intensidades de ambos os campos esternos atuantes, fato este bastante relevante.

No Capítulo V, então, fazemos um resumo geral dos principais resultados e procuramos situá-lo no contexto geral do campo de interação de radiação com matéria, matizando algumas de suas limitações, quanto ao modêlo teórico proposto, e destacando suas predições sôbre possíveis implicações tecnológicas.

POTENCIAL EFETIVO DA IMPUREZA DE CARGA ESTÁTICA

Capítulo I

I.1 - DESCRIÇÃO DO MODÊLO MATEMÁTICO

Primeiramente nos valeremos do método de Aproximação de Fase Aleatória (RPA) para o cálculo das propriedades dielétricas da blindagem das impurezas do nosso sistema. Método consagrado e largamente usado por Ehrenreich/Cohen [8], Zyryanov [9], Quinn/Rodrigues [10], Mermin/Canel [11], Harris [13], Wallace [3], Lima et al [12].

Em tal tratamento consideramos a interação coulombiana entre os elétrons como um campo auto-consistente ("Self Consistent field") [8], [9], [11], [13].

Em nossa função Hamiltoniana, que descreve o sistema, não levaremos em conta o termo de spin usual de Landau (Landau & Lifchitz [14]). Daí nossas considerações envolverem apenas a parte concernente as coordenadas de espaço e tempo. Nesta Hamiltoniana, faremos uma simplificação em nosso vetor potencial $A(\vec{x},t)$ do campo eletromagnético: substituiremos $A(\vec{x},t)$ por somente sua parte temporal $A(t)$, que é uma aproximação válida, devido as dimensões da região de interação serem bem menores do que o comprimento de onda da radiação eletromagnética. Conhecido como Aproximação Dipolar ("Dipole Approximation") (Seely [15], Miranda [16]).

Usaremos, ainda, para tal, a aproximação eletrostática sintetizada por Lima et al [12] e Mermin/Canel [11].

I.2 - FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Seja o campo magnético na direção do eixo z positivo. Desprezando a dependência espacial do campo eletromagnético do feixe do laser, o vetor potencial do laser e do campo magnético será então

$$\vec{A}(y,t) = \vec{A}(t) - H\,y\,\hat{e}_x \qquad (1)$$

onde

$$\vec{A}(t) = \frac{c\,E_0}{\omega_0} \left|\ \hat{e}_x \cos(\omega_0 t) + \hat{e}_y \operatorname{sen}(\omega_0 t)\ \right| \qquad (2)$$

sendo

H = corresponde a intensidade do campo magnético,

$\vec{A}(t)$ = representando o campo do feixe de laser, suposto ser uma onda plana, de polarização circular para a direita, paralelo ao eixo z, cuja frequência é ω_0 (Miranda [17] e Seely [15])

A equação de Schroedinger, dependente do tempo é:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{x},t) = \mathcal{H}\Psi(\vec{x},t) \qquad (3)$$

onde

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m^*} \left|\ \hat{p} - \frac{e}{c}\vec{A}(y,t)\right|^2 + e\Phi(\vec{x},t) \qquad (4)$$

ou

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m^*} \left|\ \hat{p} + \frac{e}{c} H_y\, \hat{e}_x - \frac{e}{c}\vec{A}(t)\right|^2 + e\Phi(\vec{x},t) \qquad (5)$$

cuja solução está desenvolvida no Apêndice A deste trabalho, e tem como resultado:

$$\Psi_\alpha(\vec{x},t) = U\Phi_\alpha(\vec{x},t) \qquad (6)$$

onde

$$U = \exp\left(i\frac{\vec{\delta}(t).\hat{p}}{\hbar}\right)\exp\left(i\frac{\vec{\zeta}(t).x}{\hbar}\right)\exp\left(-i\frac{\vec{\eta}(t)}{\hbar}\right) \qquad (7)$$

com

$$\vec{\delta}(t) = -\,r(t)\,\hat{e}_x + s(t)\,\hat{e}_y$$

$$\vec{\zeta}(t) = Q(t)\,\hat{e}_y$$

$$r(t) = \frac{1}{m}\int^t dt' \left|\ G(t') - \frac{e}{c}A_x(t')\ \right| \qquad (8)$$

$$s(t) = \frac{G(t)}{m\omega_c}$$

$$\eta(t) = \frac{1}{2m}\int dt'\left[\frac{e^2A^2(t')}{c^2} + Q^2(t') - \frac{2e}{c}Q(t')A_y(t') - G^2(t')\right]$$

$\Phi_\alpha(\vec{x},t)$ = corresponde a solução da equação de Schroedinger para um elétron, em um campo magnético uniforme sem nenhuma radiação presente e cujo índice inferior esta relacionado aos números quânticos de Landau (n, p_x, p_z). A saber

$$\Phi_\alpha(x,t) = \exp\left|-\frac{i}{\hbar}tE_\alpha\right| \exp\left|\frac{ip_x x + ip_z z}{\hbar}\right| \Phi_n(\xi) \qquad (9)$$

$$\Phi_n(\xi) = \left(2^n n|\pi^{1/2}l\right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) H_n(\xi) \; ; \qquad \xi = \frac{y-l^2p_x}{l}$$

$\omega_c = \frac{e\,H}{m^*c}$ corresponde a frequência ciclotrônica

m^* = massa efetiva do elétron ; $l^2 = \frac{\hbar}{m^*\omega_c}$ é o raio ciclotrônico; $H_n(\zeta)$ = função de Hermite e

$e\Phi(\vec{x},t)$ = potencial de interação referente a carga estática de de impureza.

As funções reais $Q(t)$ e $g(t)$ são determinadas por

$$G(t) \; \cdot \; Q(\cdot) = \frac{2\omega_c}{c}\int^t dt' \left|A_y(t') - iA_x(t')\right| \exp(i\omega_c(t-t'))| \qquad (10)$$

onde

$A_x(t)$ e $A_y(t)$ são as componentes de $\vec{A}(t)$.

Fisicamente, a equação (6) significa que fazendo translações de espaço e de momento, passamos da representação Ψ, que é dependente da radiação eletromagnética à representação Φ, independente de tal presença, especificamente relacionada ao laser. Tais modificações, baseadas em uma transformação canônica , referidas a U, transferem a dependência do campo de radiação, do primeiro termo da equação (5), para o termo que descreve a distribuição estática de carga, mais precisamente,

$$\mathcal{H} \Rightarrow \tilde{\mathcal{H}} = U^{+}\{-ih \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{H}\}\ U = \mathcal{H}_0 + e\phi(\vec{x}+\vec{\delta}(t)) \tag{11}$$

onde

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2m^*} \left| \hat{p} + \frac{eH}{c}\ y\ \hat{e}_x \right|^2$$

é o Hamiltoniano de Landau (Landau [18], Johnson/Lippmann [19]).

Em suma, na representação Φ, o nosso Hamiltoniano é aquele de um elétron num campo magnético uniforme movendo-se em em um potencial deslocado em $\vec{\delta}(t)$, ou melhor, $e\phi(\vec{x}+\vec{\delta}(t))$.

I.3 - TENSOR DIELÉTRICO

Partindo do nosso hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 \tag{12}$$

onde

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2m^*} \left| \vec{p} + \frac{eH}{c} y \hat{e}_x \right|^2 \tag{13}$$

e

$$\mathcal{H}_1 = e\phi(\vec{x}+\delta(t)), \tag{14}$$

sejam os autovetores $\xi_\alpha(\vec{x})$ as soluções da auto-equação

$$\mathcal{H}_0 \, \xi_\alpha(\vec{x}) = E_\alpha \, \xi_\alpha(\vec{x}) \tag{15}$$

onde vimos que

$$\xi_\alpha(\vec{x}) \equiv |\alpha> \equiv |n \; p_x \; p_z> =$$

$$= \exp \left[\frac{i \, p_x \, x + i \, p_z \, z}{\hbar} \right] \Phi_n(\xi) \tag{16}$$

dados na equação (9), e

$$E_\alpha = \hbar\omega_c \, (n + \frac{1}{2}) + \frac{\hbar \, p_z^2}{2m} \tag{17}$$

são os auto-valores de energia de $\mathcal{H}_0$. (Landau et Lifchitz[14]).

Expandindo $\phi(\vec{x}+\vec{\delta}(t))$ em uma série de Fourier, na maneira usual, temos

$$\phi(\vec{x}+\vec{\delta}(t)) = \sum_{\vec{q}} \phi(\vec{q} + \vec{\delta}(t)) \exp(i\vec{q}.\vec{x}) \tag{18}$$

e

$$\phi(\vec{q}+\vec{\delta}(t)) = \int \frac{d^3x}{V} \exp(-i\vec{q}.\vec{x}) \; \phi(\vec{x} + \vec{\delta}(t)) \tag{19}$$

daí vemos que, definindo

$$\phi(\vec{q},t) = \int \frac{d^3x}{V} \; \exp(-i\vec{q}.\vec{x}) \; \phi(\vec{x},t) \tag{20}$$

então

$$\Phi(\vec{q}+\vec{\delta}(t)) = \phi(\vec{q},t) \; \exp \; (i\vec{q}.\vec{\delta}(t)) \tag{21}$$

Simplificando a notação

$$\tilde{\phi}(\vec{q},t) \equiv \Phi(\vec{q} + \delta(t)) \tag{22}$$

No tratamento de "muitos corpos" (elétrons) é conveniente fazermos o uso do formalismo da segunda quantização, na representação das coordenadas. (Ehrenreich/Cohen [8]; Zyryanov [9]; Quinn/Rodrigues [10]; Stephen [20]; Harris [13]).

Desenvolvendo a solução $\Phi(\vec{x},t)$ em séries de auto-funções de $\mathcal{H}_0$ temos:

$$\Phi(\vec{x},t) = \sum_{\alpha} C_{\alpha}(t)\ \xi_{\alpha}(\vec{x}) \tag{23}$$

onde interpretamos C_{α} e C_{α}^{+} como, respectivamente, os operadores de destruição e criação de partículas no estado $|\alpha\rangle$.

Nossa hamiltoniana, por sua vez, em segunda quantização será:

$$H = \int d^3x\ \ \Phi^{+}(\vec{x},t)\ \mathcal{H}\ \Phi(\vec{x},t) = H_0 + H_1 \tag{24}$$

onde

$$H_0 = \int d^3x\ \ \Phi^{+}(\vec{x},t)\ \mathcal{H}_0\ \Phi(\vec{x},t) \tag{25}$$

$$= \sum_{\beta\alpha}\int E_{\alpha}\ C_{\beta}^{+}\ C_{\alpha}\ \xi_{\beta}^{*}(\vec{x})\ \xi_{\alpha}(\vec{x})\ d^3x \tag{26}$$

$$= \sum_{\beta\alpha} E_{\alpha}\ C_{\beta}^{+}\ C_{\alpha}\ \delta_{\beta\alpha} \tag{27}$$

$$H_0 = \sum_{\alpha} E_{\alpha}\ C_{\alpha}^{+}\ C_{\alpha} \tag{28}$$

Por sua vez

$$H_1 = e\int d^3x\ \Phi^{+}(\vec{x},t)\ \ |\phi(\vec{x}+\vec{\delta}(t))|\ \ \Phi(\vec{x},t) = \tag{29}$$

$$= e\sum_{\vec{q}}\int d^3x\ \Phi^{+}(\vec{x},t)\ \tilde{\phi}(\vec{q},t)\ exp(i\vec{q}.\vec{x})\ \Phi(\vec{x},t) =$$

$$= e\sum_{\vec{q},\beta,\alpha} \tilde{\phi}(\vec{q},t)\ C_{\beta}^{+}\ C_{\alpha}\int d^3x\ \xi_{\beta}^{*}(\vec{x})\ exp(i\vec{q}.\vec{x})\ \xi_{\alpha}(\vec{x})$$

$$H_1 = e\sum_{\vec{q},\beta,\alpha} \tilde{\phi}(\vec{q},t)\ \langle\beta|exp(i\vec{q}.\vec{x})|\alpha\rangle\ C_{\beta}^{+}\ C_{\alpha} \tag{30}$$

finalmente nossa hamiltoniana total será

$$H = \sum_{\alpha} E_{\alpha}\ C_{\alpha}^{+}\ C_{\alpha} - e\sum_{\vec{q},\beta,\alpha} \tilde{\phi}(\vec{q},t)\ \langle\beta|exp(i\vec{q}.\vec{x})|\alpha\rangle\ C_{\beta}^{+}\ C_{\alpha} \tag{31}$$

onde já vimos que

$E_{\alpha} = h\omega_c\ (n+\frac{1}{2}) + \dfrac{\hbar\ p_z^2}{2m^*}$ é a energia do elétron no estado de

Landau $|\alpha> = |n\ p_x\ p_z>$ e $<\beta|exp(iq.x)|\alpha>$ é a superposição entre as funções de onda de Landau.

Lembrando as relações usuais de comutação entre os operadores C^+_α e C_α (Harris[13]).

$$[C^+_\alpha, C^+_{\alpha'}]_+ = [C_\alpha, C_{\alpha'}]_+ = 0 \tag{32}$$

$$[C_\alpha, C^+_{\alpha'}]_+ = \delta_{\alpha\alpha'}$$

e mais: usando a equação de movimento de Heisenberg

$$\frac{\partial}{\partial t} C^+_{\alpha'} C_\alpha = \frac{i}{\hbar}\,[H, C^+_{\alpha'} C_\alpha]_- = \frac{i}{\hbar}\,[H_0, C^+_{\alpha'} C_\alpha]_- + \frac{i}{\hbar}\,[H, C^+_{\alpha'} C_\alpha]_- \tag{33}$$

O primeiro termo do segundo membro será, usando (28) e (32):

$$[H_0, C^+_{\alpha'} C_\alpha]_- = \sum_\beta E_\beta\ [C^+_\beta C_\beta, C^+_{\alpha'} C_\alpha]_- = \tag{34}$$

$$= \sum_\beta E_\beta\ (C^+_\beta\ [C_\beta, C^+_{\alpha'} C_\alpha]_- + [C^+_\beta, C^+_{\alpha'} C_\alpha]\ C_\beta) =$$

$$[H_0, C^+_{\alpha'} C_\alpha] = \sum_\beta E_\beta\ [\delta_{\beta\alpha'} C^+_{\alpha'} C_\alpha - \delta_{\alpha\beta} C^+_{\alpha'} C_\alpha] =$$

$$= (E_{\alpha'} - E_\alpha)\ C^+_{\alpha'} C_\alpha \tag{35}$$

De maneira análoga, podemos calcular:

$$[H_1, C^+_{\alpha'} C_\alpha] = -e \sum_{\vec{q},\beta} \{C^+_\beta C_\alpha \Phi(\vec{q},t)\ <\beta|exp(i\vec{q}.\vec{x})|\alpha'> +$$

$$+ C^+_{\alpha'} C_\beta\ \ \Phi(\vec{q},t)\ <\alpha|exp(i\vec{q}.\vec{x})|\beta>\} \tag{36}$$

de onde, então chegamos, usando (33), (35) e (36):

$$(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + E_{\alpha'} - E_\alpha) C^+_{\alpha'} C_\alpha = e \sum_{\vec{q},\beta} \{C^+_\beta C_\alpha \Phi_{\beta\alpha'}(\vec{q},t) +$$

$$+ C^+_{\alpha'} C_\beta \Phi_{\alpha\beta}(\vec{q},t)\} \tag{37}$$

onde usamos a simplificação de notação

$$\Phi_{\beta\alpha}(\vec{q},t) \equiv \Phi(\vec{q},t)\ <\beta|exp(i\vec{q}.\vec{x})|\alpha>$$

Definindo

$$F(\alpha',\alpha,t) = \sum_\gamma P_\gamma\ <\gamma|C^+_{\alpha'} C_\alpha|\gamma> \tag{38}$$

ou mesmo

$$F(\alpha',\alpha,t) \equiv \langle C^+_{\alpha'},C_\alpha\rangle$$

onde P_γ *é a probabilidade do sistema estar no estado* $|\gamma\rangle$ *e* $\langle C^+_{\alpha'},C_\alpha\rangle$ *a média quanto-mecânica do operador* $C^+_{\alpha'},C_\alpha$; *e tal média está intimamente relacionada à função destribuição clássica de Fermi (Harris* [21]*, Miranda* [17]*, Lima et al* [12]*).*

Assim, da equação (37):

$$i\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\,\langle C^+_{\alpha'},C_\alpha\rangle = (E_{\alpha'} - E_\alpha)\,\langle C^+_{\alpha'},C_\alpha\rangle + $$
$$+\,e\sum_{\vec{q}\,\beta}\,\{\langle C^+_\beta C_\alpha\rangle\,\tilde{\phi}_{\beta\alpha'}(\vec{q},t) + \langle C^+_{\alpha'},C_\beta\rangle\tilde{\phi}_{\alpha\beta}(\vec{q},t)\} \qquad (39)$$

Fazendo aproximações para pequenas oscilações em torno do ponto de equilíbrio, no qual a densidade de carga e o potencial se anulam, temos:

$$\langle C^+_{\alpha'},C_\alpha\rangle_t = \langle C^+_{\alpha'},C_\alpha\rangle_0\;\delta_{\alpha'\alpha} + \langle C^+_{\alpha'},C_\alpha\rangle_{1,t} \qquad (40)$$

onde

$$\langle C^+_{\alpha'},C_\alpha\rangle_0\;\delta_{\alpha'\alpha} \equiv F_0(\alpha)\;\delta_{\alpha'\alpha}$$

assim desde que $C^+_\alpha C_\alpha$ *é o operador de número de partícula no estado* $|\alpha\rangle$. $F_0(\alpha)$ *(em outra notação* f_α*) pode ser interpretado como o número médio de tais partículas, (do emsemble), no estado* $|\alpha\rangle$.

Então:

$$i\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\,\langle C^+_{\alpha'},C_\alpha\rangle_t = (E_\alpha - E_{\alpha'})\,\langle C^+_{\alpha'},C_\alpha\rangle_t + $$
$$-\,e\sum_q\,|f_{\alpha'} - f_\alpha|\;\tilde{\phi}_{\alpha\alpha'}(\vec{q},t) \qquad (41)$$

ou ainda

$$\{i\hbar\,\frac{\partial}{\partial t} + E_{\alpha'} - E_\alpha\}\,\langle C^+_{\alpha'},C_\alpha\rangle_t = -e(f_{\alpha'} - f_\alpha)\sum_q\,\tilde{\phi}_{\alpha\alpha'}(\vec{q},t) \qquad (42)$$

que por uma transformação de Fourier, levamos do domínio do tempo ao domínio das frequências (Mermin/Canel [11]*):*

$$\langle C^+_{\alpha'},C_\alpha\rangle_\omega = -\,e\,\frac{(f_{\alpha'} - f_\alpha)}{E_{\alpha'} - E_\alpha - \hbar\omega}\,\sum_{\vec{q}}\;\tilde{\phi}(\vec{q},\omega)\;\langle\alpha|exp(i\vec{q}.\vec{x})|\alpha'\rangle \qquad (43)$$

que é um resultado ulterior da equação de Heinsenberg.

Da equação de Poisson

$$\nabla^2\tilde{\phi}(\vec{x},t) = 4\pi\ \tilde{\rho}(\vec{x},t) - 4\pi\ e\ \langle n(\vec{x},t)\rangle \tag{44}$$

onde

$\tilde{\phi}(\vec{x},t)$ *descreve o potencial da carga estática de impureza.*

$\tilde{\rho}(\vec{x},t)$ *descreve a densidade da carga estática*

$\langle n(\vec{x},t)\rangle$ *descreve a densidade média de carga induzida.*

Então

$$\langle n(\vec{x},t)\rangle \equiv \sum_{\gamma} P_{\gamma}\ \langle\gamma|n(\vec{x},t)|\gamma\rangle \tag{45}$$

e como

$n(\vec{x},t) = \Phi^{+}(\vec{x},t)\ \Phi(\vec{x},t)$ *, o perador densidade de número, e usando a expressão (23), temos que:*

$$n(\vec{x},t) = \sum_{\alpha\beta} C^{+}_{\beta}\ C_{\alpha}\ \xi^{*}_{\beta}\ \xi_{\alpha} \tag{46}$$

Lembrando que

$$n(\vec{x},t) = \sum n(\vec{q},t)\ exp(i\vec{q}.\vec{x}) \qquad e \tag{47}$$

$$n(\vec{q},t) = \int d^3x\ exp(-i\vec{q}.\vec{x})\ n(\vec{x},t) \tag{48}$$

usando (46)

$$\begin{aligned} n(\vec{q},t) &= \sum_{\alpha\beta} C^{+}_{\beta}\ C_{\alpha} \int d^3x\ \xi^{*}_{\beta}\ exp(-iq.x)\ \xi_{\alpha} \\ &= \sum_{\alpha\beta} C^{+}_{\beta}\ C_{\alpha}\ \langle\beta|exp(-i\vec{q}.\vec{x})|\alpha\rangle \end{aligned} \tag{49}$$

assim

$$n(\vec{x},t) = \sum_{\vec{q},\alpha,\beta} C^{+}_{\beta}\ C_{\alpha}\ \langle\beta|exp(-i\vec{q}.\vec{x})|\alpha\rangle\ exp(i\vec{q}.\vec{x}) \tag{50}$$

e usando a espressão (45)

$$\langle n(\vec{x},t)\rangle = \sum_{\vec{q},\alpha,\beta} \langle\beta|exp(-i\vec{q}.\vec{x})|\alpha\rangle\ \langle C^{+}_{\beta}C_{\alpha}\rangle_t\ exp(i\vec{q}.\vec{x}) \tag{51}$$

Escrevendo a equação (44) no espaço de Fourier dos momentos temos

$$\sum_{\vec{q}} q^2\ \tilde{\phi}(\vec{q},t)\ exp(i\vec{q}.\vec{x}) = 4\pi \sum_{\vec{q}} \tilde{\rho}(\vec{q},t)\ exp(i\vec{q}.\vec{x}) -$$

$$- 4\pi e \sum_{\vec{q}} \langle n(\vec{q},t)\rangle \exp(i\vec{q}.\vec{x}) \tag{52}$$

ou ainda

$$q^2\bar{\phi}(\vec{q},t) = 4\pi\ \bar{\rho}(\vec{q},t) - 4\pi e \langle n(\vec{q},t)\rangle \tag{53}$$

fazendo emprego da expressão (51), temos assim

$$q^2\bar{\phi}(\vec{q},t) = 4\pi\bar{\rho}(\vec{q},t) - 4\pi e \sum_{\alpha\beta} \langle\beta|\exp(-i\vec{q}.\vec{x})|\alpha\rangle \langle C^+_\beta C_\alpha\rangle_t \tag{54}$$

ou

$$q^2\bar{\phi}(\vec{q},\omega) = 4\pi\bar{\rho}(\vec{q},\omega) - 4\pi e \sum_{\alpha\beta} \langle\beta|\exp(-i\vec{q}.\vec{x})|\alpha\rangle \langle C^+_\beta C_\alpha\rangle_\omega \tag{55}$$

Substituindo a expressão (43) em (55), temos:

$$\bar{\phi}(\vec{q},\omega) = \frac{4\pi\bar{\rho}(\vec{q},\omega)}{q^2} + \frac{4\pi e^2}{q^2}\sum_{\beta\alpha q'} \langle\beta|\exp(-i\vec{q}.\vec{x})|\alpha\rangle \ .$$

$$. \frac{(f_{\alpha'} - f_\alpha)}{E_{\alpha'} - E_\alpha - \hbar\omega} \quad \bar{\phi}(\vec{q}\,',\omega) \langle\alpha|\exp(i\vec{q}\,'.\vec{x})|\beta\rangle \tag{56}$$

que nos leva a

$$\bar{\phi}(\vec{q},\omega) = \frac{4\pi\bar{\rho}(\vec{q},\omega)}{q^2} + \frac{4\pi e^2}{q^2} \ .$$

$$\left(\sum_{\beta\alpha} |\langle\beta|\exp(-i\vec{q}.\vec{x})|\alpha\rangle|^2 \ \frac{f_{\alpha'} - f_\alpha}{E_{\alpha'} - E_\alpha - \hbar\omega}\right). \ \bar{\phi}(\vec{q},\omega) \tag{57}$$

Assim $\bar{\phi}(\vec{q},\omega)$ e $\bar{\rho}(\vec{q},\omega)$ estão relacionados por (Miranda [17]):

$$\bar{\phi}(\vec{q},\omega) = \frac{4\pi\bar{\rho}(\vec{q},\omega)}{q^2\varepsilon(\vec{q},\omega)} \tag{58}$$

onde

$$\varepsilon(\vec{q},\omega) = 1 - \frac{4\pi e^2}{q^2}\sum_{\alpha\beta} |\langle\beta|\exp(-i\vec{q}.\vec{x})|\alpha\rangle|^2 \ \frac{(f_\beta - f_\alpha)}{E_\beta - E_\alpha - \hbar\omega} \tag{59}$$

que é a parte longitudinal do nosso tensor dielétrico.

Lembrando das expressões (21) e (22)

$$\bar{\phi}(\vec{q},\omega) = \phi(\vec{q},\omega) \ \exp(i\vec{q}.\vec{\delta}(t))$$

$$\bar{\rho}(\vec{q},\omega) = \rho(\vec{q}) \ \exp(i\vec{q}.\vec{\delta}(t))$$

a expressão (58) fica então:

$$\phi(\vec{q},t) = exp(-i\vec{q}.\vec{\delta}(t)) \int_{\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{4\pi\rho(\vec{q})}{q^2\varepsilon(\vec{q},\omega)} \quad exp(-i\omega t) \; .$$

$$. \int_{\infty}^{\infty} dt' \; exp(i\vec{q}.\vec{\delta}(t')) \; exp(-i\omega t') \qquad (60)$$

que expandindo em série de Fourier, (Miranda [17], Seely [15])

$$exp\left[i\vec{q}.\vec{\delta}(t)\right] = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} F_\nu(\vec{q}) \; exp(-i\nu\omega_0 t) \qquad (61)$$

substituindo (61) em (60), temos

$$\phi(\vec{q},t) = \sum_{\mu,\nu=-\infty}^{\infty} \frac{4\pi\rho(\vec{q})}{q^2\varepsilon(q,\nu\omega_0)} \; F_\mu^*(\vec{q}) \; F_\nu(\vec{q}) \; exp(i(\mu-\nu)\omega_0 t) \qquad (62)$$

cuja <u>componente estática</u> ($\mu=\nu$) é

$$\phi(\vec{q}) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \frac{4\pi\rho(\vec{q})}{q^2\varepsilon(\vec{q},\mu\omega_0)} \; |F_\mu(\vec{q})|^2 \qquad (63)$$

ou mais simplificadamente

$$\boxed{\underset{\substack{\text{componente}\\ \text{estática}}}{\phi(\vec{q})} = \frac{4\pi\rho(\vec{q})}{q^2\;\varepsilon_{ef}}} \qquad (64)$$

onde denotamos

$$\varepsilon_{ef}^{-1} = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \frac{|F_\mu(\vec{q})|^2}{\varepsilon(\vec{q},\mu\omega_0)} \qquad (65)$$

por sua vez

$$|F_\mu(\vec{q})|^2 = J_\mu^2(z) \qquad ; \qquad z = eq_\perp E_0/m^*\omega_0|\omega_0 - \omega_c|$$

ENERGIA DE LIGAÇÃO

Capítulo II

II.1 - EXPRESSÃO PARA A ENERGIA DE LIGAÇÃO

No estudo do problema dos estados ligados, em uma impureza isolada (em um "gás de elétrons"), na presença de campo magnético e laser, consideraremos que tal "mar de elétrons" se organiza de maneira a cancelar efetivamente, a grandes distâncias o campo coulombiano visto por cada elétron -(Blindagem).

Exceto improváveis vizinhos, a curta distância, cada elétron se move independentemente sob a ação do campo médio produzido por todos os outros.

Além disso, devido à estatística, que rege os elétrons, a passagem do sistema eletrônico do estado fundamental para um estado excitado se processa pela alteração do estado de alguns poucos elétrons apenas. A maioria dos processos físicos de interesse, depende não do estado fundamental, mas da organização dos estados excitados mais baixos, sugerindo que o que realmente importa é dispor de métodos que permitam calcular espectros dos elétrons independentes e que justifiquem a substituição das interações com outros elétrons por interação com um Campo Efetivo Médio. Expressamos isto levando

$$\mathcal{H}\Phi_\alpha = \frac{1}{2m^*} P^2\Phi_\alpha + e\tilde{\phi}_0(\vec{x})\Phi_\alpha \quad ; \quad e\tilde{\phi}_0(\vec{x}) = \tilde{V}(\vec{x}) \tag{66}$$

para

$$\mathcal{H}\Phi_\alpha = \frac{1}{2m^*} P^2\Phi_\alpha + e\int d\tau\ |\Phi_\alpha|^2\ \tilde{\phi}_0(\vec{x}) \tag{67}$$

que leva a um problema auto-consistente, explicitando a interação média com as outras partículas eletrônicas. A informação sôbre os outros elétrons é dada através da "densidade" $|\Phi_\alpha|^2$ - Ashcroft[22], Kiréev[23], RCC Leite[24].

Como estamos considerando campos magnéticos fortes o potencial da impureza ao longo da direção do campo é mais importante do que na direção perpendicular a ele. E mais: enquanto o alcance do potencial da direção transversal é comparável ao raio ciclotrônico, o correspondente ao longo da direção do campo é pequeno comparado às dimensões da função de onda naquela direção.

Explicitando a equação de Schroedinger, na representação Φ, do capítulo I, já com o potencial deslocado, temos

$$\left\{ \frac{1}{2m^*} \left| \hat{p} + \frac{eH}{c} y \hat{e}_x \right|^2 + \tilde{V}(\vec{x}) - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right\} \Phi_\alpha (\vec{x}, t) = 0 \qquad (68)$$

onde $\tilde{V}(\vec{x})$ - potencial deslocado visto no Capítulo I, $(V(\vec{x}+\vec{\delta}(t)))$.

$$\Phi_\alpha(\vec{x}, t) = \Phi_{n,p_x}(x,y,t)\ Z(z)$$

Usando, assim, a aproximação δ(delta) para o potencial na direção z - direção dos campos magnéticos e laser - a solução em z não é mais onda plana, como no problema de Landau, mas agora regida pela solução da equação unidimensional, já processados os usuais métodos de separação de variáveis - Jog/Wallace[7] (Apêndice B - parte 1) :

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} Z'' + \tilde{V}(z) Z = \mathbb{E}_0\ Z \qquad (69)$$

onde $\tilde{V}(z)$ representa a média do potencial blindado da impureza sôbre as funções de onda, a saber:

$$\tilde{V}(z) = \int \Phi^*_{n,p_x}(x,y)\ e\phi(\vec{x})\ \Phi_{n,p_x}(x,y)\ dx\ dy \qquad (70)$$

ou mesmo

$$\tilde{V}(z) = \frac{e}{(2\pi)^3} \int \phi(\vec{q})\ \exp(i\vec{q}.\vec{x})\ |\Phi_{n,p_x}|^2\ dx\ dy\ d\vec{q} \qquad (71)$$

como $\tilde{V}(z) = V_0\ \delta(z)$ (Apêndice B - parte 2)

temos

$$\tilde{V}_0 = \frac{e}{(2\pi)^3} \int\int \phi(\vec{q})\ \exp(i\vec{q}.\vec{x})\ |\ \Phi_{n,p_x}|^2\ d\vec{x}\ d\vec{q} \qquad (72)$$

e por fim como

$$\mathbb{E}_0 = \frac{m^*}{2\hbar^2}\ V_0^2 \quad , \text{ encontramos} \qquad (73)$$

$$\boxed{\mathbb{E}_0 = \left(\frac{m^* e^2}{2\hbar^2}\right) \frac{1}{(2\pi)^3} \int\int \phi(\vec{q})\ e^{i\vec{q}.\vec{x}}\ |\Phi_{n,p_x}|^2\ d\vec{x}\ d\vec{q}} \qquad (74)$$

com

$$\phi(\vec{q}) = 4\pi\rho(\vec{q}) \;/\; q^2\varepsilon_{ef}$$

e

$$\varepsilon_{ef}^{-1} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} J_\nu^2(z) \;/\; \varepsilon(\vec{q},\nu\omega_o) \qquad (75)$$

com $z = eq_\perp E_o \;/\; m^*\omega_o \;|\omega_o-\omega_c|$

tendo em vista o conjunto das expressões (74) e (75), verifica-se que o efeito do laser e do campo magnético uniforme d.c., pode ser descrito pela troca da constante dielétrica $\varepsilon(\vec{q})$, *de Wallace*[3], *pela nossa constante dielétrica efetiva* ε_{ef}, *que engloba os efeitos da radiação eletromagnética e do campo magnético. É evidente, que no limiar da intensidade do laser,* E_o, *nula,* ε_{ef} *reduz a* $\varepsilon(\vec{q})$.

II.2 - CONSTANTE DIELÉTRICA EFETIVA

Voltando à expressão (75) temos que

$$\mathcal{E}_{ef}^{-1} = \frac{J_o^2(z)}{\mathcal{E}(\vec{q},o)} + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{J_\nu^2(z)}{\mathcal{E}(\vec{q},\nu\omega_o)}$$

observamos que o primeiro termo do lado direito, contêm no denominador $\mathcal{E}(\vec{q})$, constante dielétrica usual, enquanto que o segundo termo, sob o sinal de somatória, contêm $\mathcal{E}(\vec{q},\omega)$, que necessitamos explicitamente. A forma, por sua vez, bastante complicada foi obtida por Mermin/Canel[11]. Assim, no limite que nos é interessante, i.é., oscilações coletivas com comprimento de onda longo, temos mais simplificamente - M. Lima et al[12]

$$\mathcal{E}(\vec{q},\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2\, sen^2\theta}{\omega^2 - \omega_c^2} - \frac{\omega_p^2\, cos^2\theta}{\omega^2} \tag{76}$$

onde

θ é o ângulo entre q e o campo magnético

ω_p é a frequência de plasma do elétron e

ω_c é a frequência de ciclotron do elétron.

Vemos que a expressão (76) possue duas frequências de ressonância, dadas pelas raizes ω_+ e ω_- de $\mathcal{E}(\vec{q},\omega) = 0$, a saber

$$\omega_\pm^2 = \frac{1}{2}\left\{ (\omega_p^2 + \omega_c^2) \pm \left[(\omega_p^2 + \omega_c^2)^2 - 4\omega_p^2\omega_c^2\, cos^2\theta\right]^{1/2} \right\} \tag{77}$$

Estas ressonâncias dominam o comportamento de $\mathcal{E}(\vec{q},\omega)$, no limite considerado. No regime de plasma de alta densidade, que é o nosso caso, onde

$\omega_p^2 >> \omega_c^2$ a expressão (77) simplificar-se-a para

$$\begin{aligned} \omega_+^2 &= \omega_p^2 + \omega_c^2\, sen^2\theta \\ \omega_-^2 &= \omega_c^2\, cos^2\theta \end{aligned} \tag{78}$$

onde notamos que

ω_+ é o plasmon ordinário longitudinal e

ω_- é o modo que está associado com o movimento muito próximo de um movimento circular em torno da direção de propagação com frequência ω_c.

De tal modo que (76) pode ser reescrita

$$\mathcal{E}(\vec{q},\omega) = \frac{\omega^2\left[(\omega^2-\omega_c^2)\right] - (\omega_p^2\, sen^2\theta)\omega^2 - (\omega^2-\omega_c^2)\omega_p^2\cos^2\theta}{\omega^2(\omega^2-\omega_c^2)}$$

$$= \frac{\omega^4 - \omega^2(\omega_c^2+\omega_p^2) + \omega_c^2\,\omega_p^2\cos^2\theta}{\omega^2(\omega^2-\omega_c^2)} \qquad (79)$$

ou em termos de ω_+ e ω_- usando

$$\omega^4 - \omega^2(\omega^2+\omega_p^2) + \omega_c^2\,\omega_p^2\cos^2\theta =$$

$$= (\omega^2-\omega_+^2)\,(\omega^2-\omega_-^2) = \omega^4 - \omega^2(\omega_+^2+\omega_-^2) + \omega_+^2 + \omega_-^2$$

temos

$$\mathcal{E}_{ef}^{-1} = \frac{J_o^2(z)}{\mathcal{E}(\vec{q})} + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} J_\nu^2(z)\,\frac{(\nu\omega_o)^2\left[(\nu\omega_o)^2-\omega_c^2\right]}{(\nu\omega_o)^4-(\nu\omega_o)^2(\omega_+^2+\omega_-^2)+\omega_+^2\omega_-^2} \qquad (80)$$

com $z = eq_\perp E_o \,/\, m^*\omega_o\,|\omega_o-\omega_c|$

então para o caso

$\omega_p^2 >> \omega_c^2$, teremos finalmente

$$\mathcal{E}_{ef}^{-1} = \frac{J_o^2(z)}{\mathcal{E}(\vec{q})} + 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{J_\nu^2(z)\,(\nu\omega_o)^2\,|(\nu\omega_o)^2-\omega_c^2|}{(\nu\omega_o)^4-\omega_p^2(\nu\omega_o)^2+\omega_p^2\omega_c^2\cos^2\theta} \qquad (81)$$

Salientamos, neste ponto, alguns fatos de grande relevância:

a) Quando a frequência do laser, ω_o, está próxima a ω_p, $\omega_o \simeq \omega_p$, vê-se que o termo $\nu = 1$ de (81) predomina e $\mathcal{E}_{ef}^{-1}$ torna-se muito grande. Assim nos deparamos, então, com o colapso da blindagem, que por sua vez aumenta enormemente a energia de ligação, associada ao potencial blindado pela expressão (74).

b) Contrariamente à parte a), se a frequência do laser estiver próxima a frequência ciclotrônica, $\omega_o \simeq \omega_c$, como o argumento da função de Bessel torna-se infinito, verificamos que

ε_{ef}^{-1} se torna nula, o que significa um aumento abrupto da blindagem, implicando, assim, na redução enorme da energia de ligação dos portadores, deste modo reiterando e comprovando nossas palavras introdutórias deste trabalho.

II.3 - COMENTÁRIOS

Com alusão aos comportamentos opostos da energia de ligação dos portadores, quando nas ressonâncias mencionadas no ítem 2, deste capítulo, procuremos interpretar tais predições fisicamente. Em uma descrição semiclássica, consideremos um elétron num semicondutor dopado, tipo n, submetido, simultaneamente, à ação de um campo magnético d.c. e de uma radiação eletromagnética (descrito na aproximação de dipolo pelo potencial vetor $\vec{A}(t)$) e sujeito também a um potencial V, que representa coletivamente as interações do elétron com os outros elétrons, e com as impurezas carregadas do nosso material. Para a hamiltoniana clássica, temos (M. Lima et al [12])

$$H = \frac{1}{2} m^* V_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} m^* V_{\perp}^2 + V$$

onde

$$V_{\parallel}^2 \quad e \quad V_{\perp}^2 = \left[eE_o / m(\omega_o - \omega_c)\right]^2$$

expressam, em média temporal, os quadrados das componentes longitudinal e transversal - com relação à direção do campo magnético paralelo, por sua vez à direção da radiação da onda eletromagnética - da velocidade do elétron. Então para

$$\omega_o \to \omega_c \qquad \Longrightarrow \qquad V_{\perp} \to \infty$$

ou seja, a energia cinética transversal torna-se muito maior que V, o que leva a hamiltoniana ser predominada pela sua parte cinética.

De outro modo, podemos dizer que nesta condição de ressonância, entre a frequência do laser e a ciclotrônica, a energia de radiação intensifica o movimento transversal do elétron, i. é., seu movimento ciclotrônico, resultando assim que o raio da órbita, deste movimento, fica bastante grande, a fazer o elétron a não mais "ver" o potencial V, ou seja, comportar-se como uma partícula livre. Logo, nos relacionando à formulação do item 1, tal *fato indica que E_o, a energia de ligação do nosso elétron, expressão (74), praticamente se anula, o que leva a necessidade do fator $\varepsilon_{ef}^{-1} \to 0$ para $\omega_o \to \omega_c$, expressão (75). Ratificando assim o item 2, indicando o colapso das interações eletrônicas. E mais: neste tipo de ressonância (laser-ciclotron) é o caráter individual do movimento eletrônico - movimento circular da nuvem de blindagem - o de maior relevância, em relação ao caráter coletivo, pois devido tal movimento exibir uma grande amplitude, leva de imediato à consequência do anulamento das interações eletrônicas, e portanto nunhum aprisionamento do portadores às impurezas do semicondutor. Sendo que em uma descrição de bandas, a diferença entre o nível de impureza doadora, e a banda de condução, se reduziria drasticamente, nessa ressonância, à revelia da intensidade da radiação da onda eletromagnética e de quão forte é o campo magnético, o que é de grande notabilidade se confrontarmos com trabalhos mencionados na introdução deste.*

Finalmente nos concentrando na ressonância $\omega_o \approx \omega_p$ a nuvem de blindagem sofre oscilações de amplitude cada vez maior, a medida que a frequência do laser se aproxima de ω_p, até o colapso da blindagem. De tal modo a resultar um aumento muito grande na interações elétron-núcleo, pois nestas condições, a carga aparente de blindagem é menor. Acrescentemos também aqui que o caráter coletivo é o que predomina, em completo contraste a outro tipo de ressonância. Sendo que em uma descrição de bandas, a diferença entre o nível de impureza doadora e a banda de condução aumenta bastante, a um estado ligado forte dos portadores (freezeout), recuperando assim resultados de Yafet et al [1] do qual nos referimos no início deste trabalho.

RESSONANCIA $\omega_0 \longrightarrow \omega_c$

NO LIMITE ULTRA-QUÂNTICO

Capítulo III

III.1 - CÁLCULO DE E_0 PARA $\omega_0 \to \omega_c$

Analisando, pois, o caso particular em que a frequência da radiação eletromagnética (laser) está bem próximo à frequência ciclotrônica, $\omega_0 \approx \omega_c$, das conclusões expressas no ítem 2 do capítulo II, vemos que a expressão (81), a saber

$$\varepsilon_{ef}^{-1} = \frac{J_0^2(Z)}{\varepsilon(\vec{q})} + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{J_\nu^2(Z)\,(\nu\omega_0)^2\left[(\nu\omega_0)^2 - \omega_c^2\right]}{(\nu\omega_0)^4 - \omega_p^2(\nu\omega_0)^2 + \omega_p^2\omega_c^2\cos^2\theta}$$

onde $Z = eq_\perp E_0/m^*\omega_0|\omega_0 - \omega_c|$

como o argumento das funções de Bessel torna-se infinito, podemos ter uma boa aproximação, somente o 1º termo de ordem zero do inverso da constante dielétrica efetiva,

$$\varepsilon_{ef}^{-1} = \frac{J_0^2(Z)}{\varepsilon(\vec{q})} \quad , \text{ p/ } \omega_0 \simeq \omega_c \tag{82}$$

Para argumentos significativamente grandes podemos ainda, usar a aproximação assintótica para a expressão (82)(Jain/Tzoar[27] e Morse/Feshback[28]).

$$J_0^2(Z) \simeq \frac{1}{\pi Z} \qquad \text{para } Z>0 \tag{83}$$

desta maneira, teremos para o potencial blindade efetivo, desenvolvido no capítulo I

$$\phi(\vec{q}) = \frac{4\pi\rho\alpha(Z)}{q^2\varepsilon(\vec{q})} \tag{84}$$

onde

$$\alpha(Z) = \frac{m^*\omega_0|\omega_0 - \omega_c|}{\pi e q_\perp E_0} \tag{85}$$

notando que $\varepsilon(\vec{q})$ é a constante dielétrica usual - Wallace[3].

Substituindo (84) em (71), encontramos

$$\tilde{V}(Z) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{4\pi\rho\alpha(Z)}{q^2\varepsilon(\vec{q})}\, \exp(i\vec{q}.\vec{x})\; |\Phi_{n,p_x}|^2\, dx\, dy\, d\vec{q} \tag{86}$$

que está relacionado a energia de ligação

$$\mathbb{E}_0 = \left(\frac{me^2}{2\hbar^2}\right) V_0^2 \qquad (87)$$

com

$$V_0 = \int_{\infty}^{\infty} \tilde{V}(Z)\, dZ \qquad (88)$$

em coordenadas cilíndricas, temos

$$\tilde{V}(Z) = \frac{e}{(2\pi)^3} \iint \frac{4\pi\rho}{q^2} \frac{\alpha(Z)}{\varepsilon(\vec{q})} \exp(i\vec{q}.\vec{r}) \, |\Phi_{n,m}|^2 \rho \, d\rho \, d\theta \, d\vec{q} \qquad (89)$$

Notando que - a exemplo de Wallace [3] - em campos suficientemente altos, todos os elétrons estão no nível $n=0$ de Landau; nos deteremos, então, nesta aproximação de regime ultra-quântico, com a função de onda eletrônica

$$\Phi_{0,m}(\rho,\theta) = (2\pi l^2 m!)^{-1/2} \left(\frac{\rho^2}{2l^2}\right)^{|m|/2} \exp(-\frac{\rho^2}{4l^2}) \exp(-im\theta) \qquad (90)$$

Substituindo em (89)

$$\tilde{V}(Z) = \frac{e}{(2\pi)^3} \iint \frac{4\pi\rho}{q^2} \frac{\alpha(Z)}{\varepsilon(\vec{q})} \exp\left[iq_\perp \rho\cos\theta + q_z\right] (2\pi l^2 m!)^{-1} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{\rho^2}{2l^2}\right)^{|m|} \exp(-\rho^2/2l^2)\rho \, d\rho \, d\theta \, d\vec{q} \qquad (91)$$

usando o fato que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \exp(iq_\perp \rho\cos\theta) \, d\theta = J_0(q_\perp \rho) \qquad (92)$$

teremos

$$\tilde{V}(Z) = \frac{e}{(2\pi)^3} \int \frac{4\pi\rho}{q^2} \frac{\alpha(Z)}{\varepsilon(\vec{q})} \exp(iq_z z) \int J_0(q_\perp \rho) \exp\left(-\frac{\rho^2}{2l^2}\right) \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{\rho^2}{2l^2}\right)^{|m|} \rho \, d\rho \, d\vec{q} \qquad (93)$$

mas

$$\int J_0(q_\perp \rho) \exp(-\rho^2/2l^2) (\rho^2/2l^2)^{|m|} \rho \, d\rho =$$

$$= \exp(-q_\perp l^2/2) \, L_m(q_\perp l^2/2) \qquad e$$

$$\int \exp(iq_z z)\ dq_z = 2\pi\delta(z) \tag{94}$$

então, substituindo (94) e (93) em (88)

$$V_0 = \int_{\infty}^{\infty} \bar{V}(Z)\ dZ = $$
$$= \frac{2e^3 m^* \omega_0 |\omega_0 - \omega_c|}{E_0} \int_0^{\infty} \frac{L_m(q_\perp^2 l^2/2)\ \exp(q_\perp^2 l^2)}{q_\perp^3\ \varepsilon(q_\perp)}\ q_\perp\ dq_\perp \tag{95}$$

Usando a constante dielétrica estática de Jog/Wallace[7] - limite ultra-quântico - e calculando o alcance do potencial para o estado m=0, teremos portanto

$$\varepsilon(q\ ) = \frac{4\pi e^2}{q_\perp^2} \left[q_\perp^2 + \frac{2A}{l^2} \exp(-q_\perp^2 l^2/2)\ F_{-3/2}(\beta\mu') \right] \tag{96}$$

onde

$$A = \frac{2e^2}{\pi} \left(\frac{\pi m^* \beta}{2\hbar^2} \right)^{1/2} \quad ; \quad \beta = \frac{1}{k\ T} \tag{97}$$

$\mu' = \mu - \frac{1}{2}\hbar\omega_c$ mede a distância relativa do nível de Fermi, a partir do nível n=0 de Landau.

$F_{-3/2}$ é a integral de Fermi-Dirac - (Blackemore[29]) -

Fazendo a troca de variável $x = q^2 l^2/2$

$$V_0 = \frac{e m^* \omega_0 |\omega_0 - \omega_c|}{4\pi^2 E_0} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\ (x e^x + p)} \tag{98}$$

$$\text{onde} \quad p = A\ F_{-3/2}(\beta\mu') \quad ; \quad A = \frac{2e^2}{\pi} \left(\frac{\pi\ m^* \beta}{2\hbar^2} \right)^{1/2} \tag{99}$$

O nível relativo de Fermi, por sua vez, é determinado pela condição[29]

$$N = \left(\frac{m^* kT}{2} \right)^{1/2} \pi^{-3/2} \left(\frac{e\ H}{\hbar^2 c} \right) F_{-1/2}(\beta\mu') \tag{100}$$

assim a energia de ligação será:

$$E_0 = \frac{m_*^3\ e^2}{32\pi^4 \hbar^2} \left(\frac{\omega_0\ \omega_c\ \lambda_c}{E_0} \right)^2 f_L^2(p) \tag{101}$$

onde

$$\lambda_c = \left| 1 - \frac{\omega_0}{\omega_c} \right| \quad e \quad f_L(p) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\ (x e^x + p)} \tag{102}$$

III.2 - ALGUNS VALORES NUMÉRICOS DOS RESULTADOS OBTIDOS

Faremos a título de comparação um quadro com alguns valores da energia de ligação obtidas pelo modêlo desenvolvido por Jog/Wallace [7] e pelo nosso modêlo.

MODELO JOG/WALLACE (com campo magnético)

p	H(kG)	$E_0 (10^{-4}$ Ry)
1,2	47,8	1,58
1,8	68,7	0,87
2,4	92,6	0,57
2,85	137,3	0,44

NOSSO MODÊLO (campo magnético + laser)

P	H(kG)	$E_0 (10^{-4}$ Ry)	
		$\omega_0 = 0,9\ \omega_c$	$\omega_0 = 0,999\ \omega_c$
1,2	47,8	$9,78\ 10^{-4}$	$1,2\ 10^{-7}$
1,8	68,7	$23,24\ 10^{-4}$	$2,86\ 10^{-7}$
2,4	92,6	$50,00\ 10^{-4}$	$6,16\ 10^{-7}$
2,85	137,3	$186,60\ 10^{-4}$	$22,90\ 10^{-7}$

onde usamos

$m^* = 0,07\ m_e$

$N = 4\ 10^{16}\ cm^{-3}$

$T = 2\ K$

$E_0 = 2,2\ 10^7$ V/cm (intensidade do laser)

RESSONÂNCIA $\omega_0 \longrightarrow \omega_p$

NO LIMITE ULTRA- QUÂNTICO

Capítulo IV

IV.1 - CASO DE LASER INTENSO

Na expressão (81), para a constante dielétrica efe quando $\omega_0 \to \omega_p$, considerando $\omega_p^2 >> \omega_c^2$, o termo $\nu=1$ predomina, e daí

$$\varepsilon_{ef}^{-1} \simeq 2\, J_1^2\,(Z)\; \frac{\omega_0^2\,(\omega_0^2 - \omega_c^2)}{\omega_0^2 - \omega_p^2\omega_0^2 + \omega_p^2\omega_c^2 \cos\theta} \tag{103}$$

$$\simeq 2\, J_1^2\,(Z) \,/\, (1 - (\omega_p^2 \,/\, \omega_0^2)) \tag{104}$$

onde $Z = eq_\perp E_0 \,/\, m^*\omega_0 |\omega_0 - \omega_c|$

explorando a situação em que temos a intensidade do laser, E_0, intensa podemos aproximar a função de Bessel assintoticamente por[27]

$$J_1^2\,(Z) \quad \frac{1}{\pi (Z^2 - 1)^{1/2}} \tag{105}$$

de maneira a termos a expressão (104)

$$\varepsilon_{ef}^{-1} = \frac{2}{\pi (Z^2 - 1)^{1/2} \left(1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega_0^2}\right)} \tag{106}$$

assim o potencial efetivo resulta

$$\phi(\vec{q}) = \frac{4\pi\rho}{q^2 \varepsilon_{ef}} = \frac{8\rho}{\lambda_p} \frac{1}{q^2 (Z^2 - 1)^{1/2}} \tag{107}$$

com

$$\lambda_p = (1 - \omega_p^2 \,/\, \omega_0^2) \qquad ; \qquad Z = eE_0 q_\perp \,/\, m^*\omega_0 |\omega_0 - \omega_c|$$

do capítulo III, vemos que

$$V_0 = \frac{1}{2\pi} \int \phi(q_\perp)\; L_m(q_\perp^2 l^2/2)\; \exp(-q_\perp^2 l^2/2)\; q_\perp\, dq_\perp \tag{109}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{8\rho}{\left(1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega_0^2}\right)} \frac{m^*\omega_0 |\omega_0 - \omega_c|}{eE_0} \,.$$

$$\cdot \int \frac{L_m(q_\perp^2 l^2/2)\; \exp(-q_\perp^2 l^2/2)\; q_\perp\, dq_\perp}{q_\perp^2 \left[q_\perp^2 - \left(\dfrac{m^*\omega_0 |\omega_0 - \omega_c|}{eE_0}\right)\right]^{1/2}} \tag{110}$$

ou ainda, para m=0 - como na expressão (95)

$$V_0 = \frac{4e^2}{\pi}\;\frac{m^*\omega_0|\omega_0 - \omega_c|}{eE_0}\;\frac{1}{\left[1-(\omega_p^2/\omega_0^2)\right]}\;\underbrace{\int_0^\infty \frac{exp(-q_\perp^2 l^2/2)\; dq_\perp}{q_\perp\,[q_\perp^2 - A_0]^{1/2}}}_{\equiv\; I_0} \qquad (111)$$

onde $A_0 = m^*\omega_0|\omega_0 - \omega_c| \,/\, eE_0$

Fazendo a troca de variável muda $x = q_\perp^2 l^2/2$:

$$I_0 = \frac{l}{2\sqrt{2}} \int_0^\infty \frac{x^{-1}\; e^{-x}}{\left(x - \frac{l^2 A_0}{2}\right)^{1/2}}\, dx \qquad (112)$$

$$l^2 = \frac{\hbar c}{eH} \qquad e \qquad A_0 = \frac{m^*\omega_0|\omega_0 - \omega_c|}{eE_0}$$

para campos magnéticos fortes (kG), radiação de laser da ordem de 10^7 *V/cm,*

$$\frac{l^2 A_0}{2} \simeq 10^{-12}$$

deste modo, nesta aproximação integramos (112) e temos

$$V_0 = \frac{4e^2}{\pi\lambda_p}\left[\frac{m^*\omega_0|\omega_0 - \omega_c|}{eE_0}\right]\frac{\pi}{2\sqrt{A_0}} \qquad (113)$$

relacionados à energia de ligação pela expressão (73)

$$\mathbb{E}_0 = \left(\frac{m^*}{2\hbar^2}\right) V_0^2 = \frac{2e^4 m^*}{\hbar^2}\left(\frac{m^*\omega_0\omega_c\lambda_c}{eE_0}\right)\lambda_p^2 \qquad (114)$$

$$\mathbb{E}_0 = \frac{2e^3 m^{*2}\,\omega_0\omega_c\lambda_c}{h^2 E_0 \lambda_p^2} \qquad (115)$$

onde $\lambda_c = |1 - (\omega_c/\omega_0)|$ *e* $\lambda_p = 1 - (\omega_p^2 / \omega_0^2)$

IV.2 - CASO DO LASER FRACO

Na expressão (104) deste capítulo,

$$\varepsilon_{ef}^{-1} = 2\, J_1^2\, (Z) \;/\; \left[1 - (\omega_p^2 \;/\; \omega_0^2)\right] \;; \qquad (104)$$

$$Z = \bar{e} q_\perp E_0 \;/\; m^* \omega_0 |\omega_0 - \omega_c|$$

explorando a situação em que temos a intensidade do laser, E_0, fraca podemos aproximar a função de Bessel, para argumentos muito pequenos por [28]

$$J_1^2\, (Z) \approx \left(\frac{Z}{2}\right)^2 \qquad (115)$$

desta maneira

$$\varepsilon_{ef}^{-1} = Z^2 \;/\; 2\left[1 - (\omega_p^2 \;/\; \omega_0^2)\right] \qquad (116)$$

e o potencial efetivo resulta

$$\phi(\vec{q}) = \frac{4\,\pi\rho}{q^2 \varepsilon_{ef}} = \frac{2\pi\rho Z^2}{q^2 \lambda_p} \qquad (117)$$

com $\lambda_p = (1 - (\omega_p^2 \;/\; \omega_0^2\,))$ (118)

$$Z = eE_0 q_\perp \;/\; m^* \omega_0 |\omega_0 - \omega_c|$$

Analogamente ao desenvolvimento das expressões (110) e (111), temos

$$V_0 = \frac{e^2}{\lambda_p A_0^2} \int_0^\infty exp(-q_\perp^2 l^2/2)\; q_\perp\; dq_\perp \qquad (119)$$

$$= \frac{e^2}{\lambda_p A_0^2} \int_0^\infty exp(-x)\; \frac{1}{l^2}\; dx = e^2 \;/\; \lambda_p A_0^2 l^2 \qquad (120)$$

com $A_0 = m^* \omega_0 |\omega_0 - \omega_c| \;/\; eE_0$ e $l^2 = \hbar c/eH$

logo a energia de ligação fica

$$\mathbb{E}_0 = \left(\frac{m^*}{2\hbar^2}\right)\; V_0^2 =$$

$$E_0 = \frac{m^* e^4}{2\hbar^2 \lambda_p^2}\, \beta_L^4 \qquad (121)$$

onde

$$\lambda_p = (1 - \omega_p^2 / \omega_0^2))$$

$$\beta_L = \frac{\sqrt{2}}{l}\, \frac{eE_0}{m^* \omega_0 |\omega_0 - \omega_c|} \qquad (122)$$

onde

$$l^2 = \hbar c / eH$$

CONCLUSÕES

Capítulo V

No nosso trabalho, apresentamos um modêlo teórico para o estudo de semicondutores, com impurezas hidrogenóides não compensadas, sob a ação simultânea de campos magnéticos fortes e laser, no regime ultra-quântico. Onde vimos o efeito preponderante da presença do laser, quando nos limiares das ressonâncias tratadas, sôbre os estados ligados dos portadores. Com a obtenção da constante dielétrica efetiva do meio, esclarecemos como a presença dos campos externos se evidenciam sobre as propriedades do semicondutor. Assim através do potencial blindado efetivo encontramos uma expressão para a energia de ligação, que não só dependia da concentração, intensidade do campo magnético e temperatura - caso em que têm-se só a presença de campo magnético - mas também da intensidade do laser e da sua frequência.

Aliás, insistimos na dependência proeminente da energia de ligação na frequência do laser quando esta se encontra em ressonância com as frequências de ciclotron e de plasma.

Uma das críticas aos resultados seria o fato de desprezarmos a parte imaginária da constante dielétrica, que só incluindo sérias complicações nos cálculos, não nos faz crer que trouxesse modificações sensíveis no modêlo, pois estivemos sempre em busca de resultados limiares.

Outra abordagem que requer mais alguma consideração deve-se ao uso da aproximação δ(delta) para o alcance do potencial, visto no capítulo II, agora com a presença do laser. Wallace [3] esclarece tal uso, na existência de apenas campos magnéticos fortes. No limite $\omega_0 \simeq \omega_c$, podemos ver que a presença do laser intensificava o movimento transversal do elétron, i.e., seu movimento ciclotrônico, resultando ao raio da órbita crescer, a fazer o elétron a não mais "enxergar" o potencial da impureza, favorecendo ainda mais a hipótese de potencial local (delta), pois seu alcance é drasticamente reduzido. Isto, sem dúvida nenhuma fa-

vorece ainda mais aquela aproximação.

A crítica se concentra aqui no uso da aproximação delta, pois em $\omega_0 = \omega_p$, se espera o colapso total da blindagem e portanto, sendo o alcance do potencial bem longo, nossos resultados não seriam mais válidos. Acontece que estamos descrevendo o processo apenas em $\omega_0 \simeq \omega_p$ (o limiar da instabilidade), onde os resultados devem ser interpretados à luz desta marcante restrição.

Um outro fato relevante a se reiterar do capítulo IV, é que a energia de ligação, para o caso de laser fraco, fixando-se todos os parâmetros outros, cresce com a 4ª potencia da intensidade do laser. Todavia, no caso de laser intenso decresce inversamente proporcional a intensidade de radiação. Deveremos então ter um máximo na energia de ligação versus intensidade do laser. E ainda para valores de fracas intensidades da radiação teremos correspondentes nas grandes intensidades, para as quais está relacionada uma mesma energia de ligação. Tal dispositivo permite mais uma maneira de manipulação sôbre um maior ou menor aprisionamento do portadores.

Apêndice A

Dada a equação de Schroedinger dependente do tempo

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\ \Psi(\vec{x},t) = \hat{H}\ \Psi(\vec{x},t) \qquad (A-1)$$

a partir de $\Psi(\vec{x},t_0)$ *e com o operador de evolução temporal* $U(t,t_0)$ *encontramos*

$$\Psi(\vec{x},t) = U(t,t_0)\ \Psi(\vec{x},t_0) \qquad (A-2)$$

que obedece a

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\ U(t,t_0) = \hat{H}\ U(t,t_0) \qquad (A-3)$$

resultando em (Harris [21]*)*

$$U(t,t_0) = \exp -\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} \hat{H}(t')\ dt' \qquad (A-4)$$

daí

$$\Psi(\vec{x},t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} \hat{H}(t')\ dt'\right)\ \Psi(\vec{x},t_0) \qquad (A-5)$$

No caso particular de

i) $\hat{H} = \frac{1}{2\ m}\ |\hat{p}|^2$ *onde* $\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\ \vec{\nabla}$

então o operador de momentum $\hat{p}$ *em* $\hat{H}$ *é substituido por seu autovalor* $\vec{p}$*, de tal modo a termos:*

$$U(t,t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\frac{|\vec{p}|^2}{2m}\ dt'\right).\ \exp\frac{i}{\hbar}\ \vec{p}.\vec{x}$$

$$= \exp(-ip^2(t-t_0)/2m\hbar).\exp(i\vec{p}.\vec{x}/\hbar) \qquad (A-6)$$

logo

$$\Psi(\vec{x},t) = \exp\ (-iE(t-t_0)/\hbar)\ \exp(i\vec{p}.\vec{x}/\hbar) \qquad (A-7)$$

resultado bem conhecido da função de onda de uma partícula livre.

ii) Se $\hat{H} = \frac{1}{2\ m}\ |\hat{p} - \frac{e}{c}\ \vec{A}(t)|^2 \qquad (A-8)$

onde aquí, particularmente, $\vec{A}(t)$ *corresponde ao potencial vetor associada a radiação de laser* (*)*.*

(*) Podemos desprezar a parte espacial de nossa radiação eletromagnética, a saber $\vec{A}(\vec{x},t) = Re\{\ A_0 \exp[i(\vec{k}.\vec{x}-\omega t)]\}$ *pois consideramos uma onda plana de longo comprimento de onda, comparada com o diâmetro do átomo, assim* $\vec{k}.\vec{x} << 1$ $(x << \lambda)$ *e, logo* $\exp(i\vec{k}.\vec{x}) \simeq 1$, *que significa supor que o campo eletromagnético é uniforme numa região suficientemente grande comparada às dimensões atômicas (aproximação de dipolo)*

A solução será

$$\Psi(\vec{x},t) = U(t,t_0)\ \Psi(\vec{x},t_0) \qquad (A-9)$$

onde agora, o nosso operador de evolução temporal é

$$U(t,t_0) = exp\left\{ -\frac{i}{2m\hbar}\int_{t_0}^{t} |\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}(t')|^2\ dt' \right\} \qquad (A-10)$$

sendo

$$\Psi(\vec{x},t) = exp(i\vec{p}.\vec{x}/\hbar)\ exp\left\{ -\frac{i}{2m\hbar}\int_{t_0}^{t} |\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}(t')|^2 dt' \right\} \qquad (A-11)$$

iii) No caso em que

$$\hat{H} = \frac{1}{2\ m}\ |\ \hat{p} + \frac{e\ B}{c}\ y\ \hat{e}_x|^2$$

que é o problema, notoriamente conhecido de Landau cuja solução é

$$\Psi(\vec{x},t) = N_n\ exp(i\vec{p}.\vec{x}/\hbar)\ exp(-itE_n/\hbar)\ exp(-\xi^2/2)\ H_n(\xi) \qquad (A-12)$$

onde

$$\vec{p} = [p_x, 0, p_z]$$

$$\xi = (y - l^2 p_x)/l$$

$$l^2 = \hbar/m\omega_c \qquad ; \qquad \omega_c = eB/mc \qquad (A-13)$$

$$E_n = \hbar\omega_c(n + \frac{1}{2}) + \frac{p_z^2}{2m}$$

$$N_n = (2^n\ n!\,\pi^{-1/2}\ l)^{-1/2}$$

iv) Caso em que $\hat{H} = \frac{1}{2\ m}\ |\ \hat{p} + \frac{e\ B}{c}\ y\ \hat{e}_x - \frac{e}{c}\vec{A}(t)|^2$ *(A-14)*

que é o problema de uma partícula (elétron) em presença de um campo magnético uniforme, na direção z, e de uma radiação eletromagnética, desejamos resolver a equação de Schroedinger

$$\hat{H}\ \Psi(\vec{x},t) = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\ \Psi(\vec{x},t) \qquad (A-15)$$

Desde que a Hamiltoniana não depende das coordenadas x e z, os momentos p_x e p_z são constantes de movimento (pois ainda não estamos supondo nenhum potencial de impurezas).

Na ausência do campo magnético, a solução para a equação de Schroedinger para um elétron num campo eletromagnético dependente do tempo e uniforme, foi discutida no ítem ii), enquanto que a solução para um elétron num campo magnético estático está esquematizado no ítem anterior. Deste modo tendo estas duas soluções como guia, propomos solução para o problema deste ítem, por analogia (Seely [15]).

$$\Psi(\vec{x},t) = exp(-iE_n t/\hbar)\ exp(i\vec{p}.\vec{x}/\hbar)\ .$$
$$exp\left[-\frac{1}{2m\hbar}\int_t \left(|\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}(t')|^2 + R_0(t')\right)dt'\right]\ \Phi_n(\xi) \qquad (a-16)$$

onde $E_n = \hbar\omega_c(n + \frac{1}{2})$

$$p = [p_x, Q(t), p_z] \qquad (A-17)$$

$$\Phi_n(\xi) = (2^n n|\pi^{-1/2} l)^{-1/2}\ exp(-\xi^2/2)\ H_n(\xi)$$

$$\xi = (y - l^2(p_x - G(t))/l$$

Substituindo (A-16) em (A-15), com um cálculo tedioso apenas, encontramos que

$$R_0(t) = -[p_x - G(t)]^2 \qquad (A-18)$$

$$G(t) + iQ(t) = \frac{e\omega_c}{c}\int^t [A_y(t')-iA_x(t')]\quad exp[i\omega_c(t-t')]\ dt'$$

Se nossa radiação é de polarização circular dextrógira, na direção z, temos

$$\vec{A}(t) = A_x\ \hat{e}_x + A_y\ \hat{e}_y \qquad (A-19)$$

onde $A_x = \frac{cE_0}{\omega_0}\cos\omega_0 t$; $\qquad A_y = \frac{cE_0}{\omega_0}\ sen\ \omega_0 t$

que substituindo em (A-18), teremos

$$G(t) = -\frac{e\ E_0\ \omega_c}{\omega_0(\omega_0-\omega_c)}\ \cos\omega_0 t$$
$$(A-20)$$
$$Q(t) = -\frac{e\ E_0\ \omega_c}{\omega_0(\omega_0-\omega_c)}\ sen\ \omega_0 t$$

lembramos que

$$R(t) = |\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}(t)|^2 - |p_x - G(t)|^2$$

então

$$R(t) = p_z^2 + Q^2(t) - \frac{2e}{c} p_x A_x - \frac{2e}{c} Q(t) A_y(t) - G^2(t) +$$

$$+ a\, p_x G(t) + (e^2/c^2)\, A^2(t) \qquad (A-21)$$

assim (A-16) será agora

$$\Psi(\vec{x},t) = L^{-1} \exp(iQ(t)y/\hbar) \,.$$

$$\exp\left(-\frac{i}{2m\hbar}\int dt' \left(\frac{e^2}{c^2} A^2(t') + Q^2(t') - \frac{2e}{c} Q(t')A_y(t') - G^2(t')\right)\right).$$

$$\exp\left(-\frac{i}{m\hbar} p_x \int dt' \left[G(t') - \frac{e}{c} A_x(t')\right]\right) .$$

$$\exp(-ip_z^2\, t/2m\hbar)\, \exp(-iE_n t/\hbar)\, \exp(i\, p_x x + p_z z/\hbar) . \Phi_n(\xi)$$

$$(A-22)$$

ou mesmo, de forma mais compacta

$$\Psi(\vec{x},t) = \exp(i\vec{\zeta}(t).\vec{x}/\hbar)\, \exp(-i\vec{\eta}(t)/\hbar)\, \exp(i\vec{r}(t).\hat{p}/\hbar) \,.$$

$$\exp(-itE/\hbar)\, \exp((ip_x x + ip_z z)/\hbar)\; \Phi_n(\xi) \qquad (A-23)$$

onde

$$E = E_n + (p_z^2/2m)$$

$$\Phi_n(\xi) = (2^n n!\, \pi^{-1/2} l)^{-1/2} \exp(-\xi^2/2)\, H_n(\xi) \qquad (A-24)$$

$$\xi = \left((y + l^2 G(t)) - l^2 p_x\right) / l$$

Observamos que $[\, f(x+a) = \exp(a \frac{d}{dx})\, f(x) \,]$

$$\Phi_n(\xi) = \exp\left[l^2 G(t) \frac{\partial}{\partial y}\right] . \Phi_n(\zeta) \qquad (A-25)$$

onde $\zeta = (y - l^2 p_x) / l$

encontramos (Redmond -Ref. (25))

$$\psi(\vec{x},t) = U\ \Phi_\alpha(\vec{x},t) \qquad (A-26)$$

onde

$$U = exp(i\vec{\zeta}(t).\vec{x}/\hbar)\ exp(-i\vec{\eta}(t)/\hbar)\ exp(i\vec{\delta}(t).\hat{p}/\hbar) \qquad (A-27)$$

com

$$\vec{\delta}(t) = -\vec{r}(t) + \vec{s}(t)$$

$$\vec{r}(t) = \hat{e}_x\ r(t)$$

$$\vec{s}(t) = \hat{e}_y\ G(t) / m\omega_c$$

$$\hat{p} = \hat{e}_x\hat{p}_x + \hat{e}_y\hat{p}_y + \hat{e}_z\hat{p}_z \qquad (A-28)$$

$$\Phi_\alpha(\vec{x},t) = exp(-itE_\alpha/\hbar)\ exp((ip_x x + ip_z z) / \hbar)\ \Phi_n(\zeta)$$

onde

$$\Phi_n(\zeta) = (2^n n! \pi^{1/2} l)^{-1/2}\ exp(-\zeta^2/2)\ H_n(\zeta)$$ *(conhecida solução de Landau)*

$$\zeta = (y - l^2 p_x)/l$$

Fisicamente, a expressão (A-26) significa que fazendo translações espaciais das coordenadas x e y e translação da componente y do momentum, passamos de uma representação dependente do campo eletromagnético (laser), a uma representação independente do mesmo, i.e., a solução de Landau.

Entretanto, se agora consideramos o problema de um elétron, na presença simultânea de radiação e campo magnético, interagindo com o meio - com outros elétrons, núcleos de impurezas- via um potencial $V(\vec{x})$*, i.e.*

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m^*} \left| \hat{p} + \frac{eB}{c} y\hat{e}_x - \frac{e}{c}\vec{A}(t) \right|^2 + V(\vec{x}) \qquad (A-29)$$

e vamos da representação de

$$\Psi \longrightarrow \Phi$$

por meio de uma transformação canônica, baseada em U, transferimos a dependência da radiação do primeiro termo de (A-29) para o ter mo de interação (o potencial de interação), a saber: (Miranda[17])

$$\mathcal{H} \rightarrow \tilde{\mathcal{H}} = U^{+}\{ \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m^*} |\hat{p}+\frac{e}{c}By\hat{e}_x - \frac{e}{c}\vec{A}(t)|^2 + V(\vec{x})\}U =$$

$$= U^{+}\{ \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m^*} |\hat{p}+\frac{e}{c}By\hat{e}_x - \frac{e}{c}\vec{A}(t)|^2\}U + U^{+}V(\vec{x})U =$$

$$= \mathcal{H}_0 + V(\vec{x} + \vec{\delta}(t)) \quad (*) \qquad (A-30)$$

onde

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2m^*}| \hat{p} + \frac{e\ B}{c}\ y\ \hat{e}_x|^2$$

Então, na representação Φ, nossa hamiltoniana é aquela de um elétron num campo magnético uniforme, movendo-se em um <u>potencial deslocado</u>, $V(\vec{x} + \vec{\delta}(t))$

(*) Sabemos que para dois quaisquer operador $\hat{A}$ e $\hat{B}$ que não comutem é válido (se existe $\hat{A}^{-1}$) que $\quad \hat{A}^{-1} f(\hat{B})\hat{A} = f(\hat{A}^{-1}\hat{B}\hat{A})$

Como exemplo seja

$\hat{A} = U = exp(i\vec{\zeta}(t).x/\hbar)\ exp(-i\eta(t)/\hbar)\ exp(i\vec{\delta}(t).\hat{p}/\hbar)$

então $\quad U^{-1}V(\vec{x})U = V(U^{-1}\hat{x}U)$

mas $\quad \hat{x}\, U = \hat{x}\ exp(i\vec{\zeta}(t).\vec{x}/\hbar)exp(-i\eta(t)/\hbar)exp(i\vec{\delta}(t).\hat{p}/\hbar)$

$\qquad = exp(i\vec{\zeta}(t).\vec{x}/\hbar)exp(i\eta(t)/\hbar)\ \hat{x}\ exp(i\vec{\delta}(t).\hat{p}/\hbar)$

$\qquad = exp(i\vec{\zeta}(t).\vec{x}/\hbar)exp(i\eta(t)/\hbar)\ \hat{x}\ |1+(i\vec{\delta}(t)/\hbar)\hat{p}+.....|$

como $\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar$

$\hat{x}U = exp(i\vec{\zeta}(t).\vec{x}/\hbar)exp(-i\eta(t)/\hbar)exp(i\vec{\delta}(t)\hat{p}/\hbar)\ (\vec{x} + \vec{\delta}(t))$

daí temos

$U^{-1}V(\vec{x})U = V(U^{-1}U(\vec{x} + \vec{\delta}(t))) = V(\vec{x} + \vec{\delta}(t))$

Apêndice B

PARTE 1

Do capítulo II, expressão (68), vimos q equação de Schroedinger dependente do tempo

$$\{\frac{1}{2m^*} \mid \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} + \frac{e}{c} \vec{A} \mid^2 + \tilde{V}(\vec{r}) - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \} \Phi_\alpha(r,t) = 0 \qquad (B-1)$$

onde particularmente aqui

$\vec{A}$ = potencial vetor associado ao campo magnético uniforme, que podemos ter igual a

$$= \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{H} \qquad (B-2.1)$$

Comecemos supondo que o efeito da interação com os demais elétrons - vide primeira página do capítulo II - seria levado em conta expressando este fato através de uma média do potencial blindado (deslocado) - vide capítulo I - da impureza, sôbre a "densidade" $|\Phi_\alpha|^2$. Deste modo, levando também em conta, que os campos magnéticos são fortes, o potencial efetivo da impureza ao longo do eixo z é mais importante do que na direção perpendicular (lembrando que os campos atuam na direção z); assim temos dentro destas plausíveis aproximações, a exemplo de Landau [18], Johnson Lippmann [19] e Gasiorowicz [26], a equação de Schroedinger independente do tempo

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 \Phi_\alpha(\vec{x}) + \frac{eH}{2mc} L_z \Phi_\alpha(\vec{x}) + \frac{e^2H^2}{8m\,c^2} (x^2 + y^2)\Phi_\alpha(\vec{x}) +$$

$$+ \tilde{V}(Z)\ \Phi_\alpha(\vec{x}) = E_\alpha \Phi_\alpha(\vec{x}) \qquad (B-2)$$

onde

$$\Phi_\alpha(\vec{x}) = \Phi_{n,p_x}(x,y)\ Z(z) \qquad e$$

$$\tilde{V}(z) = \int \Phi^*_{n,p_x}(x,y)\ \tilde{V}(\vec{x})\ \Phi_{n,p_x}(x,y)\ dx\ dy \qquad (B-3)$$

escrevendo

$$x = \rho\cos\theta \qquad e \qquad y = \rho\,\mathrm{sen}\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta \; \frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{sen\theta}{\rho} \; \frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = sen\theta \; \frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\cos\theta}{\rho} \; \frac{\partial}{\partial\theta} \qquad (B-4)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\,\frac{}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

e propondo a nossa solução

$$\Phi_\alpha(\rho,\theta,z) = P(\rho)\cdot\Theta(\theta)\; Z(z) \qquad (B-5)$$

verificamos que, identicamente

$$P(\rho) = i^n \; (\; 2^{n+m+1} \; m!n!)^{-1/2} \; l^{-1}(\rho/l)^{n+m} \; .$$

$$.\; exp \; [-\rho^2/4l^2] \; L_n^m \; (\rho^2/2l^2) \qquad (B-6)$$

$$\Theta(\theta) = exp(i(n-m)\theta) \qquad (B-7)$$

no entanto, devido a presença de $\tilde{V}(z)$ *em (B-2),* $Z(z)$ *não mais será onda plana* $exp(ikz)$*, mas agora a solução da parte concernente a equação unidimensional na coordenada z, a saber*

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*}\,\frac{d^2Z}{dz} + \tilde{V}(z)\; Z = \mathbf{E}_0 Z \qquad (B-8)$$

com $\mathbf{E}_0$ *sendo, por ora, constante de separação que na parte 2, deste apêndice será pormenorizada e associada com a energia de ligação do elétron a impureza, com* $\tilde{V}(z) = V_0\delta(z)$.

Em coordenadas cilíndricas, por sua vez

$$\tilde{V}(z) = \int \Phi^*_{n,m}(\rho,\theta)\; \tilde{V}(\vec{r})\; \Phi_{n,m}(\rho,\theta)\; \rho\; d\rho\; d\theta$$

ou

$$\tilde{V}(z) = \frac{e}{(2\pi)^3} \iint \phi(\vec{q})\; exp(i\vec{q}.\vec{r})\; |\Phi^*_{n,m}(\rho,\theta)|^2\; \rho\; d\rho\; d\theta\; d\vec{q}$$

$$(B-9)$$

PARTE 2

Para a resolução da equação (B-8), deste apêndice, consideramos o exemplo de Wallace [3]*, que enquanto o alcance do potencial da impureza na direção transversal do campo magnético forte é comparável às dimensões do raio ciclotrônico do movimento eletrônico, o alcance deste potencial na direção paralela ao campo é pequeno comparado às dimensões da função de onda em tal direção. Assim em cálculos no qual o alcance do potencial não é acentuado, podemos representá-lo como - aqui o caso se aplica na direção do eixo z -*

$$\tilde{V}(z) = V_0 \delta(z) \qquad \text{(B-10)}$$

onde V_0 é o alcance do potencial, ou ainda

$$V_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{V}(z)\, dz \qquad \text{(B-11)}$$

Agora resolveremos a equação (B-8) para um elétron que está nas proximidades de um núcleo de impureza isolada cujo potencial efetivo é descrito por (B-10).

A equação de onda, então, toma a seguinte forma para o elétron dentro do "poço" de potencial - Sachs [30]

$$\frac{d^2 Z_i(z)}{dz^2} + K_0^2 Z_i(z) = -\frac{2m^*}{\hbar^2} \tilde{V}(z)\, Z_i(z) =$$

$$= -\frac{2m^*}{\hbar^2} V_0 \delta(z)\, Z_i(z) \qquad \text{(B-12)}$$

e toma a forma fora do poço

$$\frac{d^2 Z_0(z)}{dz^2} + K_0^2 Z_0(z) = 0 \qquad \text{(B-13)}$$

onda o vetor de onda K_0 é definido em termos da energia do elétron por

$$K_0^2 = \frac{2m^* E_0}{\hbar^2}$$

A função de onda do elétron real para este problemaé então obtida resolvendo as equações (B-12) e (B-13) para Z_i e Z_0, respectivamente, e daí usando-se as condições de continuidade para as funções de onda e suas derivadas, na barreira de potencial e impondo que sejam finitas em todo o espaço. Este problema difere do conhecido usualmente, pois a condição de contorno é imposta somente em um ponto (z=0), ao invés dos usuais dois pontos (os 2 lados da caixa unidimensional)

Assim, integrando (B-12) de $-\varepsilon$ a $+\varepsilon$, onde ε é um número muito pequeno, que é feito zero depois da integração,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left\{ \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{d^2 Z_i}{dz^2} \, dz + K_0^2 \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} Z_i \, dz = - \frac{2m^*}{\hbar^2} V_0 \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(z) \, Z_i(z) \, dz \right. \qquad \text{(B-14)}$$

mas como

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} Z_i(z) \, dz = 0 \qquad \text{(B-15)}$$

assim

$$\left. \frac{dZ_i}{dz} \right|_{0^+} - \left. \frac{dZ_i}{dz} \right|_{0^-} = - \frac{2m^*}{\hbar^2} Z_i(0) \qquad \text{(B-16)}$$

A solução exterior Z_0 da equação de onda (B-13) tem a forma de uma onda progressiva movendo-se para a direita

$$Z^+ = A_+ \exp(iK_0 z) \qquad \text{(B-17)}$$

ou uma onda progressiva movendo-se para a esquerda

$$Z^- = A_- \exp(-iK_0 z) \qquad \text{(B-18)}$$

Na ausência do poço de função δ(delta), Z_0 é uma função de onda de elétron livre e as amplitudes A_+ e A_- podem ser tomadas de igual valor e escolhidas igual a unidade.

Vamos denotar a função de onda exterior por

$$Z_0^{\pm} = \exp(\pm iK_0 z) \qquad \text{(B-19)}$$

lembrando que $Z_0^{\pm}$ representam duas soluções independentes.

Agora vamos determinar os autovalores de energia para os elétrons presos dentro de um poço-δ, fazendo uso das condições de contorno

$$Z_0(z=0) = Z_i(z=0) = 1 \qquad (B-20)$$

e equação (B-16).

$$\left.\frac{dZ_i}{dz}\right|_0 = \left.\frac{dZ_0}{dz}\right|_0 = \pm iK_0 \qquad (B-21)$$

combinando (B-20), (B-16) e (B-21) temos

$$\pm iK_0 \mp iK_0 = -\frac{2m^*}{\hbar^2} V_0 \qquad (B-22)$$

das quatro possíveis maneiras de combinar os sinais + e - na equação (B-22), dos resultados não nulos vêm da escolha de sinais semelhantes, dando

$$\pm iK_0 = -\frac{m^*}{\hbar^2} V_0 \qquad (B-28)$$

então a função de onda interior é

$$Z_i = exp(m^*V_0 z/\hbar^2) \qquad (B-24)$$

Satisfazendo as condições de serem finitos, as duas soluções independentes, acima, devem ser válidas somente nas seguintes regiões

$$\begin{aligned} Z^+ &= exp(m^*V_0 z/\hbar^2) \qquad z<0 \\ Z^- &= exp(-m^*V_0 z/\hbar^2) \qquad z>0 \end{aligned} \qquad (B-25)$$

de tal sorte que a energia

$$\boxed{E_0 = \left(\frac{m^*}{2\hbar^2}\right) V_0^2} \qquad (B-26)$$

é o único estado ligado associado com potencial tipo-δ.

Normalizando

$$A^2 \left[\int_\infty^0 dz\ exp(2m^*V_0 z/\hbar^2) + \int_0^\infty dz\ exp(-2m^*V_0 z/\hbar^2) \right] = 1$$

resultando

$$A = \left[m^*V_0/\hbar^2\right]^{1/2}$$ e finalmente

$$Z(z) = \left[m^*V_0/\hbar^2\right]^{1/2} exp(-m^*V_0|z|/\hbar^2) \qquad (B-27)$$

Referências

1. *Y. Yafet / R. Keyes / N. Adams*
   J. Phys. Chem. Solids, 1, 137(1956)
2. *Kh. Amirkhanov / R. Bashirov / A. Mollaev*
   Sov. Phys - Solid State 13, 701(1971)
3. *P. Wallace*
   J. Phys. C: Solid St. Phys., 7, 1136 (1974)
4. *M. Dyakonov / A. Efros / D. Mitchell*
   Phys. Rev., 180, 813 (1969)
5. *T. Poehler*
   Phys. Rev. B, 4, 1223 (1971)
6. *E. Fenton / R. Haering*
   Phys. Rev., 159, 593 (1967)
7. *S. Jog / P. Wallace*
   J. Phys. C: Solid State Phys, 11, 2763 (1978)
8. *H. Ehremreich / M. Cohen*
   Phys. Rev., 115, 786 (1959)
9. *P. Zyryanov*
   Sov. Phys. JETP, 13, 751 (1961)
10. *J. Quinn / S. Rodrigues*
    Phys. Rev., 128, 2487 (1962)
11. *N. Mermin / E. Canel*
    Ann. Phys., 26, 247 (1964)
12. *M. Lima / C. Lima / L. C. Miranda*
    J. Phys. C: Solid State Phys., 12, 001 (1979)
13. *E. Harris*
    Advances in Plasma Physics. Vol. 3. Eds.: A. Simon e W. Thompson. Reading, Mass : Addison-Wesley (1969)
14. *Landau et Lifchitz*
    Mécanique Quantique (Théorie Non Relastiviste)
    Éditions Mir (Moscou) (1966)

15. J. Seely
Am. J. Phys., 42, 326 (1974)

16. L. C. Miranda
J. Phys. C: Solid State Phys., 9, 2971 (1976)

17. L. C. Miranda
Solid St. Comm., 22, 1[illegible]3 (1977)

18. L. Landau
Z. Phys., 64, 629 (1930)

19. M. Johnson / B. Lippmann
Phys. Rev., 76, 828 (1949)

20. M. Stephen
Phys. Rev., 129, 997 (1963)

21. E. Harris
Am J. Phys., 39, 683 (1971)

22. N. Ashcroft / N. Mermin
Solid State Physics
Holt, Rinehart, Wiston (N.Y.) (1976)

23. P. Kiréev
La Physique des Semiconducteurs
Éditions Mir (Moscou), (1975)

24. R. C. C. Leite / A. R. B. de Castro
Física do Estado Sólido
Ed. Edgard Blucher Ltda. , UNICAMP (1978)

25. P. J. Redmond
J. Math. Phys., 6, 1163 (1965)

26. Stephen Gasiorowicz
Quantum Physics
John Willey and Sons (1974)

27. M. Jain / N. Tzoar
Phys. Rev., A15, 147 (1977)

28. P. Morse / H. Feshback
Methods of Theoretical Physics
McGraw-Hill Book Co. (1953)

29. J. S. Blackemore
Semiconductor Statistics
Pergamon Press (london) (1962)

30. M. Sachs
Solid State Theory
Dover Publ. Inc. (N.Y.) (1974)