



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
Instituto de Física “Gleb Wataghin”

ANDERSON LUIZ BRANDÃO DE SOUZA

# OSCILAÇÕES ACÚSTICAS BARIÔNICAS

CAMPINAS  
2018

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**

Instituto de Física “Gleb Wataghin”

**ANDERSON LUIZ BRANDÃO DE SOUZA**

**OSCILAÇÕES ACÚSTICAS BARIÔNICAS**

Dissertação apresentada ao Instituto de Física “Gleb Wataghin” da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Física, na área de Física.

**Orientador: Pedro Cunha de Holanda**

**Co-orientadora: Flávia Sobreira Sanchez**

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO ANDERSON LUIZ BRANDÃO DE SOUZA E ORIENTADA PELO PROF. DR. PEDRO CUNHA DE HOLANDA.

**CAMPINAS  
2018**

**Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s):** FAPESP, 2015/26532-4; CNPq, 131957/2016-3

**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0003-3200-569>

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca do Instituto de Física Gleb Wataghin  
Maria Graciele Trevisan - CRB 8/7450

So89o Souza, Anderson Luiz Brandão de, 1994-  
Oscilações acústicas bariônicas / Anderson Luiz Brandão de Souza. –  
Campinas, SP : [s.n.], 2018.

Orientador: Pedro Cunha de Holanda.  
Coorientador: Flávia Sobreira Sanchez.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física Gleb Wataghin.

1. Cosmologia. 2. Estruturas em larga escala (Astronomia). 3. Galáxias. I. Holanda, Pedro Cunha de, 1973-. II. Sanchez, Flávia Sobreira, 1982-. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física Gleb Wataghin. IV. Título.

#### Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Baryon acoustic oscillations

**Palavras-chave em inglês:**

Cosmology

Large scale structure (Astronomy)

Galaxies

**Área de concentração:** Física

**Titulação:** Mestre em Física

**Banca examinadora:**

Pedro Cunha de Holanda [Orientador]

Rogério Rosenfeld

Marcio José Menon

**Data de defesa:** 29-06-2018

**Programa de Pós-Graduação:** Física

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE **ANDERSON LUIZ BRANDÃO SOUZA – RA 134925** APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”, DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 29 / 06 / 2018.

**COMISSÃO JULGADORA:**

- **Prof. Dr. Pedro Cunha de Holanda – Orientador – IFGW/UNICAMP**
- **Prof. Dr. Rogério Rosenfeld – IFT/UNESP**
- **Prof. Dr. Marcio José Menon – IFGW/UNICAMP**

**OBS.:** Informo que as assinaturas dos respectivos professores membros da banca constam na ata de defesa já juntada no processo vida acadêmica do aluno.

---

*Aos meus pais, Zélia & Amilton*

# Agradecimentos

---

Em primeiro lugar, agradeço aos meus pais, Zélia e Amilton - a quem dedico este trabalho. Serei eternamente grato pelo amor, dedicação e apoio incondicional que sempre recebi de vocês, me encorajando a realizar os meus sonhos!

Ao meu orientador Prof Pedro Cunha de Holanda, pelos ensinamentos, conselhos e disponibilidade que teve comigo desde o início da minha graduação até hoje.

À Prof<sup>a</sup> Flávia Sobreira Sanchez, sua co-orientação e ajuda foram fundamentais para o direcionamento e conclusão desse projeto.

A todos os meus professores, sem exceção, pois todos de alguma forma contribuíram para a minha formação pessoal e acadêmica. Em particular, à minha primeira professora de Física, Maria Clara Igrejas Amon, muito obrigado!

Aos amigos que fiz durante a graduação e o mestrado na Unicamp, que compartilharam comigo momentos de aprendizados, dúvidas, angústias (provas) e muitas conquistas. Um agradecimento especial ao meu bem, Bianca, pelo carinho e paciência de todas as horas.

A todos os funcionários da Unicamp, em especial do IFGW: secretarias de graduação e pós-graduação, biblioteca e Departamento de Raios Cósmicos e Cronologia.

Aos meus colegas de pesquisa dos grupos GEFAN e de Cosmologia, ambos do DRCC, e do grupo DES-Brazil pelas ricas discussões e ajuda constante.

Ao Laboratório Interinstitucional de e-Astronomia (LIInA) pelo suporte técnico, computacional e por me colocar em contato com os grandes pesquisadores nacionais e internacionais nas áreas de Astronomia e Cosmologia.

Por fim, agradeço as agências de fomento pelo financiamento deste trabalho: processo 131957/2016-3, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e processo 2015/26532-4, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) sob a seguinte declaração de responsabilidade:

*“As opiniões, hipóteses e conclusões ou recomendações expressas neste material são de responsabilidade do autor e não necessariamente refletem a visão da FAPESP”.*

## Resumo

A detecção de um pico na função de correlação radial em um catálogo de galáxias observadas pelo Sloan Digital Sky Survey é uma evidência indireta do fenômeno de oscilações acústicas bariônicas, *i.e.*, flutuações na densidade de matéria visível. Este projeto de mestrado visou estudar fundamentos de cosmologia a partir das oscilações acústicas bariônicas, analisar a origem desse fenômeno, a predição teórica e como medir os seus observáveis - as funções de correlação e os espectros de potência. O resultado final desse trabalho foi a criação de uma pipeline para fazer estimativas de parâmetros de galaxy-bias e cosmológicos a partir das medidas dos coeficientes do espectro de potência angular de galáxias, cujos resultados concordam com os valores do modelo fiducial do catálogo simulado MICE.

**Palavras-chave:** BAO, cosmologia observacional, estruturas de larga-escala.

## Abstract

The detection of a peak in the radial correlation function in galaxies catalog observed by the Sloan Digital Sky Survey is indirect evidence of the phenomenon of baryon acoustic oscillations, *i.e.*, fluctuations on density of visible matter. This master's project aimed to study the fundamentals of cosmology from the baryon acoustic oscillations, to analyze the origin of this phenomenon, the theoretical prediction and how to measure its observables - correlation function and power spectrum. The final result of this project has been the creation of a pipeline to make estimates of galaxy-bias and cosmological parameters from the measurements of galaxy angular power spectrum coefficients, whose results agree with the values of the fiducial model of the simulated catalog MICE.

**Keywords:** BAO, observational cosmology, large-scale structure.



# Lista de Ilustrações

---

1.1	Os espectros de potência observados nos projetos SDSS-II e BOSS [9]. . . . .	15
2.1	Sistema de coordenadas no espaço comóvel invariante pela expansão . . . . .	24
2.2	A história do universo esquematizada pelo Particle Data Group (PDG) . . . . .	31
2.3	Diagrama de Hubble $\mu \times z$ , fonte de dados: SuperNova Legacy Survey [29] . . . . .	34
2.4	Ajuste dos modelos teóricos com os dados experimentais . . . . .	35
2.5	Modelos de expansão em termos do parâmetro $\Omega_{\Lambda 0}$ . . . . .	36
3.1	WMAP/NASA 9-Year Microwave Sky: flutuações de temperatura da CMB . . . . .	39
3.2	SDSS III Galaxy Map 2010 - 2013: mapa 3D da distribuição de galáxias . . . . .	40
4.1	Potência gravitacional da teoria perturbações lineares . . . . .	59
4.2	Espectro de potência e as oscilações acústicas bariônicas . . . . .	60
4.3	Espectro de potência e os efeitos de $\Omega_{\Lambda}$ . . . . .	61
4.4	Espectro de potência em diferentes redshifts . . . . .	62
4.5	Espectro de potência linear e não-linear . . . . .	62
4.6	Espectro de potência não-linear para diferentes redshifts . . . . .	63
4.7	Função de seleção para diferentes redshift shells . . . . .	71
4.8	Função de correlação angular para diferentes redshifts shells . . . . .	71
4.9	Influência de $\sigma_0$ na função de seleção e correlação angular . . . . .	72
4.10	Cálculo teórico dos coeficientes $C_{\ell}^i$ sem e com o efeito de RSD . . . . .	75
4.11	Cálculo teórico dos coeficientes $C_{\ell}^i$ para diferentes redshift shells . . . . .	75
5.1	Mapa de densidade com todas as galáxias do catálogo MICE . . . . .	80
5.2	Diagrama $g - r \times M_R^{\text{evol}}$ e a classificação em galáxias azuis e vermelhas . . . . .	80
5.3	Mapas de flutuações de densidade para as quatro faixas de photo-z . . . . .	82
5.4	Medidas de $C_{\ell}$ para as quatro faixas photo-z . . . . .	86
5.5	Esquematização da estrutura do CosmoSIS . . . . .	90
5.6	Dispersão, autocorrelação e convergência dos parâmetros no sampler emcee . . . . .	91
5.7	Regiões de contorno e distribuições marginalizadas dos parâmetros de galaxy-bias . . . . .	92
5.8	Dispersão, autocorrelação e convergência dos parâmetros cosmológicos . . . . .	94
5.9	Regiões de contorno e distribuições marginalizadas dos parâmetros cosmológicos . . . . .	95
5.10	Medidas de $C_{\ell}$ e os melhores ajustes do modelo teórico . . . . .	96

# Lista de Tabelas

---

2.1	Parâmetros cosmológicos - Ref Planck [4]	28
2.2	Composição do universo - Ref Planck [4]	30
4.1	Parâmetros cosmológicos: CLASS input	58
4.2	Resultados: CLASS outputs	59
4.3	Exemplos de redshift shells	70
5.1	Cosmologia do MICE	77
5.2	Redshift shells e contagem de galáxias	81
5.3	Galaxy-bias do MICE: resultados	93
5.4	Cosmologia do MICE: resultados	94

# Lista de Abreviaturas e Siglas

---

## Conceitos e observáveis cosmológicos

- ACF** - Angular Correlation Function
- APS** - Angular Power Spectrum
- BAO** - Baryon Acoustic Oscillation
- CDM** - Cold Dark Matter
- CMB** - Cosmic Microwave Background
- $C\nu\text{B}$**  - Cosmic Neutrino Background
- LSS** - Large-Scale Structure
- RSD** - Redshift Space Distortion

## Levantamentos e simulação de dados astronômicos

- DES** - Dark Energy Survey
- DESI** - Dark Energy Spectroscopic Instrument
- LSST** - Large Synoptic Survey Telescope
- MICE** - Marenostrum Institut de Ciències de l'Espai Simulations
- SDSS** - Sloan Digital Sky Survey
- SNLS** - SuperNova Legacy Survey
- WMAP** - Wilkinson Microwave Anisotropy Probe

## Livrarias, códigos e algoritmos

- CAMB** - Code for Anisotropies in the Microwave Background
- CLASS** - Cosmic Linear Anisotropy Solving System
- CosmoSIS** - Modular Cosmological Parameter Estimation
- Healpix** - Hierarchical Equal Area isoLatitude Pixelation
- MCMC** - Markov Chain Monte Carlo
- NaMaster** - Monte Carlo Apodised Spherical Transform Estimator

# Sumário

---

<b>Dedicatória</b>	<b>5</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>6</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>14</b>
<b>2 Modelo Cosmológico Padrão</b>	<b>16</b>
2.1 Relatividade Geral: uma introdução . . . . .	16
2.1.1 Trajetórias no espaço-tempo curvo . . . . .	16
2.1.2 A equação de Einstein . . . . .	21
2.2 A dinâmica do universo em expansão . . . . .	22
2.2.1 Homogeneidade e isotropia . . . . .	22
2.2.2 Equações de Friedmann . . . . .	25
2.2.3 Cenários de evolução . . . . .	26
2.2.4 Redshift e medidas de distâncias . . . . .	31
2.2.5 Diagrama de Hubble da SNe Ia . . . . .	33
<b>3 Flutuações cosmológicas</b>	<b>37</b>
3.1 Teoria geral para perturbações lineares . . . . .	37
3.1.1 Observações astronômicas . . . . .	37
3.1.2 Estado de ordem zero . . . . .	40
3.1.3 Dinâmica das flutuações . . . . .	41
3.1.4 Decomposição SVT e liberdade de calibre . . . . .	42
3.2 Evolução das perturbações no limite newtoniano . . . . .	44
3.2.1 Interação bárion-fóton . . . . .	46
3.2.2 Conteúdo do universo . . . . .	50
3.3 Estruturas de larga-escala . . . . .	51
3.3.1 Dinâmica na era da matéria . . . . .	52
3.3.2 Condições iniciais da recombinação . . . . .	54
<b>4 Cosmologia observacional</b>	<b>57</b>
4.1 Estruturas de larga-escala: observáveis cosmológicos . . . . .	57
4.1.1 Espectro de potência . . . . .	57

4.1.2	Função de correlação radial . . . . .	63
4.2	Função de correlação angular . . . . .	65
4.2.1	Redshift space distortion . . . . .	65
4.2.2	Photo-z e função de seleção . . . . .	69
4.3	Espectro de potência angular . . . . .	72
4.3.1	Espaço harmônico . . . . .	72
<b>5</b>	<b>Resultados</b>	<b>76</b>
5.1	Catálogos de galáxias do MICE . . . . .	76
5.1.1	Especificações do catálogo . . . . .	76
5.1.2	Mapas das flutuações de densidade . . . . .	78
5.2	Medidas do espectro de potência angular . . . . .	81
5.2.1	NaMaster: método do pseudo- $C_\ell$ . . . . .	81
5.2.2	Redução de dados . . . . .	84
5.3	Metodologia . . . . .	85
5.3.1	Markov Chain Monte Carlo . . . . .	85
5.3.2	CosmoSIS . . . . .	88
5.4	Estimativas dos parâmetros . . . . .	90
5.4.1	Galaxy-bias . . . . .	90
5.4.2	Parâmetros cosmológicos . . . . .	92
<b>6</b>	<b>Conclusões e perspectivas</b>	<b>97</b>
	<b>Referências</b>	<b>99</b>

---

# Introdução

---

# 1

O universo atual é composto por muitos planetas e estrelas que não estão distribuídos aleatoriamente pelo espaço, eles formam grandes estruturas como galáxias, aglomerados (*cluster*) e super-aglomerados de galáxias, mas também há imensos vazios (*voids*) de matéria. Um dos principais objetivos da Cosmologia Moderna é entender como são formadas as estruturas de larga-escala.

Na era primordial, elétrons, prótons, nêutrons, neutrinos e fótons estão imersos em um quente e denso plasma. Devido à expansão e ao resfriamento, as interações se tornam menos intensas. Logo, os neutrinos se desacoplam da matéria e começam a vagar livremente pelo espaço, constituindo uma radiação cósmica de fundo, a  $C\nu B$ . Por terem uma seção de choque muito maior que a dos neutrinos, os fótons continuam no plasma interagindo com elétrons e prótons, até o instante em que se formam os primeiros átomos de hidrogênio - chamada época da recombinação. Como os fótons interagem menos com corpos neutros e em um estado bem mais frio, eles se desacoplam da matéria e compõem uma outra radiação de fundo, a CMB (*cosmic microwave background*).

As radiações de fundo  $C\nu B$  e CMB são apelidadas de “ecos” do Big-Bang, então detectá-las significa obter informações sobre a “infância” do universo. Os neutrinos da  $C\nu B$  são de muito baixa energia e dificilmente serão observados diretamente. Entretanto, grandes projetos de missões espaciais, o Wilkinson Microwave Anisotropy Probe - WMAP/NASA e o Planck - European Space Agency (ESA), monitoraram flutuações na temperatura da CMB e estimaram parâmetros importantes do Modelo Cosmológico Padrão  $\Lambda$ -CDM, como o parâmetro de Hubble da expansão e os de densidade para a matéria escura, bariônica e energia escura [4, 30].

Ainda no plasma primordial, antes do desacoplamento dos fótons, as regiões mais densas se atraem via força gravitacional. Porém existe uma pressão de radiação dos fótons emitidos nas reações de aniquilação e nos espalhamentos que tende a afastá-las. De modo que as primeiras aglomerações são formadas por um núcleo de matéria escura e cascas compostas por matéria bariônica interagindo com os fótons, criando ondas esféricas com um grande comprimento de onda - denominado horizonte de som. Um efeito análogo à propagação de ondas sonoras no ar por causa da diferença de pressão.

Após o desacoplamento dos fótons, a força gravitacional e a expansão cósmica podem manter essa configuração estável, oscilando em torno do horizonte de som ( $r_s$ ). Então, comparar as medidas observacionais de  $r_s$  com valores previstos por modelos teóricos será uma nova fonte de informações para estudar a formação e a evolução de estruturas de larga-escala. Assim as oscilações acústicas bariônicas: flutuações na distribuição da matéria visível também podem ser consideradas ecos da era primordial.

Um projeto chamado Sloan Digital Sky Survey (SDSS-I) mapeou 46,748 galáxias, cobrindo cerca de 9% da área do céu e um volume igual ao de um cubo cujos lados medem 4 bilhões de anos-luz, entre os anos de 2000 e 2005 no Apache Point Observatory na cidade de Sunspot, Novo México - EUA. O principal resultado desse projeto foi a detecção de um pico na função de correlação radial, com excelente correspondência de forma e a localização previstas para a época da recombinação, ou seja, uma assinatura das oscilações acústicas bariônicas [8].

Um novo projeto foi desenvolvido para estudar especificamente esse fenômeno: Baryon Oscillation Spectroscopic Survey (BOSS) do SDSS-III, mapeando grandes aglomerados de galáxias entre 2008 e 2014 [9]. A figura 1.1 mostra os espectros de potência observados nos projetos SDSS-II e BOSS quando comparados com a solução prevista para um espaço suave, portanto as oscilações observadas são possíveis apenas em uma distribuição irregular de matéria.

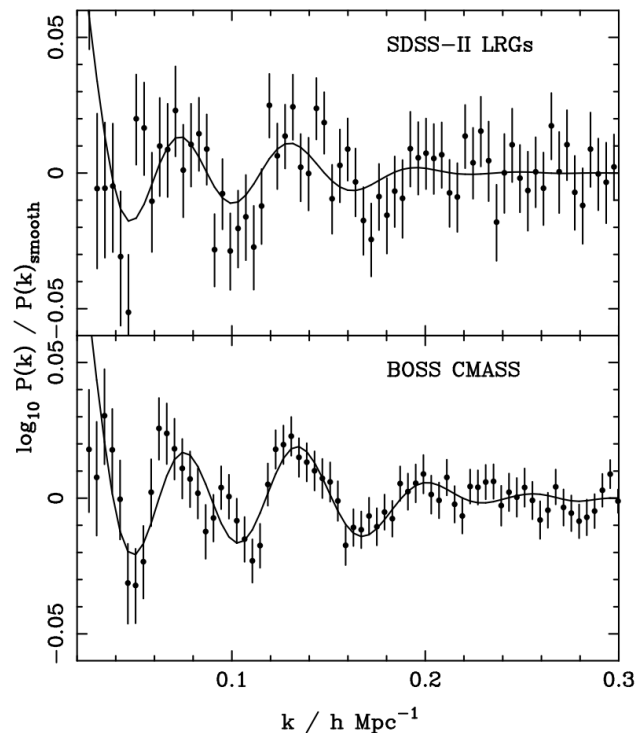


Figura 1.1: Os espectros de potência observados nos projetos SDSS-II e BOSS [9].

# Modelo Cosmológico Padrão

## 2

### 2.1 Relatividade Geral: uma introdução

Nesta seção há uma breve introdução aos conceitos básicos da Teoria da Relatividade Geral, mas que serão fundamentais para o entendimento da equação de Friedmann e assim estudar a dinâmica do universo em expansão.

#### 2.1.1 Trajetórias no espaço-tempo curvo

O quadrvetor posição  $\mathbf{r}$  descreve quando e onde acontece um evento. Em coordenadas cartesianas:  $\mathbf{r} = (t, x, y, z)$  mas também, dependendo da simetria do problema que será analisado, pode ser conveniente escolher um outro conjunto de coordenadas  $\{x^\alpha\}$  com  $\alpha = 0, 1, 2, 3$  que parametriza todo o espaço-tempo, logo:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^\alpha) \Leftrightarrow t = t(x^\alpha), \quad x = x(x^\alpha), \quad y = y(x^\alpha), \quad z = z(x^\alpha).$$

Por exemplo, em coordenadas esféricas:  $\{x^\alpha\} = (t, r, \theta, \phi)$  e cilíndricas:  $\{x^\alpha\} = (t, \rho, \phi, z)$ . Dada uma parametrização localmente inversível, temos os campos vetoriais tangentes às curvas coordenadas e os campos gradientes normais às superfícies de nível, respectivamente:

$$\mathbf{e}_\alpha \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^\alpha}, \quad \mathbf{e}^\alpha \equiv \nabla_{\mathbf{r}} x^\alpha \Rightarrow \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}^\beta = \delta_\alpha^\beta \quad (2.1.1)$$

de modo que os conjuntos natural  $\{\mathbf{e}_\alpha\}$  e dual  $\{\mathbf{e}^\alpha\}$  são bases para o espaço-tempo. O tensor métrico é definido pelo produto interno usual entre os vetores da base:

$$g_{\alpha\beta} \equiv \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta, \quad g^{\alpha\beta} \equiv \mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{e}^\beta \Rightarrow g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}, \quad g_{\alpha\lambda} g^{\lambda\beta} = \delta_\alpha^\beta \quad (2.1.2)$$

e usando a relação de ortogonalidade, podemos relacionar a componente de um vetor  $\mathbf{A}$  na base natural - dita contravariante  $A^\alpha$  - com a componente do mesmo vetor na base dual  $A_\alpha$  chamada de covariante:

$$\mathbf{A} = A^\alpha \mathbf{e}_\alpha = A_\alpha \mathbf{e}^\alpha \Rightarrow A_\alpha = g_{\alpha\beta} A^\beta, \quad A^\alpha = g^{\alpha\beta} A_\beta \quad (2.1.3)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = g_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta = A^\alpha B_\alpha = A_\alpha B^\alpha.$$

No contexto da relatividade geral, a força gravitacional da mecânica newtoniana não é uma interação atrativa exclusivamente entre corpos massivos, mas o resultado da curvatura do



espaço-tempo devido à distribuição de energia-momento. Assim, dizemos que uma partícula em um campo gravitacional é na verdade uma partícula livre em um espaço curvo. Então, reinterpretando a primeira lei de Newton: na ausência de força resultante, um corpo tende a ficar em repouso ou em velocidade constante, com o cuidado que velocidade constante em um espaço curvo não implica em movimento retilíneo e uniforme como no espaço euclidiano. Logo, define-se **geodésicas como sendo curvas sem aceleração** e o postulado: *partículas livres seguem geodésicas* é uma ampliação da mecânica newtoniana [13, 32],

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{dx^\alpha}{d\tau} \mathbf{e}_\alpha \right) = \mathbf{0}, \quad (2.1.4)$$

sendo  $\tau$  o tempo próprio que parametriza a curva, ou qualquer parâmetro afim  $\lambda = a\tau + b$  com  $a, b$  constantes reais.

Note que não estamos mencionando o conceito de força ou massa, trata-se de um postulado mais geral, que inclusive descreve trajetórias de partículas sem massa. Definimos os símbolos de conexão afim, ou também chamados de símbolos de Christoffel, implicitamente em termos das derivadas dos campos vetoriais,

$$\partial_\beta \mathbf{e}_\alpha \equiv \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\mu \Rightarrow \partial_\beta \mathbf{e}^\alpha = -\Gamma^\alpha_{\beta\mu} \mathbf{e}^\mu, \quad \Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \Gamma^\mu_{\beta\alpha} \quad (2.1.5)$$

a partir da métrica (2.1.2) obtemos:

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (\partial_\alpha g_{\lambda\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\lambda} - \partial_\lambda g_{\alpha\beta}). \quad (2.1.6)$$

utilizando a notação,

$$\dot{x}^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\tau}, \quad \partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

e a equação da geodésica em coordenadas é dada por:

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0. \quad (2.1.7)$$

Uma maneira equivalente para se obter a trajetória de uma partícula livre é via **princípio de Hamilton**, minimizando o funcional integral da ação  $S$ :

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{L}(x^\alpha, \dot{x}^\alpha) d\tau, \quad \frac{dS}{dx^\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) = 0 \quad (2.1.8)$$

e a lagrangiana de uma partícula livre é simplesmente a sua energia cinética

$$\mathcal{L}(x^\alpha, \dot{x}^\alpha) = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta. \quad (2.1.9)$$

Considere um campo vetorial  $\mathbf{A}(x^\alpha)$  ao longo de uma curva  $x^\alpha(\tau)$ , ou seja, a função composta  $\mathbf{A}(x^\alpha(\tau))$ . Daí, a derivada direcional deste campo:

$$\frac{d\mathbf{A}}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(A^\mu \mathbf{e}_\mu) = \left( \frac{dA^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} A^\beta \right) \mathbf{e}_\mu = \dot{x}^\alpha (\partial_\alpha A^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} A^\beta) \mathbf{e}_\mu.$$

O operador **derivada covariante** é definido por:

$$\nabla_\alpha A^\mu \equiv \partial_\alpha A^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} A^\beta \quad (2.1.10)$$

logo,

$$\frac{d\mathbf{A}}{d\tau} = \dot{x}^\alpha (\nabla_\alpha A^\mu) \mathbf{e}_\mu \quad (2.1.11)$$

e conseqüentemente

$$\frac{DA^\mu}{D\tau} \equiv \frac{dA^\mu}{d\tau} \cdot \mathbf{e}^\mu = \dot{x}^\alpha (\nabla_\alpha A^\mu)$$

são as componentes contravariantes do vetor derivada direcional e possuem a mesma regra de transformação sob a mudança de referencial inercial  $K(x^\alpha) \rightarrow K'(x^{\alpha'})$  que as componentes de qualquer vetor:

$$A'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} A^\beta.$$

Então, para as componentes covariantes basta usar a segunda igualdade da expressão (2.1.5) e a extensão para componentes de tensores de ordem superior é feita impondo que operador diferencial satisfaça a regra de Leibniz:  $T^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu \Rightarrow \nabla_\alpha T^{\mu\nu} = (\nabla_\alpha A^\mu) B^\nu + A^\mu (\nabla_\alpha B^\nu)$ ,

$$\nabla_\alpha A_\beta = \partial_\alpha A_\beta - \Gamma^\mu_{\alpha\beta} A_\mu \quad (2.1.12)$$

$$\nabla_\alpha T^{\mu\nu} = \partial_\alpha T^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} T^{\beta\nu} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} T^{\mu\beta}.$$

Note que o operador derivada covariante  $\nabla_\alpha$  é a aplicação diferencial que leva vetores em vetores e não mais a derivada usual  $\partial_\alpha$  pois, dependendo da parametrização escolhida, o conjunto de vetores  $\{\mathbf{e}_\alpha\}$  será uma base local, *i.e.* variando de ponto a ponto  $\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_\alpha(x^\mu)$ , o que chamamos de *moving frame*. Os símbolos de Christoffel podem ser entendidos como uma correção de primeira ordem que relaciona as componentes do vetor quando aplicado em pontos distintos. Dizemos que um vetor é **transportado paralelamente** sob uma curva  $x^\alpha(\tau)$  se as componentes da sua derivada direcional são nulas:

$$\dot{x}^\alpha (\nabla_\alpha A^\mu) = 0. \quad (2.1.13)$$

Lembrando que  $\dot{x}^\alpha$  são as componentes da velocidade, assim a equação da geodésica (2.1.7) é exatamente o transporte paralelo

$$\dot{x}^\alpha (\nabla_\alpha \dot{x}^\mu) = 0, \quad (2.1.14)$$

daí podemos afirmar que geodésicas são curvas sem aceleração ou, equivalentemente, são curvas onde o vetor velocidade é transportado paralelamente.

Na análise dos efeitos de curvatura sobre as trajetórias de partículas livres, temos que lembrar as leis de Newton são suficientes para descrever o regime de baixas velocidades e além disso, ainda não está claro qual é a relação entre métrica e gravidade. Sempre que precisarmos de uma intuição, iremos recorrer ao limite newtoniano: a geometria é localmente descrita pela métrica de Minkowski da relatividade especial,

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad |h_{\alpha\beta}| \ll 1,$$

as velocidades são baixas  $|\dot{x}^i| \ll 1$ , o tempo próprio e o coordenado são semelhantes  $\tau \simeq t$ , em um universo estático ( $\partial_0 g_{\alpha\beta} = 0$ ) e sem inversão espaço-temporal ( $g_{0i} = 0$ ), simplificamos a equação de movimento:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma^i{}_{00} + 2 \underbrace{\Gamma^i{}_{0j}}_{=0} \dot{x}^j + \Gamma^i{}_{jk} \underbrace{\dot{x}^j \dot{x}^k}_{\ll 1} = 0 \Rightarrow \\ \frac{d^2 x^i}{dt^2} \simeq -\delta^{ij} \partial_j \left( \frac{1}{2} h_{00} \right) = -\delta^{ij} \partial_j \Phi, \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

e recuperamos a segunda lei de Newton para uma partícula teste, na qual o potencial gravitacional  $\Phi$  relaciona-se diretamente com o termo de perturbação da métrica  $h_{00}$ .

O próximo passo é começar a entender a origem da distorção geométrica em relação ao espaço-tempo chato, novamente recorrendo ao regime clássico: um potencial gravitacional cuja fonte é uma distribuição volumétrica de massa com densidade  $\rho$  segue a equação de Poisson:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \Rightarrow \nabla^2 h_{00} = 8\pi G \rho. \quad (2.1.16)$$

Logo, o espaço diz para a partícula teste como se mover (2.1.15) e a dispersão de matéria diz ao espaço como se curvar (2.1.16). Além disso, como o termo de perturbação da métrica segue uma equação de segunda ordem, podemos escolher um sistema de coordenadas - chamado de **coordenadas normais** - onde em torno de um ponto  $p$ , a métrica é localmente descrita pela métrica de Minkowski da relatividade especial, onde as primeiras correções são as seguintes:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}(x) &\simeq \eta_{\alpha\beta}(p) + \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\nu g_{\alpha\beta}(p) (x^\mu - p^\mu) (x^\nu - p^\nu), \\ \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}(x) &\simeq 0 + \partial_\lambda \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}(p) (x^\lambda - p^\lambda). \end{aligned}$$

Para avançarmos na compreensão da estrutura do espaço-tempo devemos analisar a distribuição das geodésicas. No espaço euclidiano sem nenhuma restrição, as geodésicas são retas e se elas são inicialmente paralelas, a distância permanece a mesma e não há intersecção em nenhum ponto; no espaço curvo, as geodésicas que em um ponto são paralelas, logo depois podem ser convergentes ou divergentes. Considere um mapa  $f^\alpha(\tau, s)$  tal que, para cada  $s_0$  constante,  $f(\tau, s_0)$  é uma geodésica e temos uma família de geodésicas paralelas conforme variamos  $s$ ; mas também para cada  $\tau_0$  fixo,  $f^\alpha(\tau_0, s)$  são as curvas transversais. Logo os vetores tangentes, transversais e a separação entre as geodésicas são respectivamente:

$$\frac{\partial f^\alpha}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial f^\alpha}{\partial s}, \quad \xi^\alpha = \frac{\partial f^\alpha}{\partial s} \Delta s.$$

Usando a simetria dos símbolos de conexão afim da expressão (2.1.5), a derivada dos vetores transversais ao longo das geodésicas são iguais à dos vetores tangentes sob as curvas transversais:

$$\frac{D}{D\tau} \left( \frac{\partial f^\alpha}{\partial s} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial f^\alpha}{\partial s} \right) + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{\partial f^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial f^\nu}{\partial s} = \frac{D}{Ds} \left( \frac{\partial f^\alpha}{\partial \tau} \right),$$

agora vamos calcular como as geodésicas se afastam ou se aproximam uma da outra:

$$\begin{aligned} \frac{D^2}{D\tau^2} \left( \frac{\partial f^\alpha}{\partial s} \right) &= \frac{D}{D\tau} \left[ \frac{D}{Ds} \left( \frac{\partial f^\alpha}{\partial \tau} \right) \right] = \frac{D}{D\tau} \left( \frac{\partial f^\mu}{\partial s} \nabla_\mu \frac{\partial f^\alpha}{\partial \tau} \right) = \\ &= \frac{D}{Ds} \left( \frac{\partial f^\mu}{\partial \tau} \right) \nabla_\mu \frac{\partial f^\alpha}{\partial \tau} + \frac{\partial f^\mu}{\partial s} \frac{D}{D\tau} \left( \nabla_\mu \frac{\partial f^\alpha}{\partial \tau} \right), \end{aligned}$$

a partir da equação da geodésica,

$$\frac{D}{Ds} \left( \frac{\partial f^\mu}{\partial \tau} \right) \nabla_\mu \frac{\partial f^\alpha}{\partial \tau} = \frac{D}{Ds} \underbrace{\left( \frac{\partial f^\mu}{\partial \tau} \nabla_\mu \frac{\partial f^\alpha}{\partial \tau} \right)}_{=0} - \frac{\partial f^\mu}{\partial \tau} \frac{D}{Ds} \left( \nabla_\mu \frac{\partial f^\alpha}{\partial \tau} \right),$$

portanto,

$$\begin{aligned} \frac{D^2}{D\tau^2} \left( \frac{\partial f^\alpha}{\partial s} \right) &= - \frac{\partial f^\mu}{\partial \tau} \frac{D}{Ds} \left( \nabla_\mu \frac{\partial f^\alpha}{\partial \tau} \right) + \frac{\partial f^\mu}{\partial s} \frac{D}{D\tau} \left( \nabla_\mu \frac{\partial f^\alpha}{\partial \tau} \right) = \\ &= - \frac{\partial f^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial f^\nu}{\partial s} \nabla_\nu \nabla_\mu \frac{\partial f^\alpha}{\partial \tau} + \frac{\partial f^\mu}{\partial s} \frac{\partial f^\nu}{\partial \tau} \nabla_\nu \nabla_\mu \frac{\partial f^\alpha}{\partial \tau} \end{aligned}$$

e finalmente obtemos a evolução do **desvio geodético**:

$$\frac{D^2 \xi^\alpha}{D\tau^2} = \xi^\mu \dot{x}^\nu (\nabla_\nu \nabla_\mu - \nabla_\mu \nabla_\nu) \dot{x}^\alpha. \quad (2.1.17)$$

Desse modo, introduzimos e formalizamos o conceito de curvatura apresentando o **tensor de Riemann**, definido pela não-comutatividade das derivadas covariantes:

$$(\nabla_\nu \nabla_\mu - \nabla_\mu \nabla_\nu) A_\lambda \equiv R^\alpha_{\mu\nu\lambda} A_\alpha, \quad (2.1.18)$$

$$R^\alpha_{\mu\nu\lambda} = \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \Gamma^\beta_{\nu\lambda} - \Gamma^\alpha_{\nu\beta} \Gamma^\beta_{\mu\lambda}.$$

O tensor de curvatura tem propriedades cíclicas de antissimetria e satisfaz a importante identidade de Bianchi [32]:

$$R^\alpha_{\mu\nu\lambda} + R^\alpha_{\nu\mu\lambda} = 0, \quad R^\alpha_{\mu\nu\lambda} + R^\alpha_{\nu\lambda\mu} + R^\alpha_{\lambda\mu\nu} = 0, \quad (2.1.19)$$

$$\nabla_\gamma R^\alpha_{\mu\nu\lambda} + \nabla_\mu R^\alpha_{\nu\gamma\lambda} + \nabla_\nu R^\alpha_{\gamma\mu\lambda} = 0.$$

Além do desvio geodético, um outro efeito que ocorre somente em espaço curvos é a chamada **holonomia**: o transporte paralelo ao longo de um pequeno caminho fechado em torno de um ponto  $p$  altera as componentes de um vetor:

$$\frac{DA_\lambda}{D\tau} = \frac{dA_\lambda}{d\tau} - \Gamma^\alpha{}_{\nu\lambda} A_\alpha \dot{x}^\nu = 0 \Rightarrow A_\lambda(\tau) = A_\lambda(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau} \Gamma^\alpha{}_{\nu\lambda}(\tau') A_\alpha(\tau') \dot{x}^\nu(\tau') d\tau'$$

após completar uma volta,

$$\Delta A_\lambda = \oint \Gamma^\alpha{}_{\nu\lambda}(x) A_\alpha(x) dx^\nu \simeq A_\alpha(p) \oint [\Gamma^\alpha{}_{\nu\lambda}(p) + \partial_\mu \Gamma^\alpha{}_{\nu\lambda}(p)(x^\mu - p^\mu)] dx^\nu \Rightarrow$$

$$\Delta A_\lambda \simeq A_\alpha(p) \partial_\mu \Gamma^\alpha{}_{\nu\lambda}(p) \oint x^\mu dx^\nu$$

mas pelo teorema de Green,

$$\oint x^\mu dx^\nu = - \oint x^\nu dx^\mu \Rightarrow S^{\mu\nu} \equiv \oint x^\mu dx^\nu = \frac{1}{2} \oint (x^\mu dx^\nu - x^\nu dx^\mu),$$

portanto, a curvatura do espaço pode ser detectada via efeito de holonomia:

$$\Delta A_\lambda = R^\alpha{}_{\mu\nu\lambda}(p) A_\alpha(p) S^{\mu\nu}. \quad (2.1.20)$$

### 2.1.2 A equação de Einstein

Na última seção mostramos a gravidade como um efeito de curvatura (2.1.15) e a relação entre geometria do espaço e a dispersão de matéria (2.1.16), ambos no limite newtoniano, agora precisamos generalizar esses conceitos. Para isso, inicialmente consideremos a lei de conservação da relatividade especial: seja  $\varphi$  a densidade volumétrica de uma quantidade física que se conserva ao atravessar com 3-velocidade  $\vec{v}$  uma superfície fechada  $S$  que engloba um volume  $V$ :

$$\frac{d}{dt} \int_V \varphi dV + \oint_S \varphi \vec{v} \cdot \vec{n} da = 0 \Rightarrow \partial_\mu J^\mu = 0, \quad J^\mu = (\varphi, \varphi \vec{v}).$$

A quadricorrente  $J^\mu$  satisfaz a equação da continuidade, porém em um sistema fechado de partículas livres, temos quatro importantes quantidades que se conservam: energia e as três componentes do momento. Logo devem existir quatro equações da continuidade que só podem ser expressas em termos de um tensor energia-momento  $T^{\mu\nu}$ : a componente  $T^{00}$  é proporcional à densidade de energia,  $T^{0i}$  ao fluxo de energia,  $T^{i0}$  com a densidade de momento e  $T^{ij}$  ao fluxo de momento ou tensor de stress. No espaço curvo, o operador diferencial é a derivada covariante, logo as leis de conservação na relatividade geral são da forma:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.1.21)$$

No limite newtoniano concluímos, que a densidade de massa está relacionada com a derivada de segunda ordem da métrica, então o primeiro candidato da geometria que depende

diretamente da dispersão de energia é o **tensor de Ricci**, a única contração não-trivial do tensor de Riemann:

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}, \quad R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu} \quad (2.1.22)$$

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\alpha}{}_{\alpha\nu} - \partial_{\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\alpha\beta}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\nu}$$

A relação  $R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$  não pode ser satisfeita pois o tensor de Ricci não cumpre a equação da continuidade. Mas, usando a identidade de Bianchi, verificamos que:

$$\nabla_{\mu}R^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{2}\nabla_{\nu}R, \quad R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R^{\mu}{}_{\mu}$$

logo, como a derivada covariante da métrica é nula, o tensor de origem geométrica proporcional ao energia-momento é o **tensor de Einstein**:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}. \quad (2.1.23)$$

A partir do resultado para baixas velocidades (2.1.16), obtemos que  $\kappa = -8\pi G^1$  e segue a postulada **equação de Einstein** da relatividade geral:

$$G_{\mu\nu} = -8\pi GT_{\mu\nu} \quad (2.1.24)$$

## 2.2 A dinâmica do universo em expansão

A partir da lei de conservação e das equações de Einstein apresentadas na última seção, iremos obter as equações de Friedmann que descrevem a evolução da densidade de energia das principais componentes do universo que, em conjunto, definem o fator de escala da expansão.

### 2.2.1 Homogeneidade e isotropia

O estudo da Cosmologia Moderna inicia-se com o **princípio cosmológico**: não existe uma posição ou uma direção privilegiada no universo, todas elas são essencialmente equivalentes; *i.e.*, o universo é homogêneo e isotrópico. Trata-se de uma hipótese antiga e recorrente em pensamentos sobre a origem e a dinâmica do universo; desde os trabalhos de Nicolaus Copernicus - *On the Revolutions of the Celestial Spheres* em 1543 - marcando o fim da visão antropocêntrica e início da chamada Astronomia Moderna, até a teoria da Relatividade Geral publicada por Albert Einstein em 1915.

Logo, devemos nos perguntar: o universo é realmente homogêneo e isotrópico? Por exemplo, o sistema solar é obviamente não homogêneo - o Sol contém cerca de 99,9% da massa total do sistema - existem regiões muito densas e imensos vazios. O princípio cosmológico é uma boa aproximação para grandes escalas (maiores que  $\sim 100$  Mpc) formadas por aglomerados de galáxias, gerando modelos mais simples e capazes de confrontar previsões teóricas e

<sup>1</sup>Alguns autores escrevem  $\kappa = 8\pi G$  e utilizam o tensor de Riemann com o sinal contrário da convenção estabelecida nesta tese, portanto trata-se do mesmo conjunto de equações.

observações astronômicas. Por enquanto vamos estudar a evolução do universo assumindo a sua validade, mas na análise de formação de estruturas, as densidades levemente inhomogêneas serão adicionadas via métodos perturbativos.

A isotropia do espaço implica que hipersuperfícies com tempo constante são subespaços com simetria máxima de todo o espaço-tempo, a homogeneidade garante que tensores cósmicos (métrica, energia-momento) são formas invariantes em relação às isometrias desses subespaços e funções escalares (densidade, temperatura, entropia) dependem exclusivamente do tempo [32].

Mais um ponto fundamental para a construção de modelos cosmológicos é evidência experimental de **Edwin Hubble**: durante a observação de objetos extra-galáticos, o comprimento de onda detectado era sempre maior do que o previsto, indicando que as fontes estavam se afastando do observador na Terra. Assim definimos por  $\{x^i\}$  as **coordenadas espaciais comóveis** tal que nesse sistema, a graduação da régua segue a expansão - conforme a figura 2.1. Seja uma origem fixa  $\mathcal{O}$  escolhida arbitrariamente, a posição física  $\{r^i\}$  de um observador que se desloca exclusivamente por causa da expansão é dada por:

$$r^i(t) = a(t)x^i, \quad (2.2.1)$$

onde  $t$  é chamado de tempo cósmico e  $a(t)$  é o fator de escala que descreve a evolução temporal do espaço. Utilizaremos o sub-índice zero para identificar grandezas medidas atualmente, em  $t = t_0$ , impondo as condições de contorno:  $a(0) = 0$  e  $a(t_0) = 1$ . No caso de trajetórias no sistema comóvel,  $x^i = x^i(t)$ , a velocidade física de um objeto tem duas contribuições

$$v^i = \frac{dr^i}{dt} = \dot{a}x^i + a\dot{x}^i = \underbrace{Hr^i}_{\text{recessão}} + \underbrace{a\dot{x}^i}_{\text{peculiar}}, \quad (2.2.2)$$

e assim definimos o parâmetro de Hubble:

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (2.2.3)$$

O deslocamento infinitesimal sob a métrica de Minkowski  $\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  é compatível com a universalidade da velocidade da luz, porém não concorda com o princípio cosmológico e nem com as observações de Hubble. Então vamos construir uma métrica tal que

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)d\ell^2, \quad d\ell^2 = f_{ij}dx^i dx^j \quad (2.2.4)$$

$$g_{00} = 1, \quad g_{ij} = -a^2(t)f_{ij}, \quad g_{0i} = 0$$

ou seja - nessa escolha de coordenadas  $(t, x^i)$  - o tempo cósmico  $t$  é o tempo próprio  $\tau$  dos observadores comóveis ( $dx^i = 0$ ) e mede a idade do universo,  $f_{ij}(x)$  calcula os deslocamentos tridimensionais no espaço comóvel isotrópico e essa simetria independe do tempo.

Há três casos principais de simetria com curvatura espacial constante, *i.e.*, o escalar de Ricci usando somente as componentes  $f_{ij}$ . Os espaços de simetria máxima são:

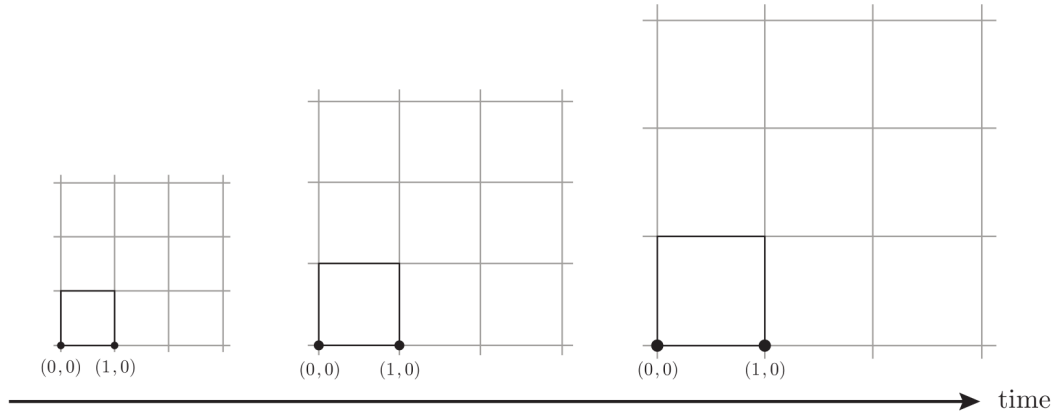


Figura 2.1: Sistema de coordenadas no espaço comóvel invariante pela expansão

- (i) **Plano:** trajetórias livres no espaço euclidiano  $\mathbb{E}^3$  cuja simetria que mantém as distâncias invariantes é o grupo de rotações  $O(3)$ ,

$$d\ell^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j = dx^i dx^i, \quad R = 0$$

- (ii) **Fechado:** deslocamento está restrito a uma esfera  $S^3$  de raio  $b$  contida em  $\mathbb{E}^4$  cuja simetria é o grupo de transformações ortogonais  $O(4)$ ,

$$d\ell^2 = dx^i dx^i + dw^2, \quad w^2 + x^i x^i = b^2, \quad R > 0$$

- (iii) **Aberto:** deslocamento está restrito a um hiperboloide  $H^3$  contido no espaço de Minkowski  $\mathbb{E}^{1,3}$  cuja simetria é o grupo de Lorentz  $\Lambda$ ,

$$d\ell^2 = dx^i dx^i - dw^2, \quad w^2 - x^i x^i = b^2, \quad R < 0.$$

Nos espaços com curvatura não-nula,

$$x^i x^i \pm w^2 = \pm b^2 \Rightarrow x^i dx^i \pm w dw = 0 \Rightarrow dw^2 = \frac{(x^i dx^i)^2}{w^2} = \frac{(x^i dx^i)^2}{b^2 \mp x^i x^i} \Rightarrow$$

$$d\ell^2 = dx^i dx^i \pm \frac{(x^i dx^i)^2}{b^2 \mp x^i x^i} = dx^i dx^i \pm k \frac{(x^i dx^i)^2}{1 \mp k x^i x^i}, \quad k \equiv \frac{1}{b^2}$$

por conveniência usaremos coordenadas esféricas no espaço comóvel  $(x, \theta, \phi)$ :

$$x^i x^i = x^2, \quad x^i dx^i = x dx, \quad dx^i dx^i = dx^2 + x^2 d\Omega^2$$

simplificando a última expressão,

$$d\ell^2 = \frac{dx^2}{1 \mp k x^2} + x^2 d\Omega^2,$$



façamos a seguinte mudança:  $\pm k \rightarrow k$  de modo que  $k > 0$  refere-se ao espaço fechado,  $k < 0$  para o aberto e  $k = 0$  ao espaço plano. Logo, o deslocamento em um universo homogêneo e isotrópico é dado pela métrica de Friedmann–Robertson–Walker (**FRW**):

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dx^2}{1 - kx^2} + x^2 d\Omega^2 \right], \quad (2.2.5)$$

$$f_{11} = \frac{1}{1 - kx^2}, \quad f_{22} = x^2, \quad f_{33} = x^2 \sin^2 \theta, \quad f_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j.$$

## 2.2.2 Equações de Friedmann

A evolução de um universo isotrópico e homogêneo proposto pelo princípio cosmológico depende explicitamente do fator de escala  $a$  e da constante de curvatura  $k$ , que se relacionam com a dispersão de matéria e energia pela equação da continuidade (2.1.21) e de Einstein (2.1.24). Daí seguem abaixo os símbolos de conexão afim (2.1.6), o tensor e o escalar de Ricci (2.1.22) usando a métrica (2.2.5).

### (i) Símbolos de conexão afim

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{00} &= 0, \quad \Gamma^0_{i0} = 0, \quad \Gamma^i_{00} = 0 \\ \Gamma^0_{ij} &= -\frac{\dot{a}}{a} g_{ij}, \quad \Gamma^i_{j0} = \frac{\dot{a}}{a} \delta^i_j, \quad \Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{lj} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}) \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

### (ii) Tensor e escalar de Ricci

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{3\ddot{a}}{a}, \quad R_{i0} = 0, \quad R_{ij} = \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2} \right) g_{ij} \\ R &= 6 \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

O tensor energia-momento é construído supondo que o universo é inteiramente preenchido por um fluido ideal (sem dissipação, tensão de cisalhamento e rotação) composto por  $n$  espécies não-interagentes,

$$T^{\mu\nu} = \sum_{k=1}^n T_k^{\mu\nu}$$

em um espaço estático e sem curvatura:  $T_k^{00} = \rho_k$  e  $T_k^{ij} = P_k \delta^{ij}$  são a densidade e pressão individuais, lembrando que - por isotropia - são funções exclusivamente do tempo. Logo, a quadrivelocidade de um fluido em repouso é  $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$  e podemos escrever

$$T_k^{\mu\nu} = (\rho_k + P_k) u^\mu u^\nu - P_k \eta^{\mu\nu},$$

portanto, generalizar para um espaço dinâmico e curvo basta substituir o tensor métrico:

$$T_k^{\mu\nu} = (\rho_k + P_k)u^\mu u^\nu - P_k g^{\mu\nu}. \quad (2.2.8)$$

A equação da continuidade para  $\nu = 0$  descreve a função de estado das espécies que compõem o fluido ideal:

$$\dot{\rho}_k + \frac{3\dot{a}}{a}(\rho_k + P_k) = 0. \quad (2.2.9)$$

As equações para  $\nu = i$  confirmam a isotropia do modelo:  $\partial^i P_k = 0$ . Se as pressões  $P_k$  são conhecidas, obtemos as relações  $\rho_k(a)$  mas ainda falta a evolução temporal do fator de escala  $a(t)$  e o efeito da curvatura  $k$ . Assim, a componente 00 da equação de Einstein resulta na chamada **equação de Friedmann**:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_{k=1}^n \rho_k - \frac{k}{a^2}. \quad (2.2.10)$$

As expressões para as componentes  $ij$  combinada com a última diz como a densidade e a pressão influenciam na aceleração,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \sum_{k=1}^n (\rho_k + 3P_k). \quad (2.2.11)$$

Note que

$$\rho(t) = \sum_{k=1}^n \rho_k(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G} \Leftrightarrow k = 0,$$

então definimos a **densidade crítica** e o **parâmetro de densidade** respectivamente:

$$\rho_{\text{cr}}(t) \equiv \frac{3H^2(t)}{8\pi G}, \quad \Omega(t) \equiv \frac{\rho(t)}{\rho_{\text{cr}}(t)} \quad (2.2.12)$$

assim a geometria do espaço está relacionada à distribuição de matéria:

$$H^2(\Omega - 1) = \frac{k}{a^2}, \quad \begin{cases} 0 < \Omega < 1 \Rightarrow k < 0 \text{ (aberto)} \\ \Omega = 1 \Rightarrow k = 0 \text{ (plano)} \\ \Omega > 1 \Rightarrow k > 0 \text{ (fechado)}. \end{cases} \quad (2.2.13)$$

### 2.2.3 Cenários de evolução

A densidade  $\rho$  deve incluir todos os constituintes do universo. Inicialmente vamos considerar a matéria não-relativística ( $v \ll c$  que chamaremos apenas de matéria) e relativística ( $v \simeq c$ , radiação). Resolvendo a equação dos fluidos (2.2.9):

(i) **matéria** ( $v \ll c$ )

$$P \simeq 0 \Rightarrow \rho_{\text{mat}}(t) = \frac{\rho_{\text{mat}0}}{a^3(t)}. \quad (2.2.14)$$

(ii) **radiação** ( $v \simeq c$ )

$$P \simeq \frac{\rho}{3} \Rightarrow \rho_{\text{rad}}(t) = \frac{\rho_{\text{rad}0}}{a^4(t)}. \quad (2.2.15)$$

Agora voltando para a equação (2.2.10), explicitamos os parâmetros de densidade:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \left[ \frac{\Omega_{\text{mat}0}}{a^3} + \frac{\Omega_{\text{rad}0}}{a^4} - \frac{(\Omega_0 - 1)}{a^2} \right], \quad (2.2.16)$$

$$\Omega_0 = \Omega_{\text{mat}0} + \Omega_{\text{rad}0} = 1 + \frac{k}{H_0^2}.$$

A partir da equação (2.2.16) vemos que a radiação é a principal responsável pela expansão nos instantes iniciais e, conforme o tempo passa, a matéria assume o protagonismo; porém como ela não tem solução analítica fechada, é conveniente separar a evolução em duas eras: a era de predomínio da radiação e depois o predomínio da matéria.

(i) **Era de predomínio da radiação:** inflação cosmológica, quebra da simetria eletrofraca, quark-gluon plasma e a síntese de bárions e mésons, desacoplamento dos neutrinos primordiais ( $C\nu B$ ), a nucleossíntese (formação dos primeiros prótons e neutrões) e a ionização.

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \simeq H_0^2 \left[ \frac{\Omega_{\text{rad}0}}{a^4} - \frac{(\Omega_{\text{rad}0} - 1)}{a^2} \right] \quad (2.2.17)$$

(a)  $0 < \Omega_{\text{rad}0} < 1 \Leftrightarrow k < 0$

$$\begin{cases} a(\xi) = \sqrt{\frac{\Omega_{\text{rad}0}}{1 - \Omega_{\text{rad}0}}} \sinh \xi \\ t(\xi) = \frac{\Omega_{\text{rad}0}}{H_0} \sqrt{\frac{\Omega_{\text{rad}0}}{1 - \Omega_{\text{rad}0}}} (\cosh \xi - 1) \end{cases}$$

(b)  $\Omega_{\text{rad}0} = 1 \Leftrightarrow k = 0$

$$a(t) = \sqrt{2H_0 t}$$

(c)  $\Omega_{\text{rad}0} > 1 \Leftrightarrow k > 0$

$$\begin{cases} a(\xi) = \sqrt{\frac{\Omega_{\text{rad}0}}{\Omega_{\text{rad}0} - 1}} \sin \xi \\ t(\xi) = \frac{\Omega_{\text{rad}0}}{H_0} \sqrt{\frac{\Omega_{\text{rad}0}}{\Omega_{\text{rad}0} - 1}} (1 - \cos \xi) \end{cases}$$

- (ii) **Era de predomínio da matéria:** recombinação (síntese dos primeiros átomos neutros) desacoplamento dos fótons primordiais (CMB) e a formação estruturas.

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \simeq H_0^2 \left[ \frac{\Omega_{\text{mat}0}}{a^3} - \frac{(\Omega_{\text{mat}0} - 1)}{a^2} \right] \quad (2.2.18)$$

(a)  $0 < \Omega_{\text{mat}0} < 1 \Leftrightarrow k < 0$

$$\begin{cases} a(\xi) = \frac{\Omega_{\text{mat}0}}{2(1 - \Omega_{\text{mat}0})} (\cosh \xi - 1) \\ t(\xi) = \frac{\Omega_{\text{mat}0}}{2H_0(1 - \Omega_{\text{mat}0})^{3/2}} (\sinh \xi - \xi) \end{cases}$$

(b)  $\Omega_0 = 1 \Leftrightarrow k = 0$

$$a(t) = (3/2H_0t)^{2/3}$$

(c)  $\Omega_{\text{mat}0} > 1 \Leftrightarrow k > 0$

$$\begin{cases} a(\xi) = \frac{\Omega_{\text{mat}0}}{2(\Omega_{\text{mat}0} - 1)} (1 - \cos \xi) \\ t(\xi) = \frac{\Omega_{\text{mat}0}}{2H_0(\Omega_{\text{mat}0} - 1)^{3/2}} (\xi - \sin \xi) \end{cases}$$

Essas soluções não são exatas, pois deveríamos considerar matéria e radiação simultaneamente em uma densidade total  $\rho = \rho_{\text{mat}} + \rho_{\text{rad}} \propto a^{-3} + a^{-4}$ . Além disso, qual dos cenários geométricos (plano, fechado ou aberto) melhor descreve o nosso real universo? Precisamos confrontar os modelos teóricos com os dados observacionais! O parâmetro de Hubble  $H_0$  e de densidade total  $\Omega_0$  possuem medidas sofisticadas obtidas por missões exploratórias como **Planck Collaboration** [4] e Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (**WMAP**) [30], detectando flutuações na temperatura da radiação cósmica de fundo - uma violação local do princípio cosmológico.

Tabela 2.1: Parâmetros cosmológicos - Ref Planck [4]

Valores	Descrição
$H_0 = 67.74 \pm 0.46 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$	Parâmetro de Hubble
$\Omega_0 = 1.0008_{-0.0039}^{+0.0040}$	Parâmetro de densidade total

Vamos testar os modelos de Friedmann usando as estimativas para os parâmetros cosmológicos da tabela 2.1. Logo trata-se de uma boa aproximação estudarmos inicialmente o espaço plano,  $\Omega_0 = 1$ , os termos de curvatura serão adicionados posteriormente via métodos de perturbação. Dado que  $a(t_0) = 1$ , comparamos a previsão teórica  $t_0^{\text{theo}}$  com o valor  $t_0^{\text{exp}}$  calculado a partir dos parâmetros estimados pelo Planck:

$$t_0^{\text{theo}} = \frac{2}{3H_0} \simeq 9 \times 10^9 \text{ anos} < t_0^{\text{exp}} = (13.799 \pm 0.021) \times 10^9 \text{ anos}$$

Considerar que o universo é composto apenas por matéria e radiação não é consistente com as observações. Uma tentativa para solucionar este problema é supor a existência de uma outra forma de energia - denominada por energia escura  $\Lambda$  - e como  $(t_0 H_0)_{\text{modelo}} < (t_0 H_0)_{\text{obs}}$ , ela deve contribuir para uma expansão acelerada. O primeiro ensaio para a função de estado da energia escura é admitir  $\rho_\Lambda(t) = \rho_{\Lambda 0} = \text{cte}$ , assim temos a evolução na **era moderna**,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \simeq H_0^2 \left(\frac{\Omega_{\text{mat}0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda 0}\right). \quad (2.2.19)$$

Uma justificativa mais formal para a validade da adição da energia escura é notar que o tensor métrico tem derivada covariante nula, de modo que existe uma liberdade de calibre na definição do tensor energia-momento:

$$\text{se } \nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \text{ logo } \tilde{T}^{\mu\nu} \equiv T^{\mu\nu} + \left(\frac{\Lambda}{8\pi G}\right) g^{\mu\nu} \Rightarrow \nabla_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} = 0$$

onde a constante  $\Lambda$  atua como uma “pressão negativa” em  $\tilde{T}^{\mu\nu}$  e somente assim tem-se uma aceleração positiva, pela equação (2.2.11). Ou ainda, podemos redefinir o tensor de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \rightarrow G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}.$$

O parâmetro de energia escura pode ser estimado usando os valores de  $t_0$  e  $H_0$ :

$$\int_0^{t_0} H_0 dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{a} da}{\sqrt{1 - \Omega_{\Lambda 0}(1 + a^3)}} \Rightarrow t_0 = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}}{\sqrt{1 - \Omega_{\Lambda 0}}}\right),$$

note que  $\Omega_{\Lambda 0} \rightarrow 0 \Rightarrow t_0 \rightarrow 2/(3H_0)$  e recuperamos o resultado do modelo anterior e  $\Omega_{\Lambda 0} \rightarrow 1 \Rightarrow t_0 \rightarrow \infty$ ; logo algum  $0 < \Omega_{\Lambda 0} < 1$  deve ser coerente com os dados da tabela 2.1, aproximações numéricas da última expressão calculam  $\Omega_{\Lambda 0} = 0.6911$  e a tabela 2.2 traz os valores mais precisos para os parâmetros de densidade obtidos pelo Planck.

O melhor modelo em Cosmologia, o qual é construído sob as hipóteses de homogeneidade e isotropia do universo em largas escalas, composto por um fluido ideal e separado em eras de evolução - a concordância do **Modelo Cosmológico Padrão  $\Lambda$ CDM** com os dados observacionais depende fortemente da existência de um tipo energia ainda muito desconhecida e que compõem a maior parte de todo o universo.

As principais dúvidas sobre esse modelo são a natureza, *i.e.*, a função de estado da energia escura  $P_\Lambda(\rho_\Lambda)$  e estabelecer candidatos às partículas de matéria escura, a porção da matéria fria que é não-interagente. Portanto a equação de Friedmann mais completa que descreve a dinâmica do universo em expansão é a seguinte:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= H_0^2 \left[ \frac{\Omega_{\text{rad}0}}{a^4} + \frac{\Omega_{\text{mat}0}}{a^3} + f_\Lambda(a)\Omega_{\Lambda 0} - \frac{(\Omega_0 - 1)}{a^2} \right], \\ \Omega_0 &= \Omega_{\text{mat}0} + \Omega_{\text{rad}0} + \Omega_{\Lambda 0} = 1 + \frac{k}{H_0^2}, \\ f_\Lambda(a) &= \exp \left\{ -3 \int_1^a \frac{da'}{a'} [1 + w_\Lambda(a')] \right\}. \end{aligned} \tag{2.2.20}$$

Tabela 2.2: Composição do universo - Ref Planck [4]

Valores	Descrição
$\Omega_{\Lambda 0} = 0.6911 \pm 0.0062$	Energia escura
$w_{\Lambda 0} = -1.019^{+0.075}_{-0.080}$	Função de estado
$\Omega_{\text{dm}0} = 0.2589 \pm 0.0022$	Matéria escura
$\Omega_{\text{b}0} = 0.04860 \pm 0.00030$	Matéria bariônica

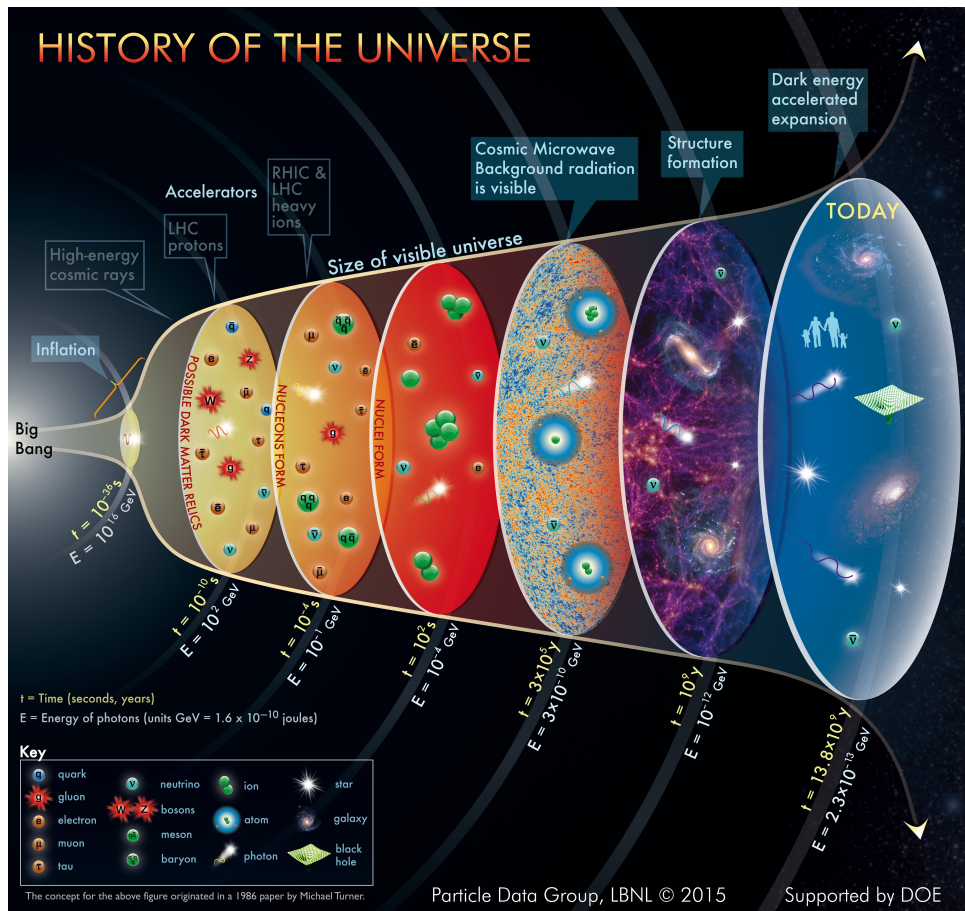


Figura 2.2: A história do universo esquematizada pelo Particle Data Group (PDG)

## 2.2.4 Redshift e medidas de distâncias

Considere um pulso de luz emitido por uma estrela no instante  $t_1$  (passado) a uma distância radial  $r_1(t_1) = a(t_1)x$  do observador aqui na Terra. O pulso é detectado em  $t_0$  (presente), quando a distância atual entre os corpos é  $r_0(t_0) = a(t_0)x = x$ . Assim, para um pulso de luz:

$$ds = 0 \Rightarrow \int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dx}{\sqrt{1 - kx^2}} = \ell. \quad (2.2.21)$$

Note que a distância no limite de integração deve ser a distância física inicial  $r_1$ , pois o fator de escala  $a$  no denominador da integral temporal cancela o efeito da expansão. Além disso  $\ell$  é uma quantidade comóvel, pois não varia conforme a evolução do universo, então considere um outro pulso emitido em  $t_1 + \delta t_1$  e detectado em  $t_0 + \delta t_0$ , logo:

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)},$$

para uma fonte de luz contínua, na qual  $\delta t_1 \ll t_1$  e  $\delta t_0 \ll t_0$ , segue

$$\frac{\delta t_0}{a(t_0)} \simeq \frac{\delta t_1}{a(t_1)} \Rightarrow \frac{a(t_0)}{a(t_1)} \simeq \frac{\delta t_0}{\delta t_1} = \frac{\nu_1}{\nu_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1}$$

no tempo presente fixamos  $a(t_0) = 1$  e definimos o parâmetro de redshift como sendo o desvio do comprimento de onda observado  $\lambda_0$  em relação ao comprimento de onda na fonte  $\lambda_1$ :

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{1}{a(t_1)} - 1. \quad (2.2.22)$$

Para um universo em expansão,  $a(t_1) < 1 \Rightarrow z > 0 \Rightarrow \lambda_0 > \lambda_1$  conforme a observação de Edwin Hubble, e se estivesse contraindo,  $a(t_1) > 1 \Rightarrow z < 0 \Rightarrow \lambda_0 < \lambda_1$  teríamos um desvio para o azul (blueshift). Aqui estamos levando em conta apenas o redshift devido à expansão, o que é válido somente para regiões com campos gravitacionais fracos e homogêneos - ou seja, no limite do princípio cosmológico - pois regiões com campos intensos e inhomogêneos curvam as trajetórias dos raios de luz, atuando como uma lente gravitacional [32].

Um grande problema em cosmologia é medir distâncias em um universo em expansão. Fazendo a observação de astros com telescópios sensíveis a uma parte do espectro eletromagnético, precisaríamos saber quando a radiação que detectamos hoje foi emitido pela estrela. Como não é possível medir  $t_1$  diretamente, é muito mais conveniente usar o redshift  $z$  como variável das funções dinâmicas,

$$a(z) = \frac{1}{1+z}, \quad dt = -\frac{1}{H(z)} \frac{dz}{1+z} \quad (2.2.23)$$

e a relação entre as distâncias físicas fonte-observador inicial  $r_1$  e final  $r_0$ :

$$r_1(t_1) = a(t_1)r_0 \Rightarrow r_0 = \frac{r_1}{a(t_1)} = (1+z)r_1. \quad (2.2.24)$$

Usando a equação de Friedmann (2.2.20), definimos:

$$E(z) \equiv \frac{H(z)}{H_0} = \sqrt{\Omega_{\text{rad}0}(1+z)^4 + \Omega_{\text{mat}0}(1+z)^3 + f_{\Lambda}(z)\Omega_{\Lambda 0} - (\Omega_0 - 1)(1+z)^2}, \quad (2.2.25)$$

logo a quantidade comóvel em termos de  $z$ ,

$$\ell = c \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = c \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}.$$

A partir da integral radial, temos a distância inicial  $r_1$  como função do redshift:

$$r_1(z) = \begin{cases} \ell = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}, & k = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(\ell\sqrt{k}) = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin \left[ \sqrt{k} \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right], & k > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-k}} \sinh(\ell\sqrt{-k}) = \frac{1}{\sqrt{-k}} \sinh \left[ \sqrt{-k} \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right], & k < 0. \end{cases} \quad (2.2.26)$$



Considere a série de Taylor do fator de escala em torno de  $t_0$ ,

$$a(t_1) = a(t_0) + \dot{a}(t_0)(t_1 - t_0) + \frac{1}{2}\ddot{a}(t_0)(t_1 - t_0)^2 + \dots$$

define-se o parâmetro de desaceleração por:

$$q(t) \equiv -\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} \frac{1}{H^2(t)}, \quad (2.2.27)$$

assim reescrevemos a série de Taylor,

$$a(t_1) \simeq 1 + H_0(t_1 - t_0) - \frac{q_0}{2}H_0^2(t_1 - t_0)^2.$$

Para emissões recentes  $t_1 \simeq t_0 \Rightarrow 0 < z < 1$ , temos que  $r_1 \simeq \ell$ . Nesse limite, vamos considerar a aproximação de primeira ordem do integrando:

$$E(z) \simeq E(0) + z \left. \frac{dE}{dz} \right|_{z=0} = 1 + (1 + q_0)z \Rightarrow \frac{1}{E(z)} \simeq 1 - (1 + q_0)z \Rightarrow$$

$$r_1 \simeq \frac{c}{H_0} \left[ z - \frac{1}{2}(1 + q_0)z^2 \right],$$

logo para redshifts pequenos, a distância atual é dada por:

$$r_0 = (1 + z)r_1 \simeq \frac{c}{H_0} \left[ z + \frac{1}{2}(1 - q_0)z^2 \right], \quad (2.2.28)$$

em primeira ordem, recuperamos a lei empírica de Hubble:

$$v = cz \simeq H_0 r_0. \quad (2.2.29)$$

### 2.2.5 Diagrama de Hubble da SNe Ia

As medidas de distâncias astronômicas mais precisas realizadas atualmente são obtidas a partir da análise da luminosidade aparente, ou seja, o quão brilhante é um objeto no céu. Para isso definimos a luminosidade absoluta  $L$  como sendo a energia total irradiada por unidade de tempo, mas nunca detectamos todos os fótons. Se a emissão ocorre igualmente em todas as direções e um espectador está a uma distância  $r$  no momento da observação, muito maior que as dimensões da fonte (onde ela é vista como pontual), ele irá detectar uma luminosidade aparente ou brilho:

$$l = \frac{L}{4\pi r^2}. \quad (2.2.30)$$

Por convenção, o brilho de uma estrela é geralmente denotado em escala logarítmica pela magnitude aparente:

$$m_{\text{star}} \equiv -2.5 \log \left( \frac{l_{\text{star}}}{l_{\text{ref}}} \right) = 5 \log \left( \frac{r_{\text{star}}}{r_{\text{ref}}} \right). \quad (2.2.31)$$

Note que não é possível distinguir, a priori, se um objeto é pouco brilhante pois ele realmente emite poucos fótons ou se está muito longe do detector. Para compararmos luminosidades, devemos estabelecer uma distância de referência, padronizada como  $r_{\text{ref}} = 10\text{pc}$  tal que a magnitude absoluta é  $M_{\text{star}} \equiv m_{\text{star}}(r_{\text{star}} = 10\text{pc})$  e então define-se:

$$\mu \equiv m_{\text{star}} - M_{\text{star}} = 5 \log \left( \frac{r_{\text{star}}}{10\text{pc}} \right). \quad (2.2.32)$$

Imagine um astro com brilho variável e tal que conseguimos medir o seu redshift. Como o brilho depende da distância e ela está relacionada aos parâmetros de expansão e densidade pela equação (2.2.26), o conjunto de dados  $\mu \times z$  pode fornecer algumas informações sobre a dinâmica e a estrutura atuais do universo.

Em 1998, antes das missões exploratórias WMAP e Planck, Adam Riess e sua equipe fizeram observações da Type Ia supernovae (SNe Ia), concluindo pela primeira vez que o universo está se expandindo aceleradamente e fizeram estimativas para os parâmetros cosmológicos [27]. Essa foi a primeira observação indireta da energia escura. Mais recentemente, o projeto SuperNova Legacy Survey (SNLS) monitorou redshifts de supernovas e o conjunto de dados está disponível em [29].

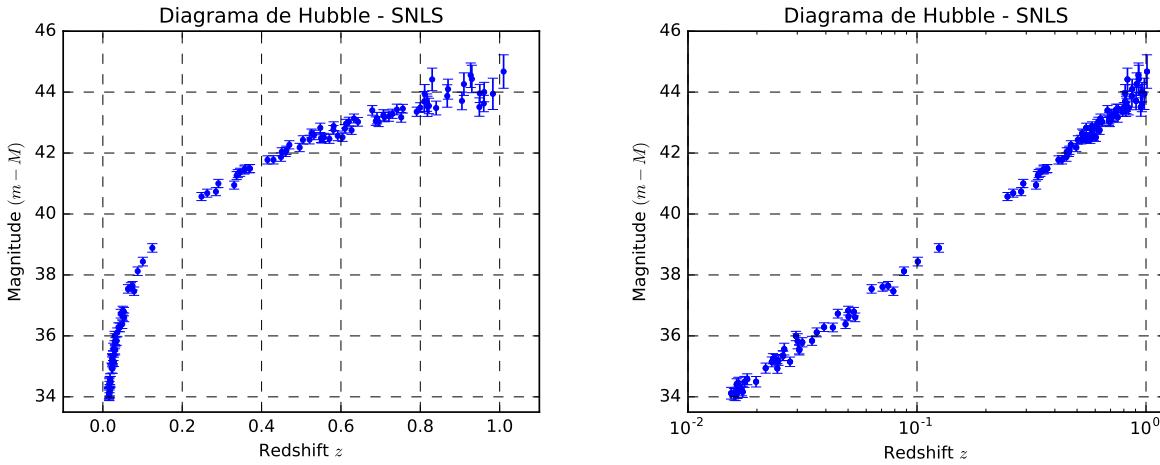


Figura 2.3: Diagrama de Hubble  $\mu \times z$ , fonte de dados: SuperNova Legacy Survey [29]

Para simplificar o modelo cosmológico completo (2.2.20) com vários parâmetros livres, como estamos analisando emissões recentes ( $z < 1$ ) então  $r_1 \simeq \ell$  e os efeitos de curvatura são imensuráveis, assim trataremos a dinâmica na era moderna (2.2.19). Portanto, o brilho e a distância de uma estrela em função do redshift são dados por:

$$\mu(z) = 5 \log \left[ \frac{r_{\text{star}}(z)}{10\text{pc}} \right] \quad (2.2.33)$$

$$r_{\text{star}}(z) = (1 + z) \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{[(1 + z')^3(1 - \Omega_{\Lambda 0}) + \Omega_{\Lambda 0}]^{1/2}}.$$

O parâmetro de Hubble é usualmente reescrito em termos de  $h$ :  $H_0 = 100h$  (km/s)  $\text{Mpc}^{-1}$ . Nessa análise, os parâmetros livres são  $h$  e  $\Omega_{\Lambda 0}$ . Eles podem ser estimados variando seus valores dentro de uma grade regular, nesse caso restringimos o espaço de parâmetros  $(h, \Omega_{\Lambda 0}) \in [0.1, 1.0] \times [0.0, 1.0]$  com espaçamento  $\Delta = 0.001$  entre os pontos da grade. Usando o método dos mínimos quadrados  $\chi^2$  [24], os melhores valores de  $h$  e  $\Omega_{\Lambda 0}$  que ajustam as medidas [29] são os seguintes:

$$\begin{aligned} h &= 0.700 \pm 0.024 & (3\sigma) \\ \Omega_{\Lambda 0} &= 0.740 \pm 0.036 & (1\sigma) \end{aligned} \tag{2.2.34}$$

Na figura 2.4 apresentamos os ajustes da teoria com os dados [29], onde  $N = 115$  é o número de pontos do diagrama. Perceba que o caso  $\Omega_{\Lambda 0} = 0.740$  (linha preta, segundo gráfico) possui  $\chi^2/N = 0.965$  menor que os modelos de universo sem (vermelha tracejada,  $\chi^2/N = 5.961$ ) e totalmente composto (vermelha cheia,  $\chi^2/N = 2.870$ ) por energia escura.

Portanto, o modelo com energia escura  $\Omega_{\Lambda 0} > 0$  é o mais provável e explica a expansão acelerada que observamos. A estimativa de  $\Omega_{\Lambda 0} = 0.740 \pm 0.036$  é um maior e menos precisa que a da CMB, mas elas concordam considerando a margem de erro.

Os gráficos da figura 2.5 mostram os efeitos do parâmetro de energia  $\Omega_{\Lambda 0}$  na distância comóvel  $r_1$  em função do redshift  $z$ . Note que  $\Omega_{\Lambda 0}$  influencia a dinâmica da expansão, principalmente aumentando a distância comóvel a partir de redshifts  $z > 1$ .

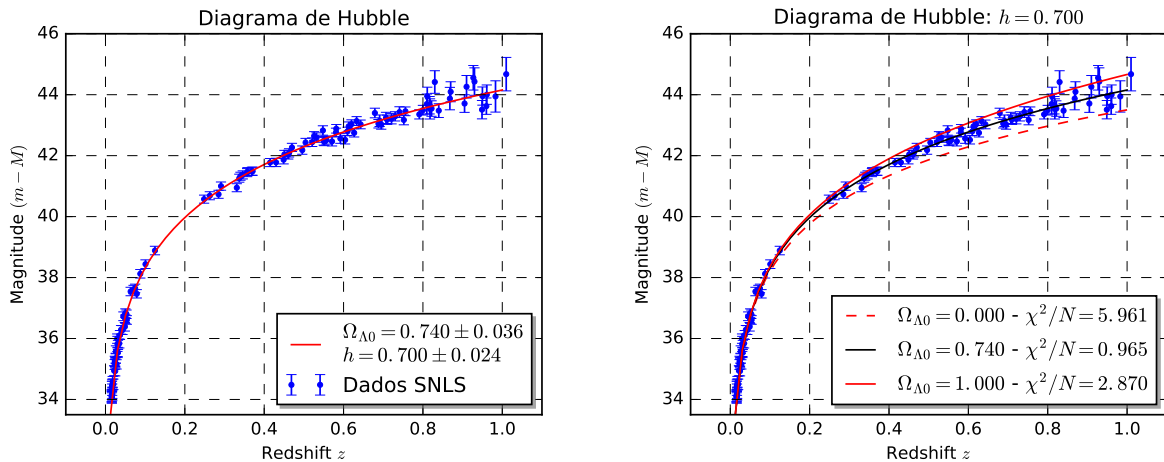


Figura 2.4: Ajuste dos modelos teóricos com os dados experimentais

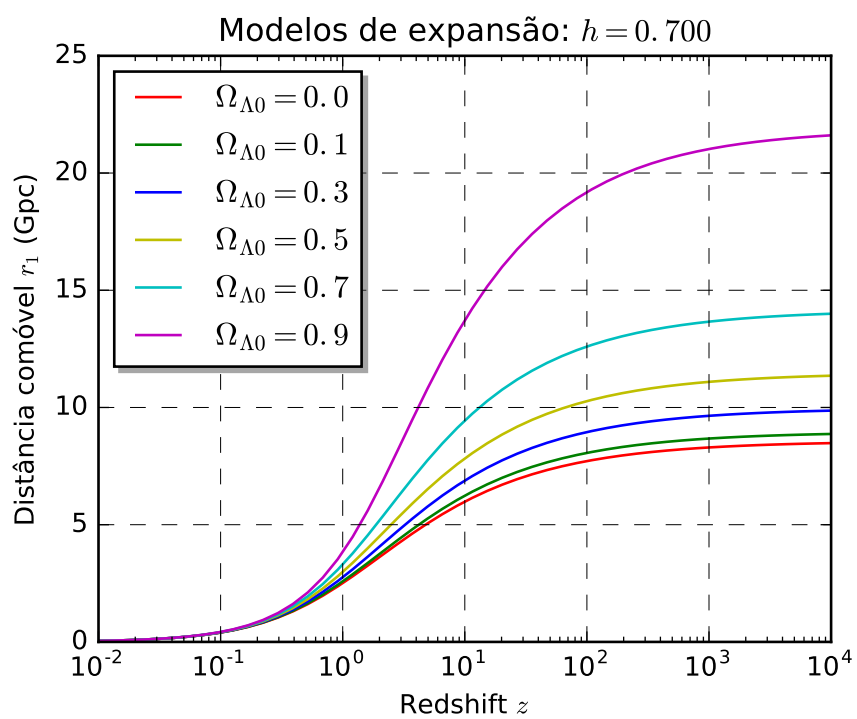


Figura 2.5: Modelos de expansão em termos do parâmetro  $\Omega_{\Lambda 0}$

---

# Flutuações cosmológicas

---

## 3.1 Teoria geral para perturbações lineares

Nesta seção iniciam-se os estudos da dinâmica das flutuações cosmológicas, ou seja, a teoria geral para perturbações lineares na distribuição de matéria-energia e na métrica FRW.

### 3.1.1 Observações astronômicas

O Modelo Cosmológico Padrão  $\Lambda$ CDM resumido em (2.2.20) é construído sob as hipóteses de homogeneidade e isotropia do universo em largas escalas, distâncias maiores que 100 Mpc. O universo é de fato homogêneo e isotrópico? Como podemos testar a validade dessas hipóteses?

Há dois grandes experimentos que evidenciam que o princípio cosmológico fundamental não é completamente verdadeiro. O primeiro experimento já foi mencionado: a distribuição anisotrópica da temperatura da radiação cósmica de fundo pelo **Wilkinson Microwave Anisotropy Probe** (WMAP/NASA) - figura 3.1, a imagem revela flutuações de temperatura (mostradas como diferenças de cor) de no máximo  $200\mu\text{K}$  em torno da média  $\langle T \rangle \simeq 2,725\text{K}$  - imagem disponível em <https://map.gsfc.nasa.gov>. O segundo experimento é a dispersão inhomogênea de galáxias pelo **Sloan Digital Sky Survey** (SDSS) - figura 3.2, um mapa tridimensional da distribuição de galáxias. A Terra está no centro e cada ponto representa uma galáxia, contendo tipicamente cerca de 100 bilhões de estrelas. As galáxias são coloridas de acordo com as idades de suas estrelas, os pontos mais vermelhos e mais fortemente agrupados mostram galáxias que são feitas de estrelas mais antigas. O círculo externo está a uma distância de dois bilhões de anos-luz. A região entre as fatias não foi mapeada pois a poeira em nossa própria galáxia obscurece a visão do universo nessas direções. As fatias contêm todas as galáxias dentro da declinação  $-1,25$  e  $1,25$  graus - imagem disponível em <https://sdss3.org>.

O desacoplamento dos fótons primordiais e formação de estruturas são eventos antigos, de larga-escala e por isso representam uma visão global do universo, logo esperava-se que ambos fossem coerentes com o princípio cosmológico, porém observamos pequenos desvios em relação a um estado de perfeita simetria e uniformidade. Nesse sentido, o modelo padrão é incompleto pois ele não dá nenhuma justificativa ao supor um universo tão específico, pelo contrário, devido à expansão, ele prediz a existência de várias regiões no espaço-tempo casualmente disjuntas e mesmo assim elas têm densidade e temperatura semelhantes; esse é o **problema do horizonte**.

Para entendermos melhor essa questão, voltemos para a métrica de FRW:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dx^2}{1 - kx^2} + x^2 d\Omega^2 \right]$$

fazendo as seguintes reparametrizações,

$$d\xi^2 = \frac{dx^2}{1 - kx^2} \Rightarrow x(\xi) = S_k(\xi) = \begin{cases} \xi, & k = 0 \\ \sin \xi, & k = 1 \\ \sinh \xi, & k = -1 \end{cases}, \quad d\tau \equiv \frac{dt}{a(t)}$$

reescrevemos o deslocamento infinitesimal da seguinte maneira:

$$ds^2 = a^2(\tau) \left[ d\tau^2 - d\xi^2 - S_k(\xi) d\Omega^2 \right] \quad (3.1.1)$$

então um feixe transversal de luz é descrito pelas linhas do cone  $\Delta\tau = \pm\Delta\xi$  no espaço  $\tau \times \xi$ .

A radiação mais primordial que detectamos hoje é a CMB, cujo redshift medido pelo WMAP  $z_* = 1091.64 \pm 0.47$  resulta em uma idade estimada de desacoplamento  $t_* = 374935_{-1729}^{+1731}$  yr [30]. Imagine que nós somos os observadores no centro da esfera momentos antes da dispersão. Os fótons estão inicialmente a uma distância  $r_* = a(t_*)x_* = a(t_*)S_k(\xi_*)$  e precisam vencer a expansão para serem detectados em  $r = 0$ , logo a sua equação para a trajetória:

$$\Delta\xi = -\Delta\tau \Rightarrow \xi(t) = \xi_* - \int_{t_*}^t \frac{dt'}{a(t')} \Rightarrow r(t) = a(t)S_k \left\{ \xi_* - \int_{t_*}^t \frac{dt'}{a(t')} \right\}$$

A maior distância que a fonte pode estar e nós conseguirmos vê-la é tal que

$$r(t_0) = 0 \Rightarrow \xi_* = \int_{t_*}^{t_0} \frac{dt'}{a(t')}$$

logo o raio da esfera na época do desacoplamento:

$$r_* = a(t_*)S_k(\xi_*) \simeq \frac{c}{(1+z_*)H_0} \int_0^{z_*} \frac{dz}{E(z)} = 12.9 \text{ Mpc} = 42 \text{ Mly} \quad (3.1.2)$$

Considere dois pontos separados por uma abertura angular  $\theta$  sobre a esfera tal que um fóton é trocado entre eles na direção perpendicular à expansão, para que esse fóton chegue ao observador antes da dispersão,

$$ct_* \geq 2r_* \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow \theta \leq 2 \sin^{-1}\left(\frac{ct_*}{2r_*}\right) \simeq \frac{ct_*}{r_*} \sim 0.5^0$$

ou seja, regiões separadas por um ângulo maior que meio grau são aparentemente não correlacionadas e mesmo assim a diferença de temperatura é da ordem de  $10^{-5}$ K. A matéria que interagiu com os fótons primordiais e que delimita a região onde temos contato causal está atualmente a uma distância

$$R \simeq \frac{c}{H_0} \int_0^{z_*} \frac{dz}{E(z)} = 14.25 \text{ Gpc} = 46.5 \text{ Gly}. \quad (3.1.3)$$

Uma outra grande questão em aberto na Cosmologia é o chamado **flatness problem**. As medidas astronômicas da tabela 2.1 são consistentes com um modelo de universo levemente curvo:  $|\Omega_0 - 1| \sim 10^{-3}$  e voltando para a equação de Friedmann, o parâmetro de densidade total como função do tempo,

$$\Omega(t) = 1 + \frac{k}{\dot{a}^2(t)} \quad (3.1.4)$$

vimos que a expansão na era da radiação e matéria é desacelerada, logo  $\dot{a}(t)$  é uma função decrescente e  $\Omega(t)$  aumenta com o tempo. Portanto, no passado o espaço era ainda mais próximo de chato. Na verdade, o que deve realmente ser surpreendente é o fato do universo ser muito próximo de ser homogêneo, isotrópico e plano. O modelo padrão explica bem a evolução a partir da aniquilação elétron-pósitron, mas sobre época anteriores há somente especulações, as quais concentram-se na ideia de que, antes da era de predomínio da radiação, existiu um período chamado de **inflação**, quando a densidade de energia era dominada por uma lenta variação sobre a energia do estado de menor energia (vácuo) e o fator de escala crescia aproximadamente de forma exponencial. As pequenas flutuações que observamos nas imagens 3.1 e 3.2 são geradas pelas flutuações quânticas durante a inflação. Todavia para estudar esse período devemos deixar o conforto do modelo padrão e explorar uma nova física possivelmente muito acima da escala em energia de TeV.

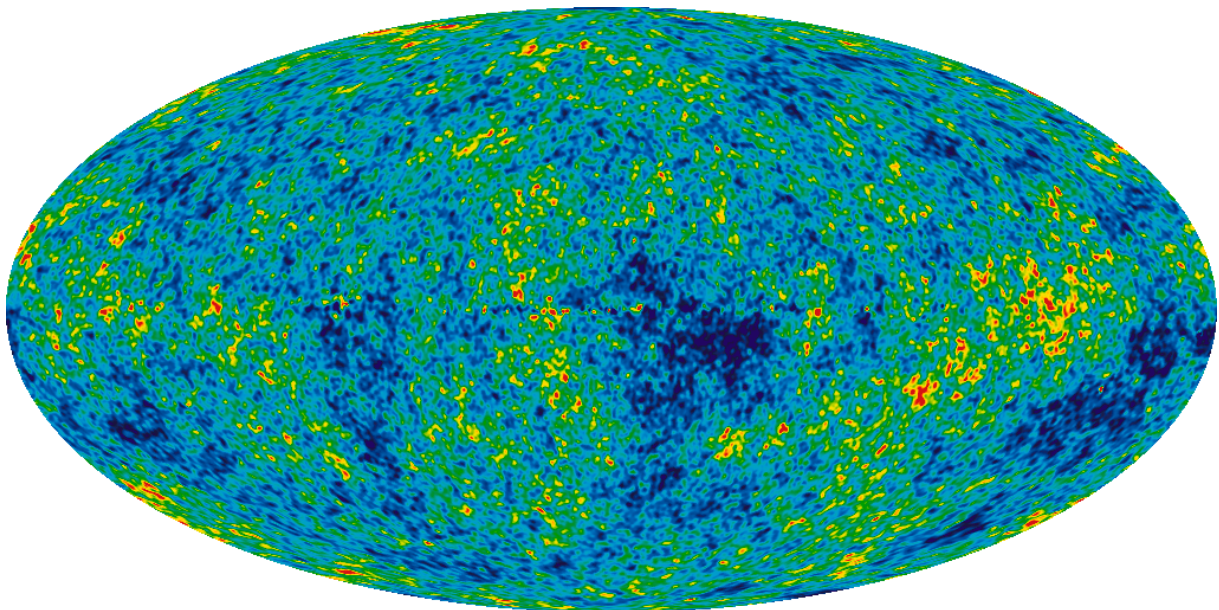


Figura 3.1: WMAP/NASA 9-Year Microwave Sky: flutuações de temperatura da CMB



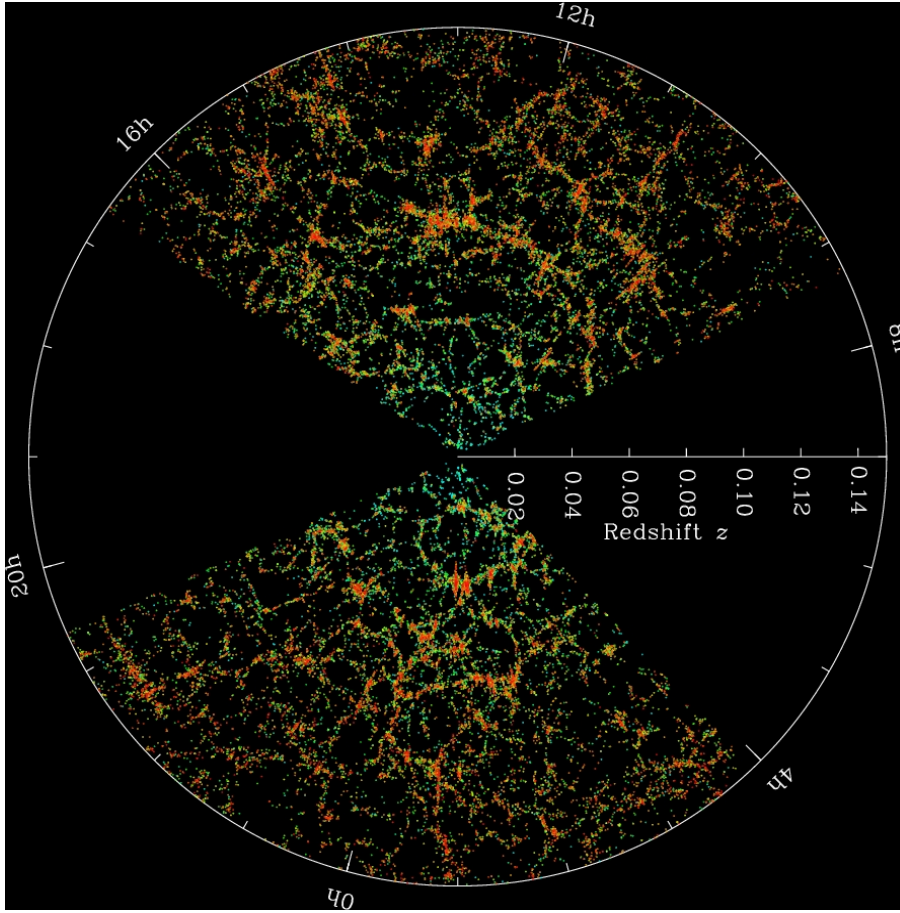


Figura 3.2: SDSS III Galaxy Map 2010 - 2013: mapa 3D da distribuição de galáxias

### 3.1.2 Estado de ordem zero

O objetivo principal desses estudos iniciais é examinar a distribuição de matéria em largas escalas, quais são as condições necessárias para a formação de grandes estruturas (galáxias e aglomerados de galáxias) e fazer algumas previsões sobre os cenários de evolução. Para isso, não vamos considerar o universo do modelo padrão, porém uma descrição mais geral que comporte as importantes observações do WMAP e SDSS; ou seja, vivemos em um universo quase homogêneo, isotrópico e plano no qual os termos de inomogeneidade, anisotropia e curvatura são pequenas perturbações de primeira ordem sobre o estado de ordem zero do modelo padrão, cujas propriedades serão denotadas com uma barra superior.

#### (i) Métrica

$$d\bar{s}^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + x^2 d\Omega)$$

$$\bar{g}_{00} = 1, \quad \bar{g}_{i0} = 0, \quad \bar{g}_{ij} = -a^2(t)\delta_{ij}$$
(3.1.5)



(ii) **Símbolos de conexão afim**

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}^0_{00} &= 0, \quad \bar{\Gamma}^0_{i0} = 0, \quad \bar{\Gamma}^i_{00} = 0 \\ \bar{\Gamma}^0_{ij} &= \dot{a}a\delta_{ij}, \quad \bar{\Gamma}^i_{j0} = \frac{\dot{a}}{a}\delta^i_j, \quad \bar{\Gamma}^k_{ij} = 0\end{aligned}\tag{3.1.6}$$

(iii) **Tensor e escalar de Ricci**

$$\begin{aligned}\bar{R}_{00} &= \frac{3\ddot{a}}{a}, \quad \bar{R}_{i0} = 0, \quad \bar{R}_{ij} = -(\ddot{a}a + 2\dot{a}^2)\delta_{ij} \\ \bar{R} &= 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)\end{aligned}\tag{3.1.7}$$

(iv) **Tensor energia-momento:** fluido ideal com densidade  $\bar{\rho}$ , pressão  $\bar{P}$  homogêneas e que se desloca somente por causa da expansão  $\bar{u}^\mu = (1, 0, 0, 0)$ :

$$\begin{aligned}\bar{T}^{\mu\nu} &= (\bar{P} + \bar{\rho})\bar{u}^\mu\bar{u}^\nu - \bar{P}\bar{g}^{\mu\nu} \\ \bar{T}^{00} &= \bar{\rho}, \quad \bar{T}^{i0} = 0, \quad \bar{T}^{ij} = a^2\bar{P}\delta^{ij}\end{aligned}\tag{3.1.8}$$

A equação da continuidade permanece inalterada em ordem zero, então obtemos os mesmos resultados na predição da matéria e radiação,

$$\dot{\bar{\rho}} + \frac{3\dot{a}}{a}(\bar{\rho} + \bar{P}) = 0 \Rightarrow \bar{\rho}_{\text{mat}}(a) = \frac{\bar{\rho}_{\text{mat}0}}{a^3}, \quad \bar{\rho}_{\text{rad}}(a) = \frac{\bar{\rho}_{\text{rad}0}}{a^4}\tag{3.1.9}$$

porém a equação de Friedmann não terá o termo de curvatura espacial:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_{k=1}^n \bar{\rho}_k.\tag{3.1.10}$$

### 3.1.3 Dinâmica das flutuações

Os efeitos de curvatura em um espaço curvo estão contidas no tensor  $h_{\mu\nu}$  de modo que a métrica completa  $g_{\mu\nu}$  será dependente do tempo e da posição.

(i) **Métrica**

$$\begin{aligned}g_{\mu\nu}(t, x^i) &= \bar{g}_{\mu\nu}(t) + h_{\mu\nu}(t, x^i), \quad |h_{\mu\nu}| \ll |\bar{g}_{\mu\nu}| \\ g^{\mu\nu} &= \bar{g}^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}, \quad h^{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\alpha}h_{\alpha\beta}\bar{g}^{\beta\nu}\end{aligned}\tag{3.1.11}$$

(ii) **Símbolos de conexão afim:**

$$\begin{aligned}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} &= \bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} + \delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} \\ \delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\bar{g}^{\alpha\lambda}\left(\partial_\mu h_{\lambda\nu} + \partial_\nu h_{\mu\lambda} - \partial_\lambda h_{\mu\nu} - 2h_{\lambda\beta}\bar{\Gamma}^\beta_{\mu\nu}\right)\end{aligned}\tag{3.1.12}$$

(iii) **Tensor de Ricci:**

$$R_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} + \delta R_{\mu\nu}$$

$$\delta R_{\mu\nu} = \partial_\mu \delta \Gamma^\alpha_{\alpha\nu} - \partial_\alpha \delta \Gamma^\alpha_{\mu\nu} + \delta \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \bar{\Gamma}^\beta_{\alpha\nu} + \bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\beta} \delta \Gamma^\beta_{\alpha\nu} - \delta \Gamma^\alpha_{\alpha\beta} \bar{\Gamma}^\beta_{\mu\nu} - \bar{\Gamma}^\alpha_{\alpha\beta} \delta \Gamma^\beta_{\mu\nu} \quad (3.1.13)$$

(iv) **Tensor energia-momento:** um espaço não-chato irá deformar a distribuição de matéria, logo também devemos fazer uma perturbação em  $T^{\mu\nu}$ ,

$$T^{\mu\nu}(t, x^i) = \bar{T}^{\mu\nu}(t) + \delta T^{\mu\nu}(t, x^i), \quad |\delta T^{\mu\nu}| \ll |\bar{T}^{\mu\nu}|. \quad (3.1.14)$$

Logo, a equação da continuidade para os termos de primeira ordem:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \partial_\mu \delta T^{\mu\nu} + \bar{\Gamma}^\mu_{\mu\alpha} \delta T^{\alpha\nu} + \bar{\Gamma}^\nu_{\mu\alpha} \delta T^{\mu\alpha} + \delta \Gamma^\mu_{\mu\alpha} \bar{T}^{\alpha\nu} + \delta \Gamma^\nu_{\mu\alpha} \bar{T}^{\mu\alpha} = 0. \quad (3.1.15)$$

Para estudar a evolução das perturbações é mais conveniente reescrever a equação de Einstein, de modo a não introduzir mais termos nos tensores geométricos e passá-los para uma nova descrição de energia e momento usando o tensor  $S_{\mu\nu}$  da seguinte maneira:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi G T_{\mu\nu} \Rightarrow R = 8\pi G T, \quad T = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G S_{\mu\nu}, \quad S_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \quad (3.1.16)$$

a variação nesse novo tensor é dada por

$$\delta S_{\mu\nu} = \delta T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta T \bar{g}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{T} h_{\mu\nu},$$

$$\bar{T} = \bar{g}_{\mu\nu} \bar{T}^{\mu\nu} = \frac{3}{4\pi G} \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a} \right), \quad \delta T = \bar{g}_{\mu\nu} \delta T^{\mu\nu}. \quad (3.1.17)$$

Finalmente, segue a equação de Einstein para as flutuações em primeira ordem:

$$\delta R_{\mu\nu} - 3 \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a} \right) h_{\mu\nu} = -8\pi G \left( \delta T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta T \bar{g}_{\mu\nu} \right) \quad (3.1.18)$$

### 3.1.4 Decomposição SVT e liberdade de calibre

Como resolver esses sistemas de equações diferenciais parciais obviamente não-triviais? Precisamos fazer uma prescrição inteligente das perturbações  $h_{\mu\nu}$  e  $\delta T^{\mu\nu}$ . Uma boa opção é a chamada decomposição SVT cujo objetivo é obter equações que não misturem escalares, vetores e tensores. Para a métrica, lembremos que  $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$  é simétrico, daí temos dez graus de liberdade que serão descritos por 4 campos escalares  $E$ ,  $F$ ,  $A$  e  $B$ ; 2 vetores  $C_i$  e  $G_i$  sem

divergente:  $\partial_i C_i = \partial_i G_i = 0$  e um tensor  $D_{ij}$  simétrico, sem traço e nem divergente:  $D_{ij} = D_{ji}$ ,  $D_{ii} = 0$  e  $\partial_i D_{ij} = 0$ . Portanto, seguem os elementos da métrica

$$\begin{cases} h_{00} = E \\ h_{i0} = -a(\partial_i F + G_i) \\ h_{ij} = -a^2(A\delta_{ij} + \partial_i \partial_j B + \partial_i C_j + \partial_j C_i + D_{ij}) \end{cases} \quad (3.1.19)$$

No tensor energia-momento iremos fazer uma perturbação na densidade, pressão e velocidade de um fluido ideal,

$$\rho(t, x^i) = \bar{\rho}(t) + \delta\rho(t, x^i), \quad P(t, x^i) = \bar{P}(t) + \delta P(t, x^i), \quad u^\mu(t, x^i) = \bar{u}^\mu(t) + \delta u^\mu(t, x^i) \quad (3.1.20)$$

logo, após as flutuações:

$$\delta T_{\mu\nu} = (\delta\rho + \delta P)\bar{u}_\mu\bar{u}_\nu + (\bar{\rho} + \bar{P})(\bar{u}_\mu\delta u_\nu + \delta u_\mu\bar{u}_\nu) - (\bar{P}h_{\mu\nu} + \delta P\bar{g}_{\mu\nu}). \quad (3.1.21)$$

Ainda temos mais duas preocupações, a primeira é que mesmo com a perturbação,  $u^\mu(t, x^i)$  continua sendo uma 4-velocidade, logo

$$u^\mu u_\mu = 1 \Rightarrow \delta u_0 = \frac{1}{2}h_{00} \quad (3.1.22)$$

e por conveniência, as componentes espaciais são separadas em um campo normal e um rotacional da seguinte maneira

$$\delta u_i = \partial_i \delta u + \delta u_i^V, \quad \partial_i \delta u_i^V = 0 \quad (3.1.23)$$

e a segunda: note que  $\delta T_{\mu\nu}$  depende apenas das pressões radiais  $\bar{P}$  e  $\delta P$ . Para generalizar a descrição do fluido devemos acrescentar tensões de cisalhamento: escalar  $\Pi^S$ , vetorial  $\Pi_i^V$  e tensorial  $\Pi_{ij}^T$ . Fazendo as substituições:

$$\delta P\delta_{ij} \rightarrow \delta P\delta_{ij} + \partial_i \Pi_j^V + \partial_j \Pi_i^V + \partial_i \partial_j \Pi^S + \Pi_{ij}^T \quad (3.1.24)$$

$$\partial_i \Pi_i^V = 0, \quad \Pi_{ii}^T = 0, \quad \partial_i \Pi_{ij}^T = 0, \quad \Pi_{ij}^T = \Pi_{ji}^T.$$

Então, obtemos o tensor energia-momento:

$$\begin{cases} \delta T_{00} = \delta\rho + \bar{\rho}h_{00} \\ \delta T_{i0} = (\bar{\rho} + \bar{P})(\partial_i \delta u + \delta u_i^V) - \bar{P}h_{i0} \\ \delta T_{ij} = -\bar{P}h_{ij} + a^2 \left( \delta P\delta_{ij} + \partial_i \Pi_j^V + \partial_j \Pi_i^V + \partial_i \partial_j \Pi^S + \Pi_{ij}^T \right) \end{cases} \quad (3.1.25)$$

Podemos simplificar muito esse problema, eliminando as soluções não-físicas que dependem do sistema de coordenadas, as falsas perturbações. Seja  $x'$  um novo sistema que difere de  $x$  por um deslocamento infinitesimal  $\varepsilon$ ,

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu(x) \Rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}(x)$$

e a diferença  $\Delta h_{\mu\nu}$  das métricas calculadas no mesmo ponto  $x$ :

$$\Delta h_{\mu\nu}(x) = g'_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x) = -\frac{\partial \bar{g}_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \varepsilon^\alpha - \bar{g}_{\alpha\nu} \frac{\partial \varepsilon^\alpha}{\partial x^\mu} - \bar{g}_{\mu\beta} \frac{\partial \varepsilon^\beta}{\partial x^\nu}.$$

O ideal seria escrever todas as perturbações em termos de quantidades invariantes, *i.e.*  $\Delta h_{\mu\nu} = 0$  com perturbações verdadeiras que não possam ser removidas via mudança de coordenadas, para que tenhamos um formalismo covariante e desvinculado de qualquer ponto de observação.

## 3.2 Evolução das perturbações no limite newtoniano

O calibre de Newton é a situação mais simples para encontrarmos as soluções das equações da continuidade e de Einstein - e por ora suficiente para uma primeira análise sobre formação de estruturas. Consideremos apenas perturbações escalares e invariantes, tal que sem perda de generalidade e usando a liberdade de calibre, podemos fazer  $B = F = 0$ . Denotaremos  $E = 2\Phi$ ,  $A = -2\Psi$  e o fluido é completamente descrito pelas funções  $\delta\rho$ ,  $\delta P$ ,  $\Pi^S = \Pi$ . Note que, se  $\delta u_i^V = 0 \Rightarrow \delta u_i = \partial_i \delta u$  e o campo de velocidades é irrotacional, logo por causa dessas restrições não podemos assumir uma distribuição angular geral e com isso o calibre de Newton é incapaz de descrever completamente a anisotropia da CMB depois do desacoplamento.

As leis de conservação de energia e momento (3.1.15) implicam respectivamente nas equações da referência [31]:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\nu = 0) \quad \delta\dot{\rho} + \frac{3\dot{a}}{a}(\delta\rho + \delta P) + \frac{\bar{\rho} + \bar{P}}{a^2} \nabla^2 \delta u + \frac{\dot{a}}{a} \nabla^2 \Pi - 3(\bar{\rho} + \bar{P}) \dot{\Psi} = 0 \\ (\nu = i) \quad \partial_i \left\{ \delta P + \nabla^2 \Pi + \partial_0 [(\bar{\rho} + \bar{P}) \delta u] + \frac{3\dot{a}}{a} (\bar{\rho} + \bar{P}) \delta u + (\bar{\rho} + \bar{P}) \Phi \right\} = 0 \end{array} \right. \quad (3.2.1)$$

e as equações de Einstein (3.1.18)

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mu\nu = 00) \quad 4\pi G(\delta\rho + 3\delta P + \nabla^2 \Pi) = \frac{1}{a^2} \nabla^2 \Phi + \frac{3\dot{a}}{a} \dot{\Phi} + \frac{6\ddot{a}}{a} \Phi + 3\ddot{\Psi} + \frac{6\dot{a}}{a} \dot{\Psi} \\ (\mu\nu = i0) \quad -4\pi G(\bar{\rho} + \bar{P}) \partial_i \delta u = \frac{\dot{a}}{a} \partial_i \Phi + \partial_i \dot{\Psi} \\ (\mu\nu = ij) \quad 4\pi G(\delta\rho - \delta P - \nabla^2 \Pi) = -\frac{\dot{a}}{a} \dot{\Phi} - \left( \frac{4\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2\ddot{a}}{a} \right) \Phi + \frac{1}{a^2} \nabla^2 \Psi - \frac{6\dot{a}}{a} \dot{\Psi} - \ddot{\Psi} \\ (\mu\nu = ij) \quad \partial_i \partial_j (8\pi G a^2 \Pi + \Phi - \Psi) = 0 \end{array} \right. \quad (3.2.2)$$

Lembrando que as conservações de energia e momento são separadas para cada espécie de partículas que compõem o universo, pois ainda não há interação, mas nas equações de Einstein devemos somar sobre todas as densidades e pressões. Na última expressão, vemos que se  $\Pi = 0 \Rightarrow \Psi = \Phi$ , a menos de uma constante, o que facilitaria a resolução dos sistemas acima, mas antes disso temos que avaliar quais serão as consequências se tomarmos esse caso particular. Se  $\Psi = \Phi$ , a métrica estática  $a = \text{cte} = 1$

$$ds^2 = (1 + 2\Phi)dt^2 - (1 - 2\Phi)(dr^2 + r^2d\Omega^2)$$

torna-se exatamente o limite para campos gravitacionais estáticos, fracos e com simetria esférica, ou seja, uma aproximação da métrica de Schwarzschild [32]:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} (dr^2 + r^2d\Omega^2), \quad \Phi(r) = -\frac{GM}{r}.$$

Portanto com  $\Pi = 0$ , a perturbação na métrica  $\Phi$  é o potencial gravitacional, porém a desvantagem dessa escolha é que nos restringimos ao cenário de isotropia. Vamos manter essa hipótese, logo a extensão do modelo padrão aqui apresentada pretende descrever a **distribuição de matéria em um estado inomogêneo, isotrópico e levemente curvo**. Assim como anteriormente, consideremos que todos os fluidos são adiabáticos e que a pressão é linearmente proporcional à densidade de energia:  $P = w\rho$ . Define-se uma flutuação parcial,

$$\delta \equiv \frac{\delta\rho}{\bar{\rho} + \bar{P}}, \quad (3.2.3)$$

que irá simplificar as expressões. No caso de partículas interagentes, o momento transferido devido a espalhamentos ou colisões precisam ser adicionados à equação de conservação de momento. Finalmente, os sistemas de equações no calibre de Newton seguem abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\delta} + \frac{1}{a^2} \nabla^2 \delta u = 3\dot{\Phi} \\ \delta \dot{u} = \frac{3\dot{a}}{a} w \delta u - w \delta - \Phi + \{\text{interações}\} \end{array} \right. \quad (3.2.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4\pi G \sum_k (\delta\rho_k + \dot{\bar{\rho}}_k \delta u_k) = \frac{1}{a^2} \nabla^2 \Phi \\ -4\pi G \sum_k \bar{\rho}_k (1 + w_k) \delta u_k = \frac{\dot{a}}{a} \Phi + \dot{\Phi} \\ 4\pi G \sum_k w_k \delta\rho_k = \ddot{\Phi} + \frac{4\dot{a}}{a} \dot{\Phi} + \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2\ddot{a}}{a} \right) \Phi \end{array} \right. \quad (3.2.5)$$

Podemos cancelar a redundância das equações de Einstein eliminando as velocidades  $\delta u_k$  e assim escrever diretamente a dependência do potencial com a densidade total, generalizando

a equação de Poisson no espaço em expansão:

$$4\pi G \sum \delta\rho_k = \frac{1}{a^2} \nabla^2 \Phi - \frac{3\dot{a}}{a} \left( \frac{\dot{a}}{a} \Phi + \dot{\Phi} \right), \quad (3.2.6)$$

mas dividindo a evolução do universo em eras de predomínio da radiação, matéria e energia escura, teremos uma equação desacoplada para o potencial que depende apenas do coeficiente de pressão  $w$  do fluido dominante,

$$\ddot{\Phi} + \frac{4\dot{a}}{a}(1+3w)\dot{\Phi} + \left[ \frac{\dot{a}^2}{a^2}(1+3w) + \frac{2\ddot{a}}{a} \right] \Phi - \frac{w}{a^2} \nabla^2 \Phi = 0. \quad (3.2.7)$$

### 3.2.1 Interação bárion-fóton

O interesse dessa seção é entender como devemos incluir termos de interação na conservação de momento, em especial, devido ao espalhamento Compton entre fótons e elétrons. Para isso, vamos inicialmente descrever como a expansão e a inomogeneidade do espaço afetam as distribuições estatísticas das partículas, ainda no contexto do limite newtoniano, com flutuações somente de primeira ordem. Nessa seção seguiremos a referência [7]. Considere uma distribuição geral  $f$  da 4-posição  $x^\alpha$  e do 4-momento  $p^\alpha$  tais que essas variáveis são funções implícitas do tempo  $t$ , logo a derivada total:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p^\alpha} \frac{dp^\alpha}{dt}. \quad (3.2.8)$$

Para os fótons, partículas sem massa,

$$p^\alpha p_\alpha = m^2 = 0 \Rightarrow E = p^0 = (1 - \Phi)p$$

definindo  $p^2 \equiv -g_{ij}p^i p^j$  de modo que  $p$  é o módulo do 3-momento. A direção de propagação será representada pelo versor  $n^i$  tal que  $\delta_{ij}n^i n^j = 1$ , então

$$p^i = \frac{p}{a}(1 + \Phi)n^i.$$

Os fótons, como bósons idênticos em equilíbrio termodinâmico com uma temperatura  $T$ , seguem a distribuição de Bose-Einstein que depende apenas da energia  $p$ :

$$f(p, T) = \frac{1}{e^{p/T} - 1} \quad (3.2.9)$$

mas no caso geral vamos adicionar uma perturbação inomogênea  $\delta T(t, x^i, n^i)$  sobre a temperatura média  $\langle T \rangle(t)$  que evolue somente devido à expansão,

$$T = \langle T \rangle + \delta T = \langle T \rangle(1 + \Theta), \quad \Theta(t, x^i, n^i) \equiv \frac{T - \langle T \rangle}{\langle T \rangle} \ll 1 \quad (3.2.10)$$

que em ordem zero, sem perturbação, toma a forma:

$$f^{(0)}(p, \langle T \rangle) = \frac{1}{e^{p/\langle T \rangle} - 1} \quad (3.2.11)$$

e a aproximação linear da distribuição geral em torno de  $\langle T \rangle$ , pode ser escrita como:

$$f(p, T) \simeq f^{(1)}(p, \langle T \rangle + \delta T) = f^{(0)} + \delta f = f^{(0)} + \Theta \langle T \rangle \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \langle T \rangle} = f^{(0)} - \Theta p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \quad (3.2.12)$$

Assim, colocando as componentes do 4-momento do fótons em termos de  $p$  e  $n^i$ , reescrevemos a derivada total da função de distribuição,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial n^i} \frac{dn^i}{dt}}_{\simeq 0}.$$

O último termo é ignorado pois ele é de segunda ordem. As derivadas necessárias para o cálculo de  $f$  sob flutuações seguem abaixo,

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{p^i}{p^0} = \frac{n^i}{a}$$

$$\frac{Dp^\alpha}{Dt} = \frac{dp^\alpha}{dt} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = 0 \Rightarrow \frac{1}{p} \frac{dp}{dt} = -H - \frac{n^i}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

logo a variação da distribuição dos fótons é dada por:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{n^i}{a} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \left( -H - \frac{n^i}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) p \frac{\partial f}{\partial p} \quad (3.2.13)$$

No estado de ordem zero, ou seja, espaço homogêneo, isotrópico ( $\Theta = 0$ ) e chato ( $\Phi = 0$ ) e o universo é composto por partículas não-interagentes, daí  $f^{(0)}$  deve ser constante no tempo,

$$\frac{df^{(0)}}{dt} = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} - Hp \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}, \quad (3.2.14)$$

$$\frac{df^{(0)}}{dt} = 0 \Rightarrow \langle T \rangle(a) = \frac{\langle T \rangle_0}{a}$$

e no limite newtoniano de primeira ordem entram os termos de inhomogeneidade, curvatura e as possíveis interações das partículas na função de colisão  $C[f]$ :

$$\frac{df^{(1)}}{dt} = \frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} + \frac{n^i}{a} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x^i} + \left( -H - \frac{n^i}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) p \frac{\partial f^{(1)}}{\partial p} \quad (3.2.15)$$

$$\frac{df^{(1)}}{dt} = -p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{n^i}{a} \frac{\partial \Theta}{\partial x^i} + \frac{n^i}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = C[f(p)].$$

Considere a seguinte interação:  $A + B \longleftrightarrow C + D$ , a taxa de variação da distribuição da partícula  $A$  devido à interação,

$$dC[f_A(p)] = g_A \frac{|\mathcal{M}|^2}{2E_A} d\Xi_A \quad (3.2.16)$$

$$d\Xi_A = \underbrace{(2\pi)^4 \delta^4(p_A^\alpha + p_B^\alpha - p_C^\alpha - p_D^\alpha)}_{\text{conservação de energia e momento}} \times \underbrace{\frac{d^3 p_B}{(2\pi)^3 2E_B} \frac{d^3 p_C}{(2\pi)^3 2E_C} \frac{d^3 p_D}{(2\pi)^3 2E_D}}_{\text{densidade de estados}} \times$$

$$\times \left\{ \underbrace{f_C f_D}_{\text{bóson}} \underbrace{(1 + f_C)(1 - f_D)}_{\text{férmion}} - \underbrace{f_A f_B}_{\text{bóson}} \underbrace{(1 + f_A)(1 - f_B)}_{\text{férmion}} \right\}$$

sendo o número de graus de degenerescência  $g_A = 2$  para os fótons,  $|\mathcal{M}|^2$  é a amplitude do processo e  $d\Xi_A$  denotado por fator integrante no espaço de fase. O sinal negativo para as distribuições de férmions deve-se ao princípio de exclusão de Pauli.

Inicialmente identificamos bárions como um estado ligado de elétrons e prótons, mas para a análise da influência do espalhamento Compton na dispersão dos fótons, os elétrons são muito mais importantes que os prótons, pois em geral a seção de choque de qualquer processo decai com quadrado das massas das partículas interagentes. Além disso, vamos ignorar a distribuição angular e polarização dos fótons (lembremos que já nos restringimos ao cenário de isotropia quando fizemos  $\Pi = 0$ ); assim simplifica-se a amplitude do espalhamento Compton [7]:

$$|\mathcal{M}|^2 = 8\pi\sigma_T m_e^2, \quad \sigma_T = \frac{8\pi}{3} \frac{\alpha^2}{m_e^2}, \quad \alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi} \simeq \frac{1}{137} \quad (3.2.17)$$

$$\gamma(p) + e^-(q) \longleftrightarrow \gamma(p') + e^-(q')$$

Mais uma ponderação é sobre a escala de energia: após a aniquilação elétron-pósitron e formação dos primeiros nucleons (prótons e nêutrons) consideramos bárions como não-relativísticos,

$$E_e(q) \simeq m_e + \frac{q^2}{2m_e}$$

e para as distribuições, como  $E \gg T \Rightarrow f \ll 1$ . Mas também, como  $m_e \gg q$  então o módulo do 3-momento varia pouco devido ao espalhamento, a alteração mais significativa é certamente na direção dos elétrons, fazendo  $q \simeq q'$ , então a distribuição Fermi-Dirac dos elétrons,

$$f_e(q) = \frac{1}{e^{E(q)/T} + 1} \simeq f_e(q').$$

Portanto, o termo de colisão para os fótons:

$$C[f_\gamma(p)] = \frac{|\mathcal{M}|^2}{p} \times \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 2E_e(q)} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2E_\gamma(p')} \int \frac{d^3 q'}{(2\pi)^3 2E_e(q')} \times$$

$$\times (2\pi)^4 \delta^4(p^\alpha + q^\alpha - p'^\alpha + q'^\alpha) \times f_e(q) \{f_\gamma(p') - f_\gamma(p)\}$$



Usando a aproximação linear (3.2.12), note que uma das integrais dará exatamente a densidade de elétrons comóvel,

$$\bar{\rho}_e = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} f_e(q)$$

e uma outra será o termo de monopolo da distribuição

$$\Theta_0(t, x^i) \equiv \frac{1}{4\pi} \int d\Omega \Theta(t, x^i, n^i)$$

assim, o resultado final para o termo de colisão via espalhamento Compton é dada por [7]:

$$C[f_\gamma(p)] = -p \frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial p} \bar{\rho}_e \sigma_T (\Theta_0 - \Theta + n^i v_e^i). \quad (3.2.18)$$

Nesse contexto, os elétrons interagem com fótons (Compton) e prótons (Coulomb), enquanto os prótons interagem - em primeira ordem - somente com elétrons,

$$\gamma(p) + e^-(q) \longleftrightarrow \gamma(p') + e^-(q')$$

$$e^-(q) + p(Q) \longleftrightarrow e^-(q') + p(Q')$$

então, o termo de colisão para elétrons pode ser colocado da seguinte maneira:

$$\frac{df_e^{(1)}}{dt} = C[f_e(q)] = \langle c_{e\gamma} \rangle_{pp'q'} + \langle c_{ep} \rangle_{QQ'q'} \quad (3.2.19)$$

$$c_{e\gamma} = (2\pi)^4 \delta^4(p^\alpha + q^\alpha - p'^\alpha + q'^\alpha) \{f_e(q') f_\gamma(p') - f_e(q) f_\gamma(p)\} |\mathcal{M}_{e\gamma}|^2$$

$$\langle (\dots) \rangle_{pp'q'} = \frac{1}{2E_e(q)} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_\gamma(p)} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E_\gamma(p')} \int \frac{d^3q'}{(2\pi)^3 2E_e(q')} (\dots)$$

de modo análogo ao  $\langle c_{ep} \rangle_{QQ'q'}$  e para os prótons,

$$\frac{df_p^{(1)}}{dt} = C[f_p(Q)] = \langle c_{ep} \rangle_{qq'Q'}. \quad (3.2.20)$$

A média da variação do momento de cada espécie devido às interações são:

$$\left\langle \frac{dq^i}{dt} \right\rangle = \langle c_{e\gamma} q^i \rangle_{pp'qq'} + \langle c_{ep} q^i \rangle_{QQ'qq'} \quad , \quad \left\langle \frac{dQ^i}{dt} \right\rangle = \langle c_{ep} Q^i \rangle_{QQ'qq'} \quad (3.2.21)$$

logo a média total para os bárions é tal que a média do espalhamento Coulomb é nula e a média dos elétrons pode ser substituída pelo momento dos fótons,

$$\left\langle \frac{dq^i}{dt} \right\rangle + \left\langle \frac{dQ^i}{dt} \right\rangle = \langle c_{e\gamma} q^i \rangle_{pp'qq'} + \underbrace{\langle c_{ep} (q^i + Q^i) \rangle_{QQ'qq'}}_{=0} = \langle c_{e\gamma} q^i \rangle_{pp'qq'}$$

$$\begin{aligned} \langle c_{e\gamma} q^i \rangle_{pp'qq'} &= - \langle c_{e\gamma} p^i \rangle_{pp'qq'} = \bar{\rho}_e \sigma_T \int d^3p p \frac{\partial f_\gamma^{(0)}}{\partial p} (\Theta_0 - \Theta + n^j v_b^j) p^i \\ &= \frac{4\bar{\rho}_\gamma}{3} \bar{\rho}_e \sigma_T (3\Theta_1^i - v_b^i), \quad \Theta_1^i \equiv \frac{1}{4\pi} \int d\Omega n^i \Theta(t, x^i, n^i). \end{aligned}$$

Como estado ligado, elétrons e prótons em média têm a mesma velocidade na plasma  $v_e = v_p = v_b$ , densidade  $\delta_e = \delta_p = \delta_b$  e o termo de dipolo dos fótons é representado por  $\Theta_1^i$ .

Nesse instante ainda temos que relacionar os primeiros coeficientes de expansão multipolar  $\Theta_0$  e  $\Theta^i$  com quantidades físicas. A flutuação de energia dos fótons  $\delta\rho_\gamma$  é a média sobre os estados usando a perturbação de primeira ordem  $\delta f_\gamma$ :

$$\delta\rho_\gamma = g \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \delta f_\gamma E_\gamma = 4\bar{\rho}_\gamma \Theta_0. \quad (3.2.22)$$

Equivalentemente para o momento:

$$(\bar{\rho}_\gamma + \bar{P}_\gamma) v_\gamma^i = g \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \delta f_\gamma p_\gamma^i = 4\bar{\rho}_\gamma \Theta_1^i. \quad (3.2.23)$$

As últimas considerações são sobre as velocidades:  $v_b^i$  e  $v_\gamma^i$  são as velocidades peculiares por causa das distribuições inhomogêneas de bárions e fótons, logo escrevendo em termos de quadri-vetores cujo parâmetro é o tempo próprio,

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{dt} = a \frac{dx^\alpha}{dt} \Rightarrow u^i = av^i$$

além disso, como estamos na caso de isotropia, para campos irrotacionais  $\Theta_1^i = \partial_i \Theta_1$  assim como as velocidades. Finalmente, os termos de interação Compton para bárions e fótons são respectivamente:

$$\{\text{Compton}\}_b = \frac{a}{\bar{\rho}_b} \langle c_{e\gamma} q \rangle_{pp'qq'} = \frac{4\bar{\rho}_\gamma}{3\bar{\rho}_b} \bar{\rho}_e \sigma_T (\delta u_\gamma - \delta u_b) \quad (3.2.24)$$

$$\{\text{Compton}\}_\gamma = \frac{a}{\bar{\rho}_\gamma + \bar{P}_\gamma} \langle c_{e\gamma} p \rangle_{pp'qq'} = -\bar{\rho}_e \sigma_T (\delta u_\gamma - \delta u_b) \quad (3.2.25)$$

### 3.2.2 Conteúdo do universo

Aqui listamos e caracterizamos as partículas que compõem o universo descrito nessa extensão do modelo padrão cosmológico.

- (i) **Matéria escura:** matéria fria (*cold dark matter* - CDM)  $T \ll m$ , não-relativística  $E \simeq m$ , sem exercer pressão  $w = 0$  e completamente estéril, ou seja, não há autointeração e nem interação com nenhuma outra espécie,

$$\begin{cases} \dot{\delta}_{dm} + \frac{1}{a^2} \nabla^2 \delta u_{dm} = 3\dot{\Phi} \\ \delta \dot{u}_{dm} = -\Phi \end{cases} \quad (3.2.26)$$

- (ii) **Bárions**<sup>1</sup>: conteúdo composto majoritariamente por elétrons, prótons e nêutrons. Matéria fria, não-relativística e que não exerce pressão, mas há interações: o espalhamento Compton com os fótons antes do desacoplamento da CMB e a atração coulombiana entre elétrons e prótons,

$$\begin{cases} \dot{\delta}_b + \frac{1}{a^2} \nabla^2 \delta u_b = 3\dot{\Phi} \\ \delta \dot{u}_b = -\Phi + \frac{4\bar{\rho}_\gamma}{3\bar{\rho}_b} \bar{\rho}_e \sigma_T (\delta u_\gamma - \delta u_b) \end{cases} \quad (3.2.27)$$

- (iii) **Fótons:** ultra-relativísticos e exercem pressão isotrópica  $w = 1/3$ . A análise da distribuição dos fótons nesse modelo é válida somente antes do desacoplamento, pois não será possível descrevê-la depois do último espalhamento impondo isotropia do espaço,

$$\begin{cases} \dot{\delta}_\gamma + \frac{1}{a^2} \nabla^2 \delta u_\gamma = 3\dot{\Phi} \\ \delta \dot{u}_\gamma = \frac{\dot{a}}{a} \delta u_\gamma - \frac{1}{3} \delta_\gamma - \Phi - \bar{\rho}_e \sigma_T (\delta u_\gamma - \delta u_b) \end{cases} \quad (3.2.28)$$

- (iv) **Neutrinos:** um dos maiores desafios em qualquer modelo de Física de Partículas e Cosmologia. Na dinâmica de expansão, eles contribuem com a soma das massas na densidade de energia total e no número efetivo de partículas relativísticas, juntamente com os fótons.

### 3.3 Estruturas de larga-escala

O objetivo desta seção é calcular as funções de crescimento  $D(a)$  e de transferência  $T(k)$  necessárias para descrever a evolução temporal e no espaço de fase, respectivamente, das flutuações de densidade da matéria total  $\delta_m(k, a)$  e assim definir o espectro de potência  $P(k)$  que será importante na determinação de observáveis cosmológicos no próximo capítulo.

<sup>1</sup>Em Física de Partículas Elementares, o elétron é classificado como um lépton. Mas em Cosmologia, denota-se por bárions toda a matéria fria interagente, logo nesse contexto, os elétrons são classificados como bárions.

### 3.3.1 Dinâmica na era da matéria

As equações da teoria de perturbações lineares no calibre de Newton já foram deduzidas e discutidas nas seções anteriores e estão disponíveis nas referências [7, 31]. Aqui selecionamos as expressões fundamentais, começando pela equação de Friedmann para o fator de escala  $a(t)$ :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_{i=1}^n \rho_i - \frac{K}{a^2} = H_0^2 \left[ \frac{\Omega_{r0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda 0} - \frac{(\Omega_0 - 1)}{a^2} \right]. \quad (3.3.1)$$

As leis de conservação de energia e momento que relacionam as flutuações de densidade, a amplitude da onda esférica  $\delta u$  do fluido com velocidade irrotacional  $\delta \vec{u} = \nabla(\delta u)$  e adiabático de pressão  $P = w\rho$  com o potencial gravitacional  $\Phi$  estão logo abaixo:

$$\dot{\delta} + \frac{1}{a^2} \nabla^2 \delta u = 3\dot{\Phi}, \quad (3.3.2)$$

$$\delta \dot{u} = \frac{3\dot{a}}{a} w \delta u - w \delta - \Phi + \{\text{interações}\}, \quad (3.3.3)$$

e as equações de Einstein são as seguintes:

$$4\pi G \sum \delta \rho = \frac{1}{a^2} (\nabla^2 + 3K) \Phi - \frac{3\dot{a}}{a} \left( \frac{\dot{a}}{a} \Phi + \dot{\Phi} \right), \quad (3.3.4)$$

$$-4\pi G \sum (1+w) \bar{\rho} \delta u = \frac{\dot{a}}{a} \Phi + \dot{\Phi}. \quad (3.3.5)$$

Considerando a era de predomínio da matéria, quando  $a(t) \simeq (3/2H_0 t)^{2/3}$ , a flutuação de densidade é dominada pela matéria total,

$$\sum \delta \rho \simeq \delta \rho_m = \bar{\rho}_m \delta_m, \quad \delta_m = \delta_{dm} + \delta_b.$$

Substituímos a derivada temporal  $\dot{f} = df/dt$  pela derivada em relação ao fator de escala  $f' = df/da$  e, pela equação (3.3.4), a perturbação é dada por:

$$\delta_m = \frac{1}{4\pi G \bar{\rho}_m a^3} \left[ a(\nabla^2 + 3K) \Phi - 3a^3 H^2 (\Phi + a\Phi') \right]. \quad (3.3.6)$$

Manipulando as equações (3.3.2) e (3.3.5) eliminamos a dependência com a velocidade  $\delta u$ . Derivando (3.3.6) em relação ao fator de escala  $a$  e usando  $\delta'_m$  de (3.3.2), obtêm-se uma expressão isolada para o potencial:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi G \bar{\rho}_m a^3} \left[ aK\Phi - a^3 H^2 (\Phi + a\Phi') \right] + \text{cte.}$$

Na equação de Friedmann (3.3.1), desconsiderando o termo de radiação e assumindo  $\Lambda$  como uma constante cosmológica, podemos reescrever a curvatura escalar como

$$K = a^3 H H' + 4\pi G a^2 \bar{\rho}_m,$$

e dado que  $\bar{\rho}_m a^3 = \text{cte}$ , a evolução do potencial gravitacional na era da matéria é a seguinte:

$$\Phi(a) \propto \frac{H(a)}{a} \int \frac{da}{a^3 H^3}. \quad (3.3.7)$$

Para um espaço levemente curvo tal que  $K \simeq 0$ ,  $\Phi$  descreve totalmente os efeitos de curvatura. No regime linear, as soluções podem ser fatoradas e obtidas no espaço de Fourier:

$$\delta(\vec{x}, t) = D(a(t))\delta(\vec{x}) = D(a) \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \delta(\vec{k}), \quad \delta u(\vec{x}, t) = D(a) \int d^3k \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{k} \delta u(\vec{k}).$$

Logo, para determinarmos a flutuação de densidade, voltamos para a equação (3.3.6),

$$\delta_m(\vec{k}, a) = \delta_m(\vec{k})D(a) = -\frac{2a k^2 \Phi(\vec{k}, a)}{3 \Omega_{m0} H_0^2} \times [1 + C(k, a)], \quad (3.3.8)$$

onde definimos

$$C(k, a) \equiv \frac{3a^2 H^2}{k^2} \left( \frac{aH'}{H} + \frac{1/a^2 H^3}{\int da/a^3 H^3} \right).$$

No regime de sub-horizonte, quando ocorre a formação de estruturas:  $k \gg aH \Rightarrow C(k, a) \ll 1$ , assim a última expressão pode ser simplificada,

$$\delta_m(\vec{k}, a) \simeq -\frac{2a k^2 \Phi(\vec{k}, a)}{3 \Omega_{m0} H_0^2}.$$

O potencial na era da matéria é quase constante no tempo por (3.3.7), então

$$\Phi(\vec{k}, a) \simeq \Phi(\vec{k}, a_m) \Rightarrow \delta_m(\vec{k}, a) = -\frac{2k^2}{3H_0^2} \frac{\Phi(\vec{k}, a_m)}{\Omega_{m0}} D(a),$$

sendo  $a_m$  o fator de escala no início da era da matéria e  $D(a)$  é a função de crescimento linear aproximada por  $D(a > a_m) \simeq a$ . A solução exata é a evolução do potencial  $\Phi$  em (3.3.7) vezes o fator de escala:

$$D(a) = \frac{H(a)}{H_0} \int_0^a \frac{H_0^3 da'}{[a' H(a')]^3}. \quad (3.3.9)$$

A função de transferência  $T(k)$  descreve, no espaço de fase, o intervalo de transição do fim da era da radiação ( $a_i$ ), passando pelo equilíbrio entre radiação e matéria ( $a_{eq}$ ), recombinação e desacoplamento da CMB ( $a_r$ ), até o começo da era da matéria ( $a_m$ ):

$$T(k) \equiv \frac{\Phi(\vec{k}, a_m)}{\Phi(\vec{k}, a_i)} \quad (3.3.10)$$

daí a perturbação na densidade de matéria pode ser reformulada para:

$$\delta_m(\vec{k}, a) = -\frac{2k^2}{3H_0^2} \frac{\Phi(\vec{k}, a_i)}{\Omega_{m0}} T(k) D(a). \quad (3.3.11)$$

Como estamos interessados em analisar a influência da matéria bariônica no espectro de potência e  $\delta_m(k) = \delta_b(k) + \delta_{dm}(k)$ , logo podemos fazer  $T_b(k) \sim \delta_b(k)$  e  $T_{dm}(k) \sim \delta_{dm}(k)$  e separar bárions e matéria escura na função de transferência total, seguindo a referência [10]:

$$T(k) = \left( \frac{\Omega_b}{\Omega_m} \right) T_b(k) + \left( \frac{\Omega_{dm}}{\Omega_m} \right) T_{dm}(k) \quad (3.3.12)$$

e o potencial gravitacional em termos das componentes de matéria é dado por

$$\left( \frac{\Omega_b}{\Omega_m} \right) \delta_b(\vec{k}, a) + \left( \frac{\Omega_{dm}}{\Omega_m} \right) \delta_{dm}(\vec{k}, a) = -\frac{2a}{3} \frac{k^2}{H_0^2} \Phi(\vec{k}, a). \quad (3.3.13)$$

### 3.3.2 Condições iniciais da recombinação

Na era de predomínio da matéria  $a \geq a_m$ , desde a época da recombinação até a era moderna de expansão acelerada, os fótons já estão desacoplados e bárions e matéria escura dominam a dinâmica da expansão durante a formação de estruturas. Novamente, como discutidos nas seções anteriores e também disponíveis nas referências [7, 31], seguem os sistemas de equações da teoria linear para cada espécie de partícula (matéria escura e bariônica) em modos de propagação  $k$  e em termos do fator de escala  $a$ , onde  $\eta \equiv k/H_0$ :

(i) Potencial gravitacional

$$\Phi'' + \frac{7}{a} \Phi' = 0 \quad (3.3.14)$$

(ii) Matéria escura

$$\begin{cases} \delta'_{dm} - \frac{\eta}{a^{3/2}} \delta u_{dm} = 3\Phi' \simeq 0 \\ \delta u'_{dm} = -\sqrt{a} \eta \Phi \end{cases} \quad (3.3.15)$$

(iii) Bárions

$$\begin{cases} \delta'_b - \frac{\eta}{a^{3/2}} \delta u_b = 3\Phi' \simeq 0 \\ \delta u'_b = -\sqrt{a} \eta \Phi \end{cases} \quad (3.3.16)$$

A partir das equações acima, definimos a diferença  $\Delta \equiv \delta_{dm} - \delta_b$  tal que:

$$\Delta'' + \frac{3}{2a} \Delta' = 0 \Rightarrow \Delta(k, a) = C_1(k) + \frac{C_2(k)}{\sqrt{a}} \quad (3.3.17)$$

ou seja, a diferença entre matéria escura e bariônica decai e tende a ser constante durante a evolução. As condições iniciais  $C_1$  e  $C_2$  da era da matéria, supondo um desacoplamento suave e

instantâneo, devem coincidir com as condições finais da recombinação em  $a = a_r$ , que marcam o término da era da radiação, quando  $a(t) \simeq \sqrt{2H_0 t}$ . Os cálculos explícitos para se obter as condições iniciais na era da matéria estão detalhados no livro-texto [18]. Usando as leis de conservação nesse período e impondo continuidade das soluções, obtemos:

$$C_1(k) = \delta_{\text{dm}}(k, a_r) - \delta_b(k, a_r) + \frac{2k}{H_0} \frac{1}{\sqrt{a_r}} [\delta u_{\text{dm}}(k, a_r) - \delta u_b(k, a_r)],$$

$$C_2(k) = -\frac{2k}{H_0} [\delta u_{\text{dm}}(k, a_r) - \delta u_b(k, a_r)].$$

Voltando para o sistema de equações e escrevendo o potencial como na expressão (3.3.13), temos as flutuações de densidade para a matéria escura e a bariônica:

$$\begin{cases} \delta_{\text{dm}}'' + \frac{3}{2a} \delta_{\text{dm}}' - \frac{3}{2a^2} \delta_{\text{dm}} = -\frac{3}{2a^2} \left( \frac{\Omega_b}{\Omega_m} \right) \Delta, \\ \delta_b'' + \frac{3}{2a} \delta_b' - \frac{3}{2a^2} \delta_b = \frac{3}{2a^2} \left( \frac{\Omega_{\text{dm}}}{\Omega_m} \right) \Delta, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\delta_{\text{dm}}(k, a) = \frac{\Omega_b}{\Omega_m} \Delta(k, a) + \alpha(k) a + \frac{\beta(k)}{a^{3/2}},$$

$$\delta_b(k, a) = -\frac{\Omega_{\text{dm}}}{\Omega_m} \Delta(k, a) + \alpha(k) a + \frac{\beta(k)}{a^{3/2}}. \quad (3.3.18)$$

Note que, como as funções  $\Delta(k, a)$  e  $a^{-3/2}$  são decrescentes, o único parâmetro que descreve o crescimento de estruturas é o modo de propagação  $\alpha(k)$ , que em termos das condições iniciais da era da matéria tem a seguinte forma [18]:

$$\alpha(k) = \frac{\Omega_{\text{dm}}}{\Omega_m} \left\{ \frac{3}{5a_r} \delta_{\text{dm}}(k, a_r) + \frac{2}{5a_r^{3/2}} \frac{k}{H_0} \delta u_{\text{dm}}(k, a_r) \right\} + \frac{\Omega_b}{\Omega_m} \left\{ \frac{3}{5a_r} \delta_b(k, a_r) + \frac{2}{5a_r^{3/2}} \frac{k}{H_0} \delta u_b(k, a_r) \right\}.$$

A matéria escura é pouca influenciada pelo fim da interação entre bárions e fótons, então podemos supor que  $\delta_{\text{dm}}$  e  $\delta u_{\text{dm}}$  não mudam durante a transição, assim relacionamos [18]

$$\delta u_{\text{dm}}(k, a_r) = \frac{H_0}{k} \sqrt{a_r} \delta_{\text{dm}}(k, a_r),$$

eliminamos a velocidade  $\delta u_{\text{dm}}(k, a_r)$  em  $\alpha(k)$  e, de acordo com [18], a condição inicial para densidade é dada por:

$$\delta_{\text{dm}}(k, z_r) = -\frac{27}{4} \left( 1 - 0.6 \frac{\Omega_b}{\Omega_m} \right) \left( \frac{1 + z_{\text{eq}}}{1 + z_r} \right)^{1 - 0.6 \frac{\Omega_b}{\Omega_m}} \cdot \Phi(k, z_i) \cdot \log \left( \frac{0.4}{1 + z_{\text{eq}}} \cdot \frac{k}{H_0} \right) \quad (3.3.19)$$

onde  $z_{\text{eq}}$  marca o equilíbrio entre matéria e radiação, *i.e.*

$$\Omega_{\text{rd}}(z_{\text{eq}}) = \Omega_m(z_{\text{eq}}) \Leftrightarrow z_{\text{eq}} = \frac{\Omega_{\text{m0}}}{\Omega_{\text{rd0}}} - 1, \quad (3.3.20)$$

outro parâmetro importante é o horizonte de equilíbrio:

$$k_{\text{eq}} \equiv a_{\text{eq}} H(a_{\text{eq}}) = H_0 \sqrt{\frac{2\Omega_{\text{m}0}}{a_{\text{eq}}}} = H_0 \sqrt{2\Omega_{\text{m}0}(1+z_{\text{eq}})}, \quad (3.3.21)$$

portanto, usando a condição inicial (3.3.19) em  $\alpha(k)$  na solução (3.3.18) para  $\delta_{\text{dm}}(k, a)$ , a função de transferência da matéria escura por (3.3.11) possui a dependência abaixo:

$$T_{\text{dm}}(k) \sim \frac{\log(k)}{k^2}. \quad (3.3.22)$$

A densidade e a velocidade dos bárions logo após a recombinação têm um comportamento oscilatório por causa do confronto entre a gravidade - tentando acumular de matéria - com a pressão de radiação da interação com os fótons e a expansão cósmica, as duas últimas tendem a dissipar qualquer aglomeração. As condições iniciais para os bárions são [18]:

$$\begin{cases} \delta_{\text{b}}(k, z_{\text{r}}) &= -u_{\text{s}}^{-2}(z_{\text{r}}) \cdot \Phi(k, z_{\text{r}}) + \Phi(k, z_{\text{i}}) \cdot A(k, z_{\text{r}}) \cdot \cos(kr_{\text{s}}) \\ \delta u_{\text{b}}(k, z_{\text{r}}) &= -3\Phi(k, z_{\text{i}}) \cdot \frac{u_{\text{s}}(z_{\text{r}})}{1+z_{\text{r}}} \cdot A(k, z_{\text{r}}) \cdot \sin(kr_{\text{s}}) \end{cases} \quad (3.3.23)$$

sendo  $u_{\text{s}}$  a velocidade do som no plasma bárion-fóton:

$$u_{\text{s}}^2 \equiv \frac{\delta P}{\delta \rho} = \frac{\dot{P}_{\gamma}}{\dot{\rho}_{\gamma} + \dot{\rho}_{\text{b}}} = \frac{1}{3(1+R)} \text{ onde } R \equiv \frac{3\rho_{\text{b}}}{4\rho_{\gamma}}, \quad (3.3.24)$$

define-se o horizonte de som acústico  $r_{\text{s}}$  como sendo a distância comóvel de propagação da onda no plasma até a *drag epoch* ( $z_{\text{d}}$ ), ou seja, o momento em que os bárions entram em equilíbrio cinético logo após ao desacoplamento dos fótons:

$$r_{\text{s}} = \int_0^{t(z_{\text{d}})} (1+z) u_{\text{s}} dt \quad (3.3.25)$$

e  $A(k, a)$  descreve o chamado efeito *Silk damping*: um amortecimento das oscilações devido ao acoplamento bárion-fóton não ser perfeito e por isso a taxa de interação  $\sim \rho_e \sigma_T$  deve ser maior que a taxa de expansão  $H$ , caso contrário os efeitos gravitacionais são totalmente dissipados e não há acúmulo de matéria. Como os modos sub-horizonte são os que efetivamente contribuem para a formação de estruturas:  $\eta = k/H_0 \gg 1$ , a velocidade dos bárions é mais importante que a sua densidade no modo  $\alpha(k)$ . Portanto, usando os resultados de (3.3.23) em  $\delta_{\text{b}}(k, a)$  na expressão (3.3.18), a função de transferência bariônica (3.3.11) pode ser aproximada por

$$T_{\text{b}}(k) \sim \frac{\sin(kr_{\text{s}})}{kr_{\text{s}}} A(k). \quad (3.3.26)$$



# Cosmologia observacional

# 4

## 4.1 Estruturas de larga-escala: observáveis cosmológicos

Nesta seção usaremos os principais resultados do capítulo anterior: as funções de crescimento  $D(z)$  e de transferência  $T(k)$  durante a época da matéria para calcularmos o espectro de potência  $P(k, z)$  e analisar a sua dependência com os parâmetros de energia escura  $\Omega_\Lambda$ , de matéria escura  $\Omega_{\text{dm}}$  e bariônica  $\Omega_{\text{b}}$ . Além disso, também apresentaremos a função de correlação radial  $\xi(x)$  a partir de  $P(k)$ , onde identificamos o pico das oscilações acústicas bariônicas.

### 4.1.1 Espectro de potência

Daniel J. Eisenstein e Wayne Hu (E&H) publicaram no artigo [10] um *fitting formulae* dos observáveis da era da recombinação e estudaram a influência da matéria bariônica na função de transferência total. Um dos resultados deste trabalho foi a parametrização do efeito *Silk damping* pela fórmula abaixo, sendo  $k_{\text{Silk}}$  o modo a partir do qual as oscilações são fortemente atenuadas:

$$A(k) \sim \frac{\log(k)}{k^2(1 + kr_s)} + \frac{e^{-(k/k_{\text{Silk}})^{1.4}}}{1 + (kr_s)^{-3}}. \quad (4.1.1)$$

Entretanto, esse modelo possui algumas limitações, como incluir apenas perturbações lineares (suficientes apenas até  $k < h \text{ Mpc}^{-1}$ ), não considerar efeitos de neutrinos massivos, que devem ser tratados como uma componente relativística de matéria escura e, principalmente, hoje temos precisão suficiente nas observações para afirmar que as oscilações são mal parametrizadas pela equações (3.3.26, 4.1.1). Por isso, frequentemente, o modelo de E&H é usado para calcular o espectro de potência somente da matéria escura [11].

Atualmente, códigos como o *Code for Anisotropies in the Microwave Background* (**CAMB**<sup>1</sup>) e o *Cosmic Linear Anisotropy Solving System* (**CLASS**<sup>2</sup>) simulam a evolução de perturbações cosmológicas e calculam observáveis da radiação cósmica de fundo e de estruturas de larga-escala de forma mais precisa que E&H, resolvendo as equações de Boltzmann (3.2.26, 3.2.27, 3.2.28) numericamente, mais detalhes em [3, 23]. De fato, nessa tese de mestrado usaremos o CAMB e o CLASS para o cálculo do espectro de potência da matéria total.

<sup>1</sup>CAMB website: <http://camb.info/>

<sup>2</sup>CLASS website: <http://class-code.net/>

Define-se o espectro de potência como sendo a amplitude de normalização das perturbações de densidade no espaço de momentos:

$$\langle \delta(\vec{k}_1) \delta(\vec{k}_2) \rangle \equiv \frac{P(k_1)}{(2\pi)^3} \delta_D^3(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \quad (4.1.2)$$

Assim, calculando a média das flutuações em dois pontos pela equação (3.3.11), o espectro de potência da matéria na teoria linear pode ser reescrito como:

$$P(k, z) = P_i(k) T^2(k) D^2(z) \quad (4.1.3)$$

sendo  $P_i(k)$  o espectro no fim da era da radiação,

$$P_i(k) \equiv \frac{4k^4}{9H_0^4} \frac{\langle |\Phi(\vec{k}, a_i)|^2 \rangle}{\Omega_{m0}^2}.$$

A teoria da inflação, que explica parcialmente a origem das flutuações cosmológicas [7, 31], prevê um espectro primordial aproximadamente linear:

$$P_i(k) = A_s k^{n_s}, \quad n_s \simeq 1. \quad (4.1.4)$$

Na tabela 4.1 estão os parâmetros cosmológicos estimados pelo WMAP 2013 [30] que foram usados para calcular alguns observáveis de estruturas de larga-escala com o CLASS.

Tabela 4.1: Parâmetros cosmológicos: CLASS input

Descrição	Valores
Parâmetro de Hubble	$h = 0.6932$
Temperatura da CMB	$T_0 = 2.725 \text{ K}$
Densidade total de matéria	$\Omega_{m0} = 0.2864$
Densidade energia escura	$\Omega_{\Lambda 0} = 0.7135$
Equação de estado $\Lambda$	$w = -1.073$
Parâmetro de curvatura	$\Omega_K = -0.0027$
Número efetivo de $\nu$ 's	$N_{\text{eff}} = 3.046$
Espectro primordial	$A_s = 2.3 \times 10^{-9}$
Índice espectral	$n_s = 0.9645$

Tabela 4.2: Resultados: CLASS outputs

Descrição	Valores
Idade do universo	$t_0 = 13.782$ Gyr
Raio observável	$R = 14.296$ Gpc
Redshift na recombinação	$z_r = 1088.97$
Horizonte de som em $z_r$	$r_s = 145.85$ Mpc
Redshift na baryon drag	$z_d = 1059.61$
Horizonte de som em $z_d$	$r_s = 148.49$ Mpc

A figura 4.1 exibe o potencial gravitacional previsto pela equação (3.3.13) da teoria linear, usando os parâmetros da tabela 4.1 para diferentes redshifts. Note que o potencial é aproximadamente constante para  $k < 10^{-2}h/\text{Mpc}$  e  $k > 10^{-1}h/\text{Mpc}$  porém  $\Phi$  muda abruptamente entre  $10^{-2}h/\text{Mpc} < k < 10^{-1}h/\text{Mpc}$  pois, no espaço de configuração  $x = 1/k$ , esse intervalo marca a transição entre a era da radiação e a da matéria, quando as flutuações são acentuadas.

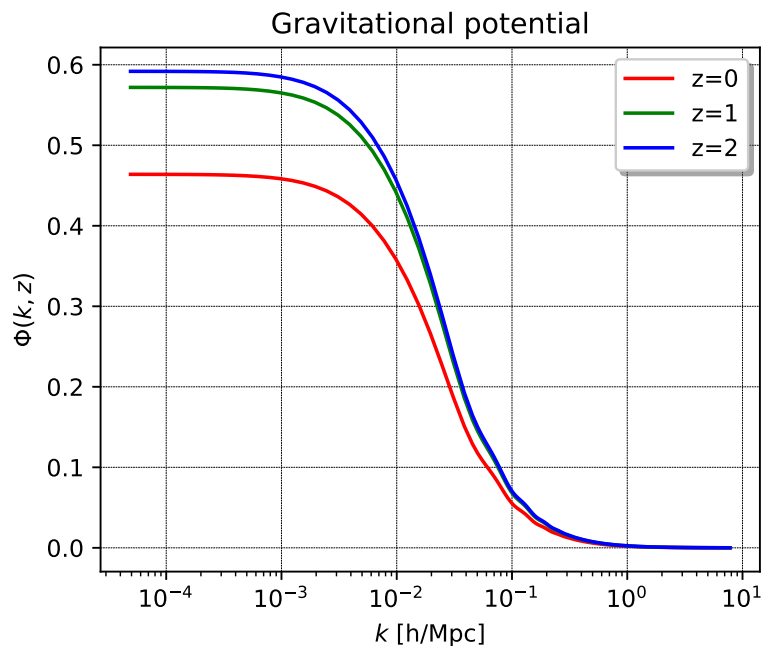


Figura 4.1: Potência gravitacional da teoria perturbações lineares

A figura 4.2 mostra a comparação entre espectros de potência. A curva vermelha representa o espectro real observado, ou seja, o conteúdo total de matéria é composto por  $\Omega_{\text{dm}0} = 0.2402$  de matéria escura e apenas  $\Omega_{\text{b}0} = 0.0462$  de bárions. A curva verde se aproxima de um modelo sem matéria bariônica onde nota-se a ausência de oscilações, enquanto a curva azul simula um estado com mais bárions do que o observado. Logo, vemos que a amplitude e o alcance das oscilações dependem diretamente de  $\Omega_{\text{b}0}$ , porém todos esses cenários têm a mesma

evolução temporal: redshifts e horizontes de som - conforme a tabela 4.2, pois  $D(z)$  depende do parâmetro de matéria total, que nessa comparação é fixo  $\Omega_{m0} = 0.2864$ , de modo que  $P(k)$  atinge o máximo um pouco antes do início da recombinação:  $k = h/r_s \simeq 10^{-2} h/\text{Mpc}$ .

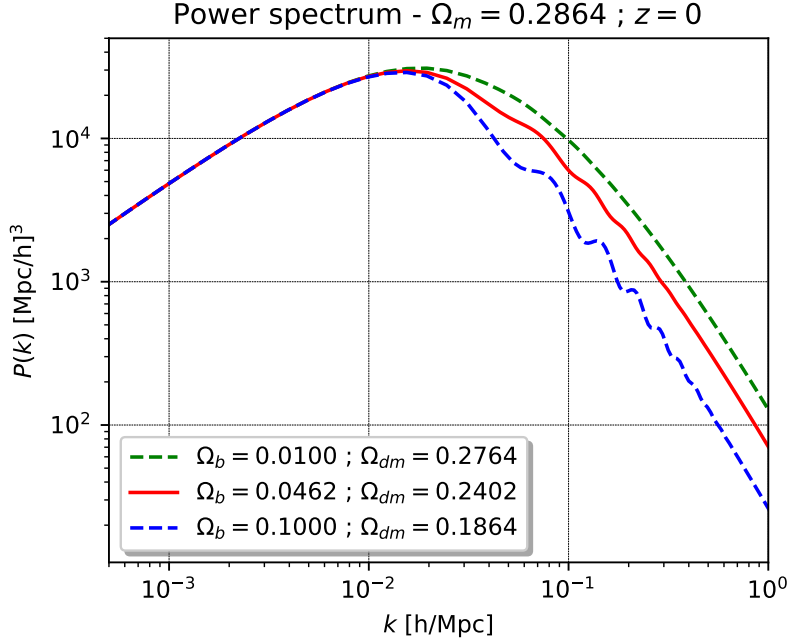


Figura 4.2: Espectro de potência e as oscilações acústicas bariônicas

Na figura 4.3 vemos os efeitos da mudança do parâmetro de matéria escura  $\Omega_{dm0}$  e consequentemente de energia escura:  $\Omega_{\Lambda 0} = 1 - \Omega_{dm0}$ , mas mantendo  $\Omega_{b0} = 0.0462$  fixo. A queda do parâmetro de matéria total  $\Omega_{m0}$  faz com que o último espalhamento ocorra mais tarde na evolução cósmica, pois diminuir a razão  $\Omega_{rd0}/\Omega_{m0}$  aumenta a duração do predomínio da radiação e o início da era da matéria é adiado, então há a diminuição dos redshifts e o aumento do horizonte de som, porque o universo está maior e mais velho no desacoplamento da CMB. Note ainda que a amplitude e o alcance das oscilações não dependem apenas de  $\Omega_b$ , mas sim da razão  $\Omega_b/\Omega_m$ , conforme a equação (3.3.12): quanto menor a proporção de bárions na matéria total, mais as oscilações são atenuadas.

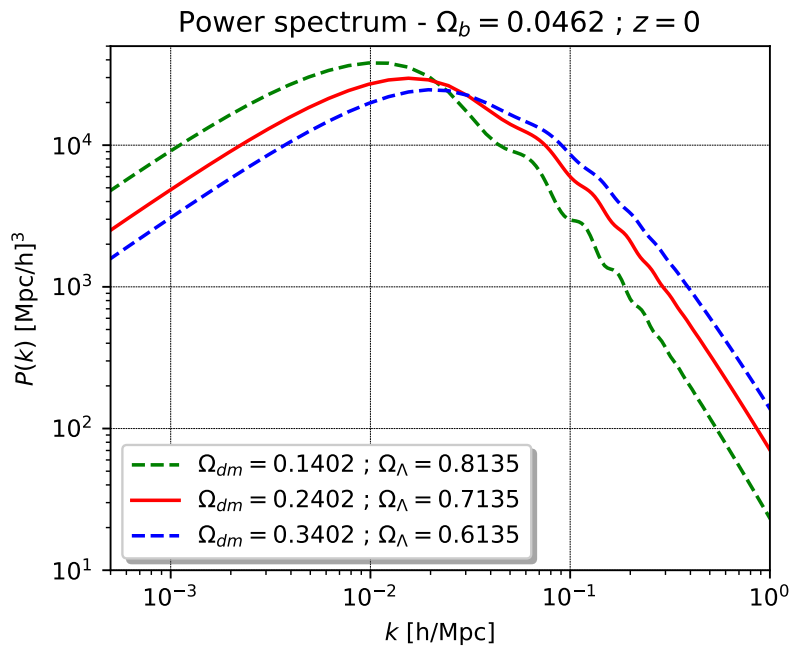


Figura 4.3: Espectro de potência e os efeitos de  $\Omega_\Lambda$

A figura 4.4 apresenta influência do redshift no espectro de potência. Na teoria linear, a função de crescimento é bem aproximada por dada  $D(a) \sim a = (1+z)^{-1}$  e o aumento do redshift apenas desloca para baixo as curvas de  $P(k)$ .

Entre as melhorias de rapidez e precisão em relação ao modelo de E&H [10], o CLASS calcula o espectro de potência com correções não-lineares previstas por modelos que descrevem a formação de estruturas com halos de matéria escura. A figura 4.5 exibe o espectro não-linear do modelo *Halo fit* [19], tal que a evolução do espectro em escalas não-lineares é baseada em simulações de N-corpos. Os inputs são os mesmos da tabela 4.1. Percebe-se o começo das discrepâncias entre os espectros linear e não-linear para  $k > 0.1h/\text{Mpc}$ .

A figura 4.6 mostra o espectro de potência não-linear para alguns redshifts. Novamente, para  $k > 0.1h/\text{Mpc}$  no regime não-linear, não podemos mais fatorar as flutuações de densidades:  $\delta(k, z) \neq \delta(k)D(z)$ , o resultado disso é uma deformação no final do espectro, que não tem mais o comportamento assintótico de uma lei de potência  $k^{-n}$  e nem apenas um deslocamento para baixo quando aumentamos o redshift.

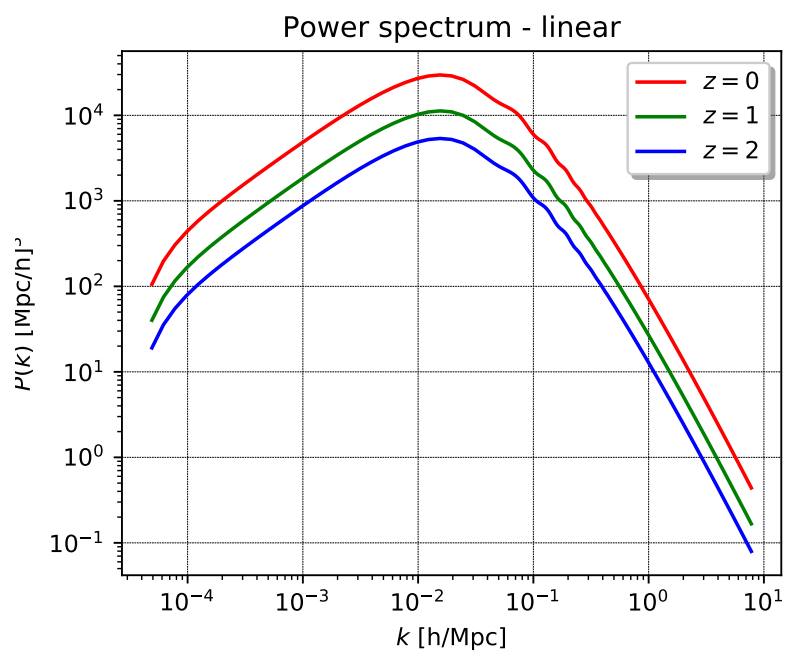


Figura 4.4: Espectro de potência em diferentes redshifts

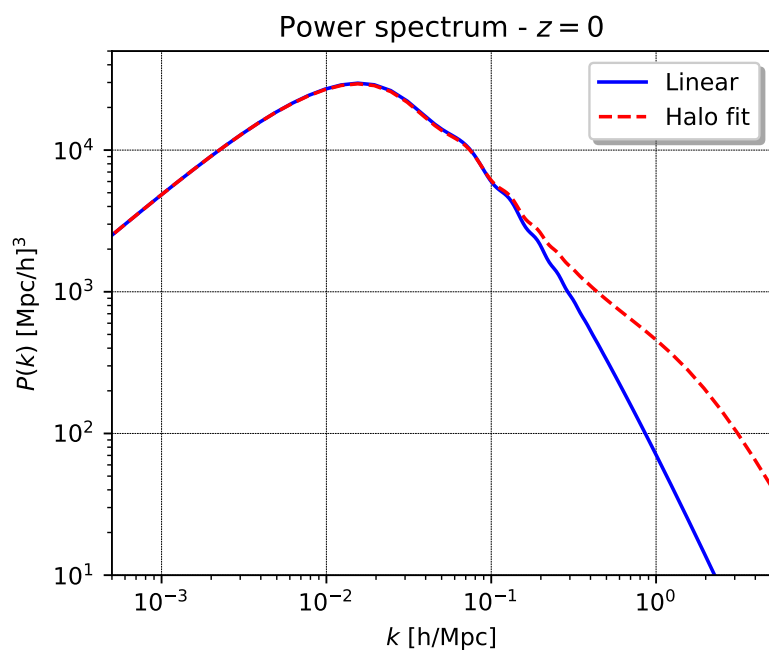


Figura 4.5: Espectro de potência linear e não-linear

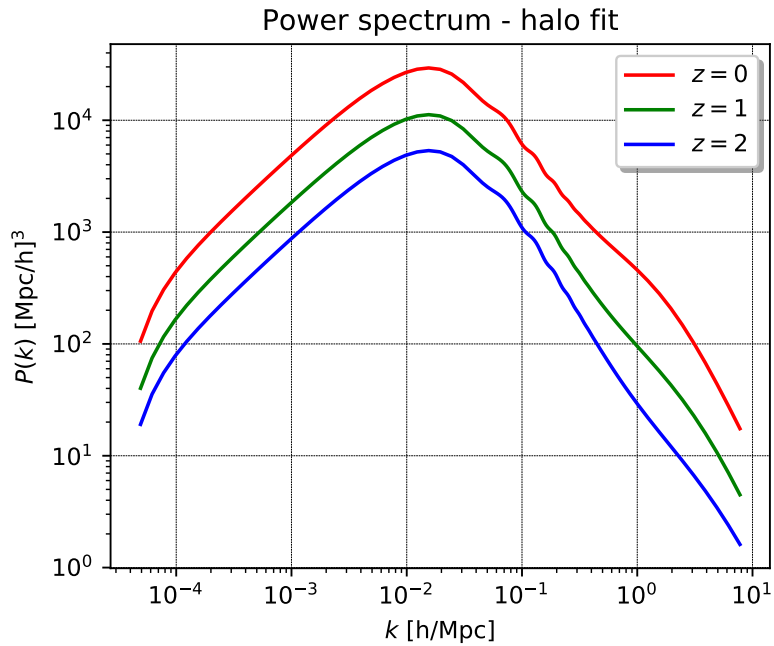


Figura 4.6: Espectro de potência não-linear para diferentes redshifts

### 4.1.2 Função de correlação radial

A cosmografia estuda a distribuição geográfica de objetos no céu e pode ser usada para criar vínculos e testar modelos cosmológicos. Os primeiros mapeamentos (*surveys*) pretendiam descrever a distribuição de galáxias projetada no plano do céu. Atualmente, há mapeamentos que também medem o redshift de vários objetos com precisão, possibilitando uma representação tridimensional do universo. No conteúdo de estruturas de larga-escala, estamos interessados em catalogar distribuições de galáxias.

As galáxias não estão localizadas de maneira uniforme ou aleatória no espaço, elas estão em aglomerados, super-aglomerados ou simplesmente ausentes em algumas regiões. Um método para quantificar acúmulos e vazios de matéria é definindo a função de correlação de dois pontos. Seja  $n(\vec{x})$  a densidade numérica de uma distribuição de objetos, a probabilidade de encontrar um objeto no ponto  $\vec{x}$  dentro de um volume infinitesimal  $d^3x$  é dada por:

$$dP = n(\vec{x})d^3x \quad (4.1.5)$$

e para encontrar um objeto no ponto  $\vec{x}_1$  e outro no ponto  $\vec{x}_2$  no mesmo volume,

$$dP = n(\vec{x}_1)d^3x_1n(\vec{x}_2)d^3x_2. \quad (4.1.6)$$

Entretanto, quando os volumes são sobrepostos ou desconexos, a probabilidade é alterada e essa modificação é feita adicionando a função de correlação  $\xi$ , ou seja, ela mede o acréscimo ou decréscimo de probabilidade. No caso isotrópico,  $\xi$  depende apenas do módulo da separação  $x = |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|$ :

$$dP = [1 + \xi(x)]n(\vec{x}_1)d^3x_1n(\vec{x}_2)d^3x_2, \quad (4.1.7)$$

- (i)  $\xi(x) = 0$ : distribuição aleatória;
- (ii)  $\xi(x) > 0$ : distribuição aglomerada;
- (iii)  $\xi(x) < 0$ : distribuição segregada.

Na prática, utilizamos estimadores da função de correlação baseados em catálogos, contando pares  $(i, j)$  de objetos em função da distância  $d_{ij} = |\vec{x}_i - \vec{x}_j|$ , *i.e.*

$$N_{\text{gal}}(x) = \sum_{i \neq j} \varphi_{ij}(x), \quad \varphi_{ij}(x) = \begin{cases} 1; & x - \delta x/2 \leq d_{ij} \leq x + \delta x/2 \\ 0; & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

A contagem para uma distribuição aleatória, ou seja, esfericamente simétrica é dada por:

$$N_{\text{ran}}(x) = \left( \frac{\#_{\text{ran}}}{2} \right) n(x) (4\pi x^2 \delta x)$$

sendo  $\#_{\text{ran}}$  o número total de objetos no catálogo aleatório simulado,  $\#_{\text{gal}}$  de galáxias observadas e  $\delta x$  é a separação máxima entre dois pontos correlacionados. O estimador mais simples da função de correlação de dois pontos segue abaixo:

$$\xi(x) = \frac{\#_{\text{ran}} N_{\text{gal}}(x)}{\#_{\text{gal}} N_{\text{ran}}(x)} - 1. \quad (4.1.8)$$

Porém, o estimador da função de correlação mais preciso e usado atualmente é o estimador proposto por Landy & Szalay [21]:

$$\xi(x) = 1 - 2 \left( \frac{\#_{\text{ran}}}{\#_{\text{gal}}} \right) \frac{DR(x)}{RR(x)} + \left( \frac{\#_{\text{ran}}}{\#_{\text{gal}}} \right)^2 \frac{DD(x)}{RR(x)}, \quad (4.1.9)$$

sendo  $DD(x)$  a contagem do número de pares de galáxias com separação dentro do intervalo  $[x - \delta x/2, x + \delta x/2]$ ,  $DR(x)$  é o número de pares entre uma galáxia e um ponto no catálogo aleatório,  $RR(x)$  é a contagem dos pares de pontos no catálogo aleatório.

A função de correlação mede o desvio da distribuição das galáxias observadas em relação a uma distribuição aleatória, assim a previsão teórica para  $\xi(x)$  é definida pelo valor médio das flutuações de densidade [31]:

$$\xi(\vec{x}) \equiv \langle \delta(\vec{x}_1) \delta(\vec{x}_2) \rangle = \int d^3 y \delta^*(\vec{x}_1 - \vec{x}_2 + \vec{y}) \delta(\vec{y}) = \int d^3 y \delta^*(\vec{x} + \vec{y}) \delta(\vec{y}), \quad (4.1.10)$$

fazendo a transformada de Fourier e usando o espectro de potência em (4.1.2), obtemos

$$\xi(x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} P(k) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\sin(kx)}{kx} P(k) k^2 dk. \quad (4.1.11)$$



## 4.2 Função de correlação angular

Nesta seção introduzimos o cálculo teórico de um importante observável cosmológico: a função de correlação angular  $\omega(\theta)$ . Além disso, apresentamos conceitos que descrevem o viés experimental presente em grandes mapeamentos de galáxias: *galaxy-bias* entre matéria escura e bariônica, o efeito de *redshift space distortion* e a função de seleção em redshift fotométrico.

### 4.2.1 Redshift space distortion

As medidas de distâncias astronômicas de galáxias e aglomerados de galáxias são obtidas indiretamente usando o redshift  $z$  do objeto, porém essa medida é alterada se, além da expansão cósmica descrita pelo fator de Hubble  $H(z)$ , o objeto tiver um movimento peculiar, ou seja, em trânsito no céu durante a observação [7]. A posição física no espaço em expansão é dada por:

$$\vec{r}(t) = a(t)\vec{x}(t) \Rightarrow \vec{v} = \dot{a}\vec{x} + a\dot{\vec{x}} = H\vec{r} + \delta\vec{v} \quad (4.2.1)$$

onde  $\delta\vec{v}$  é a velocidade peculiar (própria) do objeto descrita pela teoria de perturbação e a relação com a velocidade comóvel  $\vec{u}$ :

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{dt} = av^\alpha \Rightarrow \delta\vec{u} = a\delta\vec{v}.$$

Durante a era da matéria quando o potencial gravitacional  $\Phi$  é aproximadamente constante, pela equação de conservação de momento (3.3.2) e em modos de Fourier temos que:

$$\dot{\delta} + \frac{ik}{a}\delta v = 0, \quad (4.2.2)$$

define-se a função linear de crescimento em termos do fator de escala,

$$f(a) \equiv \frac{a}{D(a)} \frac{dD}{da}$$

logo a velocidade peculiar segue abaixo:

$$\delta v(\vec{k}, a) = \frac{ia}{k} \delta(\vec{k}, a) H(a) f(a). \quad (4.2.3)$$

Para pequenos redshifts,  $z \ll 1$ , a distância comoving radial pode ser aproximada por

$$x_s = \frac{z}{H_0}$$

e ela deve considerar, no caso geral, as velocidades peculiares dos objetos. Como as medidas de distância são calculadas sempre em termos do redshift, precisamos entender o efeito de  $\delta v$  sobre  $z$ . O ponto inicial é perceber que o número de galáxias observadas independe do espaço:

$$n(\vec{x}_s) d^3 x_s = n(\vec{x}) d^3 x$$

e como ângulos sólidos são iguais  $d\Omega_s = d\Omega$ , então

$$n(\vec{x}_s) = \frac{x^2}{x_s^2} \frac{dx}{dx_s} n(\vec{x}) = J(\vec{x}) n(\vec{x}).$$

A expressão completa para redshifts pequenos:

$$z = \vec{v} \cdot \hat{x} = H_0 x + \delta\vec{v} \cdot \hat{x} \Rightarrow x_s = x + \frac{\delta\vec{v} \cdot \hat{x}}{H_0},$$

note que redshift é o resultado do efeito Doppler com duas contribuições: uma da velocidade de recessão dada pela lei de Hubble e outra pela componente radial da velocidade peculiar da fonte de luz. Para jacobiano de mudança de coordenadas,

$$J(x) = \left(1 + \frac{\delta\vec{v} \cdot \hat{x}}{xH_0}\right)^{-2} \left[1 + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\delta\vec{v} \cdot \hat{x}}{H_0}\right)\right]^{-1},$$

faremos a aproximação para o regime sub-horizonte:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\delta\vec{v} \cdot \hat{x}}{H_0}\right) \sim \frac{\delta\vec{v} \cdot \vec{k}}{H_0},$$

$x \sim (H_0)^{-1}$  é da ordem de grandeza dos levantamentos e para os modos de propagação  $k$ , como estamos interessados naqueles que oscilam e contribuem para a formação de estruturas:  $kx \gg 1 \Rightarrow k \gg x^{-1}$ , logo o jacobiano em primeira ordem,

$$J(x) = 1 - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\delta\vec{v} \cdot \hat{x}}{H_0}\right)$$

e como a densidade  $n = (1 + \delta)\bar{n}$ , a flutuação no espaço de redshifts é dada por:

$$\delta_s(\vec{x}, t) = \delta(\vec{x}, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\delta\vec{v} \cdot \hat{x}}{H_0}\right).$$

A direção  $\hat{x}$  de observação varia muito pouco de galáxia para galáxia dentro de um mesmo aglomerado, então podemos substituir  $\hat{x}$  por  $\hat{z}$ : a direção fixa de observação para o centro da distribuição bem-localizada. No espaço de fase,

$$\delta_s(\vec{k}) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \delta_s(\vec{x}), \quad \delta\vec{v}(\vec{x}) = \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \hat{k} \delta v(\vec{k}) \Rightarrow$$

$$\delta_s(\vec{k}) = \delta(\vec{k}) - \int d^3k' ik' (\hat{k}' \cdot \hat{z})^2 \frac{\delta v(\vec{k}')}{H_0} \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} \Rightarrow$$

$$\delta_s(\vec{k}, z) = [1 + f(z)\mu^2] \delta(\vec{k})$$

sendo  $\mu \equiv \hat{k} \cdot \hat{z}$  e como  $f(z)\mu^2 \geq 0 \Rightarrow \delta_s(\vec{k}) \geq \delta(\vec{k})$ , a distorção máxima ocorre na direção paralela à observação e é nula na direção perpendicular. Por causa do movimento peculiar das galáxias, o espectro de potência  $P_s$  do *survey* tem uma dependência angular em  $\mu$ :

$$P_s(\vec{k}, z) = [1 + f(z)\mu^2]^2 P(k).$$

Entretanto, medimos o espectro apenas de galáxias e  $\delta = \delta_m$  calcula a perturbação de matéria total, ou seja,  $\delta_m = \delta_{dm} + \delta_b$ , por isso define-se a função *galaxy bias*  $b(z)$ : a razão entre flutuação bariônica e a total, que no regime linear depende apenas do redshift,

$$\delta_b(\vec{k}, z) \equiv b(z)\delta_m(\vec{k}, z) \quad (4.2.4)$$

e também define-se  $\beta(z) \equiv f(z)/b(z)$ , portanto o espectro de potência é dado por:

$$P_s(\vec{k}, z) = [1 + \beta(z)\mu^2]^2 b^2(z)P(k) \quad (4.2.5)$$

A dependência angular do espectro de potência em  $\mu$  é estudada fazendo a expansão multipolar do coeficiente  $(1 + \beta\mu^2)^2$  em polinômios de Legendre  $\mathcal{P}_\ell(\mu)$  [7],

$$(1 + \beta\mu^2)^2 = \left(1 + \frac{2\beta}{3} + \frac{\beta^2}{5}\right) \mathcal{P}_0(\mu) + \left(\frac{4\beta}{3} + \frac{4\beta^2}{7}\right) \mathcal{P}_2(\mu) + \frac{8}{35}\beta^2 \mathcal{P}_4(\mu)$$

logo, a função de correlação observada nos levantamentos:

$$\begin{aligned} \xi^s(x) &= \sum_{\ell=0}^4 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} a_\ell \mathcal{P}_\ell(\mu)(z) P(k) = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\ell=0}^4 \int_0^\infty dk k^2 P(k) \int_{-1}^1 d\mu e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} a_\ell \mathcal{P}_\ell(\mu) \end{aligned}$$

sendo  $a_\ell$  os coeficientes da expansão de  $(1 + \beta\mu^2)^2$ . Reescrevendo a exponencial na base de Legendre, temos as funções de Bessel esféricas  $j_\ell(kx)$ ,

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = e^{i\mu kx} = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell (2\ell + 1) \mathcal{P}_\ell(\mu) j_\ell(kx)$$

portanto a função de correlação com o efeito de *redshift space distortion* (RSD) segue abaixo:

$$\xi^s(x) = \left(1 + \frac{2\beta}{3} + \frac{\beta^2}{5}\right) \xi_0(x) - \left(\frac{4\beta}{3} + \frac{4\beta^2}{7}\right) \xi_2(x) + \frac{8\beta^2}{35} \xi_4(x) \quad (4.2.6)$$

onde definimos os multipolos da função de correlação por

$$\xi_\ell(x) \equiv \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 P(k) j_\ell(kx). \quad (4.2.7)$$

A distância comóvel  $x$  das equações acima é a separação entre duas galáxias no mesmo aglomerado, ou seja, praticamente com o mesmo redshift e sem abertura angular, porém para compararmos diferentes aglomerados precisamos fazer algumas modificações [25]. Seja  $x = x_{12}$  a distância entre os aglomerados 1 e 2 tal que

$$x \ll R = \frac{c}{H_0 \sqrt{|\Omega_K|}}, \quad \Omega_K = \Omega_0 - 1$$

onde  $R$  é o raio de curvatura do universo, mas a distância dos aglomerados ao observador  $x_1 = x(z_1)$  e  $x_2 = x(z_2)$  podem sofrer correções por efeitos de curvatura. Seja  $\chi(z)$  a distância comóvel transversal ( $K = 0$ ) de um objeto com redshift  $z$ ,

$$\chi(z) = c \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \quad (4.2.8)$$

então a distância comóvel em um espaço com curvatura  $K$  é dada por:

$$x(z) = S_K[\chi(z)] = \begin{cases} (-K)^{-1/2} \sinh [(-K)^{1/2} \chi(z)], & K < 0 \\ \chi(z), & K = 0 \\ K^{-1/2} \sin [K^{1/2} \chi(z)], & K > 0 \end{cases} \quad (4.2.9)$$

sendo  $C_K = dS_K/d\chi$  e  $\theta$  o ângulo entre os aglomerados do ponto de vista do observador, logo a separação  $x_{12} = x(z_1, z_2, \theta)$  entre os aglomerados no caso mais geral em um espaço curvo [25]:

$$x = x(z_1, z_2, \theta) = x_{12} = |\vec{x}_1 - \vec{x}_2| = [S^2(z_1) + S^2(z_2) - 2C(z_1)C(z_2)S(z_1)S(z_2) \cos \theta - KS^2(z_1)S^2(z_2)(1 + \cos^2 \theta)]^{1/2} \quad (4.2.10)$$

$$K \simeq 0 \Rightarrow x = x_{12} \simeq (x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \cos \theta)^{1/2}. \quad (4.2.11)$$

Outras modificações que devem ser feitas, pois os objetos podem ter redshifts diferentes, são no bias e na evolução temporal do espectro de potência,

$$\beta(z) \rightarrow 1/2[\beta(z_1) + \beta(z_2)], \quad \beta^2(z) \rightarrow \beta(z_1)\beta(z_2)$$

$$P(k) \rightarrow P(k, z_1, z_2) = D(z_1)b(z_1)D(z_2)b(z_2)P(k).$$

Ainda há mais duas correções necessárias: a primeira em  $P(k)$  introduzindo um *cut-off* gaussiano a partir do qual o modelo de perturbações lineares não é mais válido [17],

$$P(k) \rightarrow P_{\text{NL}}(k, z^*) = P(k) \exp[-r_{\text{NL}}^2 k^2 D(z^*)] \quad (4.2.12)$$

com  $r_{\text{NL}} \sim 5 - 6 \text{ Mpc}/h$  estimado e redshift médio  $z^* = (z_1 + z_2)/2$ . Assim os multipolos da nova função de correlação são os seguintes:

$$\xi_{\ell, \text{NL}}(x) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 D(z_1)b(z_1)D(z_2)b(z_2)P_{\text{NL}}(k, z^*)j_\ell(kx) \quad (4.2.13)$$

portanto a aproximação da função de correlação radial estendida ao regime não-linear com todos os multiplos da RSD é dada por

$$\begin{aligned}
\xi_{\text{NL}}^s(x) &= \left[ 1 + \frac{1}{3}[\beta(z_1) + \beta(z_2)] + \frac{1}{5}\beta(z_1)\beta(z_2) \right] \xi_{0,\text{NL}}(x) \\
&- \left[ \frac{2}{3}[\beta(z_1) + \beta(z_2)] + \frac{4}{7}\beta(z_1)\beta(z_2) \right] \xi_{2,\text{NL}}(x) \\
&+ \frac{8}{35}\beta(z_1)\beta(z_2)\xi_{4,\text{NL}}(x)
\end{aligned} \tag{4.2.14}$$

e a última correção advém da teoria de perturbação renormalizada [5]

$$\xi(x) = \xi_{\text{NL}}^s(x) + A_{mc}\xi_1(x)\xi_0'(x), \tag{4.2.15}$$

sendo  $A_{mc} = 1.55$  estimado em simulações de N-corpos, o multipolo  $\xi_1(x)$  e a derivada  $\xi_0'(x)$  da teoria linear na equação (4.2.7).

## 4.2.2 Photo-z e função de seleção

Um catálogo que observamos através de um telescópio não contém necessariamente todos os objetos do céu, por causa das limitações de magnitude aparente e resolução dos detectores de luminosidade em cada faixa de redshift; então define-se a função de seleção  $\phi$  que descreve a densidade numérica de objetos em função da distância radial levando em conta os critérios de seleção do catálogo.

Os grandes mapeamentos atuais de galáxias estão medindo redshifts pelo método de fotometria: medidas do brilho de um objeto por filtros de cores RGB, pois não há tempo de observação suficiente para coletarmos todo o espectro eletromagnético de cada objeto. As diferenças técnicas na obtenção de medidas de redshift geram consequentemente discrepâncias entre o redshift espectroscópico - mais preciso e dito como o verdadeiro (*true*) - e o fotométrico (photo-z) que é o mais facilmente medido em largas escalas e é calibrado usando as pequenas amostras de galáxias com z-true conhecidos.

A distribuição de photo-z ( $z_{\text{ph}}$ ) em torno de z-true ( $z$ ) em geral é bem modelada por uma gaussiana, com um desvio padrão  $\sigma(z)$  e z-bias  $z_{\text{bias}}(z)$  para cada  $z$  espectroscópico:

$$P(z|z_{\text{ph}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(z)} \exp \left[ -\frac{(z - z_{\text{ph}} - z_{\text{bias}})^2}{2\sigma^2(z)} \right] \tag{4.2.16}$$

A determinação das funções  $\sigma(z)$  e  $z_b(z)$  é muito importante, pois elas podem interferir diretamente nas medidas de observáveis cosmológicos. Para os mapeamentos de galáxias, em geral, o desvio padrão é bem parametrizado por:

$$\sigma(z) = \sigma_0(1 + z) \tag{4.2.17}$$

e separando o catálogo em pequenas faixas de photo-z (*redshift shells*), podemos assumir z-bias nulo  $z_b(z) = 0$  e galaxy bias  $b(z)$  constante. Então, a probabilidade de z-true estar na  $i$ -ésima

faixa de redshift em  $z_{\text{ph}}^i < z_{\text{ph}} < z_{\text{ph}}^{i+1}$  é dada pela chamada *window function*:

$$W_i(z) = \int_{z_{\text{ph}}^i}^{z_{\text{ph}}^{i+1}} P(z|z_{\text{ph}}) dz_{\text{ph}}. \quad (4.2.18)$$

A função de correlação medida experimentalmente depende, além da faixa photo-z, também do número de galáxias observadas por unidade de z-true estimada pelos dados do catálogo. Nos levantamentos do Dark Energy Survey (DES), a densidade de galáxias por redshift é aproximadamente:

$$n(z) = \frac{dN}{dz} \sim \left(\frac{z}{0.5}\right)^2 e^{-(z/0.5)^{1.5}} \quad (4.2.19)$$

assim define-se a função de seleção de redshift: produto da distribuição estatística de photo-z em torno do z-true e com a densidade de objetos mapeados,

$$\phi_i(z) = n(z)W_i(z) \quad (4.2.20)$$

e a função de correlação angular (ACF) é obtida fazendo a convolução com  $\phi(z)$ :

$$w_i(\theta) = \int_0^\infty dz_1 \phi_i(z_1) \int_0^\infty dz_2 \phi_i(z_2) \xi_{\text{NL}}^s(z_1, z_2, \theta). \quad (4.2.21)$$

Tabela 4.3: Exemplos de redshift shells

Photo-z	Galaxy bias
$0.6 < z_{\text{ph}} < 0.7$	$b = 1.7$
$0.7 < z_{\text{ph}} < 0.8$	$b = 1.8$
$0.8 < z_{\text{ph}} < 0.9$	$b = 1.9$
$0.9 < z_{\text{ph}} < 1.0$	$b = 2.0$

As figuras 4.7 e 4.8 apresentam os gráficos da função de seleção e ACF para os parâmetros cosmológicos da tabela 4.1 e os redshift shells da tabela 4.3 com galaxy bias constante, desvio padrão  $\sigma_0 = 0.05$  e z-bias  $z_b = 0$ .

Na figura 4.9 vemos o comportamento das funções  $\phi(z)$  e  $\omega(\theta)$  conforme variamos o desvio padrão da distribuição de photo-z. Note que a incerteza experimental na medida de  $z_{\text{ph}}$  atenua ou até mesmo suprime totalmente o pico do BAO nas curvas da ACF, prejudicando o estudo desse fenômeno e a estimativa de parâmetros.

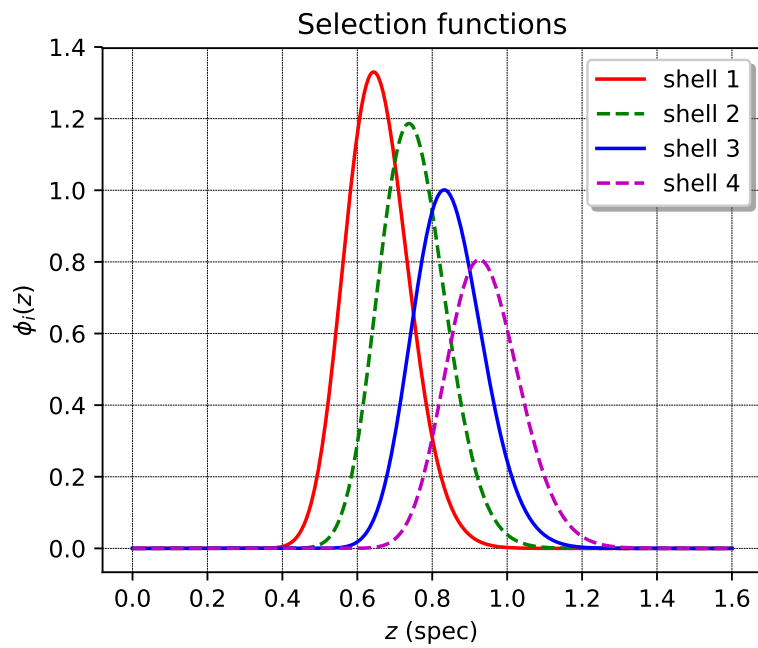


Figura 4.7: Função de seleção para diferentes redshift shells

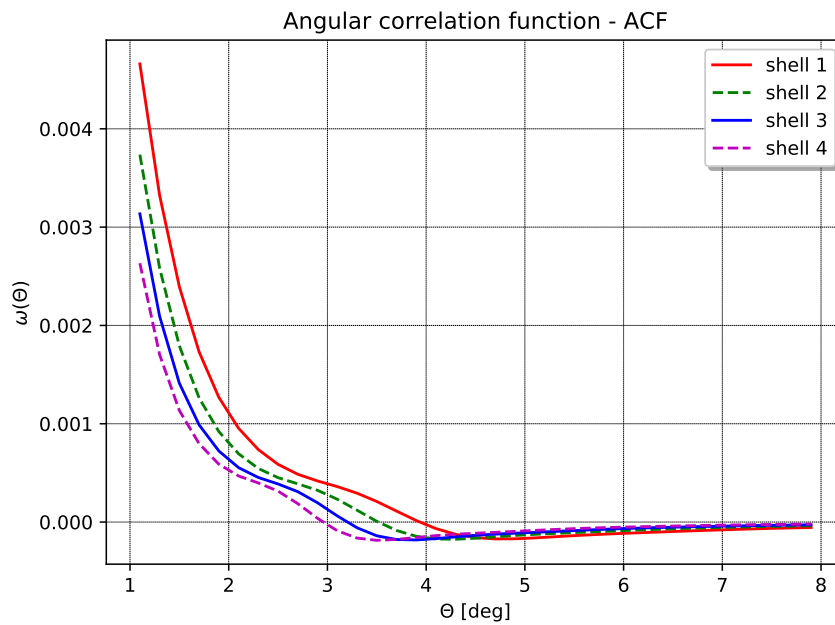


Figura 4.8: Função de correlação angular para diferentes redshifts shells

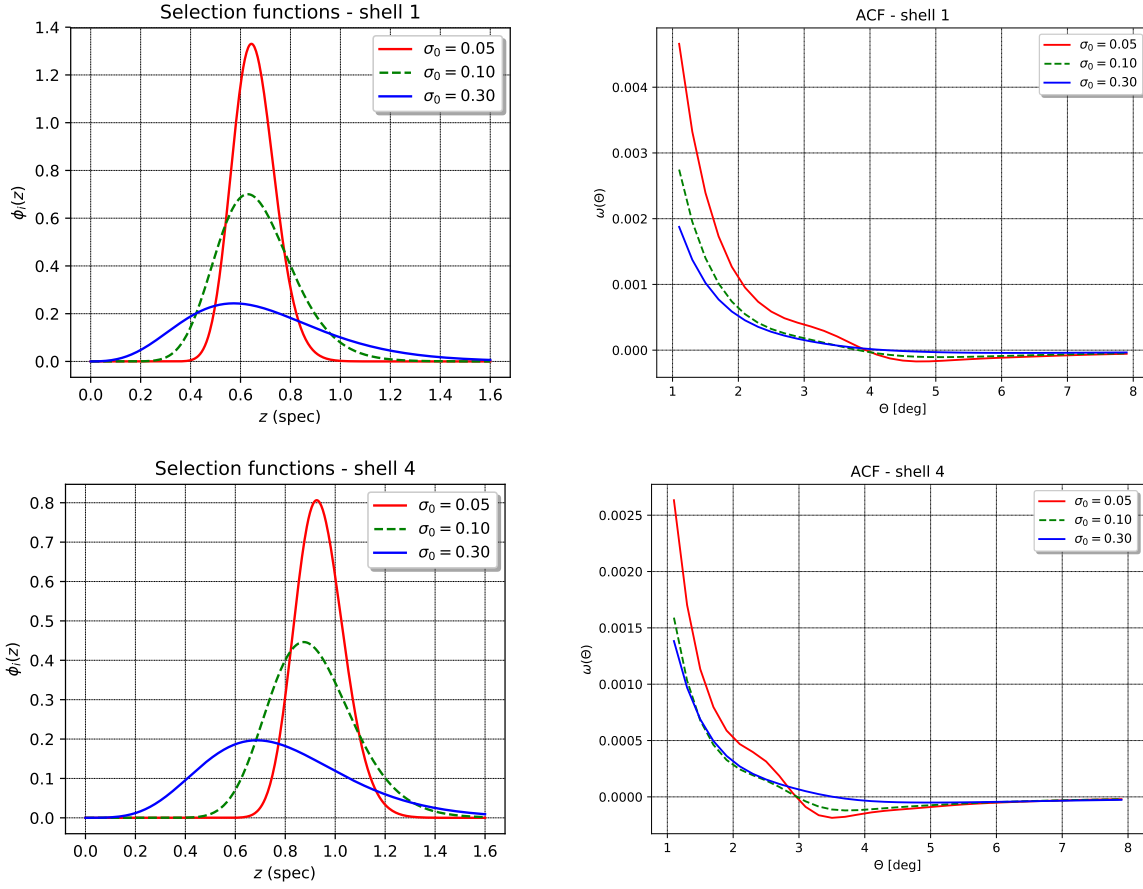


Figura 4.9: Influência de  $\sigma_0$  na função de seleção e correlação angular

## 4.3 Espectro de potência angular

Na última seção, a função de correlação angular  $\omega(\theta)$  foi calculada fazendo a projeção da função de correlação radial  $\xi_{\text{NL}}^s(z_1, z_2, \theta)$  na equação (4.2.21), a partir da transformada de Fourier do espectro de potência  $P(k)$  das flutuações de densidade  $\delta(\vec{k})$ . Mas também podemos definir  $\omega(\theta)$  diretamente como um espectro de potência angular - APS, porém das flutuações no espaço real  $\delta(\vec{x})$  projetadas na esfera celeste,  $\delta_i(\hat{n})$ . Aqui seguiremos as referências de Crocce, Cabré & Gaztañaga 2011 [17] e Sobreira, Simoni, Rosenfeld et al. 2011 [28].

### 4.3.1 Espaço harmônico

Uma posição arbitrária  $\vec{x}$  no céu é completamente descrita pela sua distância  $x = x(z)$  função do redshift  $z$  e pela sua direção  $\hat{n}$  vistas por um observador aqui na Terra, por exemplo. Logo, a projeção das flutuações de densidade nessa direção é dada por:

$$\delta_i(\hat{n}) = \int_0^\infty dz \phi_i(z) \delta(x(z), \hat{n}) \quad (4.3.1)$$



decompondo na base formada pelos harmônicos esféricos

$$\delta_i(\hat{n}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m}^i Y_{\ell m}(\hat{n}) \quad (4.3.2)$$

então, a ACF como um espectro de potência angular

$$\omega_i(\Delta\hat{n}) = \langle \delta_i(\hat{n}) \delta_i(\hat{n} + \Delta\hat{n}) \rangle \quad (4.3.3)$$

tal que o diferencial na direção  $\Delta\hat{n} = \Delta\hat{n}(\theta, \varphi)$  e supondo simetria azimutal em  $0 \leq \varphi < 2\pi$ , os coeficientes da expansão  $a_{\ell m}$  não têm cross-correlação entre si e a covariância depende apenas do índice  $\ell$ , ou seja, do ângulo polar  $\theta$  de inclinação:

$$\langle a_{\ell m}^i a_{\ell' m'}^i \rangle = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \langle C_{\ell}^i \rangle \quad (4.3.4)$$

portanto, a função de correlação angular pode ser construída a partir dos coeficientes  $C_{\ell}$ :

$$\omega_i(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\hat{n}) Y_{\ell m}(\hat{n} + \Delta\hat{n}) C_{\ell}^i = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( \frac{2\ell+1}{4\pi} \right) \mathcal{P}_{\ell}(\cos\theta) C_{\ell}^i \quad (4.3.5)$$

Para calcularmos os coeficientes da prescrição teórica  $C_{\ell}^i \equiv \langle C_{\ell}^i \rangle$ , precisamos voltar para  $\delta(\vec{x}, z)$  escrevendo-o como a transformada de Fourier de  $\delta(\vec{k}, z)$ ,

$$\delta(\vec{x}, z) = \delta(\vec{x}) D(z) = D(z) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \delta(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$$

decompondo a exponencial complexa em harmônicos esféricos - onde aparecem as funções de Bessel esféricas  $j_{\ell}(kx)$ ,

$$\begin{aligned} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} &= 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} i^{\ell} Y_{\ell m}(\hat{n}) Y_{\ell m}^*(\hat{k}) j_{\ell}(kx) \\ a_{\ell m}^i &= \int d\Omega(\hat{n}) Y_{\ell m}^*(\hat{n}) \delta_i(\hat{n}) = \int d\Omega(\hat{n}) Y_{\ell m}^*(\hat{n}) \int_0^{\infty} dz \phi_i(z) \delta(\vec{x}, z) = \\ &= 4\pi i^{\ell} \int_0^{\infty} dz \phi_i(z) D(z) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \delta(\vec{k}) Y_{\ell m}^*(\hat{k}) j_{\ell}(kx) \end{aligned}$$

usando a relação de normalização das flutuações  $\delta(\vec{k})$  para introduzir o espectro de potência da matéria - como na equação (4.1.2) - mas acrescentando o galaxy bias  $b(z)$  e a correção não-linear  $P_{\text{NL}}(k)$ , portanto seguindo [17, 28]

$$C_{\ell}^i = \frac{1}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |\langle a_{\ell m}^i \rangle|^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dk k^2 P_{\text{NL}}(k) [\Psi_{\ell}^i(k)]^2 \quad (4.3.6)$$

onde definimos a função kernel com duas contribuições:

$$\Psi_\ell^i(k) = [\Psi_\ell^i]_0(k) + [\Psi_\ell^i]_{\text{RSD}}(k) \quad (4.3.7)$$

o primeiro termo de ordem zero

$$[\Psi_\ell^i]_0(k) = \int_0^\infty dz \phi_i(z) D(z) b(z) j_\ell(kx) \quad (4.3.8)$$

e o segundo deve-se ao efeito de redshift space distortion

$$\begin{aligned} [\Psi_\ell^i]_{\text{RSD}}(k) = \int_0^\infty dz \phi_i(z) D(z) \beta(z) & \left[ \frac{2\ell^2 + 2\ell - 1}{(2\ell + 3)(2\ell - 1)} j_\ell(kx) \right. \\ & \left. - \frac{\ell(\ell - 1)}{(2\ell - 1)(2\ell + 1)} j_{\ell-2}(kx) - \frac{(\ell + 1)(\ell + 2)}{(2\ell + 1)(2\ell + 3)} j_{\ell+2}(kx) \right] \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

A figura 4.10 mostra o cálculo dos  $C_\ell^i$  teóricos para o primeiro redshift shell da tabela 4.3 sem e com a correção RSD. Perceba a importância desse termo somente para  $\ell < 30 - 40$  e as oscilações acústicas bariônicas no APS em  $\ell \sim 100$ . Para  $\ell$  grandes, podemos usar a aproximação de Limber na contribuição de ordem zero, logo

$$\int dk k^2 P_{\text{NL}}(k) j_\ell(kx_1) j_\ell(kx_2) \simeq \frac{\pi \delta_{\text{D}}(x_1 - x_2)}{2 x_1^2} P_{\text{NL}} \left( k = \frac{\ell + 1/2}{x} \right)$$

assim, o  $C_\ell^i$  calculado nesse limite:

$$C_\ell^i \simeq \int_0^\infty \frac{dz}{x^2(z)} \phi_i^2(z) D^2(z) b^2(z) P_{\text{NL}} \left( k = \frac{\ell + 1/2}{x(z)} \right). \quad (4.3.10)$$

A figura 4.11 mostra o comportamento dos  $C_\ell^i$  para os quatro shells da tabela 4.3.

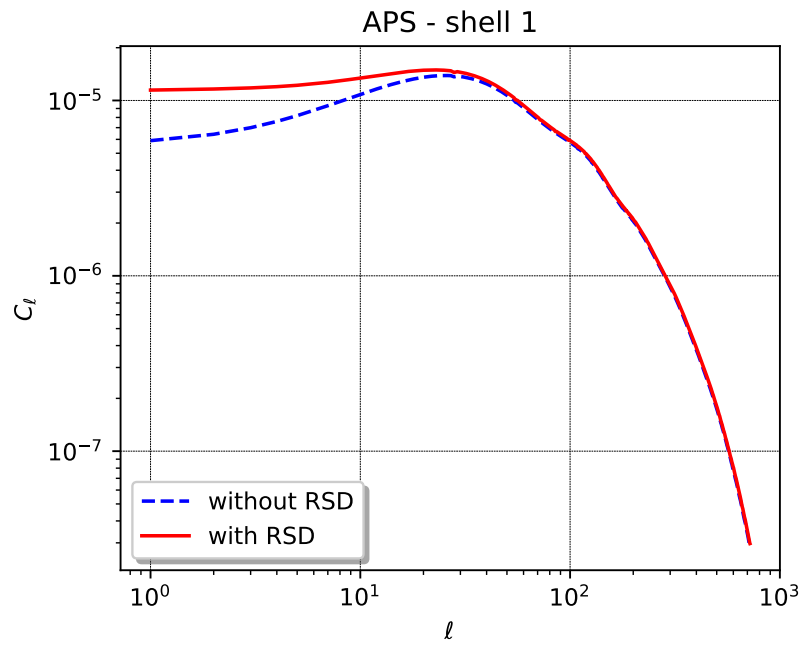


Figura 4.10: Cálculo teórico dos coeficientes  $C_\ell^i$  sem e com o efeito de RSD

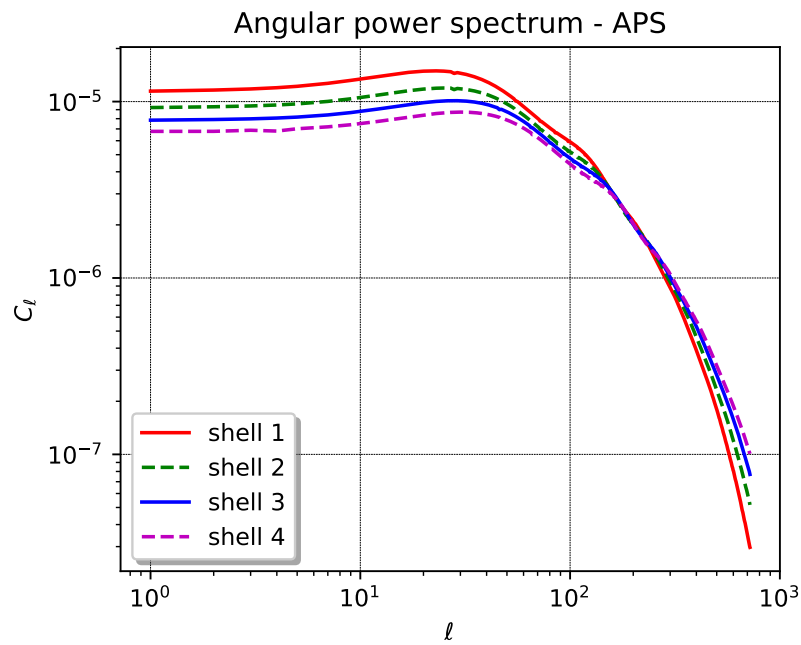


Figura 4.11: Cálculo teórico dos coeficientes  $C_\ell^i$  para diferentes redshift shells

# Resultados

# 5

Neste capítulo apresentamos as medidas do espectro de potência angular em um catálogo de galáxias simulado do MICE e a análise realizada na estimativa do galaxy-bias para cada faixa de redshift fotométrico e dos parâmetros cosmológicos  $\Omega_{m0}$ ,  $\Omega_{b0}$ ,  $h$  e  $\sigma_8$ .

## 5.1 Catálogos de galáxias do MICE

O catálogo de galáxias *Marenostrum Institut de Ciències de l'Espai Simulations* (MICE<sup>1</sup>) é um dos resultados do projeto **MICE Grand Challenge Lightcone Simulation** desenvolvido por M. Crocce, F. J. Castander, E. Gaztañaga et al. 2015 [14, 15, 16].

### 5.1.1 Especificações do catálogo

O catálogo foi gerado usando um modelo híbrido de *Halo Occupation Distribution* (HOD) e *Halo Abundance Matching* (HAM) [2] que define o viés da população de galáxias a partir da probabilidade condicional  $P(N|M)$  de um dado halo de matéria escura de massa virial  $M$  hospedar  $N$  galáxias, juntamente com as distribuições de posição e velocidade para galáxias e matéria escura. Assim, os halos de matéria escura são populados com galáxias usando o algoritmo chamado de *friends of friends* (FOF) [6]: uma simulação de N-corpos contendo cerca de 70 bilhões de partículas de matéria escura em um volume comóvel de  $(3h^{-1} \text{ Gpc})^3$  com espaçamentos em cinco ordens de grandeza.

Os halos possuem resolução em massa  $\sim 10^{11}h^{-1} M_\odot$  e as galáxias com magnitude absoluta na banda- $r$ :  $M_R < -18.9$  de modo que ambos cobrem uma área total no céu de 5,000 deg<sup>2</sup>, profundidade  $z < 1.4$  e todas as galáxias têm a sua distribuição espectral. Os parâmetros cosmológicos do modelo fiducial usados para construir os catálogos estão abaixo na tabela 5.1. Note que os valores não coincidem exatamente com as estimativas através de observações reais, como Planck [4] e WMAP [30], justamente por se tratar de uma simulação.

<sup>1</sup>MICE website: <http://maia.ice.cat/mice/>

Tabela 5.1: Cosmologia do MICE

Descrição	Valores
Parâmetro de Hubble	$h = 0.70$
Energia escura	$\Omega_{\Lambda 0} = 0.75$
Matéria total	$\Omega_{m0} = 0.25$
Matéria bariônica	$\Omega_{b0} = 0.044$
Amplitude de $P(k)$	$\sigma_8 = 0.80$
Índice espectral	$n_s = 0.95$

Além disso, foram consideradas algumas restrições observacionais já estabelecidas:

- (i) a função de luminosidade (Blanton et al. 2003);
- (ii) aglomerados de galáxias como função da luminosidade e de cor RGB (Zehavi et al. 2011);
- (iii) o diagrama cor-magnitude (NYU DR7 catalog)
- (iv) evolução das galáxias para ajustar melhor a função de luminosidade e as distribuições de cores para grandes redshifts ( $z > 1.2$ );
- (v) posições magnificadas por lentes gravitacionais.

A primeira versão MICECATv1.0 do catálogo está disponível publicamente no website: <https://cosmohub.pic.es> porém a versão atual MICECATv2.0 tem acesso restrito aos membros das colaborações DES, Euclid e PAU. Ela possui três importantes atualizações:

- (i) **completeza estendida:** a versão atual é completa para mapeamento com as mesmas características técnicas e geométricas dos levantamentos do DES, ou seja, magnitude aparente evoluída na banda- $i$   $\text{mag}_i^{\text{evol}} < 24.0$  em todos os redshifts  $0 < z < 1.4$  na região do survey:  $\text{DEC} > 30^\circ$ ,  $\text{DEC} < 30^\circ$  com  $30^\circ < \text{RA} < 60^\circ$ . Aumento na escala de luminosidade para popular halos e grupos de halos com um número de partículas menor e, simulando as observações, algumas regiões do catálogo são mais profundas que outras, porém a magnitude absoluta na banda- $r$  mínima é de  $M_R - 5 \log(h) \sim -14.0$ ;
- (ii) **maior resolução:** aumento na pixelização Healpix, de  $N_{\text{side}} = 4096$  para 8192;
- (iii) **novas propriedades computadas:** massa estelar da galáxia, taxa de formação de estrelas, metalicidade, linhas de emissão, entre outros;
- (iv) **halo id:** cada galáxia tem a identificação do seu *halo host* (hospedeiro), muito útil nos estudos de aglomerados de matéria escura;
- (v) **magnitudes:** nessa versão, as magnitudes são específicas para os filtros de cores em diferentes levantamentos: DES, Euclid, COSMOS, SDSS e VISTA.

Em um catálogo gerado em volume comóvel deve-se fazer introduzir a evolução temporal, logo todas as magnitudes (absolutas e aparentes) precisam ser corrigidas caso pretenda-se simular os resultados do catálogo com dados observacionais:

$$M^{\text{evol}} = M^{\text{cat}} - 0.8 [\arctan(1.5z_{\text{true}}) - 0.1489] \quad (5.1.1)$$

O objetivo principal desse estudo é analisar a eficiência, a precisão e as limitações das medidas de  $C_\ell$  como observáveis cosmológicos, ou seja, em estimar parâmetros. Por esses motivos estamos utilizando um catálogo simulado com uma cosmologia conhecida - tabela 5.1, para que possamos comparar as previsões desse método com os valores fiduciais e extrair limites de confiabilidade e validação, antes de aplicá-lo em catálogos de observações reais, que são muito mais difíceis de serem tratados e analisados devido aos erros estatísticos e sistemáticos nas medidas de redshift, magnitudes, entre outras.

### 5.1.2 Mapas das flutuações de densidade

Usaremos o catálogo MICECATv2.0 para construirmos os mapas de flutuações de densidade simulando uma observação do experimento DES. Para o cálculo das flutuações projetadas sobre a esfera celeste  $\delta_i(\hat{n})$  precisamos das seguintes informações contidas no catálogo:

`unique_gal_id`: identificação da galáxia

`ra_gal`: right ascension [deg] ( $RA = 180^\circ \times \varphi/\pi$ )

`dec_gal`: declination [deg] ( $DEC = 90^\circ - 180^\circ \times \theta/\pi$ )

`z_cgal`: redshift true sem RSD

`z_cgal_v`: redshift observado com RSD

`z_desdm_mc`: redshift fotométrico pelo método DESDM Monte Carlo

`mr_gal`: magnitude absoluta na banda- $r$  sem evolução,  $M_R - 5 \log(h)$  para  $z = 0.1$

`gr_gal`:  $g - r$  no referencial de repouso sem evolução para  $z = 0$

`des_asahi_full_g_abs_mag`, `des_asahi_full_g_true`: absoluta e aparente na banda- $g$

`des_asahi_full_r_abs_mag`, `des_asahi_full_r_true`: absoluta e aparente na banda- $r$

`des_asahi_full_i_abs_mag`, `des_asahi_full_i_true`: absoluta e aparente na banda- $i$

`des_asahi_full_z_abs_mag`, `des_asahi_full_z_true`: absoluta e aparente na banda- $z$

`des_asahi_full_y_abs_mag`, `des_asahi_full_y_true`: absoluta e aparente na banda- $y$

Os mapas celestes são construídos pixelizando a esfera, ou seja, dividindo-a em  $N_{\text{pix}}$  pixels de mesma área  $\Delta\Omega$ ,

$$\Delta\Omega = \frac{4\pi}{N_{\text{pix}}}, \quad N_{\text{pix}} = 12N_{\text{side}}^2, \quad (5.1.2)$$

com resolução  $N_{\text{side}} = 2^N$ ,  $N \in \mathbb{N}$ . A função janela angular (máscara) delimita a região observada no experimento tal que  $W(\hat{n}) = 1$  sobre o céu mapeado e  $W(\hat{n}) = 0$  fora dessa área. Então, definimos os índices *fracdet's*  $w_I$  do pixel  $\Omega_I$ ,

$$w_I = \frac{1}{\Delta\Omega} \int_{\Omega_I} d\Omega(\hat{n}) W(\hat{n}) \quad (5.1.3)$$

se o pixel está inteiramente dentro do survey,  $w_I = 1$ , mas se ele está na fronteira ou é parcialmente observado,  $0 < w_I < 1$ , e caso ele esteja totalmente fora da região,  $w_I = 0$ . Assim a fração total do céu mapeada é dada por:

$$f_{\text{sky}} = \frac{1}{N_{\text{pix}}} \sum_{I=1}^{N_{\text{pix}}} w_I. \quad (5.1.4)$$

O catálogo MICECATv2.0 tem cerca de 499.61 milhões de objetos. Utiliza-se as coordenadas celestes RA (`ra_gal`) e DEC (`dec_gal`) para identificar e agrupar as galáxias em pixels e, usando a resolução  $N_{\text{side}} = 1024$  em todos os mapas, a fração do céu simulada no catálogo do MICE:

$$f_{\text{sky}} = 0.12165 \quad (5.1.5)$$

A figura 5.1 mostra a densidade numérica (contagem por arcmin<sup>2</sup>) com todas as galáxias do catálogo MICECATv2.0 cobrindo o primeiro octante da esfera.

As galáxias são separadas em faixas de redshift (`z_cg1_v`) com função de seleção fotométrica - simulando as observações, e o  $z$ -true sem RSD (`z_cg1`) é utilizado nas correções de evolução temporal das magnitudes, como mostra a equação (5.1.1). Além disso, analisando o diagrama  $g - r$  (`gr_gal`)  $\times M_R^{\text{evol}}$  (`mr_gal`) da figura 5.2, vemos que as galáxias formam dois grupos principais: um das galáxias azuis - as mais jovens, abaixo da linha de corte e as vermelhas - as mais velhas, acima da linha. A reta que separa os dois grupos é a seguinte:

$$g - r = 0.21 - 0.03M_R^{\text{evol}} \quad (5.1.6)$$

Essa divisão é necessária pois galáxias azuis e vermelhas estão em halos com proporções entre matéria escura e bariônica diferentes, pois galáxias mais velhas estão há mais tempo sofrendo os efeitos da expansão do que as mais jovens, logo os grupos têm funções de galaxy-bias diferentes. A estimativa de parâmetros será feita usando o grupo mais bem-definido e concentrado no diagrama: o grupo de galáxias vermelhas.

Limitamos a magnitude aparente  $\text{mag}_i^{\text{evol}}(\text{des\_asahi\_full\_i\_true}) < 23$ , porque depois desse valor há uma queda abrupta na contagem de objetos nos levantamentos do DES.

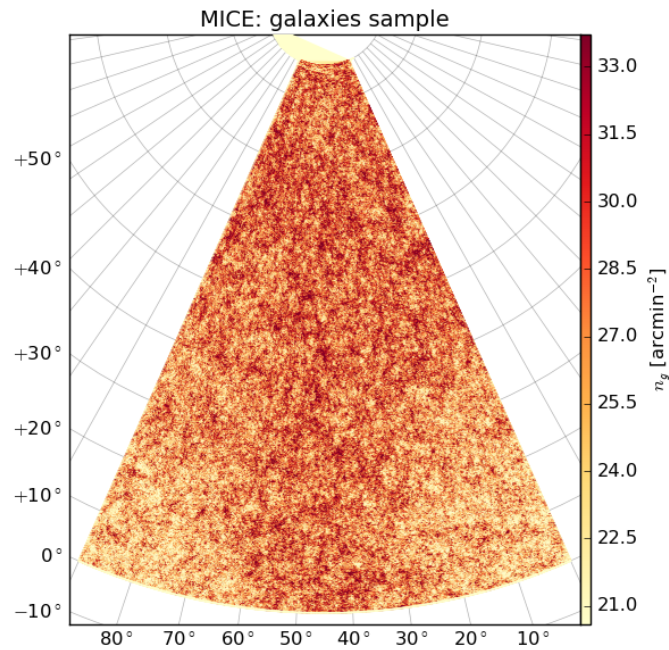


Figura 5.1: Mapa de densidade com todas as galáxias do catálogo MICE

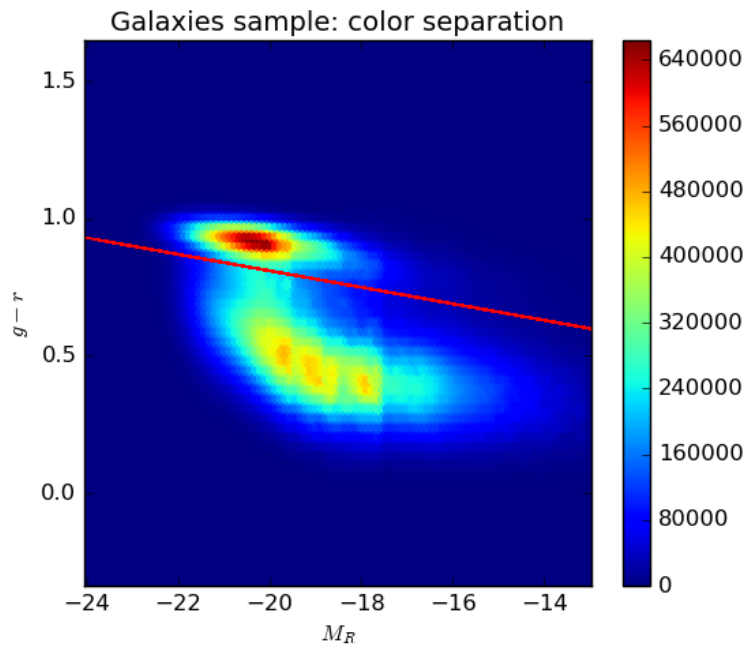


Figura 5.2: Diagrama  $g-r \times M_R^{\text{evol}}$  e a classificação em galáxias azuis e vermelhas



Seja  $N_I$  o número total de galáxias contidas no  $I$ -ésimo pixel, logo a densidade numérica nesse pixel de área  $w_I \Delta\Omega$  e a média sobre toda a região mapeada são respectivamente:

$$n_I = \frac{N_I}{w_I \Delta\Omega}, \quad \bar{n} = \frac{\sum_I N_I}{\sum_I w_I \Delta\Omega} = \frac{\sum_I N_I}{4\pi f_{\text{sky}}} \quad (5.1.7)$$

e portanto a flutuação de densidade,

$$\delta_I = \frac{n_I}{\bar{n}} - 1. \quad (5.1.8)$$

A tabela 5.2 mostra como as galáxias vermelhas do catálogo foram divididas em faixas de redshift fotométrico e as seus respectivas contagens. A figura 5.3 traz os mapas de flutuações de densidade, conforme a expressão (5.1.8) para cada faixa de photo-z.

Tabela 5.2: Redshift shells e contagem de galáxias

Faixa de photo-z	$N_{\text{gal}} (\text{RED})$
$0.6 < z_{\text{ph}} < 0.7$	7, 619, 404
$0.7 < z_{\text{ph}} < 0.8$	7, 173, 538
$0.8 < z_{\text{ph}} < 0.9$	6, 121, 556
$0.9 < z_{\text{ph}} < 1.0$	4, 140, 912

## 5.2 Medidas do espectro de potência angular

As medidas do espectro de potência angular do catálogo MICE foram realizadas usando a livreria NaMaster, posteriormente elas passaram por uma simples redução de dados para que possam ser comparadas com a previsão teórica.

### 5.2.1 NaMaster: método do pseudo- $C_\ell$

Na análise de um catálogo de galáxias que cobre o céu inteiro, os coeficientes  $C_\ell$  do espectro de potência angular são medidos simplesmente a partir de:

$$a_{\ell m}^i = \int_{4\pi} d\Omega(\hat{n}) Y_{\ell m}^*(\hat{n}) \delta_i(\hat{n}), \quad C_\ell^i = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |\langle a_{\ell m}^i \rangle|^2 \quad (5.2.1)$$

como vimos no capítulo anterior. O cálculo de  $a_{\ell m}^i$  é realizado pela rotina `anafast` da livreria HEALPix<sup>2</sup>. Entretanto, grandes mapeamentos de galáxias são feitos observando uma pequena fração do céu ( $f_{\text{sky}} < 1$ ) e por isso não podemos usar a última expressão diretamente, pois ela depende de uma integração sobre toda a esfera celeste, na qual não temos total conhecimento de  $\delta_i(\hat{n})$ .

<sup>2</sup>Tutorial do HEALPy disponível no website:

<http://healpy.readthedocs.io/en/latest/generated/healpy.sphtfunc.anafast.html>

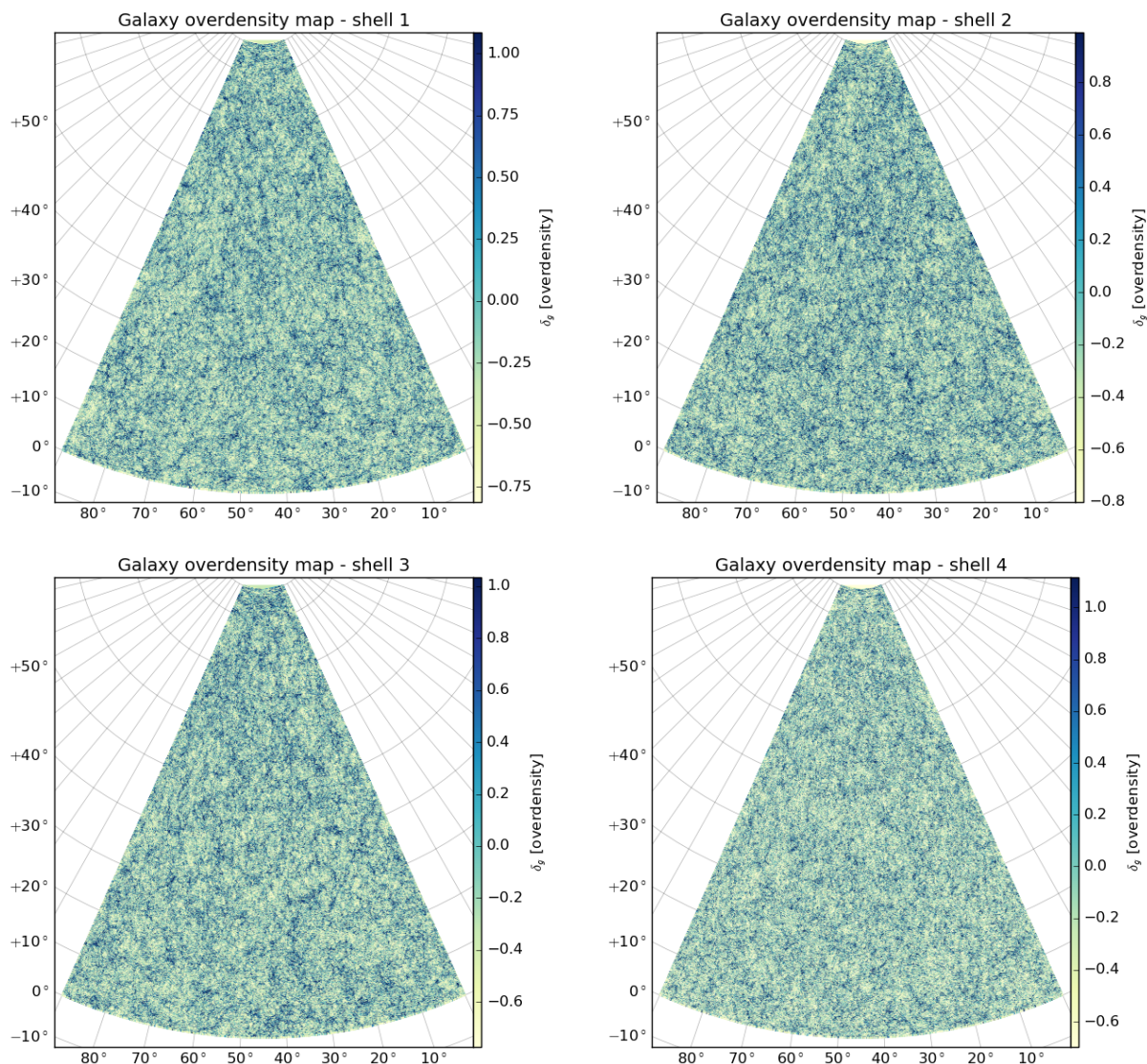


Figura 5.3: Mapas de flutuações de densidade para as quatro faixas de photo-z

Para solucionar esse problema, usaremos a livreria **NaMaster**<sup>3</sup>: **M**onte **C**arlo **A**podised **S**pherical **T**ransform **E**stimator - descrita na referência E. Hivon et al. 2002 [26] - que calcula o espectro de potência angular de um mapa, considerando a máscara que delimita a área observada, usando o método chamado de **pseudo- $C_\ell$** . Originalmente, o **NaMaster** foi desenvolvido para computar rapidamente a anisotropia da CMB a partir do mapa de flutuações de temperatura detectadas sobre uma pequena região, mas também pode ser usado nesse contexto, para calcular o APS das flutuações de densidade de galáxias.

<sup>3</sup>GitHub link: <https://github.com/damonge/NaMaster>

Devido às limitações geométricas do survey, o que de fato medimos diretamente é o pseudo- $C_\ell$ , denotado por  $\tilde{C}_\ell$ , pois as flutuações de densidade são mascaradas pela função janela angular, um viés estritamente observacional:  $\delta_i(\hat{n}) \rightarrow \tilde{\delta}_i(\hat{n}) = W(\hat{n})\delta_i(\hat{n})$ , logo

$$\tilde{a}_{\ell m}^i = \int_{4\pi} d\Omega(\hat{n}) Y_{\ell m}^*(\hat{n}) W(\hat{n}) \delta_i(\hat{n}), \quad \tilde{C}_\ell^i = \frac{1}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |\langle \tilde{a}_{\ell m}^i \rangle|^2 \quad (5.2.2)$$

Na implementação do **NaMaster**, depois da aplicação da função janela sobre o mapa, a rotina **anafast** calcula o pseudo- $C_\ell$  da equação (5.2.2), porém ele é claramente diferente do true- $C_\ell$  de interesse em (5.2.1). A relação entre o pseudo e o true- $C_\ell$  é definida através da matriz de acoplamento  $\mathcal{M}$  [26]:

$$\tilde{C}_\ell^i = \sum_{\ell'} \mathcal{M}_{\ell\ell'} C_{\ell'}^i \quad (5.2.3)$$

$$\mathcal{M}_{\ell_1\ell_2} = (2\ell_2 + 1) \sum_{\ell_3} \frac{2\ell_3 + 1}{4\pi} C_{\ell_3}(W) \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \quad (5.2.4)$$

onde  $C_\ell(W)$  são os coeficientes do APS da função janela angular (máscara) e introduzimos os símbolos de Wigner 3- $j$  (ou os coeficientes de Clebsch-Gordan) que descrevem o acoplamento de três momentos angulares

$$\begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$

cujos momentos totais são zero. Os coeficientes são não-nulos somente se  $|\ell_1 - \ell_2| \leq \ell_3 \leq \ell_1 + \ell_2$  e  $m_1 + m_2 + m_3 = 0$ . Usando as relações de ortogonalidade e de completude, a expressão pode ser simplificada por

$$\begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{L/2} \left[ \frac{(L - 2\ell_1)! (L - 2\ell_2)! (L - 2\ell_3)!}{(L + 1)!} \right]^{1/2} \frac{(L/2)!}{(L/2 - \ell_1)! (L/2 - \ell_2)! (L/2 - \ell_3)!}$$

sendo  $L = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3$  par ou  $L = 0$  se  $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3$  for ímpar.

A livreria ainda é capaz de calcular o espectro de potência angular quando há outras limitações na observação além do corte geométrico, como uma função  $F$  (*filter*) que modela um filtro aplicado sobre o mapa eliminando objetos indesejáveis que contaminam o catálogo - estrelas ou até quasares, uma função janela  $B$  (*beam*) que suaviza os efeitos de borda e da quantidade finita de pixels e o *shot-noise*  $N$  que possa existir em mapas com baixa contagem de galáxias - o que introduziria um ruído no final do espectro, logo segue a relação mais geral entre o pseudo e o true- $C_\ell$  [26]:

$$\tilde{C}_\ell^i = \sum_{\ell'} \mathcal{M}_{\ell\ell'} F_{\ell'} B_{\ell'}^2 C_{\ell'}^i + \tilde{N}_\ell^i \quad (5.2.5)$$

Todavia, neste projeto vamos seguir com a prescrição mais simples das expressões (5.2.3, 5.2.4). Mas também há outras possibilidades, como o cálculo dos coeficientes de cross-correlação entre mapas distintos  $C_\ell^{ij}$ , opções de polarização: spin 0 ou spin 2, modos puros de propagação:  $E$  ou  $B$  e binagem dos índices  $\ell$ . Abaixo seguem todas as opções de inputs do NaMaster.

Usage: namaster -<opt-name> <option>

Options:

```
-map      -> path to file containing map(s)
-map_2    -> path to file containing 2nd map(s) (optional)
-beam     -> path to file containing SHT of instrument beam for the first field
-beam_2   -> path to file containing 2nd beam (optional)
-mask     -> path to file containing mask
-mask_2   -> path to file containing mask for 2nd map(s) (optional)
-temp     -> path to file containing contaminant templates (optional)
-temp_2   -> path to file containing contaminant templates
           for 2nd map(s) (optional)
-pol      -> spin-0 (0) or spin-2 (1) input map(s)
-pol_2    -> spin-0 (0) or spin-2 (1) 2nd input map(s)
-pure_e   -> use pure E-modes for 1st maps? (0-> no or 1-> yes (default->no))
-pure_b   -> use pure B-modes for 1st maps? (0-> no or 1-> yes (default->no))
-pure_e_2 -> use pure E-modes for 2nd maps? (0-> no or 1-> yes (default->no))
-pure_b_2 -> use pure B-modes for 2nd maps? (0-> no or 1-> yes (default->no))
-cl_noise -> path to file containing noise Cl(s)
-cl_guess -> path to file containing initial guess for the Cl(s)
-coupling -> path to file containing coupling matrix (optional)
-out      -> output filename
-binning  -> path to file containing binning scheme
-nlb     -> number of ell's per bin (used only if -binning isn't used)
-h       -> this help
```

Usamos as opções de inputs `-map` para os mapas de  $\delta_I$  em uma determinada faixa de photo-z, `-mask` para a máscara com os fracdet's  $w_I = 1$  no primeiro octante da esfera e  $w_I = 0$  caso contrário, `-binning` para a binagem em  $\ell$ 's e `-out` onde o arquivo output é salvo: uma tabela com os valores de  $\ell$  e  $C_\ell$ . Assim, tem-se as medidas diretas do NaMaster,  $C_\ell^{\text{NM}}$ . A binagem foi escolhida de modo que os efeitos de RSD sejam minimizados ( $\ell > 40$ ), que o modelo teórico não seja extrapolado para o regime não-linear ( $\ell < 400$ ) e que seja possível observar as oscilações acústicas bariônicas; com isso fixamos  $\ell_{\text{min}} = 40$ ,  $\ell_{\text{max}} = 360$  e  $\Delta\ell = 20$ .

## 5.2.2 Redução de dados

Para verificar a presença de um possível shot-noise, foram gerados  $N_{\text{trials}} = 20$  mapas nos quais cada pixel sobre a máscara tinha uma densidade numérica de galáxias  $n_I$  aleatória seguindo uma distribuição de Poisson centrada no valor médio de galáxias  $\bar{n}$ . Logo, os coeficientes

$C_\ell^{\text{SN}}$  de shot-noise são as médias sobre os  $N_{\text{trials}}$  mapas,

$$C_\ell^{\text{SN}} = \frac{1}{N_{\text{trials}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{trials}}} C_{\ell,k}^{\text{SN}}.$$

Finalmente, subtraímos o shot-noise e multiplicamos por  $f_{\text{sky}}$  para que tenhamos uma medida *clean data*  $C_\ell$  comparável com as previsões teóricas:

$$C_\ell = f_{\text{sky}} (C_\ell^{\text{NM}} - C_\ell^{\text{SN}}). \quad (5.2.6)$$

A figura 5.4 mostra as medidas diretas do NaMaster  $f_{\text{sky}}C_\ell^{\text{NM}}$  em vermelho, as estimativas de shot-noise  $f_{\text{sky}}C_\ell^{\text{SN}}$  em verde e as medidas finais  $C_\ell$  em azul para as quatro faixas de redshift. Note que a correção de SN é irrelevante para esse catálogo, pois trata-se de um conjunto numeroso ( $N_{\text{gal}} \sim 10^6$ ) e ela pode ser estimada por:

$$f_{\text{sky}}C_\ell^{\text{SN}} \simeq \bar{n}^{-1} \ll f_{\text{sky}}C_\ell^{\text{NM}}.$$

## 5.3 Metodologia

A estimativa de parâmetros em Cosmologia, e em muitas áreas da Física, é realizada usando a estatística Bayesiana e o método de Markov Chain Monte Carlo (MCMC). A estrutura CosmoSIS integra samplers de MCMC com cálculos modulares de observáveis cosmológicos, assim otimizando o processamento de dados. Nesta seção apresentamos metodologia que foi utilizada para fazer a estimativa de parâmetros a partir do espectro de potência angular.

### 5.3.1 Markov Chain Monte Carlo

Medidas experimentais  $\mathbf{x} = \{x_i\}$  se comportam como variáveis aleatórias independentes em si, tal que cada medida tem uma função de distribuição de probabilidade (PDF)  $f_i(x_i; \mathbf{a})$  em torno de um valor médio  $\mu_i$  e com um desvio padrão  $\sigma_i$  que é descrita por um conjunto de parâmetros teóricos  $\mathbf{a} = \{a_j\}$  [24]. Então, a PDF do conjunto total, denominada de *likelihood*,

$$f(\mathbf{x}; \mathbf{a})d\mathbf{x} = \prod_i f_i(x_i; a_j)dx_i. \quad (5.3.1)$$

O ponto de máximo da likelihood  $f(\mathbf{x}; \mathbf{a})$  ocorre nas medidas mais prováveis de serem observadas dado um modelo e que devem coincidir com as previsões teóricas de  $\mu_i(\mathbf{a})$ . Entretanto, o objetivo é o oposto: dado um conjunto de medidas, qual é o melhor modelo teórico que explica essas observações, ou seja, inverter a relação condicional via **Teorema de Bayes**:

$$P(A; B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B; A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow$$

$$P(B; A) = \frac{P(A; B)}{P(A)}P(B) \quad (5.3.2)$$

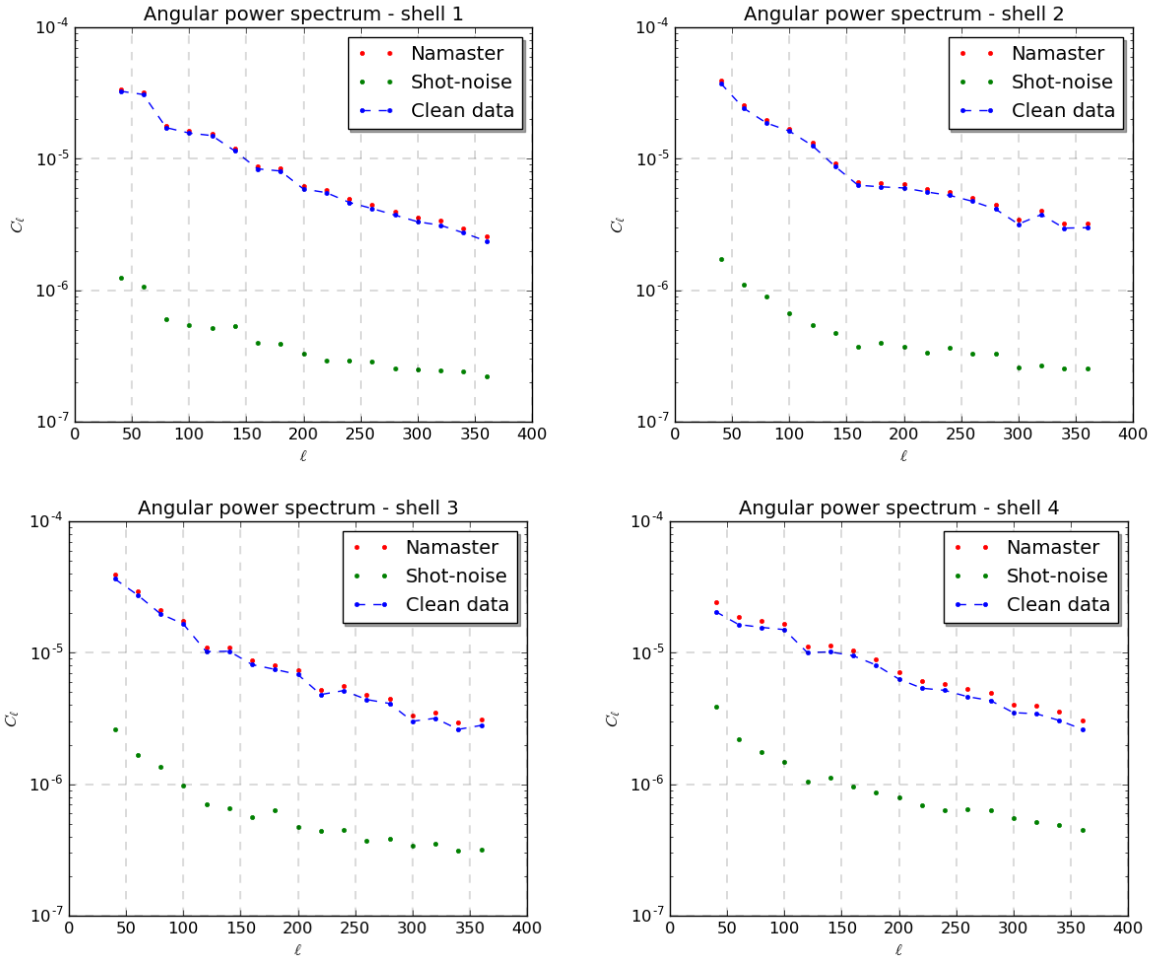


Figura 5.4: Medidas de  $C_\ell$  para as quatro faixas photo-z

logo, a função de probabilidade dos parâmetros

$$L(\mathbf{a}; \mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x}; \mathbf{a})}{g(\mathbf{x})} p(\mathbf{a}) \sim f(\mathbf{x}; \mathbf{a}) p(\mathbf{a}). \quad (5.3.3)$$

A PDF das medidas  $g(\mathbf{x})$  não depende de  $\mathbf{a}$  e portanto ela não contribui na estimativa dos parâmetros, para  $L(\mathbf{a}; \mathbf{x})$ ,  $g(\mathbf{x})$  é apenas um fator de normalização. A probabilidade a priori do modelo  $p(\mathbf{a})$ , *i.e.* antes do experimento, é importante para  $L$  mas inacessível, pois toda a nossa avaliação sobre um modelo é obtida comparando com os dados. No **método frequentista** supomos que a priori os modelos são equiprováveis e  $p$  é uniforme, pois o atual experimento é rico em dados e mais preciso que os anteriores, então  $L \sim f$ , muito usado em Física de Partículas. Em Cosmologia e Astrofísica, os dados são raros e as observações não podem ser repetidas facilmente como em um laboratório, os modelos são caracterizados por vários parâmetros correlacionados e toda informação prévia é importante e deve ser considerada, assim  $p(\mathbf{a})$  inclui resultados de experimentos anteriores e exclui regiões não-físicas.



Ao comparar modelos deve-se considerar que eles podem ser descritos por parâmetros e terem regiões de validade ou interesse diferentes. Por exemplo, o método do  $\chi^2$  privilegia modelos com menos parâmetros livres. Se tivermos uma estatística com poucos dados e não são suficientes para limitar um parâmetro, esse parâmetro livre não altera a razão de Bayes que integra sobre todos os parâmetros,

$$E(\mathbf{x}; M) \equiv \int da_j^M f(\mathbf{x}; a_j^M) p(a_j^M)$$

$$B_{12} \equiv \frac{E(\mathbf{x}; M_1)}{E(\mathbf{x}; M_2)} \Rightarrow L_{12} \equiv \frac{L(M_1; \mathbf{x})}{L(M_2; \mathbf{x})} = B_{12} \frac{p(M_1)}{p(M_2)} \quad (5.3.4)$$

logo  $L_{12}$  corretamente descarta parâmetros não-determinados pela baixa estatística e também não penaliza os modelos que os introduziram. Se  $L_{12} > 1$  então o modelo  $M_1$  descreve melhor os dados que o modelo  $M_2$ , caso contrário se  $L_{12} < 1$ .

Assim, para estimar os parâmetros de um modelo, devemos maximizar a likelihood  $L(\mathbf{a}; \mathbf{x})$ , pode-se resolver esse sistema de EDP's numericamente usando o método de Newton-Rapson na expansão de  $\ln L$  em torno do máximo  $\hat{\mathbf{a}}$ :

$$\ln L(\mathbf{a}) \simeq \ln L(\hat{\mathbf{a}}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \ln L(\mathbf{a})}{\partial a_i \partial a_j} \Big|_{\hat{\mathbf{a}}} (a_i - \hat{a}_i)(a_j - \hat{a}_j) \quad (5.3.5)$$

onde são definidos os elementos da **matriz de Fisher**  $F_{ij}$  como as derivadas de segunda ordem

$$F_{ij} \equiv - \left\langle \frac{\partial^2 \ln L(\mathbf{a}; \mathbf{x})}{\partial a_i \partial a_j} \right\rangle \Big|_{\hat{\mathbf{a}}} = - \int d\mathbf{x} \frac{\partial^2 \ln L(\mathbf{a})}{\partial a_i \partial a_j} L(\mathbf{a}; \mathbf{x}). \quad (5.3.6)$$

Em geral as PDF's das medidas experimentais seguem uma gaussiana, cuja média é prevista por um modelo teórico  $\mu(\mathbf{a})$ , matriz de covariância  $C$  e desvio padrão  $\sigma_i$ :

$$C_{ij} \equiv \langle (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) \rangle, \quad \sigma_i^2 = C_{ii}$$

$$f(\mathbf{x}; \mathbf{a}) \sim \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{i,j} (x_i - \mu_i) C_{ij}^{-1} (x_j - \mu_j) \right]. \quad (5.3.7)$$

Contudo, ainda não sabemos como calcular a probabilidade a priori do modelo  $p(\mathbf{a})$  para determinar completamente a função a posteriori  $L(\mathbf{a}; \mathbf{x})$ , por isso um método muito utilizado para encontrar máximos de funções de probabilidade e estimar parâmetros é o **Markov Chain Monte Carlo** (MCMC), pois ele que produz uma sequência de pontos no espaço de parâmetros (*chain*), de modo que próximo ponto  $\mathbf{a}_{k+1}$  a ser adicionado na cadeia é escolhido aleatoriamente mas com uma probabilidade proporcional a likelihood do ponto anterior  $L(\mathbf{a}_k; \mathbf{x})$ , assim até chegar em uma distribuição estacionária. Ou seja, a informação a priori do modelo é obtida indiretamente e de forma recursiva conforme a cadeia é construída, logo podemos fazer  $L(\mathbf{a}; \mathbf{x}) \sim f(\mathbf{x}; \mathbf{a})$  e a função a priori entra implicitamente na escolha do próximo ponto.

Há vários métodos de MCMC que variam os percursos no espaço de parâmetros, critérios para inserção de pontos na cadeia e condições de convergência, um dos algoritmos mais usados é o **Metropolis-Hastings** [24] com os seguintes passos:

- (i) um ponto inicial  $\mathbf{a}_1$  é escolhido aleatoriamente dentro da região uniforme especificada no espaço de parâmetros com a posteriori não-normalizada  $\sim L(\mathbf{a}_1; \mathbf{x})$
- (ii) um candidato para ser o próximo ponto da cadeia  $\mathbf{b}_2$  é escolhido aleatoriamente com densidade de probabilidade  $L(\mathbf{a}_1; \mathbf{x})$  e o fator de aceitação desse candidato é dado por

$$\alpha(\mathbf{b}_2, \mathbf{a}_1) = \min\left(\frac{L(\mathbf{b}_2; \mathbf{x})}{L(\mathbf{a}_1; \mathbf{x})}, 1\right) \quad (5.3.8)$$

- (iii) se  $L(\mathbf{b}_2; \mathbf{x}) > L(\mathbf{a}_1; \mathbf{x}) \Rightarrow \alpha = 1$ , então o candidato  $\mathbf{b}_2$  é mais provável que  $\mathbf{a}_1$  e ele é inserido na cadeia:  $\mathbf{a}_2 \leftarrow \mathbf{b}_2$
- (iv) mas se  $L(\mathbf{b}_2; \mathbf{x}) < L(\mathbf{a}_1; \mathbf{x}) \Rightarrow \alpha < 1$ , logo  $\mathbf{b}_2$  é menos provável que  $\mathbf{a}_1$  porém ele ainda pode ser inserido para que possamos explorar mais o espaço de parâmetros e fugir de um possível máximo local que confinaria a busca, seja  $u \in [0, 1]$  com distribuição uniforme:
  - (a) se  $\alpha > u \Rightarrow \mathbf{a}_2 \leftarrow \mathbf{b}_2$
  - (b) caso contrário,  $\alpha < u \Rightarrow \mathbf{a}_2 \leftarrow \mathbf{a}_1$
- (v) e assim o processo se repete: o próximo ponto da cadeia é escolhido usando os critérios acima e encontramos o máximo da likelihood a posteriori.

### 5.3.2 CosmoSIS

Neste projeto usamos a estrutura **CosmoSIS**<sup>4</sup> desenvolvida por J. Zuntz, M. Paterno, E. Jennings et al. 2014 [20] para fazer a estimativa de parâmetros cosmológicos de maneira modular: ele opera por meio de vários componentes independentes, cada um com inputs e outputs bem-definidos. Essa divisão permite com que possamos otimizar o processamento de dados, que estão cada vez mais volumosos e complexos na atual Cosmologia Observacional de grandes colaborações. O CosmoSIS já possui uma livreria padrão com códigos de predição do modelo padrão e de observáveis dos principais experimentos (*datasets*), diversos algoritmos de MCMC, mas também possibilita que o usuário crie um novo módulo para analisar um fenômeno recente ou mais específico. Os principais componentes do CosmoSIS são:

- (i) **pipeline**: sequência de todas etapas necessárias para calcular a probabilidade a posteriori e estimar os parâmetros cosmológicos;
- (ii) **modules** são as estruturas individuais que compõem a pipeline: códigos fundamentais para resolver as equações de Boltzmann e calcular o espectro de potência
  - (a) CAMB
  - (b) CLASS

---

<sup>4</sup>Bitbucket link: <https://bitbucket.org/joezuntz/cosmosis/wiki/Home>



- (c) CosmoLike
- (d) Halofit

e outros códigos que computam quantidades observáveis dos seguintes fenômenos:

- (a) Cepheid variables
- (b) Type IA Supernovae
- (c) Baryon acoustic oscillations
- (d) Strong lensing
- (e) Light element abundances
- (f) Globular cluster ages
- (g) Cosmic microwave background

ambos na livreria padrão e que podem ser integrados a módulos personalizados;

- (iii) **datablock** é o objeto passado ao longo da pipeline: todos os módulos lêem os inputs por ele e todos os outputs são salvos aqui;
- (iv) **samplers** geram conjuntos de pontos no espaço de parâmetros e rodam a pipeline para cada novo input dentro da região delimitada. Há samplers somente para validação:
  - (a) `test`
  - (b) `grid`

e outros com algoritmos de MCMC para maximizar a likelihood

- (a) `metropolis`
- (b) `maxlike`
- (c) `emcee`
- (d) `multinest`

Os inputs do CosmoSIS são o *datavector* com as medidas  $\ell \times C_\ell$ , a binagem em  $\ell$ 's e a função de seleção gaussiana  $\phi(z)$  - neste caso com  $\sigma_0 = 0.03$  - para cada uma das quatro faixas de photo-z. Utilizamos o módulo `camb` para calcular o espectro de potência linear entre  $10^{-5}h/\text{Mpc} < k < 10^2h/\text{Mpc}$ , aplicando a correção para escala não-linear em  $r_{\text{NL}} = 5.2\text{Mpc}/h$ , usamos também o módulo `sigma_8 rescale` que rescala o espectro de potência para um dado  $\sigma_8$ , ambos disponíveis na livreria padrão. Um módulo foi criado para calcular os coeficientes  $C_\ell$  teóricos de acordo com o capítulo anterior e um outro para a likelihood a posteriori com matriz de covariância diagonal, supondo que os multipolos  $\ell$ 's são independentes e a distribuição das medidas é aproximada gaussiana [28]:

$$\text{Cov}[C_\ell, C_{\ell'}] = \frac{2}{(2\ell + 1)f_{\text{sky}}} (C_\ell + \bar{n}_{\text{gal}}^{-1})^2 \delta_{\ell\ell'}. \quad (5.3.9)$$

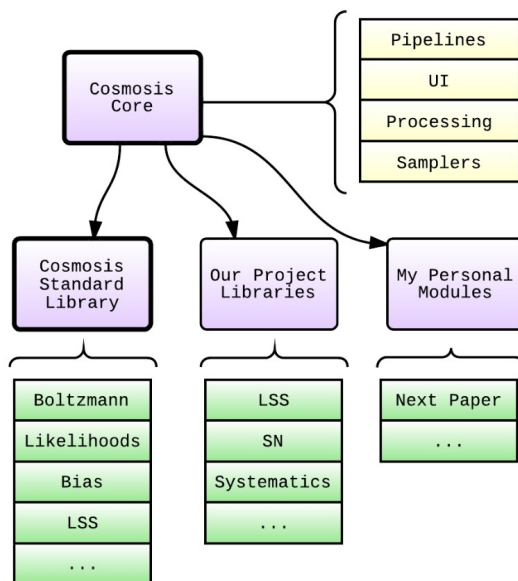


Figura 5.5: Esquematização da estrutura do CosmoSIS

## 5.4 Estimativas dos parâmetros

Os parâmetros de galaxy-bias e cosmológicos foram estimados usando o sampler `emcee` [22] que preenche o espaço de parâmetros com *walkers* distribuídos aleatoriamente, de modo que os pontos candidatos a entrar na cadeia são testados ao longo das retas que conectam pares de walkers. As cadeias para cada par de walkers são independentes entre si, portanto elas podem rodar em paralelo usando a livreria `Open MPI` [20].

### 5.4.1 Galaxy-bias

A amostra de galáxias vermelhas foi dividida em quatro faixas de redshift fotométrico, conforme a tabela 5.2, para que possamos considerar que dentro de cada faixa o galaxy-bias é aproximadamente constante. Logo, temos quatro parâmetros  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  e  $b_4$  que foram estimados juntos fixando os parâmetros cosmológicos no modelo fiducial da tabela 5.1. Um único *datavector* foi construído com as medidas de  $C_\ell$  das quatro faixas, para que possamos analisar uma possível cross-correlação.

As configurações usadas no `emcee` foram: `walkers = 64`, `samples = 1000` (número de pontos na reta que liga dois walkers) e `nsteps = 200` (os outputs da cadeia - parâmetros e likelihood - são salvos a cada `walkers*nsteps` rodadas).

Utilizando as livrerias `emcee` e `corner` [12], a primeira coluna da figura 5.6 mostra a dispersão dos parâmetros durante as 64,000 rodadas. A segunda apresenta as respectivas autocorrelações, ou seja, o grau de dependência do valor atual da cadeia em relação ao seu ponto inicial, então o algoritmo está convergindo quando todas as autocorrelações estão indo para zero, vemos isso acontecer para `ensemble step > 20,000`. A terceira coluna exibe a média dos walkers ao longo das cadeias, note que os parâmetros  $b_i$  são bem estimados e convergem

rapidamente, a partir de `walker step > 200`.

Na figura 5.7 vemos as curvas de contorno das regiões de confiança com  $1\sigma$  (68.3%),  $2\sigma$  (95.4%) e  $3\sigma$  (99.7%) e as distribuições marginalizadas. A excentricidade das curvas de contorno indica diretamente o grau de correlação entre os parâmetros [24], por exemplo: as curvas de  $b_2 \times b_1$  assemelham-se a elipses achatadas, ou seja, altamente excêntricas e portanto correlacionadas; mas quando comparamos com as curvas de  $b_3 \times b_1$  e  $b_4 \times b_1$  as excentricidades e, por consequência, as correlações diminuem progressivamente. Logo, a correlação entre os parâmetros de galaxy-bias é mais relevante entre faixas vizinhas de redshift. Os valores de *best-fit* e a região de  $1\sigma$  estão na tabela 5.3 abaixo.

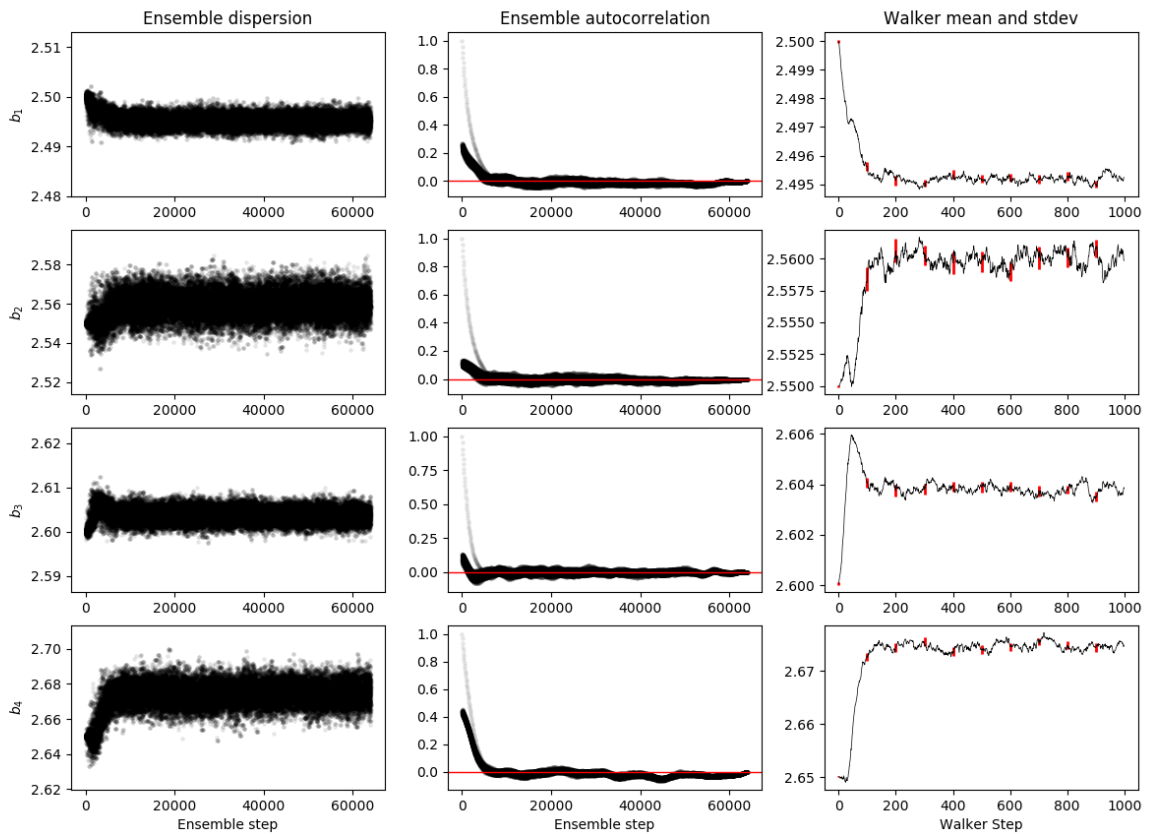


Figura 5.6: Dispersão, autocorrelação e convergência dos parâmetros no sampler emcee

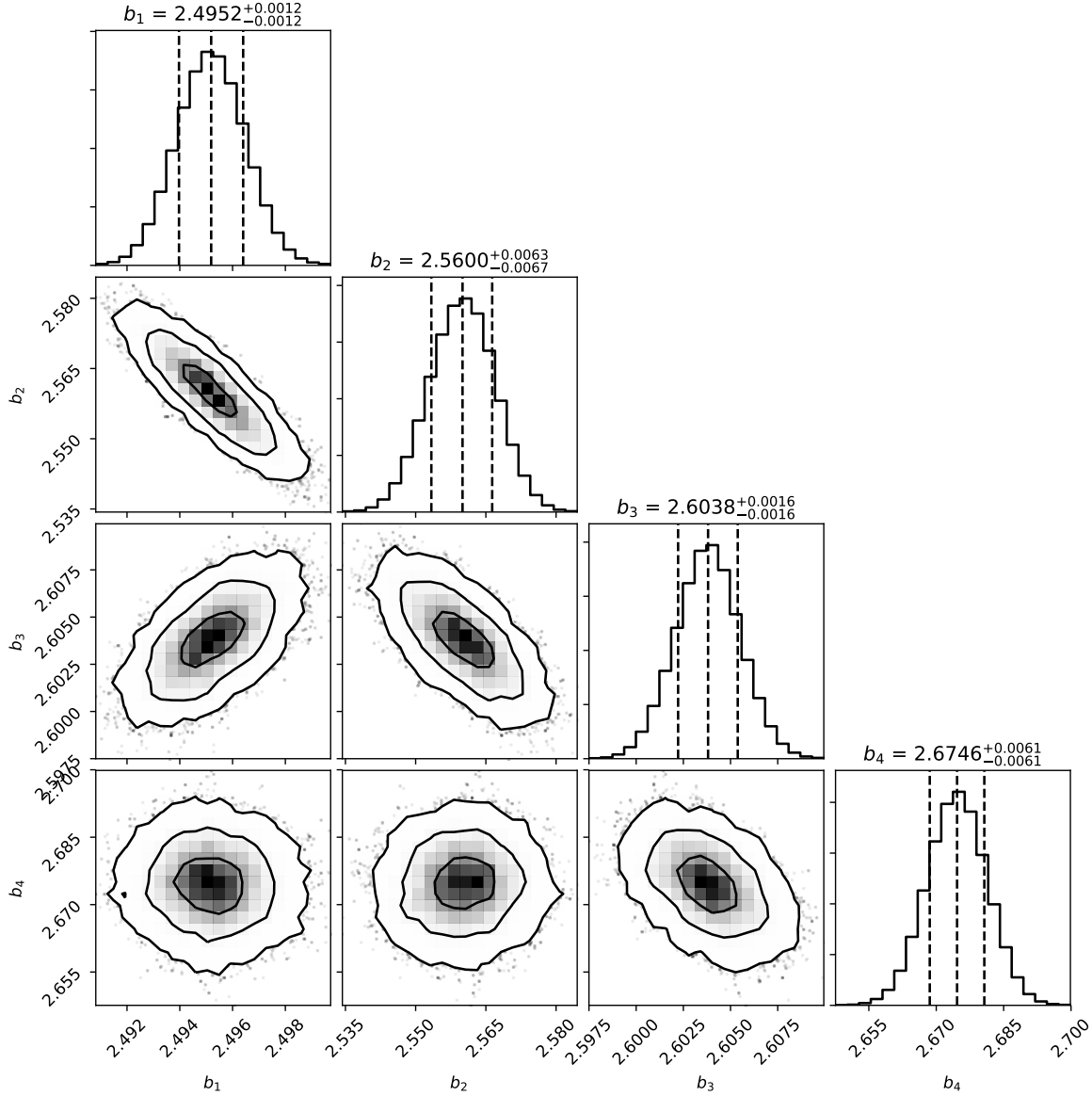


Figura 5.7: Regiões de contorno e distribuições marginalizadas dos parâmetros de galaxy-bias

## 5.4.2 Parâmetros cosmológicos

Na análise dos parâmetros cosmológicos, a amostra de galáxias vermelhas do catálogo MICE também foi dividida nas mesmas quatro faixas de redshift, mas nesse caso, fixamos os valores dos galaxy-bias nos *best-fit* da tabela 5.3 e os parâmetros cosmológicos ficaram livres nos intervalos:  $0.24 < \Omega_{m0} < 0.26$ ,  $0.040 < \Omega_{b0} < 0.050$ ,  $0.67 < h < 0.73$  e  $0.76 < \sigma_8 < 0.84$ . Novamente, o *datavector* contém as medidas de todas as faixas, mas agora com o objetivo de melhorar a precisão e os vínculos entre os parâmetros.

Tabela 5.3: Galaxy-bias do MICE: resultados

	Best likelihood	68% limits
$b_1$	2.49519	$2.4952^{+0.0012}_{-0.0012}$
$b_2$	2.55990	$2.5600^{+0.0064}_{-0.0066}$
$b_3$	2.60381	$2.6038^{+0.0015}_{-0.0016}$
$b_4$	2.67499	$2.6746^{+0.0061}_{-0.0060}$

As configurações usadas no `emcee` foram: `walkers = 64`, `samples = 1800` e `nsteps = 200`. Os coeficientes  $C_\ell$  teóricos possuem uma dependência muito mais complicada com a cosmologia do que com o galaxy-bias, por isso aumentamos o número total de rodadas para 115,200.

A figura 5.8 apresenta os gráficos de dispersão, autocorrelação e convergência. Note que os parâmetros  $\Omega_{b0}$ ,  $h$  e  $\sigma_8$  convergem rapidamente, para `walker step > 500`, enquanto que  $\Omega_{m0}$  ainda oscila entre os valores de 0.24985 e 0.25000.

Na figura 5.9 vemos as curvas de contorno das regiões de confiança com  $1\sigma$  (68.3%),  $2\sigma$  (95.4%) e  $3\sigma$  (99.7%) e as distribuições marginalizadas. As funções de probabilidade dos parâmetros  $\Omega_{b0}$ ,  $h$  e  $\sigma_8$  estão bem definidas e são aproximadamente gaussianas, porém o parâmetro de matéria total  $\Omega_{m0}$  é o mais difícil de ser estimado e a sua distribuição é mais larga e um pouco assimétrica em torno do máximo. Os valores de *best-fit* e os limites da região de  $1\sigma$  estão na tabela 5.4 abaixo e concordam com a cosmologia fiducial do catálogo MICE.

A figura 5.10 mostra as medidas dos coeficientes  $C_\ell$  pela equação (5.2.6) - com seus respectivos erros estimados pela raiz quadrada dos elementos diagonais da matriz de covariância (5.3.9) - e a previsão teórica de melhor ajuste, ou seja, com os valores *best-fit* dos parâmetros de galaxy-bias e cosmológicos das tabelas 5.3 e 5.4.

Para analisar a concordância entre um conjunto de medidas  $y_i$  com incerteza  $\sigma_i$  e o cálculo teórico  $y_{\text{theo}}(x_i)$ , mede-se o *chi-square* reduzido:

$$\chi^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[ \frac{y_i - y_{\text{theo}}(x_i)}{\sigma_i} \right]^2, \quad (5.4.1)$$

tal que se a previsão teórica estiver dentro da região de confiança da medida,

$$|y_i - y_{\text{theo}}(x_i)| < \sigma_i \Rightarrow \chi^2 < 1.$$

Os valores de  $\chi^2$  para as faixas de redshift 1, 2, 3, 4 da figura 5.10 são respectivamente: 0.609, 1.130, 0.352, 0.432. Indicando a concordância entre as medidas e modelo teórico nas faixas 1, 3 e 4. Mas uma pequena discordância na faixa 2, somente na região das oscilações em  $\ell \simeq 150$ , local onde o ajuste é mais difícil. Portanto, podemos afirmar que a cosmologia do catálogo simulado foi recuperada com sucesso usando o espectro de potência angular.

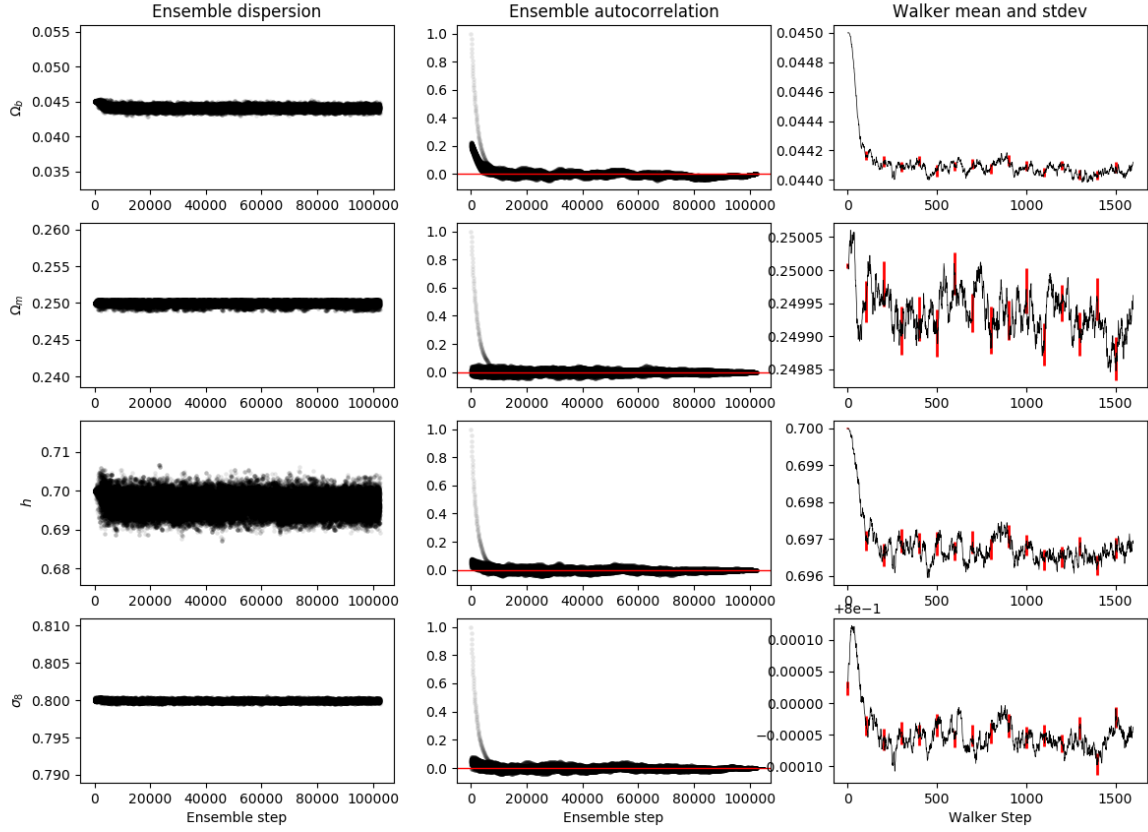


Figura 5.8: Dispersão, autocorrelação e convergência dos parâmetros cosmológicos

Tabela 5.4: Cosmologia do MICE: resultados

	Best fit	68% limits	Fiducial
$h$	0.696346	$0.6966^{+0.0023}_{-0.0023}$	0.70
$\Omega_{m0}$	0.249606	$0.2499^{+0.0003}_{-0.0002}$	0.25
$\Omega_{b0}$	0.0438733	$0.0441^{+0.0003}_{-0.0003}$	0.044
$\sigma_8$	0.799942	$0.7999^{+0.0001}_{-0.0001}$	0.80

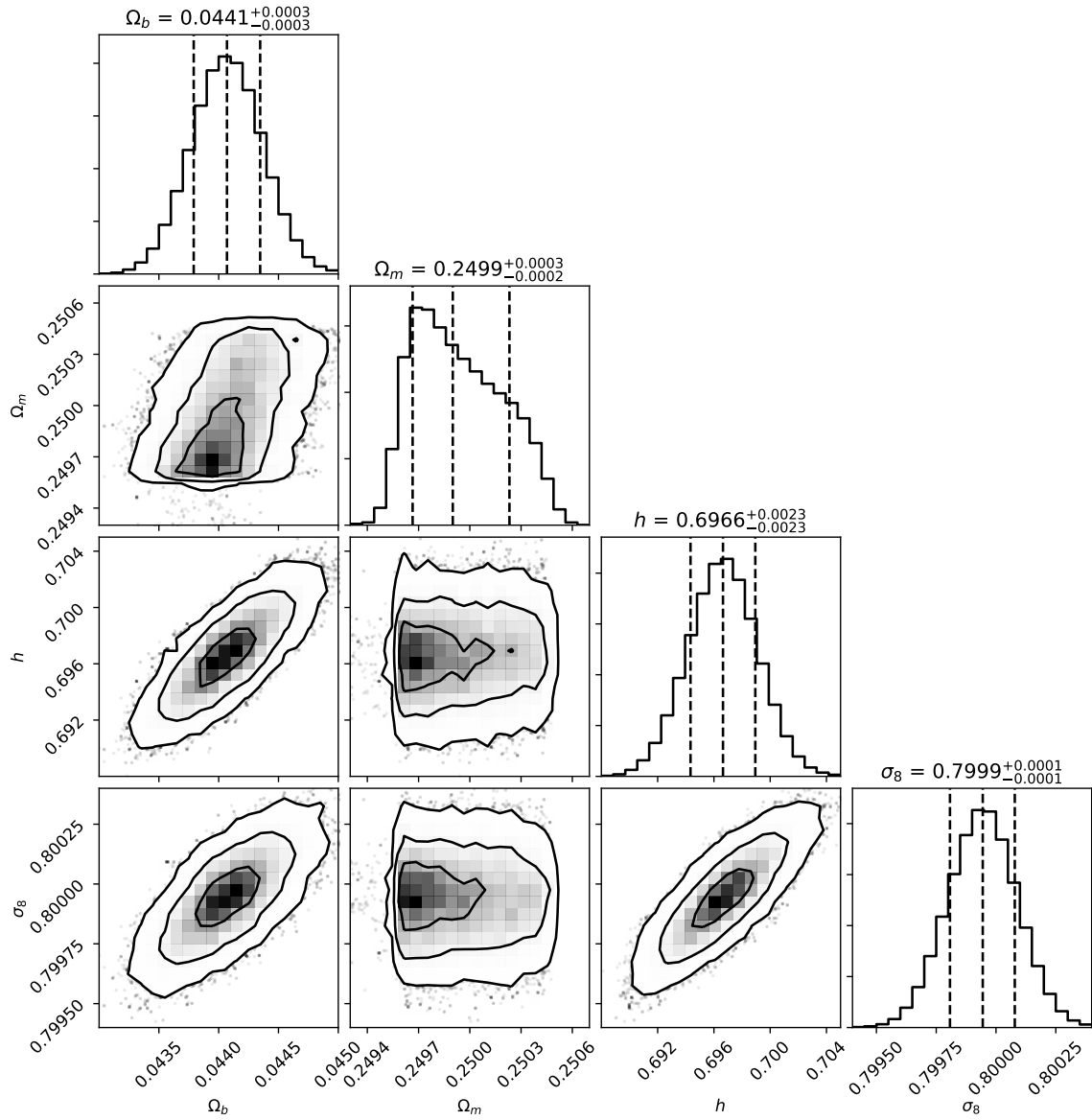


Figura 5.9: Regiões de contorno e distribuições marginalizadas dos parâmetros cosmológicos

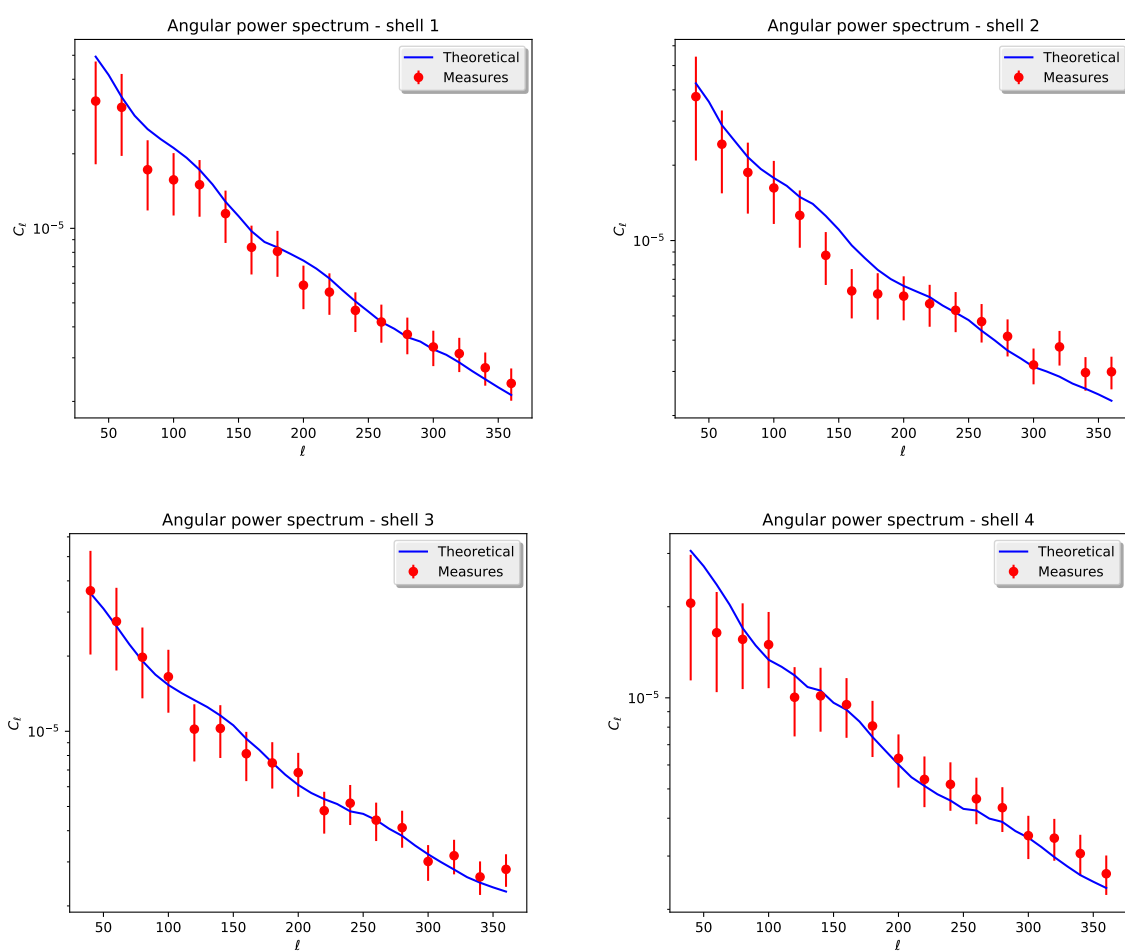


Figura 5.10: Medidas de  $C_\ell$  e os melhores ajustes do modelo teórico



---

# Conclusões e perspectivas

---

# 6

A cosmologia observacional atual conta com diversos levantamentos de alta tecnologia e precisão que estão produzindo uma quantidade enorme e inédita de informações, cerca de TB de dados são produzidos por noite de observação, mapeando regiões cada vez maiores e mais profundas do céu; entramos na era da cosmologia de *Big Data*.

Essas observações permitem-nos explorar o sistema solar, a formação e a estrutura da nossa galáxia, grandes distribuições de galáxias, superaglomerados de matéria escura e lentes gravitacionais. Hoje destacam-se os levantamentos espectroscópicos **SDSS** e **DESI** e os fotométricos **DES** e **LSST**, todos apoiados pelo **LIneA**.

A quantidade e precisão desses dados estão sendo fundamentais para validação de modelos teóricos e formulação de outros novos. Para isso, todas as etapas de produção, tratamento e análise estatística ou sistemática devem ser otimizadas, documentadas e compartilhadas para que possamos processar esse grande volume de informação em colaborações internacionais.

O objetivo inicial do projeto de mestrado foi cumprido com êxito: estudar fundamentos de cosmologia a partir das oscilações acústicas bariônicas, analisar a origem desse fenômeno, a predição teórica e como medir os seus observáveis - as funções de correlação e espectros de potência. Entretanto, os desdobramentos desse trabalho resultaram na criação de uma *pipeline* para fazer estimativas de parâmetros de galaxy-bias e cosmológicos usando o **CosmoSIS** a partir das medidas dos coeficientes do espectro de potência angular realizadas pelo **NaMaster**.

A concordância das estimativas com os valores do modelo fiducial do catálogo simulado do **MICE** foi um teste de validação e torna-a apta para ser usada em catálogos reais de galáxias. Mais alguns testes podem ser realizados para aumentar a confiabilidade e a precisão desse método, por exemplo: variar o sampler de MCMC e obter resultados concordantes, estudar a dependência da matriz de covariância com a binagem em  $\ell$ 's e os limites da teoria linear.

A *pipeline* faz parte de um projeto maior coordenado pelo grupo DES-Brazil com suporte do LineA que visa criar um ambiente para transferência, armazenamento, processamento e distribuição de dados, desenvolvimento de software e operação de um portal científico para produção, tratamento e análise em cosmologia de *Big Data* em diversas áreas.

Pretendemos fazer uma análise semelhante para as medidas da função de correlação angular usando a livraria CUTE<sup>1</sup> [1] e comparar com as estimativas do espectro de potência angular. Além disso, iniciamos as medidas para o catálogo RedMaGiC Y3A2 com a distribuição de galáxias vermelhas do terceiro ano de observação do DES.

Finalmente, concluímos que esse trabalho foi bem sucedido, superou as expectativas iniciais e ainda abre perspectivas para novos projetos.

---

<sup>1</sup>Github link: <https://github.com/damonge/CUTE/tree/master/CUTE>

---

## Referências

---

- [1] David Alonso. *CUTE solutions for two-point correlation functions from large cosmological datasets*. arXiv: [1210.1833](https://arxiv.org/abs/1210.1833), 2013.
- [2] A. Berlind e D. Weinberg. *The Halo Occupation Distribution: Toward an Empirical Determination of the Relation between Galaxies and Mass*. The Astrophysical Journal, 575: 587–616, doi: [10.1086/341469](https://doi.org/10.1086/341469), 2002.
- [3] A. Lewis, A. Challinor e A. Lasenby. *Efficient Computation of Cosmic Microwave Background Anisotropies in Closed Friedmann-Robertson-Walker Models*. The Astrophysical Journal, 538: 473-476, 2000.
- [4] Planck Collaboration. *Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters*. **Results Papers**, 2015.
- [5] Martín Crocce e Román Scoccimarro. *Renormalized cosmological perturbation theory*. American Physical Society - Phys. Rev. D 73, [10.1103/PhysRevD.73.063519](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.73.063519), 2006.
- [6] S. More, A. Kravtsov, N. Dalal et al. *The overdensity and masses of the friends-of-friends halos and universality of the halo mass function*. The Astrophysical Journal Supplement Series, 195:4 (17pp), doi: [10.1088/0067-0049/195/1/4](https://doi.org/10.1088/0067-0049/195/1/4), 2011.
- [7] Scott Dodelson. *Modern Cosmology*. San Diego: Academic Press, 2003.
- [8] Daniel J. Eisenstein. *Detection of the Baryon Acoustic Peak in the Large-Scale Correlation Function of SDSS Luminous Red Galaxies*. The Astrophysical Journal, doi:[10.1086/466512](https://doi.org/10.1086/466512), 2005.
- [9] Daniel J. Eisenstein. *The Baryon Oscillation Spectroscopic Survey of SDSS-III*. The Astronomical Journal, doi:[10.1088/0004-6256/145/1/10](https://doi.org/10.1088/0004-6256/145/1/10), 2013.
- [10] Daniel J. Eisenstein e Wayne Hu. *Baryonic Features in the Matter Transfer Function*. The Astrophysical Journal, 496: 605-614, 1998.
- [11] Daniel J. Eisenstein e Wayne Hu. *Power Spectra for Cold Dark Matter and Its Variants*. The Astrophysical Journal, 511: 5-15, 1999.
- [12] Daniel Foreman-Mackey. *corner.py: Scatterplot matrices in Python*. The Journal of Open Source Software, doi: [10.21105/joss.00024](https://doi.org/10.21105/joss.00024), 2016.
- [13] J. Foster e J. Nightingale. *A Short Course in General Relativity*. Springer, 2006.

- 
- [14] M. Crocce, F. J. Castander, E. Gaztañaga et al. *The MICE Grand Challenge lightcone simulation – I. Dark matter clustering*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 448, Issue 4, Pages 2987–3000, doi: [10.1093/mnras/stv138](https://doi.org/10.1093/mnras/stv138), 2015.
- [15] M. Crocce, F. J. Castander, E. Gaztañaga et al. *The MICE Grand Challenge lightcone simulation – II. Halo and galaxy catalogues*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 453, Issue 2, Pages 1513–1530, doi: [10.1093/mnras/stv1708](https://doi.org/10.1093/mnras/stv1708), 2015.
- [16] M. Crocce, F. J. Castander, E. Gaztañaga et al. *The MICE Grand Challenge lightcone simulation – III. Galaxy lensing mocks from all-sky lensing maps*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 447, Issue 2, Pages 1319–1332, doi: [10.1093/mnras/stu2464](https://doi.org/10.1093/mnras/stu2464), 2015.
- [17] Martín Crocce, Anna Cabré, Enrique Gaztañaga. *Modelling the angular correlation function and its full covariance in photometric galaxy surveys*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 414, Issue 1, 11 June 2011, Pages 329–349, doi: [10.1111/j.1365-2966.2011.18393.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2011.18393.x), 2011.
- [18] Dmitry Gorbunov e Valery Rubakov. *Introduction to the Theory of the Early Universe - Cosmological Perturbations and Inflation Theory*. World Scientific Publishing, 2011.
- [19] R. E. Smith, J. A. Peacock, A. Jenkins et al. *Stable clustering, the halo model and nonlinear cosmological power spectra*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 341, Issue 4, 1 June 2003, Pages 1311–1332, doi: [10.1046/j.1365-8711.2003.06503.x](https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.2003.06503.x), 2003.
- [20] Joe Zuntz, Marc Paterno, Elise Jennings et al. *CosmoSIS: modular cosmological parameter estimation*. arXiv: [1409.3409](https://arxiv.org/abs/1409.3409), 2014.
- [21] S. Landy e A. Szalay. *Bias and variance of angular correlation functions*. Astrophysical Journal, Part 1, vol. 412, no. 1, p. 64-71, doi: [10.1086/172900](https://doi.org/10.1086/172900), 1993.
- [22] D. Foreman-Mackey, D. Hogg, D. Lang et al. *emcee: The MCMC Hammer*. Astronomical Society of the Pacific, [125: 306–312](https://doi.org/10.1086/675056), 2013.
- [23] Julien Lesgourgues. *The Cosmic Linear Anisotropy Solving System (CLASS) I: Overview*. arXiv: [1104.2932](https://arxiv.org/abs/1104.2932), 2011.
- [24] Marisa Cristina March. *Advanced Statistical Methods for Astrophysical Probes of Cosmology*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2013.
- [25] Takahiko Matsubara. *Correlation Function in Deep Redshift Space as a Cosmological Probe*. The Astrophysical Journal, [615: 573–585](https://doi.org/10.1086/421111), 2004.
- [26] E. Hivon, K. Górski, C. Netterfield et al. *MASTER of the Cosmic Microwave Background Anisotropy Power Spectrum: A Fast Method for Statistical Analysis of Large and Complex Cosmic Microwave Background Data Sets*. The Astrophysical Journal, [567: 2-17](https://doi.org/10.1086/368016), 2002.
- [27] Adam Riess. *Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant*. The Astronomical Journal, [116: 1009-1038](https://doi.org/10.1086/301510), 1998 September.

- 
- [28] F. Sobreira, F. de Simoni, R. Rosenfeld et al. *Cosmological forecasts from photometric measurements of the angular correlation function*. [arXiv: 1109.4955](#), 2011.
- [29] The Supernova Legacy Survey. *Measurement of  $\Omega_M$ ,  $\Omega_\Lambda$  and  $w$  from the First Year Data Set*. [doi: 10.1051/0004-6361:20054185](#), 2006.
- [30] C. L. Bennett, D. Larson, J. L. Weiland. *Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Final Maps and Results*. The Astrophysical Journal, [doi: 10.1088/0067-0049/208/2/20](#), 2013.
- [31] Steven Weinberg. *Cosmology*. Oxford University Press, 2008.
- [32] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. John Wiley, 1972.