

Bosonização em Níveis de Landau

Harry Westfahl Jr. ✓

31 de agosto de 1998

Orientador: Prof. Dr. Amir O. Caldeira

Resumo

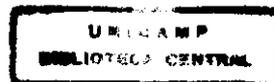
Neste trabalho propomos um novo método teórico de estudo dos sistemas eletrônicos correlacionados de baixa dimensionalidade, na presença de um campo magnético uniforme. Esta técnica trata da bosonização das excitações de baixa energia dos sistemas fermiônicos e foi inspirada em métodos anteriores de bosonização em uma ou duas dimensões sem campo magnético. No esquema proposto, a bosonização das excitações de baixa energia é elaborada a partir da descrição quântica natural das partículas carregadas na presença de um campo magnético uniforme, qual seja, a dos Níveis de Landau. No decorrer, mostraremos como este método pode ser aplicado a problemas recentes, em que as propriedades dos sistemas eletrônicos confinados em duas dimensões, obtidas experimentalmente, indicam a necessidade de novos métodos teóricos de investigação.

Este exemplar corresponde à redação final da tese de doutorado defendida pelo aluno Harry Westfahl e aprovada pela comissão julgadora

Em memória do meu grande
amigo e irmão Luciano Cabrine.

Campinas, 1 de setembro de
1998

1



FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFGW- UNICAMP

W526b Westfahl Jr., Harry
Bosonização em níveis de Landau / Harry Westfahl. –
Campinas, SP: [s.n.], 1998.

Orientador: Amir Ordacgi Caldeira.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual Campinas,
Instituto de Física "Gleb Wataghin".

1. * Bosonização. 2. Efeito quântico de Hall. 3. * Níveis
de Landau. I. Caldeira, Amir Ordacgi . II. Universidade
Estadual de Campinas. Instituto de Física "Gleb Wataghin".
III. Título.

UNIDADE	IFGW
N.º CHAMADA:	
	W526b
V.	Ex.
TOMBO BC/	35237
PROC.	395/98
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	30/09/98
N.º CPD	2 Mod 1 7594-8

1145/IF

Instituto de Física "Gleb Wataghin"

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Secretaria de Pós-Graduação

CAIXA POSTAL 6165

CEP 13083-970 – Campinas-SP - Brasil

Tel: (019) 788-5305

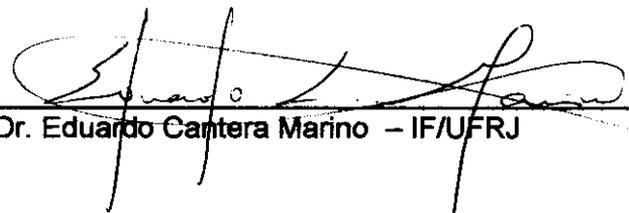
Fax: (019) 289-2424

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE DOUTORADO DE HARRY WESTFAHL JÚNIOR APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN", DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 26/08/98.

COMISSÃO JULGADORA:



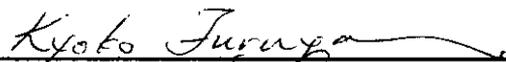
Prof. Dr. Amir Ordacgi Caldeira (Orientador do Candidato) -
IFGW/UNICAMP



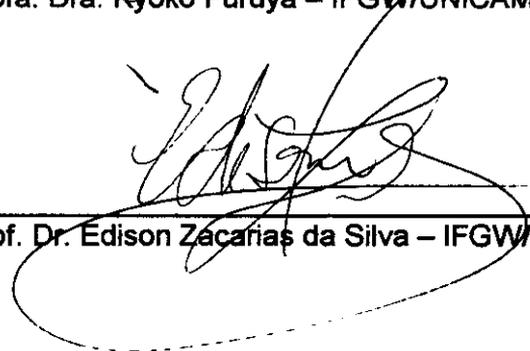
Prof. Dr. Eduardo Camtera Marino – IF/UFRJ



Prof. Dr. Nelson Studart Filho – IF/UFSCar



Profa. Dra. Kyoko Furuya – IFGW/UNICAMP



Prof. Dr. Edison Zacarias da Silva – IFGW/UNICAMP

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço ao meu orientador e amigo Prof. Amir O. Caldeira pela sua paciência, dedicação, amizade e orientação durante os anos em que trabalhamos juntos. Sou também imensamente grato a toda minha família, que sempre me deu incentivo e suporte em todos os passos da minha vida e, em especial, à minha esposa Daniela por sua compreensão e apoio e pela leitura crítica da versão preliminar deste trabalho. Finalmente, expresso gratidão a todos os meus amigos e amigas envolvidos direta ou indiretamente no desenvolvimento desta tese. Em especial, ao Prof. Eduardo Miranda pelas discussões inspiradoras e de valor inestimável para o meu aprendizado durante o último ano, a Eduardo Gueron pela ajuda computacional e a Maria Ignez Mokarzel que, como secretária da pós-graduação, sempre fez de tudo para tornar a minha vida e de meus colegas o mais simples possível.

Ao longo do desenvolvimento deste trabalho tive o prazer de ter como colaboradores os Professores Eduardo Miranda, Antônio Hélio de Castro Neto e Dionys Baeriswyl.

Este projeto de Doutorado foi financiado, durante os 37 primeiros meses, pelo CNPq e nos seus últimos 17 meses pela FAPESP.

Bosonização em Níveis de Landau

Harry Westfahl Júnior

Sumário

Capítulo 1. Introdução	5
1.1. Bosonização em 1D	6
1.2. Bosonização em $D>1$	17
Capítulo 2. Bosonização 2D em um campo magnético	31
2.1. Fermions independentes em níveis de Landau	32
2.2. As excitações elementares - Bosonização	35
2.3. Propriedades Fermiônicas	41
2.4. O problema do “X-Ray edge” no campo magnético	45
Capítulo 3. Sistemas interagentes no campo magnético fraco: elétrons normais	55
3.1. Bosonização dos magneto-excitons	56
3.2. O campo vetorial bosônico	61
3.3. Propriedades fermiônicas	62
3.4. Interações do tipo carga-carga	65
Capítulo 4. Sistemas interagentes no campo magnético fraco: fermions compostos	71
4.1. Transformação de Chern-Simons	73
4.2. Flutuações de gauge e bosonização	76
4.3. Modos normais dos fermions de Chern-Simons	79
Conclusões e Direções Futuras	83
Apêndice A. Partículas carregadas no campo magnético	85
Apêndice B. Estados de Fase	87
Apêndice C. Teorema de Kohn	89
Apêndice D. O magneto-exciton de Kallin e Halperin	91
Apêndice E. O operador densidade de corrente	95
Apêndice F. Resposta linear e Funções de polarização	97
Referências Bibliográficas	101

CAPÍTULO 1

Introdução

Pode-se dizer que a maior parte do conhecimento acumulado na física da matéria condensada, ao longo das últimas décadas, baseia-se em modelos simplificados de sistemas formados por muitas partículas independentes.

Um dos exemplos mais marcantes desta afirmação é o do modelo de *Drude*[1] do gás de elétrons independentes para a condução elétrica e térmica em metais, reformulado mais de vinte anos depois por *Sommerfeld*[2], já no contexto da mecânica quântica.

No entanto, por muito anos permaneceu uma intrigante dúvida: por que um modelo de partículas independentes descreve tão bem um metal, se este é composto por um número enorme de partículas carregadas, os elétrons, que sofrem constantemente a ação da repulsão Coulombiana? Este enigma só foi resolvido no fim dos anos 50, com teoria de *Landau*[3, 4] do líquido de Fermi, segundo a qual, supondo-se a existência de entes chamados *quasi-partículas*, as propriedades de um sistema de elétrons (ou fermions, de forma mais geral) interagentes são qualitativamente similares às de um sistema de fermions independentes.

Não são poucos, porém, os exemplos de sistemas, tais como os materiais magnéticos e os supercondutores, em que um modelo de partículas independentes é completamente inadequado. Nestes casos, faz-se necessária uma abordagem que incorpore, pelo menos de forma semi-clássica (desprezando flutuações quânticas), as modificações no estado fundamental do sistema causadas pelas correlações. De fato, a compreensão do comportamento destes materiais, usualmente, passa por uma formulação de campo médio, fundamentada em um estado quântico de referência e coerente com as propriedades termodinâmicas do parâmetro de ordem do sistema.

Mesmo assim, há certas situações em que, nem uma abordagem do tipo Líquido de Fermi nem mesmo uma formulação de campo médio conseguem prever o comportamento de um sistema de muitas partículas interagentes. Este é o caso dos *sistemas de elétrons interagentes de dimensionalidade reduzida*, encontrados em alguns condutores orgânicos quasi-1D tais como TTF-TCNQ, (TMTSF)₂X e (TMTTF)₂X[5], nos estados de borda (1D) de sistemas que apresentam o efeito Hall Quântico Fracionário[7], nos planos de *CuO₂* em cerâmicas supercondutoras[8] ou em gases de elétrons quasi-2D formados na interface de heteroestruturas semicondutoras[9]. Em tais situações, é fundamental que o método teórico a ser adotado se aprofunde nos efeitos resultantes das correlações, e que, ao mesmo tempo, possa avaliar o efeito das flutuações quânticas desprezadas em aproximações de campo médio.



FIGURA 1.1.1. Rede Unidimensional

Neste contexto, então, surge a *Bosonização* de campos fermiônicos: uma técnica não-perturbativa que tem se tornado cada vez mais importante para o estudo das propriedades dos sistemas fermiônicos interagentes. A seguir, faremos uma breve introdução a algumas das principais abordagens na bosonização de sistemas fermiônicos e, em seguida, exporemos a nossa contribuição nessa área. É importante salientar que em tudo o que segue estaremos tratando, por simplicidade, de **fermions sem spin**.

1.1. Bosonização em 1D

As investigações pioneiras desta técnica foram feitas por *Bloch*[10] em ondas de som de sistemas eletrônicos unidimensionais, sendo, posteriormente, estendidas e fundamentadas intuitivamente por *Tomonaga*[11].

Inicialmente, o que mais chamou a atenção nesta abordagem foi a simplicidade conceitual e operacional que resultou da descrição de todas as excitações de um sistema fermiônico através de uma linguagem bosônica[12, 13]. Atualmente, a bosonização de campos fermiônicos unidimensionais é um campo bastante maduro[14, 5, 6] tendo um impacto ainda mais profundo na teoria dos sistemas correlacionados em 1D, onde estabeleceu um novo ponto fixo hoje conhecido como *Líquido de Luttinger* [14].

A seguir, faremos uma breve introdução ao método de bosonização em uma dimensão, ressaltando os seus principais fundamentos e suas maiores conquistas.

1.1.1. Elétrons interagentes em 1D. Começemos com o modelo mais simples de fermions interagentes sem spin em uma rede unidimensional, como a da figura 1.1.1, cuja Hamiltoniana é dada por:

$$(1.1.1) \quad H = \sum_{\langle i,j \rangle} -\frac{t}{2} \psi^\dagger(i) \psi(j) + V \hat{n}(i) \hat{n}(j).$$

Na Hamiltoniana acima, $\psi^\dagger(i)$ é o operador que cria um fermion no sítio i , $\hat{n}(i) = \psi^\dagger(i) \psi(i)$ é o operador número de fermions no sítio i e a soma $\sum_{\langle i,j \rangle}$ é sobre todos os sítios i vizinhos de j .

A situação mais interessante acontece quando o número total de fermions é igual à metade do número de sítios. Neste caso, quando $V > 0$ e $|V/t| = \infty$, o estado fundamental assume uma configuração em que os fermions ocupam sítios intercalados de forma a minimizar a energia de repulsão. Neste estado, conhecido por onda de densidade de carga, ou CDW, o sistema se torna um isolante, já que existe um gap da ordem de V entre o estado fundamental e os estados excitados que podem

transportar corrente. Este tipo de transição Metal-Isolante também é conhecida por transição de Mott-Hubbard[5, 6]

A princípio, poderíamos pensar que o mesmo tipo de argumento se aplicaria ao caso em que V/t é finito, ou seja, partindo de uma abordagem de campo médio, poderíamos supor que o estado fundamental, mesmo no caso em que V/t é finito, possui uma ordem de longo alcance do tipo CDW:

$$\langle \hat{n}(j) \rangle = \frac{1}{2} + (-1)^j \frac{\Delta}{2}.$$

Esta hipótese leva a uma equação auto-consistente, peculiar a toda teoria de campo médio, que define o valor do parâmetro de ordem Δ :

$$1 - \frac{V}{t} \chi(\pi, \Delta) = 0,$$

onde $\chi(q, \omega)$ é a susceptibilidade elétrica do sistema.

Acontece que, devido à propriedade de “nesting”¹, a susceptibilidade tem uma divergência logarítmica em Δ , o que leva diretamente ao resultado

$$\Delta \propto e^{-\pi t/V}.$$

Ou seja, nesta aproximação, o estado fundamental do sistema é instável à formação de uma CDW para qualquer valor da constante de acoplamento V . É importante ressaltar que se $V < 0$ há também uma instabilidade com relação à formação de um estado supercondutor. Atualmente, estes dois fenômenos são conhecidos por instabilidade de *Peierls-Cooper*.

Todavia, estas transições de fase, na realidade, não se verificam desta forma, havendo, de fato, um valor crítico para a constante de acoplamento. No caso, são as flutuações quânticas, desprezadas na formulação de campo médio, que modificam este cenário.

Então, esse dilema só pode ser resolvido através de uma abordagem diferente da de campo médio. Dentre as várias técnicas de abordagem do problema de elétrons correlacionados em 1D (como por exemplo, a do “Ansatz de Bethe”, e a das identidades de *Ward*), descreveremos agora a de bosonização, que é o tema central desta tese.

1.1.2. Modelo de Tomonaga-Luttinger. A descrição das excitações neutras de um sistema fermiônico passa, inicialmente, pela linearização da relação de dispersão dos fermions numa região próxima à superfície de Fermi.

Como exemplo, temos o primeiro termo da Hamiltoniana (1.1.1), que descreve um conjunto de fermions não interagentes (com parâmetro de “hopping” t) em uma rede 1D:

$$H_0 = \sum_{\langle i,j \rangle} -t \psi(i)^\dagger \psi(j).$$

¹superposição de duas partes da superfície de Fermi através de uma translação de momentum $q = \pi$

Esta Hamiltoniana pode ser facilmente diagonalizada, através de uma transformação de Fourier para o espaço de momenta, do tipo

$$\psi(j) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{ik \cdot j} a_k,$$

ficando como

$$H_0 = \sum_k \epsilon_k a_k^\dagger a_k,$$

onde $\epsilon_k = -t \cos(k)$ e $k = \frac{2\pi}{N}n$, ($n \in Z$).

No estado fundamental, todos os estados de energia com momentum $|k| \leq k_F$ (onde $k_F = 2\pi \frac{N_e}{N}$, N_e =número de fermions e N =número de sítios) estão ocupados. Como nos interessam apenas as propriedades assintóticas (baixas temperaturas, grandes comprimentos de onda) deste sistema, podemos adotar um modelo muito mais simples. Nele, nos restringimos às excitações de momentum próximas (dentro de um “cutoff” λ) aos pontos de Fermi $\pm k_F$, onde a relação de dispersão pode ser linearizada da forma $\epsilon_{\pm k_F+q} \simeq \pm v_F + q$ ($\hbar = 1$). Daí, a parte relevante da Hamiltoniana é dada por

$$(1.1.2) \quad H_0 = v_F \sum_{|q| < \lambda} \left\{ q c_{+,q}^\dagger c_{+,q} - q c_{-,q}^\dagger c_{-,q} \right\},$$

onde definimos

$$c_{\pm,q} = a_{\pm k_F+q}.$$

Fica claro, na Hamiltoniana acima, que tal aproximação introduz uma lei de conservação de chiralidade dos fermions, ou seja, além de haver conservação de momentum q , cada fermion conserva o sentido do seu movimento (\pm , direita/esquerda).

De forma equivalente, o operador fermiônico, já numa versão contínua ($N \rightarrow \infty$), fica dominado apenas pelas componentes de Fourier próximas aos pontos de Fermi:

$$(1.1.3) \quad \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{|q| < \lambda} e^{i(k_F+q)x} a_{k_F+q} + e^{i(-k_F+q)x} a_{-k_F+q}$$

$$(1.1.4) \quad = e^{ik_F x} \psi_+(x) + e^{-ik_F x} \psi_-(x),$$

onde

$$\psi_\pm(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{|q| < \lambda} e^{iqx} c_{\pm,q}.$$

Agora, com o intuito de tornar este modelo exatamente solúvel, podemos fazer $\lambda \rightarrow \infty$. Isto introduz estados de energia negativa, que deverão ser mantidos completamente ocupados, pois não fazem parte da física do sistema real.

Na realidade, a Hamiltoniana resultante da inclusão de estados de energia negativa é idêntica (fazendo $c \equiv v_F$) à Hamiltoniana de um sistema de fermions de Dirac

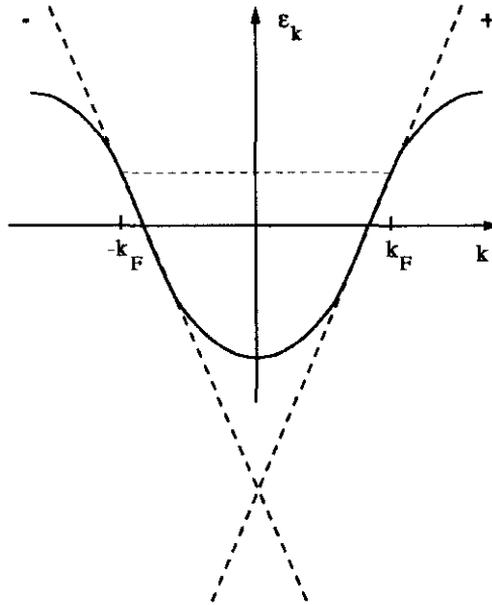


FIGURA 1.1.2. Linearização da relação de dispersão

sem massa em 1D, onde as componentes do campo de Dirac (duas para fermions em 1D) são exatamente as partes $\psi_+(x)$ e $\psi_-(x)$ do operador fermiônico. Neste caso, sim, os estados de energia negativa fazem sentido. Contudo, o problema que estamos interessados não envolve fermions relativísticos e muito menos estados de energia negativa.

1.1.3. Bosons de Tomonaga-Luttinger. As excitações neutras do modelo acima consistem em um par elétron-buraco na vizinhança dos pontos de Fermi, onde, para um canal $+$, por exemplo, o buraco pode estar em um nível de $k < k_F$ e o elétron num nível de $k + q > k_F$. A energia desta excitação, na aproximação de linearização, é simplesmente $\omega_q = qv_F$. Assim, os operadores

$$(1.1.5) \quad \rho_{\pm, q} = \sum_k c_{\pm, k+q}^\dagger c_{\pm, k},$$

que dão as flutuações de densidade de carga nos canais \pm , quando aplicados ao estado fundamental, criam estados excitados de energia $\omega_q = qv_F$.

Tal afirmação pode ser rigorosamente provada com a ajuda dos 2 seguintes resultados:

⇒ Os operadores (1.1.5) obedecem a relações de comutação bosônicas

$$(1.1.6) \quad [\rho_{\pm, -q}, \rho_{\pm, q'}] = \pm \delta_{q, q'} \frac{qL}{2\pi}$$

$$(1.1.7) \quad [\rho_{\pm, -q}, \rho_{\mp, q'}] = 0$$

onde L é o comprimento do sistema 1D.

⇨ Baseando-se nas relações de comutação destes operadores com a Hamiltoniana (1.1.2), pode-se inferir que

$$(1.1.8) \quad H_0 = \frac{2\pi v_F}{L} \sum_{q \geq 0} [\rho_{+,q} \rho_{+,-q} + \rho_{-,-q} \rho_{-,q}]$$

Ou seja, toda a física das flutuações de baixa energia e longo comprimento de onda pode ser descrita em termos de modos bosônicos. Estes, por sua vez, podem ser interpretados como os fonons de uma teoria de campo escalar unidimensional, como veremos a seguir.

1.1.4. Fermions como excitações topológicas. De acordo com o que vimos, fica evidente que a dinâmica do campo que descreve as propriedades assintóticas do gás de fermions em 1D é a de um campo escalar harmônico em 1D (corda vibrante). De fato, é possível reescrever a Hamiltoniana (1.1.8) como

$$H_0 = \frac{1}{2\pi} \int dx \left[\left(\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{v_f} \left(\frac{\partial \Phi(x)}{\partial t} \right)^2 \right],$$

onde $\Phi(x)$ é o campo de deslocamento “tipo fonon” da corda, relacionado com a “flutuação suave” de densidade de carga através da definição

$$\delta \rho(x) = -\frac{1}{\pi} \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x},$$

e $\frac{1}{\pi v_f} \frac{\partial \Phi(x)}{\partial t} = \Pi(x)$ é o momentum canonicamente conjugado a $\Phi(x)$, que se relaciona com as “flutuações suaves” de corrente através da definição

$$j(x) = v_f \Pi(x).$$

Ou seja, a corrente fermiônica generalizada $J^\mu = (\delta \rho v_f, j)$ pode ser identificada como uma “corrente topológica”[15] do campo Φ :

$$J^\mu = -\frac{v_f}{\pi} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi,$$

onde $\partial_\nu = (\frac{\partial}{v_f \partial t}, \frac{\partial}{\partial x})$. É fácil ver, pela propriedade de antissimetria do tensor de *Levi-Civita* que, como era de se esperar para uma corrente de matéria, esta corrente é identicamente conservada.

Dizemos que $\delta \rho(x)$ e $j(x)$ representam “flutuações suaves” de densidade de carga e de corrente, porque eles contém apenas as componentes de Fourier de longos comprimentos de onda. Mais especificamente, eles são superposições dos operadores bosônicos de flutuação de densidade:

$$\begin{aligned} \delta \rho(x) &\equiv \frac{1}{L} \sum_q e^{iqx} [\rho_{+,q} + \rho_{-,q}] \\ j(x) &\equiv \frac{v_f}{L} \sum_q e^{iqx} [\rho_{+,q} - \rho_{-,q}] \end{aligned}$$

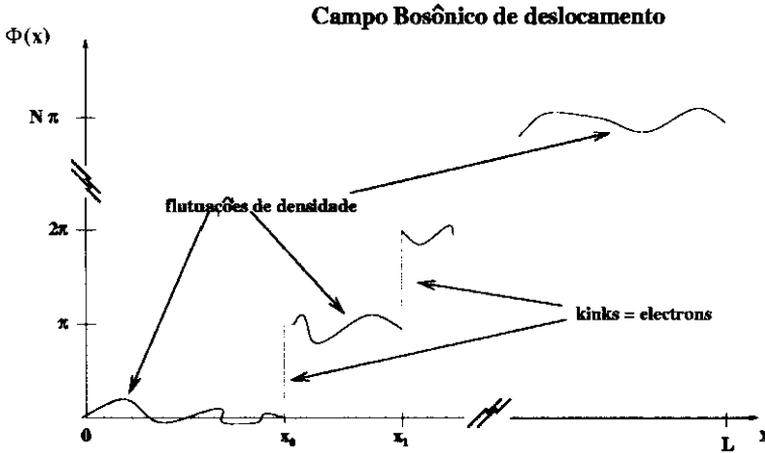


FIGURA 1.1.3. Kinks e flutuações de densidade no campo bosônico.

Estas definições, além de estabelecerem a conexão completa entre os campos bosônicos escalares e as propriedades fermiônicas, são o ponto de partida para a definição dos campos $\Phi(x)$ e $\Pi(x)$ em termos dos operadores bosônicos.

Mas, o maior poder da bosonização reside no fato de que, não apenas as flutuações de densidade (excitações neutras) podem ser descritas através de variáveis bosônicas, mas também as excitações carregadas (adição ou subtração de partículas ao sistema). Isto se resume na representação do operador fermiônico em termos dos campos $\Phi(x)$ e $\Pi(x)$:

⇒ Tendo em vista que a adição de um fermion no ponto x_0 da rede acarreta uma flutuação local de carga do tipo $\delta\rho(x) \sim \delta(x - x_0)$, esta adição pode ser interpretada como a criação de um “kink” de altura π no campo $\Phi(x)$ (figura 1.1.3), representado pela função degrau $\pi\theta(x - x_0)$ (lembrando que $\delta(x - x_0) = \frac{\partial\theta(x - x_0)}{\partial x}$). Este “kink”(excitação topológica do campo $\Phi(x)$), por sua vez, é produzido pelo operador de deslocamento $\exp(-i\pi \int^{x_0} \Pi(x) dx)$.

Finalmente, combinando este operador de translação com um fator $\exp(\pm i\Phi(x))$, que dá a estatística fermiônica correta, (uma vez que muda de sinal cada vez que há um fermion na posição x), teremos a representação bosônica do operador fermiônico, conhecida como forma de *Mattis-Mandelstam*.²

$$(1.1.9) \quad \psi_{\pm}(x) = \frac{U_{\pm}}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{i\Theta_{\pm}(x)},$$

onde

$$\Theta_{\pm}(x) = \pi \int^x \Pi(x') dx' \pm \Phi(x),$$

²Historicamente esta fórmula foi derivada pela primeira vez por *Mattis* em 1963. No entanto foi *Mandelstam* quem 3 anos depois interpretou o fermion como um soliton de um campo bosônico.

U_{\pm} são operadores unitários que aumentam a carga $N_{\pm} =: \rho_{\pm,0}$: do sistema³ (observa-se que os operadores bosônicos, por si só, não podem fazer isso, pois comutam com N_{\pm}) e garantem a anticomutação entre ψ_{-} e ψ_{+} , e α é um “cutoff” de curtas distâncias ($\alpha \sim 1/\lambda$).

Um fato notável nesta representação é que os operadores $\Theta_{\pm}(x)$ aparecem, ao mesmo tempo, como campos de deslocamento dos canais \pm separadamente,

$$(1.1.10) \quad \rho_{\pm}(x) = \mp \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Theta_{\pm}(x)}{\partial x},$$

e como geradores de “kinks”, pois estão incluídos no expoente do operador fermiônico. Esta propriedade serve de base para a construção da forma de *Mattis-Mandelstam* na bosonização da superfície de Fermi em dimensões maiores que 1.

1.1.5. Propriedades do sistema interagente. A grande vantagem desta descrição completa do sistema fermiônico em termos de graus de liberdade bosônicos é que agora tudo está perfeitamente “pavimentado” para incluirmos a interação entre os fermions. Ou seja, podemos incluir um termo de interação na Hamiltoniana do tipo

$$H_{int} = \frac{1}{2} \sum_{k,q,p,s=\pm} V(q) a_{k-q}^{\dagger} a_{p+q}^{\dagger} a_p a_k.$$

Seguindo as mesmas aproximações envolvidas nas seções anteriores, este tipo de Hamiltoniana pode ser reescrita, de forma genérica, como:

$$H_{int} = \frac{1}{2} \sum_{q,s=\pm} [g_4(q) \rho_{s,q} \rho_{s,-q} + g_2(q) \rho_{s,q} \rho_{-s,-q}] + H_{umklapp},$$

onde

$$H_{umklapp} = \frac{1}{2} \sum_{k,q,p,s=\pm} g_3(q) c_{s,k-q}^{\dagger} c_{s,p+q}^{\dagger} c_{-s,p} c_{-s,k}$$

e as funções $g_i(q)$ são transformadas de Fourier do potencial de interação, separadas em 3 diferentes tipos de processos de espalhamento representados na figura (1.1.4).

Os processos do tipo $g_2(q)$ e $g_4(q)$ envolvem “espalhamentos frontais” entre os fermions e conservam a carga de cada canal. Já os processos $g_3(q) \sim V(2k_F + q)$ de “umklapp” vêm do espalhamento entre partículas que se movem num mesmo canal e são juntamente espalhadas para outro canal. Tais espalhamentos envolvem uma transferência de momentum da ordem de $2k_F$ e não conservam a carga de cada canal. No entanto, eles só ocorrem quando o momentum é conservado através do momentum ($\pm 2\pi$) da rede recíproca. Mais ainda, mesmo que haja o suporte na rede, estes processos só são relevantes quando $k_F = \pi$ (banda semi-cheia), pois, caso contrário, eles ficam enfraquecidos pelo princípio de exclusão de Pauli.

³Utilizamos a notação padrão de ordenamento normal : : $A := A - \langle A \rangle$

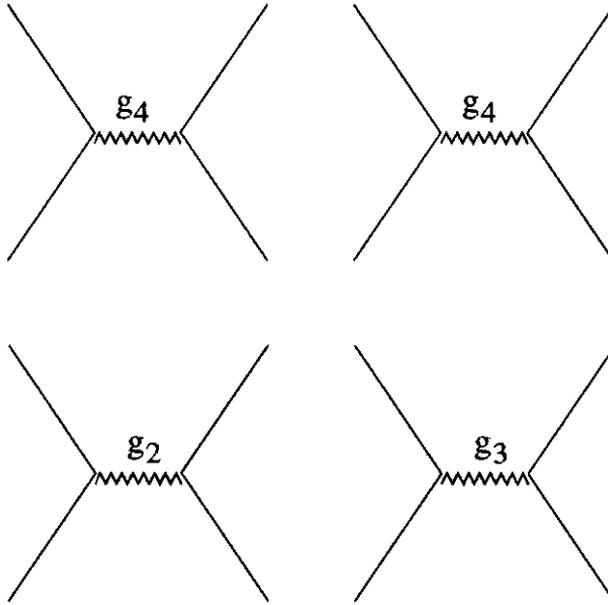


FIGURA 1.1.4. Processos de espalhamento

Além do mais, é esperado que as propriedades assintóticas do sistema sejam dominadas pelos estados na vizinhança da superfície de Fermi. Desta forma, é bastante razoável simplificarmos o problema fazendo $g_i(q) \approx g_i(0) \equiv g_i$.

Assim, uma Hamiltoniana fermiônica, que contenha os três tipos de processos descritos, pode ser expressa numa representação bosônica da forma:

$$H = H_0 + H_{int} = \int dx \left[\frac{\pi u K}{2} \Pi(x)^2 + \frac{u}{2\pi K} \left(\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} \right)^2 + \frac{2g_3}{(2\pi\alpha)^2} \cos(2\Phi(x)) \right],$$

onde

$$K = \left[\frac{2\pi v_F + g_4 - g_2}{2\pi v_F + g_4 + g_2} \right]^{1/2},$$

$$u = \left[\left(v_F + \frac{g_4}{2\pi} \right)^2 - \left(\frac{g_2}{2\pi} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Redefinindo os campos $\Phi(x)$ e $\Pi(x)$ de acordo com a transformação canônica

$$\tilde{\Phi}(x) = \frac{\Phi(x)}{\sqrt{K}}$$

$$\tilde{\Pi}(x) = \sqrt{K}\Pi(x),$$

podemos escrever a Hamiltoniana interagente numa forma canônica :

$$(1.1.11) \quad H = \int dx \left[\frac{\pi u}{2} \tilde{\Pi}(x)^2 + \frac{u}{2\pi} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}(x)}{\partial x} \right)^2 + \frac{2g_3}{(2\pi\alpha)^2} \cos \left(2\sqrt{K} \tilde{\Phi}(x) \right) \right].$$

No caso mais simples, em que $g_3 = 0$, vemos que o efeito da interação, extremamente complicado de se estimar na representação fermiônica original, apenas altera a “rigidez da corda” K e a velocidade u de propagação dos “fonons”. Note-se que no caso não interagente $K = 1$ e $u = v_F$ mas, no caso interagente, quando a interação é repulsiva $K < 1$ e quando é atrativa $K > 1$.

Assim, as propriedades físicas do sistema ficam completamente determinadas pelo parâmetro K , que mede, basicamente, a intensidade de interação entre os fermions. De um lado, temos as propriedades termodinâmicas (calor específico, compressibilidade, condutividade) que são apenas renormalizadas com relação às propriedades de um sistema não interagente, à semelhança do que acontece em um líquido de Fermi. De outro lado, temos as propriedades de um corpo, e é aí que o sistema interagente difere drasticamente de um líquido de Fermi. Isto pode ser ilustrado pela função de ocupação dos estados de momentum na vizinhança da superfície de Fermi

$$n_{k_F+q} \approx n_{k_F} - A \cdot \text{sign}(q) |q|^{(K+K^{-1}-2)/4},$$

e pela densidade de estados de um corpo

$$N(E_F + \omega) \approx |\omega|^{(K+K^{-1}-2)/4},$$

ambos obtidos a partir da função de Green de um corpo, que pode ser calculada exatamente com a bosonização.

Como se pode ver na ilustração (1.1.5), as funções de distribuição do sistema interagente em 1D têm um comportamento completamente diferente do esperado para um líquido de Fermi unidimensional. Basicamente, as funções de distribuição $N(E_F + \omega)$ e n_{k_F+q} , que seguem uma lei de potência, não indicam a existência de quasi-partículas fermiônicas (n_{k_F+q} descontínua para $q \rightarrow 0$ e $N(E_F + \omega)$ finita para $\omega \rightarrow 0$). De fato, a hipótese de existência de quasi-partículas fermiônicas, que é a base da teoria de Landau do líquido de Fermi, não se verifica para o gás de fermions interagentes em 1D. A esta classe de sistemas interagentes dá-se o nome de *Líquido de Luttinger*.

O parâmetro K , que determina o comportamento das funções de correlação de um corpo, também determina o comportamento das outras funções de correlação, no caso a CDW e a supercondutora. Num líquido de Luttinger, estas funções de correlação também se comportam como leis de potência, o que indica que o sistema tem um comportamento crítico, jamais apresentando ordenamento algum.

Por fim, resta a inclusão do termo g_3 de “umklapp”. A inclusão deste termo torna o modelo insolúvel, a não ser para um valor específico $K = 1$, em que o problema pode ser “refermionizado”. No entanto, a simplicidade do modelo ainda nos permite extrair importantes informações a respeito do comportamento assintótico do sistema.

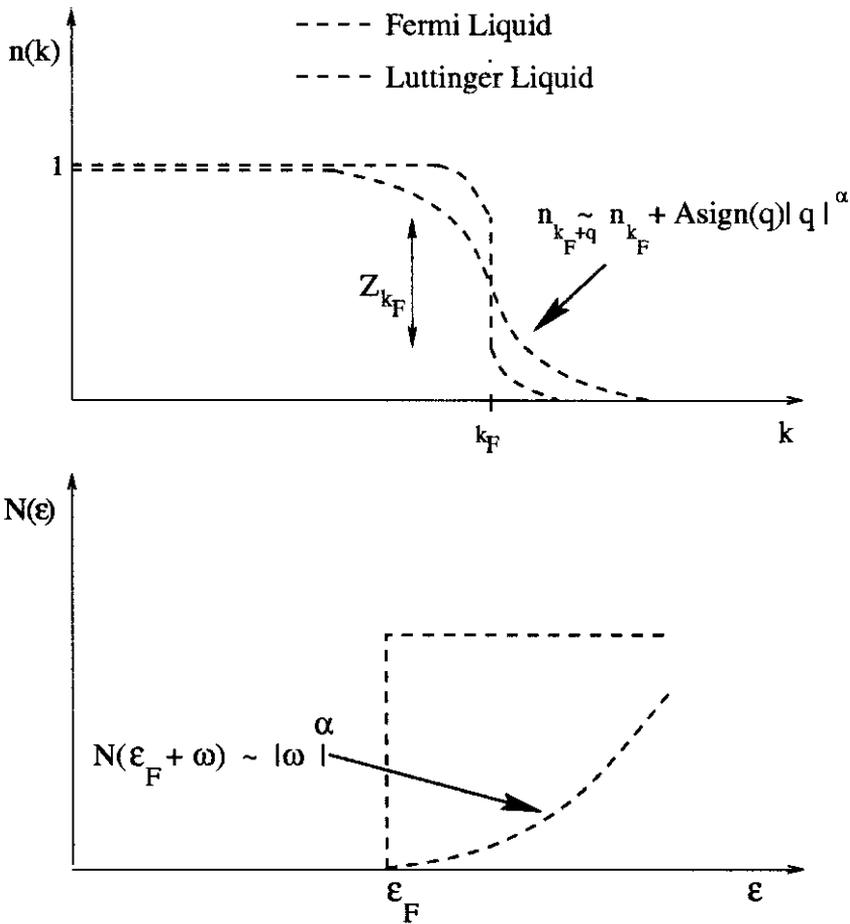


FIGURA 1.1.5. Propriedades de um corpo no Líquido de Luttinger

Vejam: para $g_3 > 0$, a Hamiltoniana bosônica é equivalente à de uma corda no topo da ondulação de uma calha cossenoidal. Nestas condições, a dinâmica das flutuações de longo comprimento de onda não é afetada pelo termo em g_3 e, como pode ser provado em uma abordagem de grupo de renormalização, este termo se torna irrelevante.

Por outro lado, quando $g_3 < 0$, o campo $\Phi(x)$ oscila em torno de um mínimo do potencial (1.1.7) e, eventualmente, pode ficar confinado lá, tornando-se um campo massivo. Em outras palavras, se $g_3 < 0$, há a possibilidade de aparecimento de um “gap” nas excitações bosônicas de partícula-buraco.

Na realidade, isto acontecerá se as flutuações quânticas no campo $\Phi(x)$ não forem fortes o suficiente para delocalizá-lo em outros mínimos da “calha cossenoidal”. Tal delocalização ocorrerá quando a constante de rigidez K , que controla ao mesmo tempo a intensidade das flutuações quânticas e a largura da barreira de potencial, for suficiente para que o campo $\Phi(x)$ possa vencer a barreira (Figura 1.1.7) e ocupar vários mínimos, criando múltiplos pares “kink-anti-kink”.⁴

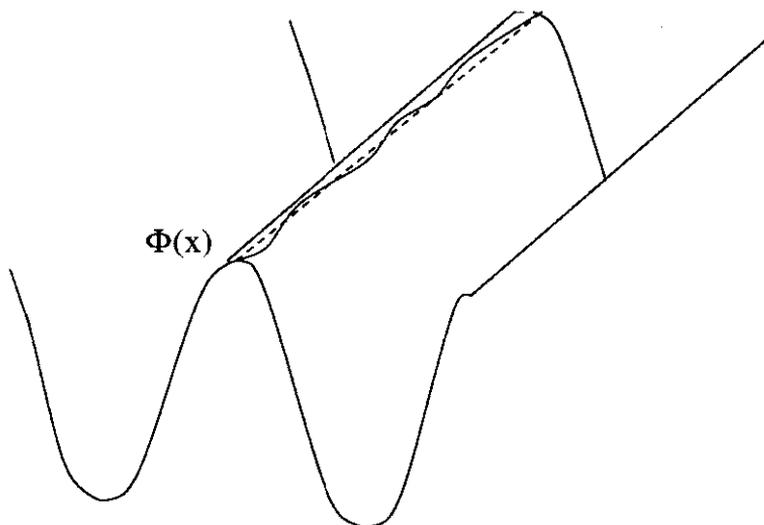


FIGURA 1.1.6. Corda na calha cossenoidal

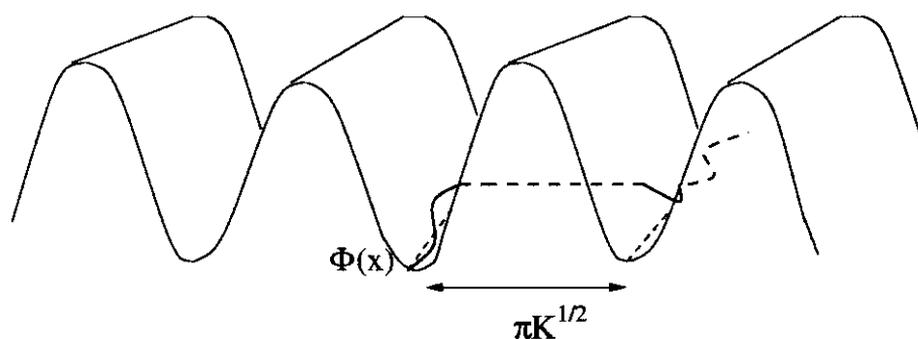


FIGURA 1.1.7. Corda tunelando entre mínimos do potencial

Voltando ao problema inicial, podemos ver que [16] o limite contínuo de (1.1.1) possui uma interação local com coeficientes $g_2 = g_4 = -g_3 = 2V$ e $v_F = t$. Consequentemente, os parâmetros de Luttinger neste problema são dados por $K = (1 + \frac{2V}{\pi t})^{-1/2}$ e $u = \frac{t}{K}$.

Aplicando a este caso particular os resultados gerais obtidos, chegamos à conclusão de que, ao contrário do que foi previsto na aproximação de campo médio, a bosonização mostra que o sistema não necessariamente terá um gap de excitação. Na verdade, isto só ocorrerá se o acoplamento g_3 for relevante, sendo que, uma análise mais profunda, fundamentada em argumentos de grupo de renormalização, mostra que g_3 se torna relevante quando $K^2 \leq 1/2$, ou melhor, quando $\frac{V}{t} \geq \frac{\pi}{2}$.⁵

⁴Se lembrarmos que cada "kink" é na verdade um fermion, vemos que as tais flutuações quânticas de "kink-anti-kink" da corda são na verdade as flutuações quânticas desprezadas na aproximação de campo médio que correspondem a criação de pares partícula-buraco através do gap!

⁵O resultado obtido com a diagonalização do modelo discretizado via ansatz de Bethe[5] é semelhante: $\frac{V}{t} \geq 1$

Isto então exemplifica uma das grandes conquistas da bosonização no estudo dos sistemas de fermions interagentes sem spin em 1D.

A inclusão de spin $1/2$ neste modelo é feita de forma trivial, pois os graus de liberdade de carga e spin permanecem completamente separáveis. Mais ainda, tal separação de carga-spin é outra característica de um comportamento de não-líquido de Fermi prevista pelo método de Bosonização unidimensional.

Passaremos agora a uma breve discussão acerca das generalizações do método de bosonização para dimensões maiores que um.

1.2. Bosonização em $D > 1$

A primeira tentativa de se estender as idéias de bosonização para dimensões maiores foi introduzida por *Luther*[17]. Neste trabalho seminal, *Luther* propõe uma forma de se bosonizar um sistema de fermions relativísticos em 2D como uma generalização da bosonização em 1D.

Como vimos, em 1D as propriedades de baixa energia dos fermions são obtidas a partir da dinâmica de dois tipos completamente distintos de fermions - um para cada direção de propagação em uma dimensão. O que *Luther* propôs então foi a generalização desta idéia, considerando que os graus de liberdade fermiônicos em 2D são também separáveis em canais dados por direções de propagação, neste caso um canal para cada ângulo (entre $-\pi$ e π) de orientação da velocidade.

Este método, contudo, não teve tanto sucesso quando aplicado em problemas de fermions interagentes em 2D. Ocorre que em 1D apenas espalhamentos envolvendo transferências de momentum igual a 2π geram processos de “umklapp”. Já no esquema proposto por *Luther* para 2D, o menor valor de transferência de momentum transversal à superfície de Fermi pode gerar processos que transferem carga entre canais vizinhos, dificultando a sua operacionalidade.

No entanto, deste trabalho pioneiro desenvolveram-se duas frentes distintas buscando uma generalização mais completa da bosonização em 2D (ou 3D): uma dentro da teoria quântica de campos e outra dentro da física da matéria condensada.

A primeira, desenvolvida por *Marino*[18] para um problema de fermions relativísticos sem massa, utilizando ainda a idéia de interpretar o fermion como excitação topológica de um campo bosônico, que, no caso 2D, deveria ser vetorial.

Já a segunda, baseada nas idéias de *Haldane* [23], e desenvolvida quase simultaneamente por *Houghton e Marston* e por *Castro Neto e Fradkin*[24, 25, 26, 27], propôs que, diferentemente do esquema proposto por *Luther*, os “canais” de divisão do problema fermiônico em 2D deveriam conter também graus de liberdade de momentum transversais dentro de uma largura Λ em torno das direções de propagação.

A seguir passaremos a uma breve discussão dos fundamentos destas duas propostas para, após, descrevermos a nossa contribuição neste campo.

1.2.1. Bosonização Vetorial em 2D. Seria natural pensarmos que a generalização da bosonização para 2D partiria de uma representação vetorial dos campos bosônicos, para que os fermions fossem excitações topológicas deste campo vetorial, mais especificamente, *vórtices*. Uma das primeiras abordagens sob este ponto de

vista, foi no trabalho de *Marino* [18]. Neste trabalho, foi demonstrado que, em 2D, a teoria de campo bosônica correspondente a um sistema de fermions relativísticos não massivos é do tipo *Maxwell-Chern-Simons não local* [19]. Mais ainda, mostrou-se que as excitações topológicas (vórtices) desta teoria são precisamente os tais fermions relativísticos não massivos.

Para tratar os operadores de criação de excitações topológicas em uma teoria de campo em 2D, *Marino* fundamentou-se no conceito de dualidade ordem-desordem, introduzido por *Kadanov e Ceva*[20] na física estatística, generalizado por *Fradkin e Susskind*[21] para solitons em sistemas de spin e generalizado para sistemas contínuos por *Marino e Swieca*[22].

Dualidade Ordem-Desordem em 1D. Começemos mostrando como esta estrutura de ordem-desordem aparece na bosonização 1D: em uma teoria quântica de campos bosônicos, como a que acabamos de ver na bosonização unidimensional, pode-se dizer que os operadores de criação de solitons (μ) desempenham um papel de *parâmetro de desordem*.

Isto porque, a sua regra de comutação (dual) com os operadores σ , cujo valor médio é o parâmetro de ordem do sistema, garante, dentre outras coisas, que $\langle \sigma \rangle \langle \mu \rangle = 0$. Ou seja, quando o sistema está numa *fase ordenada* com $\langle \sigma \rangle \neq 0$, necessariamente $\langle \mu \rangle = 0$. Por outro lado, quando $\langle \mu \rangle \neq 0$ (*fase desordenada*), deve-se ter $\langle \sigma \rangle = 0$ e não há quebra de simetria resultante do ordenamento.

Atualmente, sabe-se que esta estrutura de ordem-desordem é a base fundamental por trás do método de bosonização. Por exemplo, podemos ver que a Lagrangeana

$$\mathcal{L}[\Phi(x)] = \int dx \left[\frac{1}{2\pi K u} \left(\frac{\partial \Phi(x)}{\partial t} \right)^2 + \frac{u}{2\pi K} \left(\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} \right)^2 + \frac{2g_3}{(2\pi\alpha)^2} \cos(2\Phi(x)) \right]$$

correspondente à Hamiltoniana (1.1.11) é invariante segundo operação $\Phi(x) \rightarrow \Phi(x) + \pi$. Logo, o operador

$$\sigma(x) = e^{i\Phi(x)}$$

goza de uma simetria discreta, do tipo $\sigma(x) \rightarrow -\sigma(x)$ e pode ser identificado como um parâmetro de ordem.

Além disso, como já havíamos salientado, o operador $\mu(x) = \exp(i\pi \int \theta(x-x') \Pi(x') dx')$ cria um soliton no campo $\Phi(x)$, e é, portanto, o candidato natural a parâmetro de desordem. De fato, a partir destas definições, é fácil provar que os operadores σ e μ obedecem a uma álgebra do tipo

$$\sigma(x') \mu(x) = e^{i\pi\theta(x-x')} \mu(x) \sigma(x'),$$

que vem a ser a tal álgebra dual de que falamos.

Assim, as duas componentes do campo fermiônico podem ser reescritas em termos de variáveis de ordem e desordem como:

$$\begin{aligned}\psi_+(x) &= \mu(x)\sigma(x) \\ \psi_-(x) &= \mu(x)\sigma^\dagger(x).\end{aligned}$$

Nesta representação, conclui-se que as variáveis de ordem (σ) e desordem (μ) carregam, respectivamente, chiralidade e carga fermiônica. A prova de que μ porta a carga do fermion foi vista anteriormente. Já a prova de que σ porta chiralidade, pode ser obtida comutando este operador com o operador chiralidade, o qual depende do operador momentum Π . E é, no fundo, a álgebra dual entre σ e μ que faz com que o operador σ , além de portar a chiralidade, seja responsável pela estatística fermiônica.

Variáveis de Ordem em 2D. A idéia, então, é definir em 2D um operador parâmetro de ordem $\sigma(\vec{x})$ do sistema fermiônico que, como no caso 1D, esteja relacionado simultaneamente com a estatística fermiônica e com alguma lei de conservação equivalente à de chiralidade em 1D. Por analogia com o caso unidimensional e com a transformação de Chern-Simons (utilizada para fazer transmutações estatísticas em problemas de anyons e no Efeito Hall Quântico Fracionário) o operador de ordem pode ser escrito como ⁶

$$(1.2.1) \quad \sigma(\vec{x}) = e^{ia\chi(\vec{x})},$$

onde

$$\chi(\vec{x}) = \int d^2\vec{r} \arg(\vec{x} - \vec{r}) \rho(\vec{r}).$$

Também no caso unidimensional, vimos que a corrente fermiônica $J^\mu = (\rho v_F, J) = -\frac{v_F}{\pi} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi$ era identificada como a corrente topológica carregada pelo campo escalar bosônico Φ , sendo os fermions os portadores da carga. A bosonização do sistema fermiônico em 2D é feita, então, de tal forma que o campo vetorial bosônico bidimensional $A^\mu(\vec{r}) \equiv (A^0, \vec{A})$, cuja corrente topológica $J^\mu \equiv (\rho c, \vec{J})$, definida por

$$J^\mu(\vec{r}) = c\epsilon^{\mu\nu\gamma} \partial_\nu A_\gamma(\vec{r})$$

↓

$$(1.2.2) \quad \rho(\vec{r}) = B_z(\vec{r})$$

$$(1.2.3) \quad \vec{J}(\vec{r}) = -c\hat{z} \times \vec{E}(\vec{r}),$$

seja a própria corrente de matéria do sistema fermiônico.

⁶Uma formulação rigorosa e covariante destes operadores deve ser feita respeitando as singularidades das funções e dos contornos de integração envolvidos. Isto está muito bem detalhado nas referências [18, 19]. Aqui nos concentraremos apenas nas interpretações físicas da forma de Mattis-Mandelstam em 2D.

1. INTRODUÇÃO

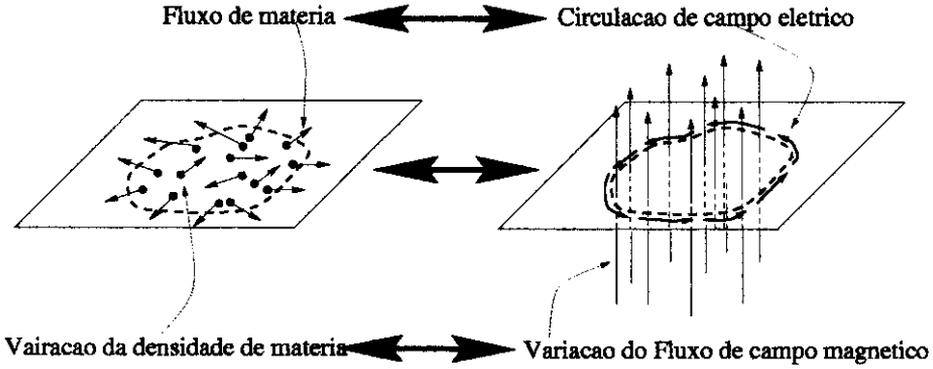


FIGURA 1.2.1. Interpretação da Bosonização vetorial em 2D.

Observa-se que, nas equações acima, c é uma velocidade característica do sistema fermiônico, que deverá ser determinada posteriormente (no caso 1D é $c = v_F$), e os campos

$$B_z(\vec{r})\hat{z} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}),$$

$$\vec{E} \equiv -\vec{\nabla}A^0 - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A},$$

são, respectivamente, os campos “magnético” e “elétrico”, resultantes de $A^\mu(\vec{r})$. É importante ressaltar que estes campos elétricos e magnéticos nada têm a ver com o eletromagnetismo de Maxwell. São, na verdade, apenas o suporte desta forma de bosonização bidimensional.

É fácil ver que a forma escolhida para J^μ obedece diretamente à equação de continuidade

$$\partial_\mu J^\mu = c\epsilon^{\mu\nu\gamma} \partial_\mu \partial_\nu A_\gamma = 0.$$

Uma consequência interessante desta representação é que a equação de continuidade de matéria se traduz na lei de Faraday de um campo eletromagnético

$$\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{r}, t)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial B_z(\vec{r})}{\partial t} = c\hat{z} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}),$$

como representado no esquema da figura 1.2.1.

Variáveis de Desordem em 2D. Ainda em completa analogia com a bosonização unidimensional, o operador $\mu(\vec{x})$ (dual a σ), responsável pela criação de carga e que faz o papel de variável de desordem em 2D, deve criar uma excitação topológica no campo bosônico $\vec{A}(\vec{r})$ que equivalha à criação de um fermion.

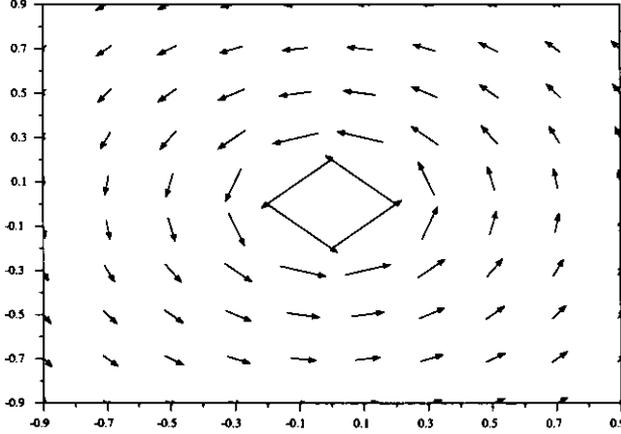


FIGURA 1.2.2. Campo vetorial de um vórtice

Ou seja, se lembrarmos que, pela relação (1.2.2), $(\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})) \cdot \hat{z} = \rho(\vec{r})$, temos que o operador μ deve gerar uma deformação no campo bosônico, dada por um campo vetorial $\vec{\Omega}(\vec{r})$, que obedeça à relação:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\Omega}(\vec{r}) = \delta(\vec{r}),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}(\vec{r}) &= \frac{1}{2\pi} \vec{\nabla} \arg(\vec{r}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\hat{z} \times \hat{r}}{r}. \end{aligned}$$

Este campo corresponde ao campo vetorial de um vórtice de rotacional nulo em todo o espaço exceto na origem, como o ilustrado na figura (1.2.2).

Logo, o candidato natural para operador de desordem acaba sendo

$$(1.2.4) \quad \mu(\vec{x}) = e^{ib\theta(\vec{x})}$$

onde

$$\theta(\vec{x}) = \int d^2\vec{r} \vec{\Omega}(\vec{r} - \vec{x}) \cdot \vec{\Pi}(\vec{r}),$$

e o campo $\Pi^\nu(\vec{r})$ é, por definição, canonicamente conjugado a $A^\mu(\vec{r})$, isto é,

$$[A^\mu(\vec{r}), \Pi^\nu(\vec{r}')] = i\delta_{\mu\nu}\delta(\vec{r} - \vec{r}').$$

A interpretação da fórmula do operador μ assemelha-se ao caso 1D: como $\vec{\Pi}(\vec{r})$ é o gerador de translações no campo $\vec{A}(\vec{r})$, a expressão $e^{ib \int d^2\vec{r} \vec{\Omega}(\vec{r}-\vec{x}) \cdot \vec{\Pi}(\vec{r})}$ cria uma configuração de vórtice $\vec{\Omega}(\vec{r}-\vec{x})$ no campo $\vec{A}(\vec{r})$, centrada em \vec{x} . De fato, o cálculo do comutador $[B_z(\vec{r}), \mu(\vec{x})] = b\delta(\vec{r}-\vec{x})\mu(\vec{x})$ assegura que $\mu(\vec{x})$ produz uma singularidade no “campo magnético” (ou na densidade) do tipo $\delta(\vec{r}-\vec{x})$.

Assim, em termos dos fermions, o operador $\mu(\vec{x})$ é o portador da carga fermiônica no ponto \vec{x} e o operador $\sigma(\vec{x})$ é o responsável pela estatística. Além disso, pode-se mostrar que eles obedecem a uma álgebra dual equivalente à do caso 1D:

$$\sigma(\vec{x})\mu(\vec{x}') = e^{iab \arg(\vec{x}-\vec{x}')} \mu(\vec{x}')\sigma(\vec{x}),$$

sendo que as constantes a e b são escolhidas de forma que $ab = 1$, para que os produtos do tipo $\mu\sigma$ tenham estatística fermiônica. Resta ainda a questão sobre que tipo de lei de conservação está por trás do operador σ , ou melhor, que tipo de quantidade física este operador porta, como é o caso da conservação e chiralidade em 1D. Na verdade, como σ depende apenas do campo bosônico \vec{A} , seja qual for a quantidade física carregada por ele, só pode estar relacionada com uma deformação no campo $\vec{\Pi}$. Realmente, o comutador $[\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}(\vec{r}), \sigma(\vec{x})] = 2\pi a \delta(\vec{r}-\vec{x})\sigma(\vec{x})$ mostra que o operador σ cria uma espécie de “carga elétrica” para os campo de gauge \vec{A} , ou seja, ele produz um divergente no campo $\vec{\Pi}$, na forma de uma função delta.

Porém, esta afirmação não é precisa, pois ainda não é possível saber qual a relação entre o campo \vec{A} o seu momentum $\vec{\Pi}$. Para isto, seria necessário conhecer qual a Lagrangeana associada à dinâmica do campo bosônico. Se essa Lagrangeana fosse do tipo Maxwell, aí sim poderíamos relacionar diretamente $\vec{\Pi}$ com o campo elétrico de \vec{A} . Nesse caso, como $c\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{J}(\vec{r})$ o operador de ordem carregaria vorticidade: $[\vec{\nabla} \times \vec{J}(\vec{r}), \sigma(\vec{x})] = 2\pi ac \delta(\vec{r}-\vec{x})\sigma(\vec{x})$.

Contudo, como veremos a seguir, mesmo a teoria fermiônica bidimensional mais simples leva a uma dinâmica bosônica extremamente complicada, distante de uma dinâmica tipo Maxwell.

Fermions Relativísticos sem massa. O formalismo que descrevemos acima foi aplicado por *Marino* ao problema de fermions de Dirac sem massa em (2+1)D. Nele, a Lagrangeana dos fermions, que têm relação de dispersão linear (figura 1.2.3), é dada por

$$(1.2.5) \quad \mathcal{L} = i\Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu \Psi$$

onde Ψ é o campo de Dirac, que em duas dimensões possui apenas duas componentes, e as matrizes de Dirac γ^μ são proporcionais às matrizes de Pauli: $\gamma_0 = \sigma_z$, $\gamma^1 = -i\sigma_x$ e $\gamma^2 = -i\sigma_y$.

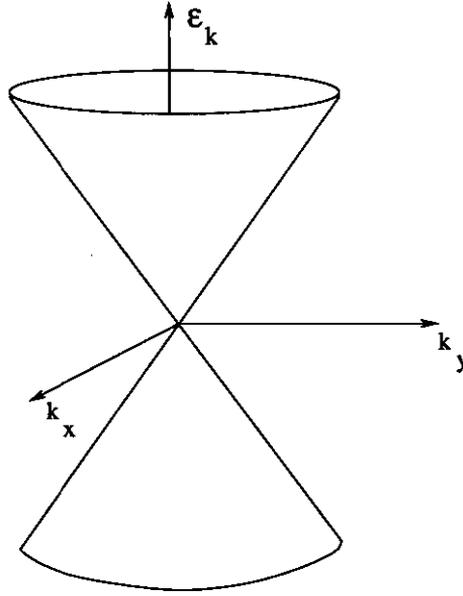


FIGURA 1.2.3. Relação de dispersão dos fermions relativísticos em 2D.

Então, seria natural que a aplicação o formalismo de bosonização bidimensional levasse a uma representação das componentes do campo de Dirac da forma,

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \mu\sigma \\ \psi_2 &= \mu\sigma^\dagger.\end{aligned}$$

No entanto, tal relação não é adequada pois introduz regras de seleção nas funções de correlação entre as componentes do campo de Dirac que não existem na teoria fermiônica original. Ou seja, apesar dos operadores acima criarem fermions, estes não são os fermions descritos em (1.2.5). Isto, na verdade, está intimamente ligado ao fato de que, ao contrário do caso unidimensional, o campo de Dirac em 2D não carrega chiralidade.

Para contornar este problema, é necessário então diagonalizar a Lagrangeana fermiônica, utilizando uma transformação T semelhante à transformação de *Foldy-Wouthuysen* [18] (só que não unitária). Tal transformação define um novo campo fermiônico $\phi = T\Psi$, de forma que

$$\mathcal{L} = i\Psi^\dagger(x) \gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu \Psi(x) \Leftrightarrow \phi^\dagger(x) (\partial^\mu \partial_\mu)^{1/2} \phi(x),$$

ou ainda, no espaço de momenta,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \phi^\dagger(k) |k| \phi(k), \\ &= |k| \left(f_1^\dagger(k) f_1(k) + f_2^\dagger(k) f_2(k) \right)\end{aligned}$$

onde $\phi^\dagger(k) = (f_1^\dagger(k) \quad f_2^\dagger(k))$, $k = (\omega, k_x, k_y)$ e $|k| = \sqrt{k^\mu k_\mu}$.

Logo, o campo ϕ , sim, carrega algo semelhante à chiralidade, uma vez que as cargas referentes às suas duas componentes são conservadas individualmente. Consequentemente, a bosonização deve ser feita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f_1 &= \mu\sigma \\ f_2 &= \mu\sigma^\dagger. \end{aligned}$$

Com efeito, *Marino* mostrou que, numa notação covariante ($x = (ct, \vec{r})$ e $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$), a dinâmica do campo bosônico A^μ é dada pela Lagrangeana

$$\mathcal{L}[A^\mu(x)] = \frac{-1}{4} \int dx' F^{\mu\nu}(x) G(x-x') F_{\mu\nu}(x') + \frac{\theta}{2} \epsilon^{\mu\alpha\beta} A_\mu(x) \partial_\alpha A_\beta(x)$$

onde $G(x-x')$ é a função de Green do operador $(\partial^\mu \partial_\mu)^{1/2}$ e a constante θ é tal que $2(a^2 + b^2) = 1 + \theta^2$.

Com isso, o momentum $\vec{\Pi}$ já pode ser definido, derivando a Lagrangeana acima com relação a $\partial_0 \vec{A}$:

$$\vec{\Pi}(x) = \int dx' G(x-x') \vec{E}(x') + \theta \hat{z} \times \vec{A}(x).$$

Essa dinâmica, aliada à forma de Mattis-Mandelstam bidimensional, é suficiente para descrever todas as funções de correlação dos fermions relativísticos não massivos em termos das funções de correlação do campo bosônico vetorial.

Consequentemente, a bosonização completa do campo de Dirac sem massa em 2D leva a uma teoria bosônica vetorial do tipo *Maxwell-Chern-Simons não local*. A aplicação deste método em problemas envolvendo fermions correlacionados não relativísticos em 2D é um dos temas desenvolvidos nesta Tese. De fato, são bastante promissores os avanços que esta abordagem pode trazer à compreensão da física dos sistemas de elétrons correlacionados em 2D. À semelhança da bosonização unidimensional, aqui, a estabilidade da superfície de Fermi não é tão relevante como para a teoria de Landau do Líquido de Fermi.

Mais adiante, mostraremos como estes conceitos podem ser aplicados ao estudo das propriedades de fermions interagentes em 2D, na presença de um campo magnético uniforme. Mas antes, discutiremos brevemente a segunda forma de se bosonizar um sistema de fermions interagentes em dimensões maiores que um (sem campo magnético), fundamentada na existência da superfície de Fermi. Esta segunda abordagem, apesar de só valer se a superfície de Fermi for estável, permite estabelecer critérios importantes para o entendimento desta estabilidade em sistemas interagentes.

1.2.2. Bosonização da superfície de Fermi. O segundo esquema de bosonização dos fermions em 2D, proposto por *Haldane* [23] e desenvolvido por *Houghton e Marston* e por *Castro Neto e Fradkin* [24, 25, 26, 27], guarda uma maior semelhança com a proposta de *Luther*. A diferença fundamental é que, aqui, os “canais” de divisão do problema fermiônico também contêm componentes transversais de momentum dentro de uma largura Λ em torno das direções de propagação.

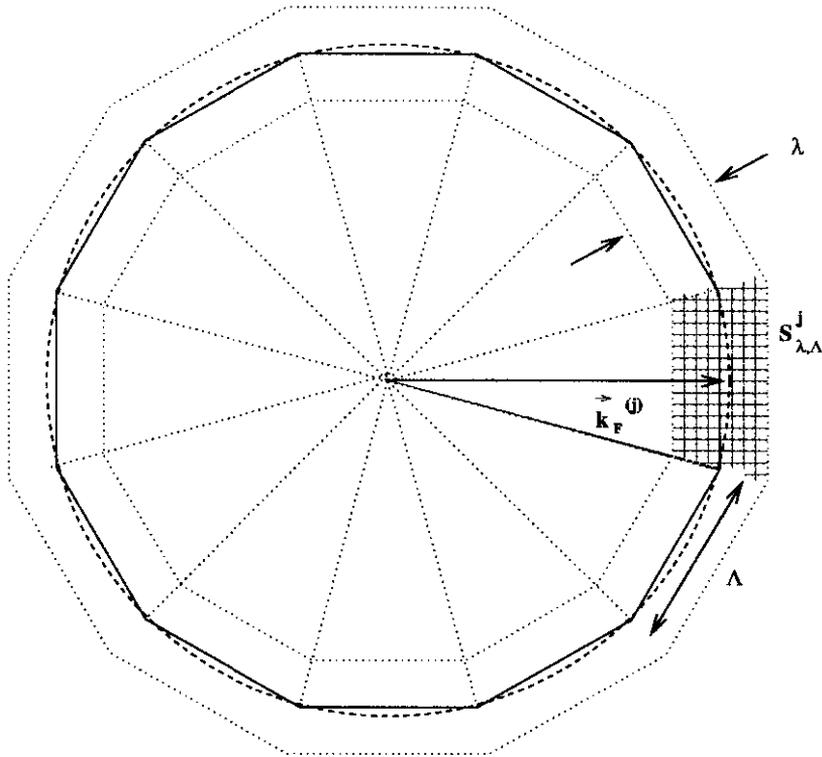


FIGURA 1.2.4. Particionamento da Superfície de Fermi

Ou seja, repartindo a superfície de Fermi de um gás de elétrons não interagentes em 2D em diversas fatias de largura finita (“patches”) como na figura (1.2.4), estaremos dividindo o problema original em vários problemas, a princípio independentes. Além disso, se a largura Λ for tal que, dentro de uma fatia, a curvatura da superfície de Fermi possa ser desprezada, a velocidade de grupo de um pacote de onda formado por vetores de um dado “patch” será aproximadamente $\vec{v}_F = \frac{\partial \epsilon}{\partial \vec{k}_F}$.

Antes de prosseguirmos, é conveniente adotarmos a seguinte notação utilizada em [26, 27]: Cada vetor $\vec{k}_F^{(j)}$ que indica o centro de um dos N_p “patches” da FS será rotulado por um inteiro j . Ou seja, $\vec{k}_F^{(j)} = k_F \hat{n}_j$ onde convencionaremos $\arg(\hat{n}_j) = \frac{2\pi}{N_p} j$, e $j \in [-N_p/2, N_p/2]$.

Assim, de uma forma similar ao que foi feito com o operador fermiônico em (1.1.4), podemos escrever

$$\Psi(\vec{r}) = \sum_j e^{i\vec{k}_F^{(j)} \cdot \vec{r}} \Psi_j(\vec{r}),$$

onde

$$\Psi_j(\vec{r}) = \sum_{\vec{q}} \Theta_j(\vec{q}) \frac{e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}}}{\sqrt{\Omega}} c_{\vec{k}_F^{(j)} + \vec{q}}$$

e

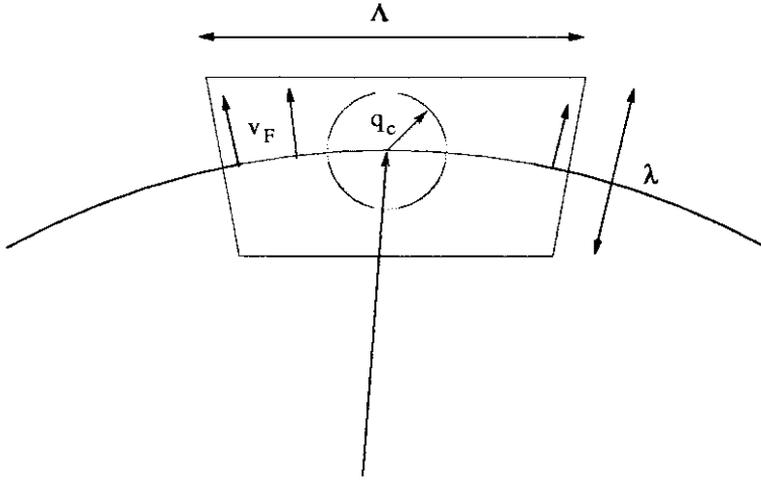


FIGURA 1.2.5. Detalhe de um "patch", com $q_c \ll \min(\lambda, \Lambda)$.

$$\Theta_j(\vec{q}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \vec{q} \in S_{\Lambda, \lambda}^{\vec{k}_F^{(j)}} \\ 0 & \text{se } \vec{q} \notin S_{\Lambda, \lambda}^{\vec{k}_F^{(j)}} \end{cases} .$$

A função $\Theta_j(\vec{q})$ é quem define o particionamento da superfície de Fermi (Função de "coarse graining"), sendo que o parâmetro λ desempenha a função de um "cutoff" de baixas energias e o parâmetro Λ é escolhido de acordo com o tipo de interação entre os fermions.

Normalmente, Λ deve ser grande o suficiente para que a transferência característica de momentum da interação considerada (q_c) não ultrapasse o limite de um "patch". Ao mesmo tempo, Λ deve ser pequeno o suficiente para que a curvatura da superfície de Fermi não varie muito dentro de um "patch", como é o exemplo da figura (1.2.5). Na verdade, a existência da superfície de Fermi, o princípio de exclusão de Pauli e os princípios de conservação de energia e momentum acabam restringindo bastante o espaço de fase para os processos de espalhamento. Isto é o que garante que a carga de cada "patch" se mantenha constante, pelo menos a baixas energias. De fato, é bem sabido que estas restrições no espaço de fase são o que dá o suporte para a teoria de Landau do Líquido de Fermi, já que o tempo de vida da quasi-partícula diverge à medida que a sua energia se aproxima da energia de Fermi.

Trabalhando com estas hipóteses, concluímos que os operadores $\Psi_j(\vec{r})$ obedecem, individualmente, a relações de comutação fermiônicas e criam, separadamente, fermions em cada canal de movimento:

$$\begin{aligned} \left\{ \Psi_j(\vec{r}), \Psi_{j'}^\dagger(\vec{r}') \right\} &= \delta_{j,j'} \sum_{\vec{q}} \Theta_j(\vec{q}) e^{i\vec{q} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} \\ &\simeq \delta_{j,j'} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \begin{cases} (\vec{r} - \vec{r}') \cdot \hat{n}_j \ll \lambda \\ (\vec{r} - \vec{r}') \cdot (\vec{z} \times \hat{n}_j) \ll \Lambda \end{cases} \end{aligned}$$

Com efeito, as aproximações adotadas fazem com que o número de fermions por “patch” seja conservado, mesmo que os fermions interajam entre si. Esta é a chamada simetria $U^{N_p}(1)$ (N_p = número de “patches”), primícia da Teoria de Landau do Líquido de Fermi, que, apesar de não aparecer diretamente na Hamiltoniana do gás de fermions interagentes, se manifesta nas propriedades de baixa energia do sistema.

No mesmo espírito, as flutuações “suaves” de carga do sistema são decompostas como

$$\rho_{\vec{q}} = \sum_j \rho_{j,\vec{q}},$$

onde as flutuações de densidade de carga de um “patch” j ($\rho_{j,\vec{q}}$), dadas por

$$\rho_{j,\vec{q}} = \sum_{\vec{k}} \Theta_j(\vec{q}) c_{\vec{k}_F^{(j)} - \vec{q}/2}^\dagger c_{\vec{k}_F^{(j)} + \vec{q}/2},$$

obedecem a relações de comutação aproximadamente bosônicas:

$$(1.2.6) \quad [\rho_{j,\vec{q}}, \rho_{j',-\vec{q}}] \sim \delta_{j,j'} \delta_{\vec{q},\vec{q}'} \vec{q} \cdot \hat{n}_j \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2 \Lambda.$$

A semelhança com as relações de comutação (1.1.7) do problema unidimensional fica então clara. Em (1.1.7), o valor do comutador é $\frac{qL}{2\pi}$, pois corresponde ao número de estados deslocados para fora da superfície de Fermi por uma translação de momentum q . Aqui, o valor do comutador (1.2.6) é $\vec{q} \cdot \hat{n}_j \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2 \Lambda$, o que equivale à mesma quantidade, já que, no caso bidimensional, a região j da FS é transladada de um vetor \vec{q} .

De forma análoga à equação (1.1.10), podemos definir os campos de deslocamento de cada canal j através da relação

$$(1.2.7) \quad \rho_j(\vec{r}) = \hat{n}_j \cdot \vec{\nabla} \Theta_j(\vec{r}),$$

onde

$$\begin{aligned} \rho_j(\vec{r}) &= \sum_{\vec{q}} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} \rho_{j,\vec{q}} \\ \Theta_j(\vec{r}) &= -i \sum_{\vec{q}} \frac{e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}}}{(\hat{n}_j \cdot \vec{q})} \rho_{j,\vec{q}}. \end{aligned}$$

Este campo de deslocamentos, por sua vez, pode ser usado para se construir a forma de Mattis-Mandelstam das componentes do operador fermiônico $\Psi(\vec{r})$. Assim, para cada canal j podemos provar que a escolha:

$$(1.2.8) \quad \Psi_j(\vec{r}) \sim e^{i\Theta_j(\vec{r})}$$

corresponde realmente ao operador fermiônico do canal j , pois esta forma, além de criar um fermion no canal j , tem funções de correlação idênticas às do elétron (asintoticamente). Contudo, apesar de (1.2.8) obedecer à relações de anticomutação para um canal, ele não anticomuta entre canais distintos. Para que isso aconteça, é preciso adicionar o chamado fator de *Klein*. E assim, a forma final do operador fermiônico fica

$$\Psi_j(\vec{r}) = \sum_j f_j e^{i\vec{k}_F^{(j)} \cdot \vec{r}} e^{i\Theta_j(\vec{r})}$$

onde o fator de Klein $f_j = (-1)^{\sum_{l=-N_F/2}^j \hat{N}_l}$, que dá a estatística correta entre canais é uma transformação tipo Wigner-Jordan no espaço dos j 's e \hat{N}_l é o operador número de fermions no patch l .

Coerentemente com as aproximações que estamos adotando para os graus de liberdade próximos à superfície de Fermi, a Hamiltoniana não interagente do gás de elétrons,

$$H_0 = \sum_{\vec{k}} (\epsilon_{\vec{k}} - \mu) c_{\vec{k}}^\dagger c_{\vec{k}}$$

pode ser aproximada, utilizando-se uma relação de dispersão linearizada na vizinhança dos vetores $\vec{k}_F^{(j)}$:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\vec{k}_F^{(j)} + \vec{q}} - \mu &\simeq \epsilon_{\vec{k}_F^{(j)}} - \mu + \vec{q} \cdot \vec{\nabla} \epsilon_{\vec{k}} \Big|_{\vec{k}_F^{(j)}} \\ &\simeq v_F \hat{n}_j \cdot \vec{q}. \end{aligned}$$

Esta linearização, por sua vez, permite que a Hamiltoniana H_0 possa ser escrita em termos dos operadores bosônicos no mesmo esquema que o da bosonização 1D:

$$H_0 = \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \frac{v_F}{2\Lambda} \sum_j \sum_{\vec{q}} \rho_{j, \vec{q}} \rho_{j, -\vec{q}}.$$

É interessante notar que a bosonização em 1D acaba sendo um caso particular do esquema proposto para bosonizar o gás de elétrons em 2D. Para fazermos a conexão entre os dois métodos, basta que, simultaneamente, uma das dimensões espaciais e a largura dos patches tendam a zero ($L_y \rightarrow 0$ e $\Lambda \rightarrow 0$), de tal forma que $\frac{2\pi}{L_y \Lambda} \rightarrow 1$ e só sobrem dois canais de movimento na direção x .

A vantagem da adoção da descrição bosônica fica clara, pois, a inclusão de um termo de interação do tipo

$$H_I = \sum_{j,j'} \sum_{\vec{q}} V_{j,j'}(q) \rho_{j,\vec{q}} \rho_{j',-\vec{q}},$$

passa a ser muito mais simples de se tratar, uma vez que tudo está em uma linguagem em que os graus de liberdade relevantes são descritos por flutuações de densidade $\rho_{j,\vec{q}}$.

A manifestação disto está no fato de que a Hamiltoniana $H_0 + H_I$ pode ser reescrita em termos de novos operadores $\tilde{\rho}_l(\vec{q})$, que são uma rotação (Transformação de Bogoliubov) dos operadores de flutuação de densidade antigos,

$$H = H_0 + H_I = \sum_l \sum_{\vec{q}} \omega_l(q) \tilde{\rho}_l(\vec{q}) \tilde{\rho}_l(-\vec{q}),$$

sendo que os novos modos normais de flutuação $\omega_l(q)$ são idênticos aos obtidos em RPA. Então, à primeira vista, a bosonização da FS parece ser apenas uma outra forma de se obter a tão bem conhecida aproximação RPA.

Mas, mais do que oferecer uma simplicidade conceitual e operacional, a bosonização da FS permite que as **propriedades da função de Green de um corpo**, obtidas através dos operadores 1.2.8, sejam calculadas *exatamente*. É claro que quando falamos “exatamente”, está subentendido que isto é dentro do esquema aproximado da bosonização da FS. Na verdade, pode-se mostrar[29] que a função de Green de um corpo obtida desta forma é semelhante à obtida *por Castellani, Di Castro e Metzner*[30] através de uma solução aproximada pelas *identidades de Ward*.

Em suma, embora os modos de excitação partícula-buraco resultantes equivalham aos obtidos por RPA, a função de Green de um corpo, mais especificamente a auto energia, vai além de RPA. De fato, a não trivialidade da auto-energia está nas correções de vértice, que podem ser também obtidas nas *identidades de Ward*.

Este procedimento foi aplicado no contexto de sistemas eletrônicos fortemente correlacionados, onde a possibilidade de estados fundamentais não convencionais exige um método não perturbativo de estudo[25, 26, 27, 28].

CAPÍTULO 2

Bosonização 2D em um campo magnético

No contexto de sistemas eletrônicos correlacionados, um dos fenômenos mais interessantes, descobertos recentemente, foi o Efeito Hall Quântico, [31, 32, 33] tanto no seu regime inteiro (IQHE) quanto no fracionário (FQHE).

Apesar de não haver nenhuma distinção termodinâmica entre estes dois fenômenos [32], suas origens microscópicas são completamente distintas. O IQHE pode ser compreendido a partir das propriedades do sistema eletrônico não interagente, enquanto a compreensão do FQHE requer, necessariamente, um tratamento das interações entre elétrons. Consequentemente, até hoje, a maior parte dos esforços para se estudar as propriedades de correlação no gás de elétrons bidimensional na presença de um campo uniforme B foi dirigida ao estudo dos casos em que o campo magnético é muito forte, onde ocorre o FQHE.

Nesses casos, a separação entre os níveis de Landau, da ordem da energia ciclônica $\hbar\omega_c = \hbar eB/(mc)$, pode ser muito maior que a escala de energia Coulombiana, que é da ordem de $e^2/\varepsilon\ell$ (onde $\ell = \sqrt{\hbar c/(eB)}$ é o comprimento magnético e ε é a constante dielétrica do meio em que se encontram os elétrons). De fato, a razão entre estas escalas de energia é dada por

$$\frac{e^2/\varepsilon\ell}{\hbar\omega_c} = \sqrt{\nu}r_s,$$

onde ν é o número de níveis de Landau preenchidos no estado fundamental e $r_s \equiv r_0/a_B^*$ é a razão entre a distância média entre partículas e o raio de Bohr efetivo do meio ($a_B^* = \frac{\hbar\varepsilon}{m_e e^2}$).

Para um gás de elétrons bidimensional, formado em poços quânticos de heterojunções, em razão da pequena massa efetiva eletrônica e do alto valor da constante dielétrica, observa-se [32] que $r_s \sim 1$. Assim, quando este sistema é submetido a campos intensos o suficiente para que $\nu < 1$, o espaço de Hilbert pode ser descrito apenas em termos do primeiro nível de Landau. Isto porque a escala de energia Coulombiana é menor que a escala de energia ciclônica, fazendo com que as transições para níveis de Landau superiores possam ser desprezadas, com boa aproximação. Mas, apesar da interação Coulombiana, neste caso, não “misturar” níveis de Landau, a alta degenerescência dos estados do primeiro nível de Landau faz com que ela, ainda assim, desempenhe um papel fundamental. De fato, esta é a origem do efeito Hall Quântico Fracionário.

Por outro lado, quando se trata de um campo magnético fraco, [37, 36, 71] ($\nu > 1$) a descrição acima não é válida em virtude de a escala de energia Coulombiana

ser maior que a energia ciclôtrônica, resultando num forte acoplamento entre os níveis de Landau. Uma abordagem possível neste caso é desenvolver uma teoria “tipo líquido de Fermi”, onde as quasi-partículas ocupam os níveis de Landau e interagem fracamente devido a efeitos de blindagem. Nesta teoria, então, a blindagem aparece como o principal efeito causado pelo acoplamento entre os níveis de Landau.

Algumas tentativas foram feitas neste sentido: *Aleiner e Glatzman*[40], partindo de uma teoria hidrodinâmica para um líquido carregado na presença de um campo fraco, desenvolveram um modelo fenomenológico para tratar dos efeitos de correlação. Posteriormente, *Aleiner et al.*[41] e *Fogler et al.*[42] desenvolveram, na aproximação Hartree-Fock, teorias para o estado fundamental do gás de elétrons num campo fraco. Mais recentemente, *Levitov e Shitov*[43] partem de um líquido de Fermi “bosonizado” e incluem a quantização de Landau sobre as quasipartículas.

É neste contexto, então, que utilizamos a idéia da bosonização para descrever todas as excitações de um gás de elétrons bidimensional, na presença de um campo magnético, em termos de campos bosônicos[34, 35]. A grande diferença entre o nosso método de bosonização e os previamente propostos é que nós partimos da base de autoestados que naturalmente descreve o gás de elétrons no campo magnético, qual seja, a base de níveis de Landau. Há que se dizer que o método de bosonização já foi aplicado em sistemas que apresentam Efeito Hall Quântico, no estudo de estados de borda “Edge States”[45]. Contudo, o método que apresentaremos diz respeito às excitações de “bulk”.

Mostraremos que, como na bosonização em 2D sem campo magnético, aqui também é possível bosonizarmos o sistema de duas formas. A primeira, identificando canais de conservação de carga e fazendo uma bosonização 1D por canal, e a segunda, identificando o campo vetorial de gauge a partir do qual podemos derivar as correntes de matéria e suas excitações topológicas.

Este método será então aplicado a alguns problemas, como o do “X-Ray edge” em um gás de elétrons 2D na presença de um campo magnético uniforme[46] e o dos fermions compostos na presença de um campo magnético fraco.

2.1. Fermions independentes em níveis de Landau

2.1.1. A Hamiltoniana. Nosso ponto de partida será um gás bidimensional de fermions não interagentes e sem spin, imersos em um campo magnético ($B\hat{z} = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})$) uniforme e perpendicular ao plano dos fermions. Classicamente, partículas de carga e e massa m nestas condições descrevem órbitas ciclôtrônicas de frequência angular $\omega_c = \frac{-eB}{mc}$, tendo o centro e raio da órbita como constantes de movimento (apêndice A).

No caso quântico, em que há um sistema de muitos fermions idênticos nas mesmas condições, as propriedades do sistema podem ser estudadas a partir do espectro da Hamiltoniana

$$(2.1.1) \quad H_o = \frac{1}{2m} \int d^2\vec{r} \Psi^\dagger(\vec{r}) \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}) \right)^2 \Psi(\vec{r}),$$

Gauge Simétrico

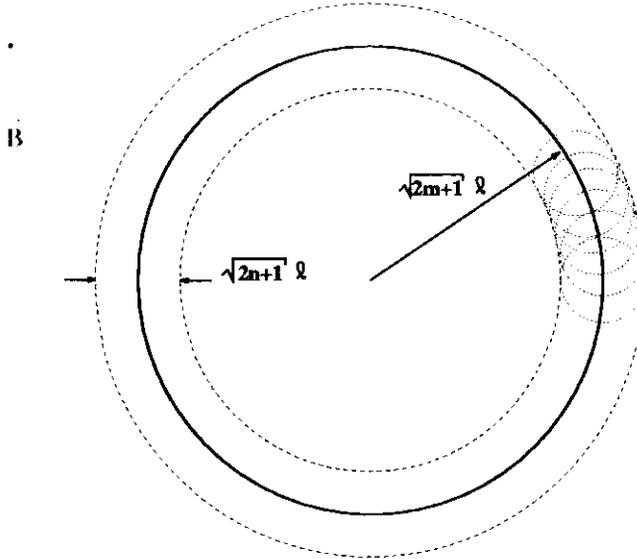


FIGURA 2.1.1. Gauge Simétrico

onde $\Psi^\dagger(\vec{r})$ é o operador de campo fermiônico.

Esta Hamiltoniana possui uma representação diagonal na base de níveis de Landau, que é uma base tipo oscilador harmônico degenerado. Nesta representação, a frequência característica do oscilador e os níveis de energia estão associados respectivamente à frequência e raio da órbita ciclotrônica. Já a degenerescência dos níveis está associada à posição do centro da órbita ciclotrônica.

Um detalhe crucial neste problema é que, enquanto no caso clássico o vetor de posição do centro de órbita pode assumir qualquer valor, no caso quântico os operadores referentes às coordenadas X_0 e Y_0 da posição do centro de órbita não comutam entre si e, conseqüentemente, não podem ser determinados simultaneamente. Isto dá margem a um grande número de possibilidades para a representação da degenerescência, o que reflete a invariância de gauge do problema. As duas representações mais comuns são a representação em que o operador $R_0^2 = X_0^2 + Y_0^2$ é diagonal (figura 2.1.1), o que equivale a escolher um gauge simétrico ($\vec{A}(\vec{r}) = \frac{B}{2} \hat{z} \times \vec{r}$), e a representação em que o operador X_0 (ou Y_0) é diagonal (figura 2.1.2), que equivale a escolher o gauge de Landau ($\vec{A}(\vec{r}) = -Bx\hat{y}$). Nesta seção estaremos fazendo uso do gauge simétrico, embora deva ficar claro que os resultados independem desta escolha.

Se expandirmos $\Psi^\dagger(\vec{r})$ na base $\{|nm\rangle\}$ de níveis de Landau (Apêndice A),

$$(2.1.2) \quad \Psi^\dagger(\vec{r}) = \sum_{n,m} \langle nm | \vec{r} \rangle c_{nm}^\dagger,$$

segue que

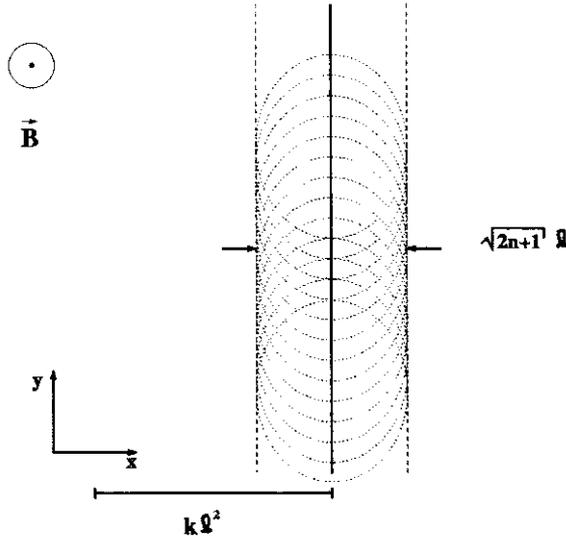


FIGURA 2.1.2. Gauge de Landau

$$(2.1.3) \quad H_o = \hbar\omega_c \sum_{n,m} (n + 1/2) c_{nm}^\dagger c_{nm},$$

onde c_{nm}^\dagger é o operador que cria um fermion no nível de Landau n , com o centro de órbita a uma distância $\sqrt{2m+1}\ell$ da origem, e $\ell = \sqrt{\hbar c/eB}$. Então, de acordo com a representação adotada para a degenerescência dos níveis, o número quântico m refere-se ao círculo em que está localizado o centro da órbita ciclotrônica.

2.1.2. O estado fundamental. O estado fundamental desta Hamiltoniana é construído preenchendo-se uniformemente ν níveis de Landau de cada centro de órbita m . Por simplicidade, convencionaremos que o campo magnético e o número de fermions são tais que ν é um número inteiro (regime de efeito Hall quântico inteiro).

Desta forma, o estado fundamental pode ser facilmente escrito como

$$(2.1.4) \quad |G\rangle = \prod_{m=0}^{N_\phi} \prod_{n=0}^{\nu-1} c_{n,m}^\dagger |0\rangle,$$

onde $N_\phi = \frac{S}{2\pi\ell^2}$ é o número máximo de centros de órbita que cabem em um plano circular de área S . A quantidade N_ϕ também equivale ao número de quanta de fluxo magnético que atravessa o plano do gás de fermions ($N_\phi = \frac{BS}{\phi_0}$). Portanto, podemos interpretar o estado fundamental deste sistema como sendo um conjunto de N_ϕ sistemas fermiônicos **unidimensionais** e “**chirais**”, cada um com ν fermions, como representado na figura 2.1.3

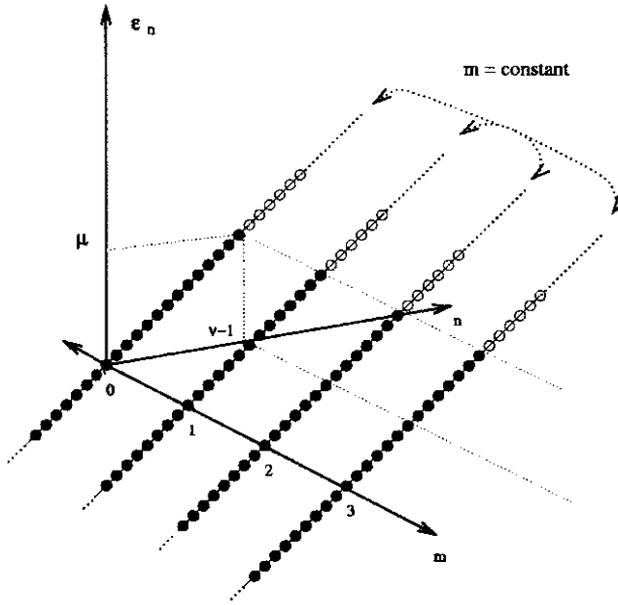


FIGURA 2.1.3. Relações de dispersão de cada centro de órbita

O termo “chiral” se refere ao fato de que, ao contrário dos sistemas unidimensionais normais onde as partículas podem se mover em ambas as direções, aqui os fermions só podem se mover em uma direção, a imposta pelo campo magnético.

2.2. As excitações elementares - Bosonização

Utilizando como referência o estado fundamental descrito acima, podemos gerar todos os estados excitados de (2.1.3). Dentre estes estados excitados de “bulk” podemos separar basicamente dois tipos: Os gerados por excitações neutras, do tipo partícula-buraco, em que não se altera o número ν de fermions nos centros de órbita, e os gerados pelas excitações ditas carregadas, produzidas pela adição (ou subtração) de partículas e buracos nos centros de órbita.

O que mostraremos nesta seção é que as excitações de baixa energia deste sistema, tanto as neutras quanto as carregadas, podem ser descritas por campos bosônicos. Isto constitui basicamente o método de bosonização em níveis de Landau.

2.2.1. Excitações Neutras. As excitações neutras, formadas por um único par partícula-buraco em que não se altera o número ν de fermions nos centros de órbita, se originam da criação de um buraco em um nível p ocupado ($p \leq \nu - 1$) no centro de órbita m e uma partícula num nível $n + p$ desocupado ($n + p \geq \nu - 1$) no mesmo centro de órbita (figura 2.2.1). Ou seja, o estado

$$(2.2.1) \quad |\psi_{p,m}(n)\rangle = c_{n+p,m}^\dagger c_{p,m} |G\rangle$$

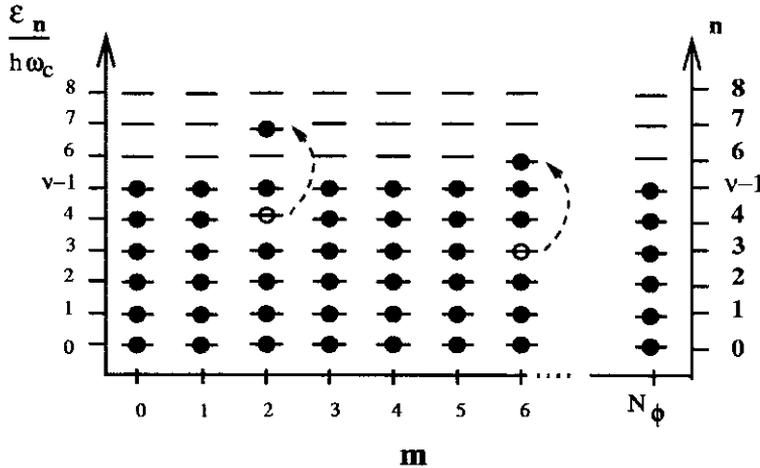


FIGURA 2.2.1. Duas excitações neutras sobre o estado fundamental

é um autoestado excitado de energia $\hbar\omega_c n$ (por convenção adotaremos o zero de energia como a energia do estado fundamental) que possui uma excitação deste tipo.

Então, variando n, p e m e o número de pares, criamos um subespaço contendo os estados excitados de “carga nula” de (2.1.3) em que todos os centros de órbita possuem um mesmo número ν de fermions.

Este subespaço de estados pode também ser criado a partir de aplicações do operador:

$$(2.2.2) \quad b_{n,m}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{p=0}^{\infty} c_{n+p,m}^\dagger c_{p,m},$$

sendo que a aplicação deste operador no estado fundamental gera combinações lineares de estados do tipo (2.2.1). A equivalência entre o subespaço dos estados do tipo (2.2.1) e o subespaço dos estados gerados pela aplicação de (2.2.2) ficará mais clara no decorrer desta seção.

Outra propriedade muito importante é que o conjugado hermitiano de (2.2.2),

$$(2.2.3) \quad b_{n,m} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{p=0}^{\infty} c_{p,m}^\dagger c_{p+n,m}$$

aniquila o estado fundamental, ou seja $b_{n,m} |G\rangle \equiv 0$.

O passo natural para este problema, então, será “bosonizarmos” as excitações do tipo (2.2.2), o que pode ser feito de duas maneiras. Na primeira, inspirada na bosonização de Tomonaga [11], aproximamos os comutadores $[b_{n,m}, b_{n',m'}^\dagger]$ e $[b_{n,m}, b_{n',m'}]$ por seus valores médios, o que resulta em uma álgebra bosônica

$$(2.2.4) \quad \begin{aligned} [b_{n,m}, b_{n',m'}^\dagger] &= \delta_{m,m'} \delta_{n,n'} \\ [b_{n,m}, b_{n',m'}] &= 0. \end{aligned}$$

A segunda forma de “bosonizarmos” este problema, que mais se assemelha à proposta por *Luttinger*[12], consiste em estender os níveis de Landau permitidos para valores negativos de n , mantendo tais estados completamente preenchidos. Deste procedimento resulta uma álgebra **exatamente** bosônica para $b_{n,m}$ e $b_{n',m'}^\dagger$, observando-se que a soma que aparece na definição (2.2.2) também deve ser estendida para valores negativos .

Assim sendo, tanto na maneira proposta por *Tomonaga* como na proposta por *Luttinger* os operadores que geram as excitações neutras obedecem a uma álgebra bosônica. Deve-se contudo manter em mente que a bosonização é um procedimento válido para as excitações de baixa energia ($n < \nu$). Tal restrição aparece no primeiro caso porque a aproximação dos comutadores $[b_{n,m}, b_{n',m'}^\dagger]$ e $[b_{n,m}, b_{n',m'}]$ por seus valores médios só faz sentido neste limite. No segundo caso, a restrição serve para evitar excitações que envolvam os estados de energia negativa introduzidos artificialmente. Em nosso trabalho adotaremos a maneira equivalente à proposta por *Luttinger*.

Veremos mais adiante que os estados gerados pela aplicação dos operadores (2.2.2) e dos operadores de excitações carregadas, que serão introduzidos na seção a seguir, formam uma base completa no espaço de Fock deste problema.

2.2.2. Excitações Carregadas. Os demais estados excitados da Hamiltoniana (2.1.3) são gerados pela adição de partículas ou buracos nos centros de órbita. A classificação destes estados excitados pode ser feita com base em sua distribuição de carga nos centros de órbita, dada por um vetor \mathbf{N} , de dimensão N_ϕ , cujas componentes são operadores do tipo

$$(2.2.5) \quad N_m = \sum_{p=0}^{\infty} (c_{p,m}^\dagger c_{p,m} - \langle c_{p,m}^\dagger c_{p,m} \rangle).$$

Este operador determina o número de fermions adicionados (ou subtraídos) ao estado fundamental em um centro de órbita m , ou seja, a carga de um determinado centro de órbita (considerando que um patamar de N partículas mantém a neutralidade do sistema). Com esta construção fica claro que $N_m |G\rangle = 0$ para todo m , ou seja, a distribuição de carga nos centros de órbita no estado fundamental é dada por $\mathbf{N} = 0 = \{0, 0, \dots, 0\}$.

Deve-se observar ainda que, embora existam vários estados excitados que podem ser rotulados por um mesmo \mathbf{N} , estes podem ser construídos a partir de excitações neutras do tipo (2.2.2) em um único estado de referência $|G_N\rangle$, como o exemplo da figura 2.2.2. No estado de referência, os fermions adicionados aos centros de órbita do estado fundamental se localizam no primeiro nível de Landau disponível de cada centro de órbita m .

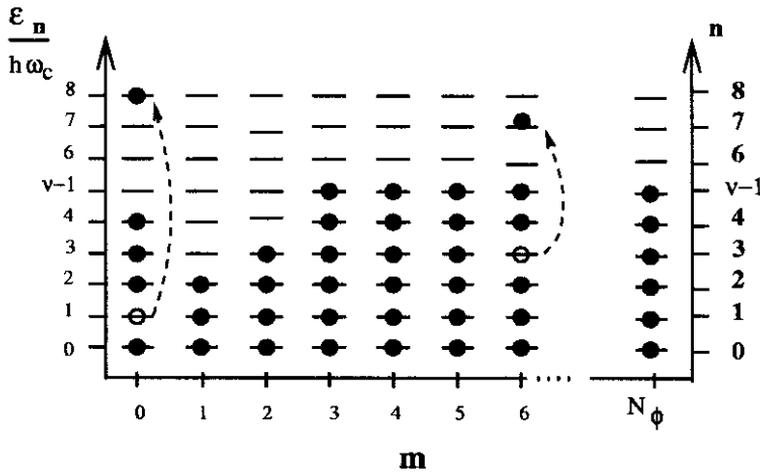


FIGURA 2.2.2. Excitações neutras sobre um estado de referência $|G_N\rangle$, com $N = \{5, 3, 4, 6, 6, 6, 6, \dots, 6\}$

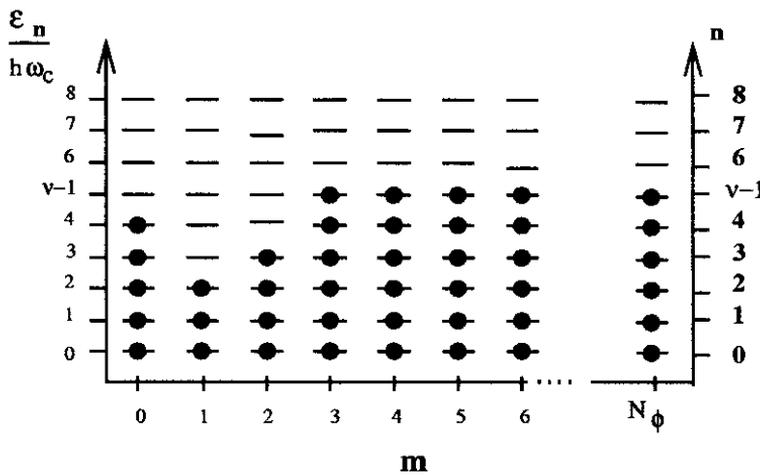


FIGURA 2.2.3. Estado de referência $|G_N\rangle$, com $N = \{5, 3, 4, 6, 6, 6, 6, \dots, 6\}$

De acordo com a descrição acima, o estado de referência $|G_N\rangle$ goza da seguinte propriedade: $\langle G_N | c_{n,m}^\dagger c_{n,m} | G_N \rangle = \theta(\nu - 1 + N_m - n)$. Ou seja, $|G_N\rangle$ é um estado semelhante ao estado fundamental, porém com cada centro de órbita m preenchido até o nível de Landau $\nu - 1 + N_m$ (figura 2.2.3). Esta construção faz com que $|G_N\rangle$ mantenha, assim como o estado fundamental, a propriedade de aniquilação pelos operadores (2.2.3) : $b_{n,m} |G_N\rangle \equiv 0$.

Para gerar os estados do tipo $|G_N\rangle$ será útil definir um operador **unitário** U_m , que **comuta com os operadores bosônicos** e que aumenta a carga N_m de unidade em unidade, de forma que

$$|G_{\mathbf{N}}\rangle = \prod_{m=1}^{N_{\phi}} (U_m)^{N_m} |G\rangle.$$

A unitariedade de U_m é necessária para que $\langle G_{\mathbf{N}} | G_{\mathbf{N}} \rangle = 1$ e a propriedade de comutação com os operadores bosônicos é suficiente para que $b_{n,m} |G_{\mathbf{N}}\rangle \equiv 0$. Além disso, por construção, o operador U_m deve ser tal que $U_m |G_{\mathbf{N}}\rangle = \eta(\mathbf{N}) |G_{\mathbf{N}'}\rangle$, onde $\mathbf{N}' = \{N_1, N_2, \dots, N_m + 1, \dots, N_{N_{\phi}}\}$ e $\eta(\mathbf{N}) = \pm 1$ é uma função que garante um caráter fermiônico à função de onda.

De acordo com o que vimos, então, o operador U_m deve satisfazer à condição

$$(2.2.6) \quad [N_{m'}, U_m] = \delta_{m,m'} U_m,$$

e deve ser tal que U_m anticomute com $U_{m'}$ para $m \neq m'$. A primeira condição é satisfeita por $e^{i\Theta_m}$, onde Θ_m é, por definição, o operador canonicamente conjugado a N_m ($[N_m, \Theta_{m'}] = i\delta_{m'm}$)¹. Já para assegurar a anticomutação entre canais diferentes é necessário incluir o fator

$$(2.2.7) \quad F_m = e^{i\pi \sum_{s=0}^{m-1} N_s},$$

conhecido por fator de Klein, que é responsável pela anticomutação entre canais fermiônicos. Como na bosonização da superfície de Fermi, a interpretação deste operador é semelhante a da transformação de Wigner-Jordan, só que no espaço de centros de órbita m .

Consequentemente, o operador procurado é dado por

$$(2.2.8) \quad U_m = F_m e^{i\Theta_m}$$

Com os operadores U_m e os operadores $b_{n,m}^{\dagger}$ podemos então construir um conjunto de estados excitados do tipo

$$(2.2.9) \quad |G_{\mathbf{N},\mathbf{n}}\rangle = \prod_{m=1}^{N_{\phi}} (U_m)^{N_m} \prod_{p=-\infty}^{\infty} \frac{(b_{p,m}^{\dagger})^{n_{p,m}}}{\sqrt{n_{p,m}!}} |G\rangle,$$

onde $\mathbf{n} = \{n_{p,m}\}$ é o número de bosons com energia $p\hbar\omega_c$ no centro de órbita m .

Finalmente, o que garante a fidelidade da descrição bosônica das excitações fermiônicas é o fato de que o conjunto (2.2.9) de estados ortogonais forma uma base **completa** de estados no espaço de Fock. Tal característica pode ser demonstrada através da comparação do número de estados degenerados produzidos nas representações fermiônicas e bosônica. Entretanto, isso pode ser feito de uma forma mais elegante, como a introduzida por *Haldane*[14], que envolve o cálculo da função de partição do sistema. Antes de partirmos para esta prova, precisaremos determinar como se descreve H_o em termos dos bosons.

¹É fácil ver que $U_m^{\dagger} = U_m^{-1}$ realiza as mesmas tarefas que U_m , só que para um buraco.

A Hamiltoniana (2.1.3) pode também ser escrita em termos dos operadores bosônicos, se notarmos que ela obedece à relação:

$$(2.2.10) \quad [b_{n,m}, H_o] = n\hbar\omega_c b_{n,m},$$

que pode ser obtida através das definições de H_o e $b_{n,m}$ em termos dos operadores fermiônicos. É fácil ver que esta mesma relação será obedecida se H_o for escrita como $H_o = \hbar\omega_c \sum_{n,m} n b_{n,m}^\dagger b_{n,m} + O$, onde O é um operador que comuta com $b_{n,m}$ e $b_{n,m}^\dagger$. Uma vez que o termo $b^\dagger b$ se refere à energia das excitações neutras, o operador O deve dar conta das excitações carregadas. Isso é possível se fizermos $O = \frac{\hbar\omega_c}{2} N_m^2$, ou seja,

$$(2.2.11) \quad H_o = \hbar\omega_c \sum_{n,m} n b_{n,m}^\dagger b_{n,m} + \frac{\hbar\omega_c}{2} N_m^2.$$

A possibilidade de se escrever a Hamiltoniana (2.1.3) de várias formas deve-se basicamente à alta degenerescência das autoenergias da Hamiltoniana não interagente, causada pela relação de dispersão linear. Entretanto, apesar de no caso não interagente as representações fermiônica e bosônica serem alternativas, no caso interagente a representação bosônica será a mais simples. Isto porque os termos de interação, que são formas quárticas nos operadores fermiônicos, se tornam formas bilineares nos operadores bosônicos, o que simplifica a diagonalização da Hamiltoniana.

Agora sim, de posse da expressão que define H_o em termos dos bosons, podemos utilizar a idéia de *Haldane* [14] para demonstrar que a representação bosônica obedece à relação de completeza: A função de partição do sistema na representação bosônica é dada por

$$(2.2.12) \quad Z = \prod_{m=1}^{N_\phi} \left(\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - w^{2n}} \right) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} w^{n^2} \right),$$

sendo que a primeira contribuição vem das excitações bosônicas e a segunda das excitações carregadas, onde $w = e^{-\frac{\beta\hbar\omega_c}{2}}$. Utilizando a fórmula 8.181 da referência [79]

$$(2.2.13) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} w^{n^2} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - w^{2n}) (1 + w^{2n-1})^2,$$

conclui-se que

$$(2.2.14) \quad Z = \prod_{m=1}^{N_\phi} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + w^{2n-1})^2.$$

A expressão resultante (2.2.14) nada mais é do que a função de partição do sistema, calculada a partir de (2.1.3) na representação fermiônica original. Uma

vez que a função de partição é uma soma sobre quantidades positivo definidas, este resultado só pode ser obtido se a degenerescência de cada estado estiver correta na representação bosônica. Daí se completa a nossa demonstração de que a bosonização é um mapeamento **exato** das excitações de um sistema fermiônico num sistema bosônico.

2.3. Propriedades Fermiônicas

Nesta seção, mostraremos como as propriedades fermiônicas de um corpo podem ser obtidas a partir do esquema de bosonização proposto. Apesar de ainda estarmos nos restringindo ao caso de fermions independentes, os cálculos que seguem servirão de suporte para o posterior estudo das propriedades de quasi-partícula do sistema fermiônico interagente. Tal possibilidade é talvez a maior conquista do método de bosonização.

2.3.1. Operadores fermiônicos. A forma mais natural de se estudar propriedades fermiônicas é através do propagador de um corpo

$$(2.3.1) \quad K_{m,m'}(\theta, t) = \langle c_{m'}(\theta, t) c_m^\dagger(0, 0) \rangle,$$

onde o operador

$$(2.3.2) \quad c_m^\dagger(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} c_{n,m}^\dagger,$$

que obedece às seguintes relações de anticomutação

$$\begin{aligned} \{c_{m'}^\dagger(\theta'), c_m(\theta)\} &= \delta_{m',m} \delta(\theta' - \theta) \\ \{c_{m'}(\theta'), c_m(\theta)\} &= 0, \end{aligned}$$

cria um fermion no centro de órbita m e numa fase θ do movimento ciclotrônico, conforme o esquema na figura abaixo.

A introdução dos autoestados do observável fase θ (apêndice B), que aqui aparece como o observável canonicamente conjugado ao momento angular n , é análoga à introdução dos estados de posição x , que no caso dos sistemas unidimensionais é o observável canonicamente conjugado ao momentum p .

Mostraremos, a seguir, que, assim como pudemos mapear a Hamiltoniana (2.1.3) em uma Hamiltoniana bosônica, também é possível representar os operadores fermiônicos (2.3.2) de uma forma bosônica.

Seguindo *Haldane*[14], uma construção de U_m em termos dos operadores fermiônicos, que possui algumas das propriedades desejadas, é

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n,m}^\dagger \delta_{n,(\nu-1)+N_m+1}.$$

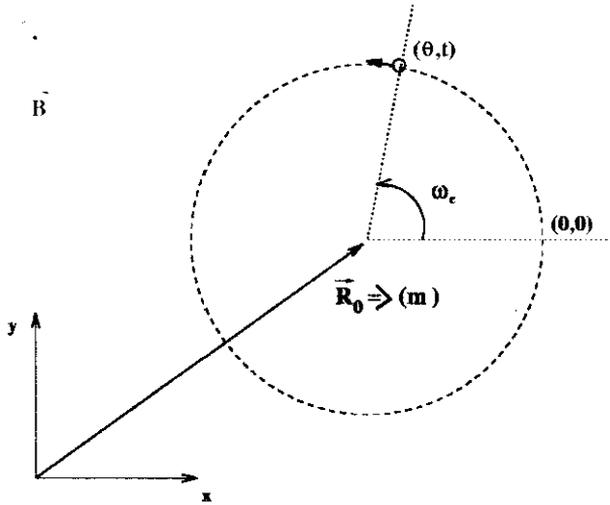


FIGURA 2.3.1. fase da órbita ciclotrônica

Com o auxílio da representação integral da função delta de Kroenecker, este operador pode ser reescrito, de uma forma mais simétrica, como

$$\begin{aligned}
 U_m &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2\pi}} e^{-i(\nu-1)\theta} e^{-iN_m\theta/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n,m}^\dagger e^{in\theta} e^{-iN_m\theta/2} \\
 (2.3.3) \quad &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2\pi}} e^{-i(\nu-1)\theta} e^{-i\phi_m^\dagger(\theta)} c_m^\dagger(\theta) e^{-i\phi_m(\theta)},
 \end{aligned}$$

onde $\phi_m^\dagger(\theta) = N_m\theta/2$.

Contudo, falta a este operador a propriedade desejável de comutatividade com os operadores bosônicos. Tal característica provém do operador $c_m^\dagger(\theta)$ que, como pode ser visto pelas relações abaixo

$$\begin{aligned}
 [b_{n,m}^\dagger, c_m^\dagger(\theta)] &= \delta_{m,m'} \frac{e^{-in\theta}}{\sqrt{n}} c_m^\dagger(\theta) \\
 [b_{n,m}, c_m^\dagger(\theta)] &= \delta_{m,m'} \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{n}} c_m^\dagger(\theta),
 \end{aligned}$$

não comuta com os operadores bosônicos.

Isto não constitui nenhum obstáculo significativo, uma vez que redefinindo as funções $\phi_m^\dagger(\theta)$ da forma

$$(2.3.4) \quad \phi_m^\dagger(\theta) = N_m\theta/2 - i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n\epsilon}{2}} \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{n}} b_{n,m}^\dagger$$

a comutatividade entre U_m e os operadores bosônicos é satisfeita.

Assim, de acordo com o acima descrito, U_m está definido por (2.3.3) com $\phi_m^\dagger(\theta)$ dado por (2.3.4).

Finalmente, invertendo esta expressão (2.3.3) em termos dos operadores bosônicos e dos operadores $c_m^\dagger(\theta)$, chegamos a

$$c_m^\dagger(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(\nu-1)\theta} e^{i\phi_m^\dagger(\theta)} U_m e^{i\phi_m(\theta)}.$$

Respeitando as relações de comutação dos operadores, a fórmula acima ainda pode ser reescrita de uma forma mais compacta, como

$$(2.3.5) \quad c_m^\dagger(\theta, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} e^{i(\nu-1/2)\theta} e^{i\Theta_m^{(\epsilon)}(\theta, t)} U_m,$$

onde o campo de fase *local* $\Theta_m^{(\epsilon)}(\theta, t)$ é dado em termos dos operadores bosônicos $b_{n,m}$ e $b_{n,m}^\dagger$ por

$$(2.3.6) \quad \Theta_m^{(\epsilon)}(\theta, t) = N_m \theta - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{n\epsilon}{2}}}{\sqrt{n}} \{ e^{in\theta} b_{n,m}^\dagger(t) - e^{-in\theta} b_{n,m}(t) \}.$$

O campo de fase *local* possui a propriedade $\rho_m^{(\epsilon)}(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \Theta_m^{(\epsilon)}(\theta)$, onde

$$\rho_m^{(\epsilon)}(\theta) = N_m + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} e^{-\frac{n\epsilon}{2}} \{ e^{in\theta} b_{n,m}^\dagger + e^{-in\theta} b_{n,m} \}$$

é o campo de densidade, canonicamente conjugado a $\Theta_m^{(\epsilon)}(\theta)$.

Comparando a bosonização em níveis de Landau com a bosonização 1D, vemos que:

⇒ Na bosonização 1D as flutuações de densidade por canal de movimento se relacionam com os campos de deslocamento através da expressão:

$$\rho_\pm(x) = \pm \frac{\partial}{\partial x} \Theta_\pm(x)$$

Na bosonização em níveis de Landau temos algo equivalente:

$$\rho_m^{(\epsilon)}(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \Theta_m^{(\epsilon)}(\theta),$$

só que os canais não são apenas \pm , mas sim um para cada valor de m , no lugar de x temos θ , e o sinal em frente à derivada é sempre positivo pois, como já dissemos, o movimento é “chiral”.

⇒ Na bosonização 1D o operador fermiônico por canal é dado, em termos dos campos de deslocamento, por

$$\psi_\pm(x) = \frac{U_\pm}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{i\Theta_\pm(x)}.$$

Aqui temos também algo equivalente,

$$c_m(\theta) = \frac{U_m}{\sqrt{2\pi\epsilon}} e^{i\Theta_m^{(\epsilon)}(\theta)},$$

fazendo as mesmas correspondências do ítem anterior.

2.3.2. O Propagador fermiônico. O propagador fermiônico do sistema não interagente, calculado a partir da definição (2.3.2), é dado por²

$$\begin{aligned} K_{m,m'}^{(0)}(\theta, t) &= \langle c_{m'}(\theta, t) c_m^\dagger(0, 0) \rangle, \\ &= \frac{\delta_{m',m}}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\theta} e^{-i(n\omega_c - \mu/\hbar)t} \langle c_{n,m} c_{n,m}^\dagger \rangle \\ &= \frac{\delta_{m',m}}{2\pi} e^{-i(\nu-1/2)\theta} \sum_{n'=0}^{\infty} e^{-in'(\omega_c t + \theta)} \\ &= \frac{\delta_{m',m}}{2\pi} \frac{e^{-i(\nu-1/2)\theta}}{1 - e^{-i(\theta + \omega_c t)}}. \end{aligned}$$

Este resultado pode ser comparado com o obtido a partir da representação bosônica, isto é, usando a equação de bosonização do operador fermiônico (2.3.5), decorre:

$$K_{m,m'}^{(0)}(\theta, t) = \delta_{m',m} \frac{e^{-i(\nu-1/2)\theta}}{2\pi\epsilon} \langle e^{-i\Theta_m(\theta,t)} e^{i\Theta_m(0,0)} \rangle.$$

A expressão acima é simplificada pela fórmula de Baker-Hausdorff $e^A e^B = e^{\frac{1}{2}[A,B]} e^{A+B}$ e $\langle e^A \rangle = e^{\frac{1}{2}\langle A^2 \rangle}$, resultando em

$$(2.3.7) \quad K_m(\theta, t) = \delta_{m',m} \frac{e^{-i(\nu-1/2)\theta}}{2\pi\epsilon} e^{J_m(\theta,t)}$$

onde

$$J_m(\theta, t) = [D_m(\theta, t) - D_m(0, 0)]$$

e $D_m(\theta, t)$ é o propagador do operador fase, definido em (2.3.6),

$$(2.3.8) \quad D_m(\theta, t) = \langle \Theta_m(\theta, t) \Theta_m(0, 0) \rangle.$$

Desta forma, reduzimos o cálculo das **funções de correlação fermiônicas** ao cálculo de **funções de correlação bosônicas**.

²O potencial químico $\mu_+ = E_0(N+1) - E_0(N) = \nu\hbar\omega_c$ referente à adição de uma partícula é diferente do potencial químico referente à retirada de uma partícula do sistema $\mu_- = E_0(N) - E_0(N-1) = (\nu-1)\hbar\omega_c$. Mas, aqui estaremos adotando sempre a convenção de que o potencial químico é a média dos dois: $\mu = (\nu-1/2)\hbar\omega_c$

No caso mais simples de fermions independentes, a obtenção da função (2.3.8) é direta:

$$J_m(\theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^{-in(\theta+\omega_c t)} - 1) e^{-n\epsilon}}{n} = \ln \left(\frac{1 - e^{-\epsilon}}{1 - e^{-i(\theta+\omega_c t - i\epsilon)}} \right),$$

e assim, substituindo o resultado acima na equação (2.3.7), recuperamos o resultado há pouco obtido, através da representação fermiônica original. Isto mais uma vez mostra que o processo de bosonização é consistente.

Comparando a bosonização em níveis de Landau com outras propostas de bosonização bidimensional, vemos que ela se assemelha mais à bosonização da FS, visto que, em ambos os casos, o problema bidimensional acaba sendo dividido em vários problemas unidimensionais. Mas, deve-se ter em mente que este tipo de abordagem só é vantajosa quando há conservação de carga nos canais de divisão do problema. Caso contrário, o tratamento dos processos de transferência de carga (como o “umklapp” em 1D) acaba sendo muito complicado.

Na bosonização da FS, vimos que, para os problemas que envolvem interações bem comportadas (aquelas que têm um momentum de transferência característico que não ultrapassa o tamanho do “patch”) esta condição é satisfeita, pois a carga de cada “patch” se conserva (simetria $U^{N_p}(1)$).

Na seção seguinte, mostraremos uma aplicação do método que desenvolvemos em que a condição de conservação de carga por canal também é satisfeita.

2.4. O problema do “X-Ray edge” no campo magnético³

É sabido, desde 1967, que os processos envolvidos na física de muitos corpos podem ter um efeito dramático no espectro de absorção ótica de um gás de elétrons degenerado. Basicamente, dois *efeitos de muitos corpos* competem na formação do padrão de absorção dos metais, na faixa de energia do limiar de absorção dos raios-X: A *catástrofe de ortogonalidade de Anderson* [49] (AOC) e a *Singularidade Mahan Nozieres e de Dominicis* [50, 52] (MNDS).

A unificação destes fenômenos e a previsão de como eles contribuem para o padrão de absorção de raios-X nos metais, foi feita em 1969, quase simultaneamente, por *Nozieres e de Dominicis* [52], através da solução diagramática exata do modelo proposto por *Mahan*, e por *Schotte e Schotte* [47], pela bosonização das excitações de baixa energia do gás de elétrons, inspirada na bosonização de *Tomonaga* [11].

O modelo adotado nestes trabalhos foi, *essencialmente*, o mesmo e está representado por uma Hamiltoniana do tipo

$$(2.4.1) \quad H = H_0^{(e)} + H_0^{(h)} + H_I^{(e-h)}.$$

³Vários autores chamam este problema de “Singularidade do Nível de Fermi” (FES). Aqui, adotamos este título por razões históricas, embora, como veremos, as escalas de energia envolvidas no problema sejam bem inferiores às dos Raios X.

Sendo que, $H_0^{(e)}$ representa a Hamiltoniana do **gás de fermions livres**, $H_0^{(h)}$ é a Hamiltoniana do **buraco de massa infinita**, criado em um “nível de caroço” do metal no processo de absorção, e $H_I^{(e-h)}$ a Hamiltoniana de **interação local** entre o buraco e o gás de elétrons.

A forma dos três termos de H pode ser justificada, quando o sistema físico de interesse é um metal, por três razões básicas [48]

1. Nos metais normais (aqueles que obedecem à teoria de Landau do líquido de Fermi) as correlações entre os elétrons são tais que as excitações neutras de baixa energia se comportam como pares elétron-buraco “vestidos”, bem descritos numa **aproximação de partículas livres renormalizadas**.
2. O nível de caroço normalmente é muito profundo (energia de excitação na faixa dos Raios-X), fazendo com que o processo de “**hopping**” do buraco entre íons vizinhos (“recoil”) seja, frequentemente, **desprezível**.
3. O tempo de resposta do gás de elétrons ao aparecimento repentino de uma carga positiva (buraco), no processo de absorção da radiação, é da ordem do inverso da frequência de *plasmon* (ω_p). Assim, quando o potencial do buraco é formado, o gás de elétrons rapidamente blinda este potencial Coulombiano, reduzindo o seu alcance. Daí torna-se bastante razoável uma aproximação de **interação local** para a interação entre o buraco e o gás de elétrons.

De acordo com a teoria de *Nozieres e de Dominicis* para o “X-ray edge”, se denominarmos ω como a frequência da radiação, medida a partir do limiar de absorção, o padrão de intensidade próximo ao limiar será qualitativamente dado por uma lei de potência do tipo,⁵

$$I(\omega) \sim \omega^{(-2\delta_B/\pi + (\delta_B/\pi)^2)},$$

que é divergente ou convergente, dependendo do efeito predominante e onde $\delta_B/\pi = -V_0\rho_F$ é o “phase-shift” na aproximação de Born, com $\rho_F = \frac{m}{2\pi\hbar^2}$

Por um lado, a AOC provoca uma redução da intensidade, próxima ao limiar de absorção, na forma de uma lei de potência $\omega^{(\delta_B/\pi)^2}$, decorrente de uma espécie de regra de seleção para transição entre o estado inicial (sem o potencial do buraco) e o estado final (com o potencial e buraco). Por outro, a MNDS leva a uma divergência desta intensidade, também na forma de lei de potência $\omega^{-2\delta_B/\pi}$, devida à divergência do número e estados finais para este processo. Ambos os comportamentos, convergente ou divergente, na verdade, têm origem na chamada “divergência do infra-vermelho”. Isto é, por não haver “gap” para a formação de pares elétron-buraco na vizinhança da superfície de Fermi, o número destes pares, formados quando do aparecimento repentino do potencial de buraco, acaba sendo divergente.

⁵A expressão abaixo é obtida tratando-se o potencial espalhador na aproximação de Born e incluindo apenas espalhamento em onda S. Na verdade, a expressão obtida por *Nozieres e de Dominicis* é mais geral e envolve os “phase-shifts” em todos os canais de momento angular. Aqui, adotaremos esta aproximação por simplicidade.

Este resultado parece concordar bem com o espectro dos cinco primeiros metais da tabela periódica, muito embora os efeitos da estrutura de banda destes metais dificulte uma análise, à luz dos efeitos de muitos corpos.

Correções aos argumentos acima foram introduzidas em uma série de trabalhos posteriores, incluindo efeitos de blindagem não instantânea e "recuo do buraco" [48].

2.4.1. Gás de elétrons em 2D. Nos experimentos realizados com gases de elétrons bidimensionais formados em heteroestruturas de semicondutores, normalmente, adota-se um modelo semelhante ao usado no estudo dos metais, com a seguinte correspondência: $H_0^{(e)}$ representa a Hamiltoniana de um gás de fermions livres em 2D, $H_0^{(h)}$ representa a Hamiltoniana do buraco na banda de valência (localizado por defeitos da heteroestrutura) e $H_I^{(e-h)}$ a Hamiltoniana de interação local entre o buraco na banda de valência e o gás de elétrons.

É claro que, neste caso, a escala de energia do limiar de absorção e emissão não é mais a dos Raios-X, mas sim da ordem da energia da luz visível.

Embora esta correspondência com o problema do "X-Ray edge" nos metais pareça adequada, nos semicondutores, a hipótese 2 é a mais frágil, pois, ao contrário do "buraco de caroço", o buraco na banda de valência está mais sujeito ao "recuo", o que geralmente atenua os efeitos de *Anderson e Mahan* [54, 55]. Mesmo assim, há vários experimentos de foto-emissão em que os autores alegam terem observado a *singularidade no nível de Fermi* [56, 57].

Mais recentemente, também foram realizados experimentos de tunelamento ressonante [61, 62, 63], onde encontraram-se fortes evidências deste efeito, atribuindo o aumento na corrente de tunelamento à *singularidade do nível de Fermi*. Em tais experimentos, o buraco fica localizado num nível 0D de um poço quântico, a uma distância h na direção perpendicular à do gás de elétrons. A corrente devida ao tunelamento entre este nível localizado e o gás de elétrons é, então, medida em função do potencial de "bias", que regula a diferença de energia entre o nível de Fermi do gás de elétrons e a energia do nível localizado.

Em ambos os casos, basicamente, é sondada a densidade espectral do gás de elétrons (ou densidade de estados de tunelamento (TDOS)) na presença de um potencial perturbador. De qualquer forma, o ingrediente essencial para a observação da *singularidade ao nível de Fermi* é a localização do buraco.

Além do recuo do buraco, a proximidade de outras sub-bandas do poço quântico em que está localizado o elétron pode dificultar a observação dos *efeitos de muitos corpos* nos processos de foto-emissão e absorção.

2.4.2. Gás de elétrons em 2D no campo magnético[46]. Na presença do campo magnético externo, o gap ciclotrônico inibe a divergência do infra-vermelho, impedindo a formação de qualquer singularidade no limiar de absorção/emissão. Todavia, como demonstraremos, ainda há a manifestação dos efeitos previstos por *Mahan e Anderson*.

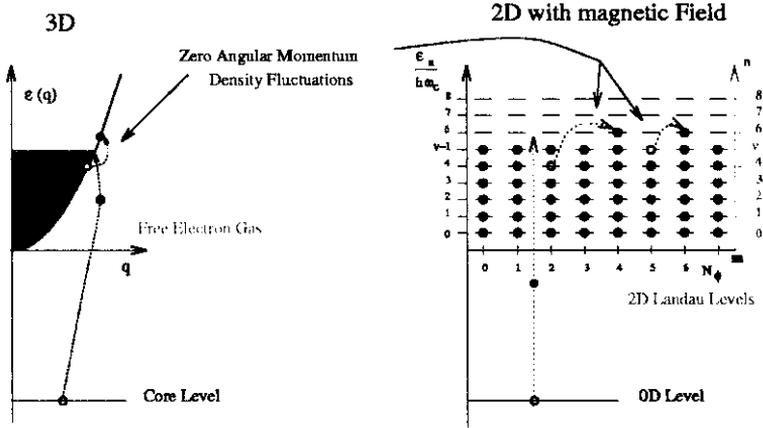


FIGURA 2.4.1. Esquema comparativo entre o processo de absorção em um gás de elétrons 2D no campo magnético e um metal a campo zero.

Os experimentos realizados com o campo magnético externo revelam que o gás de partículas independentes é uma boa aproximação, havendo, entretanto, uma pequena renormalização do gap ciclotrônico, devida a efeitos de correlação [57, 64].

Então, o modelo adotado para estudarmos esta situação é semelhante ao descrito na equação (2.4.1), sendo que a Hamiltoniana livre $H_0^{(e)}$, neste caso, refere-se aos níveis de Landau do gás de fermions em 2D na presença do campo magnético externo:

$$H_0^{(e)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m_z = -n}^{N_\phi - n} (\hbar\omega_c n - \mu) a_{n,m_z}^\dagger a_{n,m_z}.$$

Note-se que a representação da degenerescência adotada aqui difere um pouco da utilizada na equação (2.1.3). Na verdade, estamos trabalhando com operadores a_{n,m_z} que criam fermions em canais de momento angular $m_z = m - n$, sendo que $a_{n,m_z} \equiv c_{n,m_z+n}$. Como veremos a seguir, no presente caso, a representação com auto-estados de momento angular é mais útil, já que todos os processos de “shake-up”, produzidos por um potencial esfericamente simétrico, conservam o momento angular.

Já a Hamiltoniana do buraco, aproximaremos por

$$H_0^{(h)} = \hbar\omega_0 d^\dagger d,$$

onde d^\dagger cria um buraco em um nível não degenerado de energia $-\hbar\omega_0$ (medida a partir do potencial químico do gás de elétrons). Assume-se que a função de onda deste nível seja fortemente localizada na origem e que tenha uma simetria tipo onda “s”.

Aqui, a hipótese de localização do buraco na Hamiltoniana $H_0^{(h)}$ possui as mesmas restrições que no caso sem campo. Contudo, o recuo pode ser observado nas transições do buraco entre seus níveis de Landau.

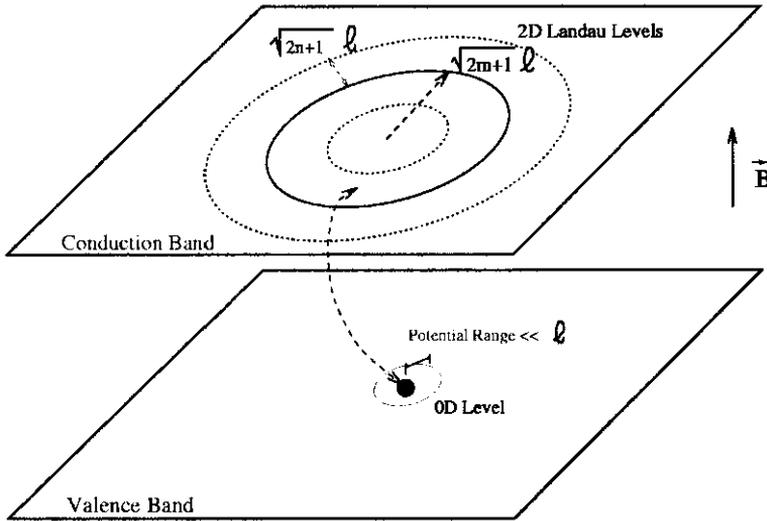


FIGURA 2.4.2. Modelo simplificado para tratar o problema do "X-Ray edge" em um gás de elétrons 2D na presença de um campo magnético uniforme.

Por último, consideraremos que a interação elétron-buraco se dá através de um potencial esfericamente simétrico, de forma que o momento angular eletrônico seja conservado nos processos de espalhamento. Inspirados no trabalho de *Schotte* e *Schotte*, [47] representaremos este acoplamento por um potencial de contato, centrado na origem,

$$H_I^{(e-h)} = V_0 \Psi^\dagger(0) \Psi(0) d^\dagger d,$$

onde $\Psi(0) = \sum_{n, m_z} \psi_{n, m_z}(0) a_{n, m_z}$ é o campo fermiônico em $\vec{r} = 0$. Isto simplifica consideravelmente a análise, já que as funções de onda com $m_z \neq 0$ se anulam na origem, $\psi_{n, m_z}(0) = \frac{\delta_{m_z, 0}}{\sqrt{2\pi \ell^2}}$, e, portanto, não são afetadas pelo potencial.

Daí, definindo $\delta_B/\pi = -V_0 \rho_F$, com $\rho_F = \frac{m}{2\pi \hbar^2}$ sendo a densidade de estados a $B = 0$, chegamos à seguinte Hamiltoniana de interação:

$$H_I^{(e-h)} = -\hbar \omega_c \frac{\delta_B}{\pi} \sum_{n', n} a_{n', 0}^\dagger a_{n, 0} d^\dagger d.$$

Analogamente ao trabalho de *Schotte* e *Schotte*, δ_B pode ser identificado como o "phase shift" do potencial na aproximação de Born.

Deve-se ter em mente que esta hipótese de um potencial local é uma aproximação superficial, pois a blindagem em um gás de elétrons no campo magnético depende da intensidade do campo.

Apesar disso, como vemos na figura 2.4.2, se o potencial tiver um alcance muito menor que o comprimento magnético $\ell = 250 \text{ \AA} / \sqrt{B(\text{Tesla})}$ (que normalmente é o caso para campos produzidos em laboratório), os únicos estados afetados são os de amplitude não nula na origem, ou seja, aqueles estados em que $m_z = 0$ (ou

$n = m$). Mesmo assim, é de se esperar que a constante fenomenológica V_0 dependa do campo magnético. Isto seria uma possível explicação para o “crossover” entre as intensidades dos vários picos de emissão do experimento de *J. Rubio et. al*[64] :

2.4.3. Solução do modelo. Como é feito no caso sem campo magnético, consideramos que o aparecimento (desaparecimento) repentino do potencial do buraco no processo de absorção (emissão) gera pares elétron-buraco com momento angular total nulo (Isto é perfeitamente justificável [58] quando a função de onda do buraco tem simetria esférica).

Assim, desprezando a dependência do elemento de matriz de dipolo, podemos, através da regra de ouro de Fermi, escrever a taxa de absorção como:

$$I(\omega) \propto \sum_f \left| \langle f | c_0^\dagger(0) | G_0 \rangle \right|^2 \delta \left(\omega - \omega_0 + \frac{E_0 - E_f}{\hbar} \right),$$

onde a soma abrange sobre todos os estados finais $|f\rangle$ do gás de elétrons com um elétron adicionado no estado fundamental $|G_0\rangle$.

Esta taxa de absorção pode ser reescrita como

$$(2.4.2) \quad I_a(\omega) \propto \text{Re} \int_0^\infty dt e^{i(\omega - \omega_0)t} K_{m_z=0}(0, t),$$

onde $K_{m_z=0}(0, t)$ é obtido substituindo $m, m' \rightarrow m_z$ na equação (2.3.1) e tomando a média no estado fundamental $|G_0\rangle$.

Desta forma, o problema se resume ao cálculo do propagador fermiônico $K_{m_z=0}(0, t)$, sendo que a dinâmica fermiônica é governada pela Hamiltoniana (2.4.1). Este cálculo é feito com a bosonização em níveis de Landau, da seguinte forma :

Utilizando a representação de Heisenberg para o operador

$$(2.4.3) \quad \begin{aligned} a_{m_z}^\dagger(\theta, t) &= \sum_n \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{2\pi}} a_{n, m_z}^\dagger(t) \\ &= \frac{e^{i(\nu-1/2)\theta}}{\sqrt{2\pi}} e^{i\Theta_{m_z}^*(\theta, t)} F_{m_z} \end{aligned}$$

que cria um fermion no canal de momento angular m_z , na fase θ e no instante t , teremos

$$(2.4.4) \quad K_{m_z=0}(0, t) = \langle G_0 | e^{iH_i t/\hbar} a_0(0) e^{-iH_f t/\hbar} a_0^\dagger(0) | G_0 \rangle,$$

onde as Hamiltonianas H_i e H_f representam, respectivamente, as Hamiltonianas do gás de elétrons antes e depois do processo de absorção.

Lembrando que, para este problema, apenas o canal $m_z = 0$ é relevante, podemos escrever as Hamiltonianas H_i e H_f em termos de operadores bosônicos $b_{n, m_z}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_p a_{n+p, m_z}^\dagger a_{p, m_z}$ como os que definimos em (2.2.2) como:

$$H_i = \hbar\omega_c \sum_{n=1}^{\infty} n b_{n,0}^\dagger b_{n,0},$$

para a Hamiltoniana antes da absorção (sem o potencial de buraco), e

$$\begin{aligned} H_f &= H_i + H_f^{(e-h)} \\ &= \hbar\omega_c \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n b_{n,0}^\dagger b_{n,0} - \frac{\delta_B}{\pi} \sqrt{n} (b_{n,0}^\dagger + b_{n,0}) \right\}, \end{aligned}$$

para a Hamiltoniana após a absorção (buraco presente). Logo, na representação bosônica, o potencial do buraco é apenas um termo forçante de deslocamento que gera a transformação unitária

$$(2.4.5) \quad T = \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\delta_B}{\pi\sqrt{n}} (b_{n,0} - b_{n,0}^\dagger) \right].$$

Fora um termo constante, que não afeta a dinâmica, H_f e H_i estão conectadas pela relação $H_f = T H_i T^\dagger$, o que simplifica a expressão (2.4.4) para

$$K_0(0, t) = \langle G_0 | \tilde{a}_0(0, t) \tilde{a}_0^\dagger(0, 0) | G_0 \rangle,$$

onde o novo operador fermiônico $\tilde{a}_{m_z}(\theta, t)$ está definido por

$$(2.4.6) \quad \tilde{a}_{m_z}(\theta, t) = e^{iH_i t/\hbar} a_{m_z}(\theta) T e^{-iH_f t/\hbar}.$$

Podemos interpretar (2.4.6) como um operador que cria um elétron e simultaneamente desloca os campos bosônicos, ou melhor, gera excitações elétron-buraco no gás de elétrons. Então, usando as equações (2.4.3) e (2.4.5), de forma análoga ao que achamos em (2.3.7) teremos:

$$K_0(0, t) = \frac{1}{2\pi\epsilon} e^{J_0(0,t)}$$

onde, desta vez

$$J_0(0, t) = \left(1 - \frac{\delta_B}{\pi}\right)^2 \ln \left(\frac{1 - e^{-\epsilon}}{1 - e^{-i(\omega_c t - i\epsilon)}} \right),$$

o que transforma o propagador (2.4.4) em

$$K_0(0, t) = \frac{1}{2\pi\epsilon} \left(\frac{1 - e^{-\epsilon}}{1 - e^{-i(\omega_c t - i\epsilon)}} \right)^{(1 - \frac{\delta_B}{\pi})^2}.$$

Inserindo este resultado na equação (2.4.2) nós finalmente obtemos uma expressão para o espectro de absorção

$$(2.4.7) \quad I_a(\omega) \propto \sum_{n=0}^{\nu-1} \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(n + 1)\Gamma(\alpha + 1)} \delta^\epsilon(\omega - \omega_0 - n\omega_c)$$

onde $\alpha = -2\delta_B/\pi + (\delta_B/\pi)^2$, $\Gamma(x)$ é a função gamma, $\delta^\epsilon(x)$ é uma Lorentziana de largura ϵ , que tende a uma função delta quando $\epsilon \rightarrow 0$.

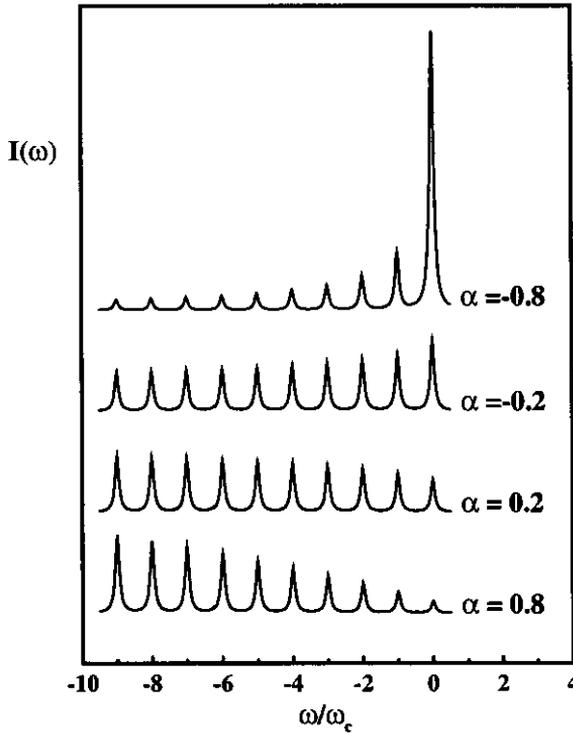


FIGURA 2.4.3. Espectro de emissão para 4 valores de δ_B entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$.

A taxa de emissão é obtida de forma semelhante. No caso, a diferença é que o sistema está inicialmente no autoestado $|G\rangle$ da Hamiltoniana total H com o buraco localizado na origem. Assim, a taxa de emissão é dada por

$$I_e(\omega) \propto \sum_f |\langle f | c_0(0) | G \rangle|^2 \delta\left(\omega - \omega_0 - \frac{E'_0 - E_f}{\hbar}\right),$$

onde E'_0 é a energia do estado fundamental de H . O resto segue igualmente ao caso da absorção e, no final, pode-se mostrar que o processo de emissão $I_e(\omega)$ tem a mesma forma da equação (2.4.7), com $n\omega_c$ trocado por $-n\omega_c$.

Consequentemente, ambos os espectros de emissão e absorção consistem em uma série de picos de intensidade $\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)}$, sendo que espectro de emissão está ilustrado na figura 2.4.3.

O resultado que obtivemos mostra a existência de um único parâmetro α determinando a intensidade relativa dos picos e que este parâmetro é o mesmo que governa o caso de $B = 0$. Ocorre, para $\alpha < 0$, um aumento na taxa de emissão próxima ao limiar ($\omega = 0$) devido a um crescimento no número de estados finais deste tipo de processo. Por outro lado, para $\alpha > 0$, observa-se uma redução na taxa de emissão próxima ao limiar, que pode ser relacionada com uma predominância da *Catástrofe de Ortogonalidade de Anderson*.

Devemos enfatizar, no entanto, que a famosa lei de potência do caso $B = 0$ não se manifesta quando o campo magnético é ligado. A causa disso é o aparecimento do gap ciclotrônico, que impede a "divergência do infra-vermelho", presente quando $B = 0$. De fato, há uma grande diferença entre uma lei de potência para o envelope dos picos e a lei que encontramos. Uma lei de potência como a do caso $B = 0$ prediria que a intensidade relativa entre dois picos adjacentes depende exponencialmente de α , isto é,

$$\text{Lei de potencia} \rightarrow \frac{I(n\omega_c)}{I((n-1)\omega_c)} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^\alpha.$$

Já a intensidade relativa entre dois picos vizinhos, obtida pela equação (2.4.7), depende linearmente de α :

$$\frac{I_e(n\omega_c)}{I_e((n-1)\omega_c)} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha)} = 1 + \frac{\alpha}{n}.$$

Ou seja, o campo magnético não só divide o espectro de emissão em picos equidistantes, mas também muda sensivelmente a dependência em α da intensidade relativa dos picos. Isto está de acordo com os resultados numéricos de *Uenoyama e Sham*[55] para o caso em que a massa do buraco é infinita e com os resultados experimentais de *Skolnick et al.*[56]⁹ apresentados na figura 2.4.4

De qualquer forma, no limite de $B \rightarrow 0$ (que equivale a $\omega_c \rightarrow 0$ e $\nu \rightarrow \infty$), num pequeno intervalo de frequências ω haverá um número crescente $n \gg 1$ de picos consecutivos. Logo, usando a fórmula assintótica $\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n)} \sim n^\alpha$ para $n \gg 1$, podemos ver que o envelope dos picos volta a se comportar como a lei e potência usual $I(\omega) \sim \left(\epsilon \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_c}\right)^\alpha$. Mais ainda, como fisicamente ϵ^{-1} deve ser da ordem da largura de banda, ou seja $\frac{\epsilon}{\nu} = B \frac{S}{N\phi_0}$, a constante $\epsilon/\omega_c \sim \hbar\rho_F S/N$ desempenha o papel de um "cutoff" não universal.

⁹Existe ainda uma controvérsia a respeito destes resultados experimentais, no que diz respeito à observação da singularidade de Mahan. No entanto, acreditamos que a lei encontrada para intensidade relativa dos picos de emissão esteja, qualitativamente, de acordo com as medidas feitas na presença do campo magnético.

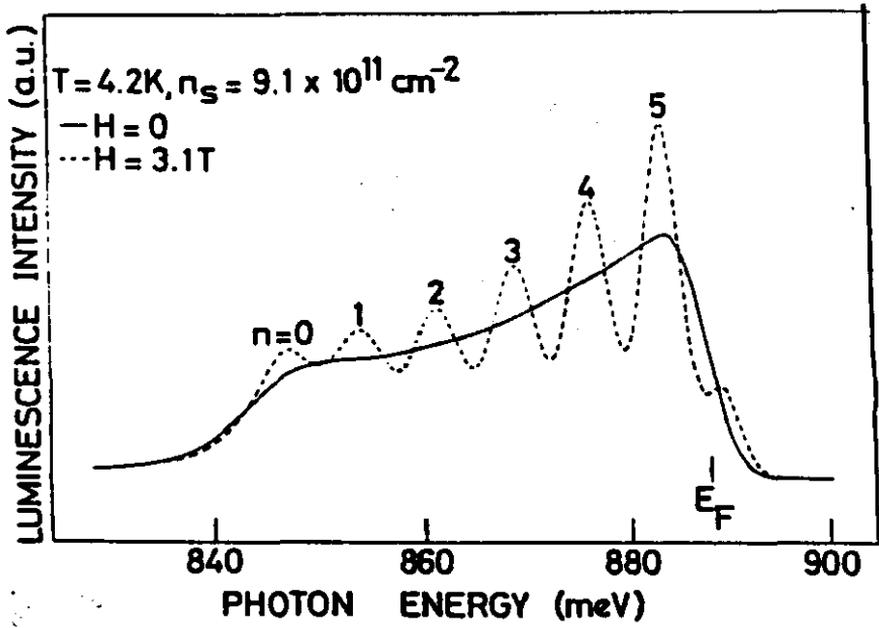


FIGURA 2.4.4.

CAPÍTULO 3

Sistemas interagentes no campo magnético fraco: elétrons normais

A partir de agora, mostraremos como as propriedades dos sistemas fermiônicos interagentes no campo magnético podem ser obtidas através da bosonização em níveis de Landau. Em geral, nosso interesse será direcionado para as interações da forma

$$(3.0.8) \quad H_I = \frac{1}{2} \int d^2\vec{r} J_\mu(\vec{r}) V_{\mu\nu}(\vec{r} - \vec{r}') J_\nu(\vec{r}'),$$

ou seja, interações corrente-corrente, onde $J_\mu(\vec{r}) = (\rho(\vec{r}), \vec{J}(\vec{r}))$ é o operador corrente generalizada e $V_{\mu\nu}(\vec{r} - \vec{r}')$ é o vértice da interação. Vale lembrar que a interação Coulombiana é um caso particular desta interação, com $V_{\mu\nu}(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{e^2}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta_{\mu 0} \delta_{\nu 0}$.

Outro exemplo deste tipo de interação, e que será visto mais adiante, aparece quando um sistema de elétrons confinados em 2D é submetido a um campo magnético suficientemente forte para produzir um fator de preenchimento dos níveis de Landau da ordem de $\nu = 1/2p$ (onde p é um número inteiro). Sob estas condições, a dinâmica dos elétrons pode ser descrita [75, 71, 74] pela dinâmica de um sistema de fermions compostos interagentes (sem spin) num campo magnético fraco, cujas interações são do tipo (3.0.8).

Tendo em vista que o potencial em (3.0.8) só depende da distância entre as cargas, é conveniente adotar uma representação de momentum \vec{q} para os operadores J_μ , ou seja, $\tilde{J}_\mu(\vec{q}) = \int d^2\vec{r} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} J_\mu(\vec{r})$, já que este é o número quântico conservado. No entanto, apesar das interações conservarem o momentum das flutuações de carga e de corrente, o mesmo não ocorre com os números quânticos dos fermions. Sendo assim, as interações, não só geram transições entre níveis de Landau, como também induzem transições entre diferentes centros de órbita.

Isso fica mais nítido a partir da representação da Hamiltoniana (3.0.8) na base de níveis de Landau:

$$H_I = \sum_{\{n,m\}} V_{\{n,m\}} c_{n'_2, m'_2}^\dagger c_{n_2, m_2} c_{n'_1, m'_1}^\dagger c_{n_1, m_1},$$

onde $V_{\{n,m\}}$ é o elemento de matriz do potencial de interação nos estados com números quânticos $\{n, m\} = n_1, m_1, n_2, m_2, n'_1, m'_1, n'_2, m'_2$.

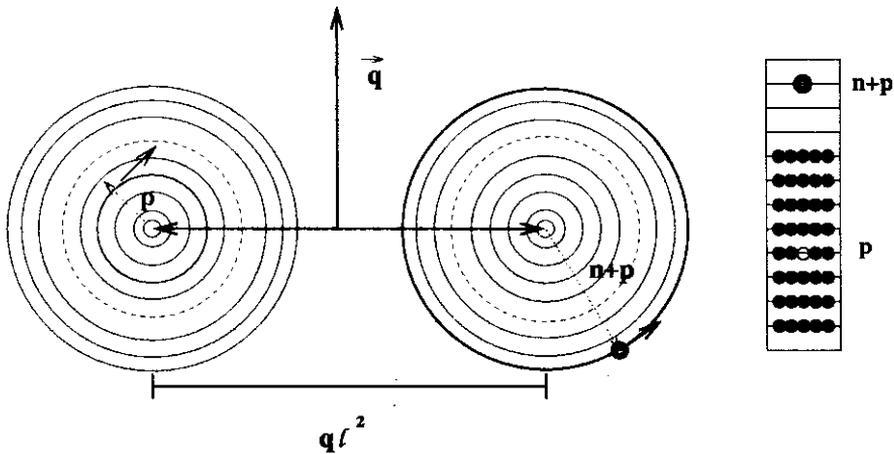


FIGURA 3.1.1. Magneto-Exciton

Assim, de acordo com a analogia que estabelecemos entre este problema e o modelo de um sistema unidimensional de N_ϕ canais chirais, podemos identificar na Hamiltoniana de interação termos equivalentes aos de “forward-scattering”[5] ($m'_2 = m_2$ e $m'_1 = m_1$) e termos equivalentes ao “backward-scattering” ou “umklapp” ($m'_2 \neq m_2$ e $m'_1 \neq m_1$).

Este problema pode ser contornado, adotando-se uma representação mais conveniente para os pares partícula-buraco, que já tenha as transições entre centros de órbita embutidas na sua definição.

3.1. Bosonização dos magneto-excitons

Um fato notável sobre as excitações partícula-buraco é que, apesar de não ser possível construir autoestados do observável centro de órbita \vec{R}_0 para partículas ou buracos individualmente (devido à não comutatividade das componentes deste operador), pode-se fazer isso para o operador centro de massa dos centros de órbita $\vec{R}_0^{(p-h)} = \vec{R}_0^{(p)} + \vec{R}_0^{(h)}$ do par partícula-buraco.

O mesmo ocorre com os autoestados do operador momentum $\vec{P}_0^{(p-h)}$, canonicamente conjugado a $\vec{R}_0^{(p-h)}$. Neste caso, os autoestados de $\vec{P}_0^{(p-h)}$, representados esquematicamente na figura 3.1.1, formam uma base completa no espaço de excitações neutras de um par¹, conhecidos como *magneto-excitons*[36]. Tais estados são descritos[34] através da seguinte superposição (Apêndice D)

$$(3.1.1) \quad e_{n,p}^\dagger(\vec{q}) |G\rangle = e^{-\frac{(q\ell)^2}{4}} \sum_{m',m=0}^{\infty} G_{m',m}(\ell\vec{q}) c_{n+p,m'}^\dagger c_{p,m} |G\rangle,$$

¹Note-se que estes operadores geram também transições entre centros de órbita, ao contrário dos bosons definidos em (2.2.2) que geram apenas transições entre níveis de Landau de um mesmo centro de órbita.

onde, $q = |\vec{q}|$ e a função G é definida pelas equações[33] ($n \geq 0$ e $p \geq 0$)

$$(3.1.2) \quad \begin{aligned} G_{n+p,p}(\vec{q}) &= \sqrt{\frac{p!}{(n+p)!}} \left(\frac{-iq_x + q_y}{\sqrt{2}} \right)^n L_p^n \left(\frac{q^2}{2} \right) \\ G_{p,p+n}(\vec{q}) &= G_{n+p,p}^*(-\vec{q}), \end{aligned}$$

sendo L_p^n polinômios de Laguerre generalizados.

Como se pode ver na definição (3.1.1), ao contrário do que acontece com as excitações de pares partícula-buraco que estudamos na seção 2.2, os *magneto-excitons* não conservam o centro da órbita de seus constituintes. Há aqui uma soma sobre todos os valores possíveis de m e m' para um dado vetor \vec{q} fixo, que vem a ser o momentum conservado do par elétron-buraco no campo magnético, como ilustrado na figura 3.1.1. Além disso, o valor médio da posição relativa $\vec{r}^{(p-h)} = \vec{r}^{(p)} - \vec{r}^{(h)}$ neste estado,

$$\langle \vec{r}^{(p-h)} \rangle_{n,p,\vec{q}} = \ell^2 \hat{z} \times \vec{q}$$

é um vetor perpendicular a \vec{q} e independente de n e p .

Ou seja, numa excitação do tipo (3.1.1), os centros de órbita da partícula e do buraco se movem paralelamente, com momentum \vec{q} perpendicular à sua separação $q\ell^2$.

Estes *magneto-excitons* serão, daqui para frente, a base da construção da segunda forma de bosonização no campo magnético, inspirada na bosonização vetorial descrita na seção 1.2.1. Na verdade, pode-se traçar um paralelo entre estas excitações elementares e as excitações de par elétron-buraco na bosonização unidimensional: aqui, utilizaremos os *magneto-excitons* para expandirmos os **campos bosônicos vetoriais**, da mesma forma que lá foram utilizados os **pares elétron-buraco** para expandir os **campos bosônicos escalares**. Este será o principal objetivo desta seção.

Começemos por determinar os operadores densidade de carga e de corrente em termos dos *magneto-excitons*:

Utilizando a expansão dos campos fermiônicos em níveis de Landau da equação (2.1.2), pode-se mostrar que a componente de Fourier do operador densidade, $\rho_{\vec{q}} = \int d^2\vec{r} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} \Psi^\dagger(\vec{r}) \Psi(\vec{r})$, é dada por

$$\rho_{\vec{q}} = \sum_{n',n,m',m} e^{-\frac{(q\ell)^2}{2}} G_{n',n}(\ell\vec{q}^*) G_{m',m}(\ell\vec{q}) c_{n',m'}^\dagger c_{n,m}.$$

onde definimos $\vec{q}^* = q_x \hat{x} - q_y \hat{y}$.

Isto nos permite, através de um rearranjo dos somatórios, escrever as flutuações de densidade de carga como *superposições dos magneto-excitons* (3.1.1), da seguinte forma

$$\rho_{\vec{q}} = \rho_{0,\vec{q}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \rho_{n,\vec{q}}^{\dagger} + \rho_{n,-\vec{q}} \right\},$$

onde as tais *superposições de magneto-excitons* são dadas por

$$\rho_{n,\vec{q}}^{\dagger} = \sum_{p=0}^{\infty} e^{-\frac{q^2 \ell^2}{4}} G_{n+p,p}(\ell \vec{q}^*) e_{n,p}^{\dagger}(\vec{q}).$$

O termo

$$\rho_{0,\vec{q}} = \sum_{m,m',p=0}^{\infty} e^{-\frac{q^2 \ell^2}{2}} G_{p,p}(\ell q) G_{m',m}(\ell \vec{q}) c_{p,m'}^{\dagger} c_{p,m}$$

não se caracteriza exatamente por uma superposição de *magneto-excitons*, já que o elétron e o buraco estão no mesmo nível de Landau. Este operador se parece mais com um modo de “flutuação zero”, como o introduzido por *Haldane* [14] na bosonização unidimensional. Um tratamento da dinâmica das transições intra-níveis de Landau foi feito nos trabalhos [31, 39]

Então, de acordo com o que discutimos a respeito das excitações neutras, o operador $\rho_{n,\vec{q}}^{\dagger}$ cria uma flutuação de densidade de carga de energia $n\hbar\omega_c$, enquanto o operador $\rho_{0,\vec{q}}$ gera transições intra-níveis de Landau de energia nula. Tais afirmações são justificadas através do cálculo do comutador destes operadores com a Hamiltoniana (2.1.3):

$$\left[H_0, \rho_{n,\vec{q}}^{\dagger} \right] = n\hbar\omega_c \rho_{n,\vec{q}}^{\dagger}.$$

Mas, o passo mais importante para a bosonização destas excitações elementares vem da constatação de que, para $q\ell \ll 1$, os operadores $\rho_{n,\vec{q}}^{\dagger}$ obedecem a uma álgebra bosônica ($n > 0$), dada por

$$\left[\rho_{n,\vec{q}}, \rho_{n',\vec{q}'}^{\dagger} \right] = N_{\phi} \mathcal{G}_n(q) \delta_{\vec{q},\vec{q}'} \delta_{n,n'},$$

onde

$$\mathcal{G}_n(q) = \sum_{p=\nu-1}^{\nu-n} e^{-\frac{q^2 \ell^2}{2}} |G_{n+p,p}(\vec{q}\ell)|^2, \text{ para } n > 0$$

é, essencialmente, o “overlap” entre as funções de onda do elétron e do buraco.

Neste trabalho, não entraremos nos detalhes das transições intra-níveis de Landau ($n = 0$). O único aspecto que abordaremos a este respeito, para complementar a construção da bosonização, será a definição de uma fase canonicamente conjugada $\Theta_{0,\vec{q}}$, tal que $[\rho_{0,\vec{q}}, \Theta_{0,-\vec{q}}] = i\mathcal{N}_{\phi} \mathcal{G}_0(q) \delta_{\vec{q},-\vec{q}}$, onde $\mathcal{G}_0(q) = e^{-\frac{q^2 \ell^2}{2}} |G_{\nu,\nu}(\vec{q}\ell)|^2$.

Podemos ainda normalizar os operadores $\rho_n(\vec{q})$, de forma que eles obedecem a regras de comutação genuinamente bosônicas, definindo, para $n > 0$

$$b_n(\vec{q}) \equiv \frac{\rho_{n,\vec{q}}}{\sqrt{N_\phi \mathcal{G}_n(q)}}.$$

Tal como na bosonização em centros de órbita, este operador também é ordenado normalmente, ou seja, ele aniquila o estado fundamental ($b_n(\vec{q})|G\rangle \equiv 0$). Isto nos permite escrever:

$$H_0 = \hbar\omega_c \sum_{\vec{q}} \sum_{n=1} n b_n^\dagger(\vec{q}) b_n(\vec{q}).$$

Em nosso caso, nos interessam particularmente as situações em que o campo magnético seja fraco o suficiente para que $\nu \gg 1$. Sob esta condição, é possível fazer uma série de simplificações, especialmente nas funções $G_{n+p,p}$. Enfocando as excitações de baixa energia ($n \ll \nu$) e grande comprimento de onda ($q\ell \ll \sqrt{p}$), podemos utilizar a aproximação

$$e^{-\frac{q^2}{4}} G_{n+p,p}(\vec{q}) \simeq e^{-\frac{q^2}{i6\pi\nu}} e^{-in(\arg(\vec{q})-\pi/2)} \mathcal{J}_n(q\sqrt{2\nu+1}),$$

onde \mathcal{J}_n é a função de Bessel de ordem n .

Com isso,²

$$(3.1.3) \quad \mathcal{G}_n(q) \simeq \begin{cases} n\mathcal{J}_n^2(qR_c) & \text{se } n > 0 \\ \mathcal{J}_0^2(qR_c) & \text{se } n = 0 \end{cases}$$

sendo o raio da última órbita ciclotrônica ocupada, $R_c = \ell\sqrt{2\nu+1}$ (raio ciclotrônico), onde os processos de mais baixa energia ocorrem, a nova escala característica de comprimento.

As mesmas aproximações se aplicam ao operador densidade de corrente $\vec{J}(\vec{r})$, que para um sistema de fermions no campo magnético é dado por

$$\vec{J}(\vec{r}) = \frac{e}{2} \{ \Psi^\dagger(\vec{r}) \vec{v} \Psi(\vec{r}) + (\vec{v} \Psi^\dagger(\vec{r})) \Psi(\vec{r}) \},$$

onde $\vec{v} = \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}) \right)$ é o operador velocidade no campo magnético.

Como explicado no apêndice E, a transformada de Fourier $\vec{J}_{\vec{q}}$ deste operador também pode ser decomposta em *superposições de magneto-excitons*. Isto é feito separando $\vec{J}_{\vec{q}}$ em suas partes, longitudinal e transversa ($\vec{J}_{\vec{q}} = J_{\vec{q}}^{(l)} \hat{q} + J_{\vec{q}}^{(t)} \hat{\theta}$), onde³

$$(3.1.4) \quad J_{\vec{q}}^{(l)} = -v_F \sum_{n=1} \sqrt{N_\phi n^3} \frac{\mathcal{J}_n(qR_c)}{qR_c} \{ b_n^\dagger(\vec{q}) - b_n(-\vec{q}) \},$$

e

$$(3.1.5) \quad J_{\vec{q}}^{(t)} = -iv_f q R_c \sum_{n=1} \sqrt{N_\phi n} \mathcal{F}_n(qR_c) \{ b_n^\dagger(\vec{q}) + b_n(-\vec{q}) \}$$

²O fator $e^{-\frac{q^2}{8\pi\nu}}$ deve ser incluído nesta aproximação para garantir a convergência das integrais onde aparecem $\mathcal{G}_n(q)$. Ele será explicitamente incluído quando este for o caso.

³Nestas expressões, utilizamos a relação semi-clássica $R_c\omega_c = v_F$.

com

$$\mathcal{F}_n(x) = \left(\frac{\mathcal{J}_n(x)}{2\nu} - \frac{\mathcal{J}'_n(x)}{x} \right).$$

A componente longitudinal da corrente pode ser interpretada como uma corrente de transporte, decorrente do movimento dos centros de órbita dos *magneto-excítions*, cuja velocidade é paralela ao momentum \vec{q} .

Já a parte transversa possui duas contribuições: a primeira, também relacionada ao transporte dos centros de órbita, é devida à oscilação da distância relativa entre os centros de órbita da partícula e do buraco, perpendicular a \vec{q} . A segunda, por outro lado, tem origem no próprio movimento ciclotrônico, à semelhança dos *magneto-rotions* definidos por *MacDonald et al.* [38]. Quando o sistema é homogêneo, as correntes das órbitas ciclotrônicas se cancelam. Porém, havendo uma flutuação de densidade, as correntes não mais se cancelam, dando origem a esta esta segunda contribuição da parte transversa, a qual pode ser escrita como $\frac{\hbar}{2m} \hat{z} \times \vec{\nabla} \rho(\vec{r})$.⁴

É importante ressaltar que, mesmo com as aproximações adotadas, a equação de continuidade $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t)$ continua sendo satisfeita, pois, de acordo com (3.1.4), a parte longitudinal da corrente é tal que $iqJ_{\vec{q}}^{(l)} = \frac{-i}{\hbar} [H_0, \rho_{\vec{q}}] = -\frac{\partial}{\partial t} \rho_{\vec{q}}$.

3.1.1. Regras de soma e validade da bosonização. A validade da aproximação de bosonização pode ser testada por meio da “*f-sum rule*”. Para isso, usamos o fator de forma dinâmico $S(\vec{q}, \omega)$, definido como[4]

$$S(\vec{q}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} S(\vec{q}, t) dt,$$

onde

$$(3.1.6) \quad S(\vec{q}, t) = \langle 0 | \rho(\vec{q}, t) \rho^\dagger(0, 0) | 0 \rangle.$$

Na aproximação de bosonização, a dinâmica das flutuações de densidade é toda dominada pelos modos bosônicos, ou seja,

$$S(\vec{q}, t) = \sum_{n=1} \mathcal{G}_n(q) e^{-in\omega_c t},$$

e

$$S(\vec{q}, \omega) = \sum_{n=1} \mathcal{G}_n(q) \delta(\omega - n\omega_c).$$

⁴Além disso, como $\frac{e\hbar}{2m} = \mu_B$ é o magneton de Bohr, podemos ainda interpretar $\frac{e\hbar}{2m} \rho(\vec{r}) \hat{z} = \vec{M}(\vec{r})$ como uma magnetização e, conseqüentemente, $\frac{\hbar}{2m} \hat{z} \times \vec{\nabla} \rho(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{r})$ como uma corrente de magnetização devida à corrente orbital dos elétrons em torno de seus centros de órbita.

A “*f-sum rule*” é um resultado exato, que vem da conservação do número de partículas, válida para qualquer sistema de fermions, interagentes ou não, e garante que

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega S(\vec{q}, \omega) = \frac{N_c q^2}{2m}.$$

Para o nosso caso particular,

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega S(\vec{q}, \omega) = \omega_c \sum_{n=1}^{\infty} n \mathcal{G}_n(q).$$

Mas, se utilizarmos a aproximação (3.1.3) e a relação de soma (F.0.7) das funções de Bessel concluimos que, na aproximação de bosonização,

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega S(\vec{q}, \omega) = e^{-\frac{q^2 t^2}{4\pi\nu}} \frac{Nq^2}{2m}.$$

Ou seja, para $ql \ll \sqrt{4\pi\nu}$, as *excitações bosônicas saturam completamente a regra de soma*, tornando a bosonização um procedimento *exato* neste limite (como ocorre com RPA).

3.2. O campo vetorial bosônico

Como abordado na seção de bosonização vetorial, o campo de gauge bosônico $A^\mu \equiv (A^0, \vec{A})$ é definido de forma que a sua corrente topológica $J^\mu = (\rho c, \vec{J})$, dada por:

$$J^\mu(\vec{r}) = c\epsilon^{\mu\nu\gamma} \partial_\nu A_\gamma(\vec{r})$$

seja a própria corrente fermiônica, sendo que, para este problema, a velocidade característica de que falamos é $c = v_F = R_c \omega_c$.

É conveniente separar esta corrente em componentes longitudinal e transversa

$$\vec{J}(\vec{r}) = \vec{J}^{(l)}(\vec{r}) + \vec{J}^{(t)}(\vec{r})$$

para que, em termos do campo vetorial no gauge de Coulomb ($\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$), possamos escrever:

$$\begin{aligned} \rho &= \hat{z} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \\ \vec{J}^{(l)} &= \hat{z} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{J}^{(t)} &= v_F \hat{z} \times \vec{\nabla} A_0. \end{aligned}$$

Há mais: como \vec{A} é um campo puramente transverso, podemos decompor A^μ no espaço de momenta como

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}) &= \frac{1}{S} \sum_{\vec{q}} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} (\hat{z} \times \hat{q}) a_{\vec{q}} \\ A^0(\vec{r}) &= \frac{1}{S} \sum_{\vec{q}} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \phi_{\vec{q}}.\end{aligned}$$

Deste forma, as equações das correntes topológicas se traduzem em

$$\begin{aligned}\rho_{\vec{q}} &= iq a_{\vec{q}} \\ J_{\vec{q}}^{(t)} &= -\frac{\partial}{v_F \partial t} a_{\vec{q}} \\ \vec{J}_{\vec{q}}^{(t)} &= iq \phi_{\vec{q}},\end{aligned}$$

que, por conseguinte, permitem expandir os campos bosônicos nos magneto-excitons:

$$\begin{aligned}a_{\vec{q}} &= -iR_c \sum_{n=1} \sqrt{N_\phi n} \frac{\mathcal{J}_n(qR_c)}{qR_c} \{b_n^\dagger(\vec{q}) + b_n(-\vec{q})\} - i\frac{\rho_{0,\vec{q}}}{q} \\ \phi_{\vec{q}} &= -R_c \sum_{n=1} \sqrt{N_\phi n} \mathcal{F}_n(qR_c) \{b_n^\dagger(\vec{q}) + b_n(-\vec{q})\}\end{aligned}$$

Este é o resultado mais importante desta seção. Com ele, mesmo sem sabermos qual a Lagrangeana, nós podemos determinar completamente a dinâmica do campo vetorial $A^\mu(\vec{r})$, através da dinâmica dos modos bosônicos $b_n(\vec{q})$. Estabelecendo uma analogia, é como se tivéssemos aprendido a quantizar o “campo eletromagnético” e determinar a dinâmica dos ftons antes de aprendermos a “Lagrangeana de Maxwell”!

Agora é possível determinar, inclusive, a dinâmica das excitações topológicas do campo $A^\mu(\vec{r})$, no caso, os fermions. É o que faremos na próxima seção.

3.3. Propriedades fermiônicas

Na seção 1.2.1 vimos que o fermion pode ser expresso como uma excitação topológica do campo A^μ do tipo $\Psi(\vec{x}) \sim \sigma(\vec{x}) \mu(\vec{x})$, onde $\sigma(\vec{x})$ e $\mu(\vec{x})$ são os campos duais definidos em (1.2.1) e (1.2.4). O operador $\mu(\vec{x}) = e^{i\theta(\vec{x})}$, responsável pela criação da carga topológica propriamente dita, pode ser escrito em termos de suas componentes de Fourier como:

$$\begin{aligned}(3.3.1) \quad \theta(\vec{x}) &= \int d^2\vec{r} \vec{\Omega}(\vec{r} - \vec{x}) \cdot \vec{\Pi}(\vec{r}) \\ &= \frac{1}{S} \sum_{\vec{q}} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \vec{\Omega}_{\vec{q}} \cdot \vec{\Pi}_{\vec{q}}\end{aligned}$$

onde

$$\vec{\Pi}(\vec{r}) = \frac{1}{S} \sum_{\vec{q}} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \vec{\Pi}_{\vec{q}}$$

e

$$\vec{\Omega}_{\vec{q}} = -i \frac{\hat{z} \times \hat{q}}{q}$$

Assim, se arbitrariamente definirmos $\vec{\Pi}$ como um campo puramente transverso, já que só a componente transversa importa para $\theta(\vec{x})$, teremos

$$\vec{\Pi}_{\vec{q}} = (\hat{z} \times \hat{q}) P_{\vec{q}}$$

ou seja,

$$\theta(\vec{x}) = -\frac{i}{S} \sum_{\vec{q}} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \frac{P_{\vec{q}}}{q}.$$

Mas, por definição, $P_{\vec{q}}$ deve ser canonicamente conjugado a $a_{\vec{q}}$. Isto nos indica que ele também pode ser expandido nos operadores bosônicos,

$$P_{\vec{q}} = q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{J}_n(qR_c)}{\sqrt{N_{\phi} n}} \{b_n^{\dagger}(\vec{q}) - b_n(-\vec{q})\} - q\Theta_{0,\vec{q}}.$$

De onde finalmente concluímos que

$$(3.3.2) \quad \mu(\vec{0}) \sim e^{i \frac{1}{N_{\phi}} \sum_{\vec{q}} \left\{ \Theta_{0,\vec{q}} - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n\epsilon/2}}{n} [\rho_{n,\vec{q}}^{\dagger} - \rho_{n,\vec{q}}] \right\}}$$

3.3.1. Equivalência entre as duas formas de bosonização. Na equação (2.4.3), o operador fermiônico, separado em canais de momento angular, está representado completamente em função dos graus de liberdade bosônicos b_{n,m_z} ,

$$a_{m_z}^{\dagger}(\theta) = \frac{e^{i(\nu-1/2)\theta}}{\sqrt{2\pi}} e^{i\Theta_{m_z}^{\epsilon}(\theta)} F_{m_z},$$

onde

$$\Theta_{m_z}^{\epsilon}(\theta) = \Theta_{m_z}^0 + N_{m_z} \theta - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n\epsilon/2}}{\sqrt{n}} \{e^{in\theta} b_{n,m_z}^{\dagger} - e^{-in\theta} b_{n,m_z}\}$$

e $\Theta_{m_z}^0$ é o operador fase, definido por $[\rho_{0,m_z}, \Theta_{m_z}^0] = i\delta_{m_z, m_z'}$.⁵

O termo F_{m_z} , como foi discutido em (2.2.7) é o chamado fator de Klein, que dá a estatística fermiônica:

$$F_{m_z} = (-1)^{\sum_t^{m_z-1} N_{m_z}}.$$

Quando tratamos das características de baixa energia do problema do “X-Ray edge no campo magnético”, foi suficiente entendermos a dinâmica de um fermion

⁵ $\rho_{0,m_z} = N_{m_z}$ é número de fermions no canal de momento angular m_z .

criado na origem do centro de coordenadas. Ou seja, trabalhamos o tempo todo com o campo fermiônico na origem, dado por

$$\Psi^\dagger(\vec{r}=0) = \sum_{n,m_z} \psi_{n,m_z}^*(\vec{r}=0) a_{n,m_z}^\dagger,$$

que, pela propriedade das funções $\psi_{n,m_z}^*(\vec{r}=0)$, era proporcional ao operador fermiônico do canal de momento angular $m_z = 0$ na fase $\theta = 0$:

$$\Psi^\dagger(0) = \frac{1}{\ell} a_0^\dagger(0).$$

Mas, como foi possível bosonizar $a_0^\dagger(0)$, a relação acima conduz diretamente à representação bosônica do campo fermiônico na origem, $\Psi^\dagger(0)$:

$$\Psi^\dagger(0) = \frac{F_0}{\sqrt{2\pi\epsilon\ell^2}} e^{i\Theta_0 + i\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n\epsilon/2}}{\sqrt{n}} \{b_{n,0}^\dagger - b_{n,0}\}}.$$

Mais ainda, com a definição dos operadores bosônicos $\rho_{n,\vec{q}}$, podemos facilmente mostrar que

$$\begin{aligned} \frac{1}{N_\phi} \sum_{\vec{q}} \rho_{n,\vec{q}}^\dagger &= \sqrt{n} b_{n,0}^\dagger \\ \frac{1}{N_\phi} \sum_{\vec{q}} \rho_{0,\vec{q}} &= N_{m_z=0} \end{aligned}$$

e que, conseqüentemente, há uma outra forma de escrever o campo fermiônico em termos dos operadores de criação de magneto-excitons

$$(3.3.3) \quad \Psi^\dagger(0) = \frac{F_0}{\sqrt{2\pi\epsilon\ell^2}} e^{i\Theta(\vec{r}=0)},$$

onde

$$(3.3.4) \quad \Theta(\vec{r}=0) = \frac{1}{N_\phi} \sum_{\vec{q}} \left\{ \Theta_0(q) - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n\epsilon/2}}{n} \left[\rho_{n,\vec{q}}^\dagger - \rho_{n,-\vec{q}} \right] \right\}$$

Se compararmos esta expressão com a expressão (3.3.2), observamos que o operador $e^{i\Theta(\vec{r}=0)}$ de (3.3.3) é *exatamente* o operador $\mu(\vec{0})$ definido em (1.2.4), que cria a carga topológica do fermion na bosonização vetorial em 2D.

Já o operador $\sigma(\vec{x})$ é responsável apenas pela estatística fermiônica. Portanto, do que vimos na seção anterior, não resta outra alternativa a não ser identificar

$$(3.3.5) \quad \sigma(0) = \frac{F_0}{\sqrt{2\pi\epsilon\ell^2}}.$$

Demonstrado, portanto, que bosonizar o problema bidimensional utilizando N_ϕ campos escalares bosônicos unidimensionais equivale completamente à bosonização bidimensional com campos vetoriais.

3.4. Interações do tipo carga-carga

Nesta seção mostraremos que o espectro de excitações neutras de um sistema de fermions interagentes no campo magnético pode ser obtido a partir de uma rotação nos operadores bosônicos.

Descreveremos também alguns dos avanços no cálculo do propagador fermiônico do sistema interagente, utilizando a bosonização em níveis de Landau.

Restringiremo-nos, nesta seção, a interações do tipo carga-carga $\frac{1}{2} \sum_{\vec{q}} U(q) \delta_{\rho_{\vec{q}}} \delta_{\rho_{-\vec{q}}}$, que se incluem na Hamiltoniana⁶ total do sistema, como segue:

$$H = \sum_{\vec{q}} \sum_{n=1} n b_n^\dagger(\vec{q}) b_n(\vec{q}) + \frac{1}{2} \sum_{\vec{q}} \sum_{n, n'=1} u(q) \sqrt{\mathcal{G}_n(q) \mathcal{G}_{n'}(q)} [b_n^\dagger(\vec{q}) + b_n(-\vec{q})] [b_{n'}^\dagger(-\vec{q}) + b_{n'}(\vec{q})]$$

onde

$$u(q) \equiv \frac{U(q)}{2\pi\ell^2 \hbar\omega_c}.$$

A Hamiltoniana acima é diagonalizável por uma transformação de *Bogoliubov*[27] generalizada, da forma

$$(3.4.1) \quad b_n(\vec{q}) = \sum_l \left(\mu_{nl}(q) \beta_l(\vec{q}) + \vartheta_{nl}(q) \beta_l^\dagger(-\vec{q}) \right),$$

que resulta numa representação para H em termos dos operadores $\beta_l(\vec{q})$ e $\beta_l^\dagger(\vec{q})$ dada por

$$H = \sum_{\vec{q}} \sum_{l=1} \Omega_l(q) \beta_n^\dagger(\vec{q}) \beta_n(\vec{q}).$$

Das equações de movimento para os operadores bosônicos, conclui-se facilmente que os coeficientes da transformação de *Bogoliubov* são

$$\begin{aligned} \mu_{nl}(q) &= u(q) \frac{\sqrt{\mathcal{G}_n(q)}}{(\Omega_l(q) - n)} \Gamma_l(q) \\ \vartheta_{nl}(q) &= -u(q) \frac{\sqrt{\mathcal{G}_n(q)}}{(\Omega_l(q) + n)} \Gamma_l(q) \end{aligned}$$

onde a função

⁶Estamos adotando $\hbar\omega_c$ como a escala de energia.

$$\Gamma_l(q) = \sum_{n=1} \sqrt{\mathcal{G}_n(q)} (\mu_{nl}(q) + \vartheta_{nl}(q)),$$

é determinada pela condição de unitariedade da transformação. Esta função se relaciona diretamente com o fator de forma dinâmico do sistema interagente. Isto é, aplicando-se a transformação canônica aos operadores de densidade, vemos que

$$\rho_{\vec{q}}(t) = \sum_{l=1} \Gamma_l(q) \left(\beta_l^\dagger(\vec{q}) e^{i\Omega_l(q)t} + \beta_l(-\vec{q}) e^{-i\Omega_l(q)t} \right) + \rho_{0,\vec{q}},$$

e portanto, de acordo com a definição (3.1.6), o fator de forma dinâmico do sistema interagente será

$$(3.4.2) \quad S(\vec{q}, \omega) = \sum_{l=1} \Gamma_l^2(q) \delta(\omega - \Omega_l(q)).$$

Assim, pode-se interpretar $\Gamma_l(q)$ como a amplitude de probabilidade do modo normal $\Omega_l(q)$ ser excitado. Por outro lado, estes modos normais são as soluções da equação transcendental, obtida pela substituição dos coeficientes $\mu_{nl}(q)$ e $\vartheta_{nl}(q)$ em $\Gamma_l(q)$:

$$(3.4.3) \quad 1 = u(q) \sum_{n=1} \frac{2n\mathcal{G}_n(q)}{(\Omega_l^2(q) - n^2)}.$$

Esta equação foi descoberta por *Kallin e Halperin*[36] para os modos de *magneto-plasmon* (interação Coulombiana) na aproximação RPA, tomando $\frac{e^2}{\epsilon} / \hbar\omega_c \ll 1$ como parâmetro perturbativo no limite de campo forte. Aqui, mostramos que o mesmo resultado pode ser obtido numa linguagem de bosonização e estendemos o seu limite de validade também para campos muito fracos.

A equação acima pode ser resolvida numericamente para o caso da interação Coulombiana ($U(q) = \frac{2\pi e^2}{\epsilon q} \Rightarrow u(q) = \frac{\sqrt{2\nu r_s}}{qR_c}$). Para isso, utilizamos o cálculo da função de polarização $\chi_{00}(q, \omega)$ introduzida no apêndice F, que transforma (3.4.3) em uma equação transcendental da forma:

$$(3.4.4) \quad \frac{qR_c}{\sqrt{2\nu r_s}} = \frac{\omega\pi}{\sin(\omega\pi)} \mathcal{J}_{-\omega}(qR_c) \mathcal{J}_{\omega}(qR_c) - 1,$$

onde r_s é a distância média entre partículas definida na introdução. Para $\nu r_s = 8$, o resultado numérico está plotado na figura 3.4.1

Num sistema de fermions livres, os modos de excitação de magneto-excitons são invariantes a q , ou seja, são não-dispersivos. Isto é um reflexo da degenerescência dos níveis de Landau com relação à posição do centro da órbita ciclotrônica no plano. De fato, se as partículas são independentes, a energia do par não depende da posição individual, nem tampouco da distância relativa entre os centros de órbita do elétron e do buraco.

Com a inclusão da interação, os modos passam a ter uma dispersão, o que gera uma massa efetiva para os magneto-excitons, devida puramente a efeitos de interação. Porém, como era de se esperar pelo teorema de Kohn (Apêndice C), quando

Neutral Excitation Modes

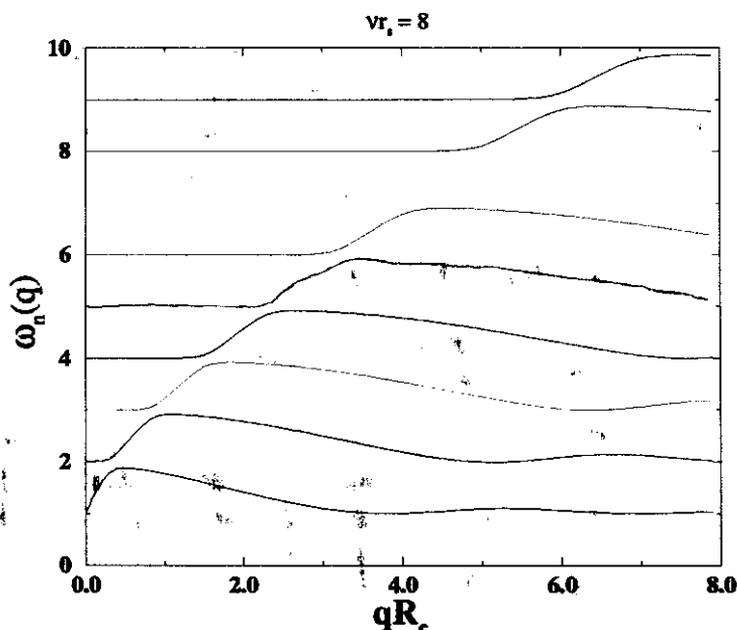


FIGURA 3.4.1. Modos Normais de excitação e-h de um gás de elétrons num campo magnético tal que $\nu r_s = 8$.

$q \rightarrow 0$ todos os modos de excitação tendem aos seus valores do caso não-interagente. Trata-se, na verdade, de mera consequência da invariância da Hamiltoniana de interação com relação a uma rotação global no sistema.

O fator de forma dinâmico obtido em (3.4.2) nos fornece mais informação a respeito da resposta do sistema a uma perturbação que se acople com as densidades fermiônicas.

De acordo com a figura 3.4.2, vemos que há um modo de excitação que se destaca dos outros pela sua intensidade espectral. Este modo coletivo de "magneto-plasmon" ($\omega_{mp}(q) \sim \omega_c \sqrt{1 + r_s \nu q R_c}$), que pode ser obtido através do limite $\vec{q} \rightarrow 0$ da expressão (3.4.4) é, na verdade, uma remanescência do modo coletivo de plasmon ($\omega_p(q) \sim v_F \sqrt{\frac{q}{a_B}^2}$), presente no espectro do gás de elétrons interagentes em 2D.

Assim como no problema sem campo, ele é o responsável pela blindagem das cargas excedentes. Há, no entanto, algumas diferenças fundamentais entre o plasmon e o magneto-plasmon. O primeiro modo se torna instável para $q > a_B^*$, pois, devido à sua relação de dispersão em 2D, nesse limite ele penetra na região de excitações de pares elétron-buraco e decai em seus constituintes. Já o segundo, num limite de campos não muito fracos, interage com os modos de partícula buraco, abrindo

⁷É fácil ver que $\omega_p(q) = \lim_{B \rightarrow 0} \omega_{mp}(q)$ se lembrarmos que $\frac{r_s \nu}{R_c} = \frac{1}{a_B^*}$.

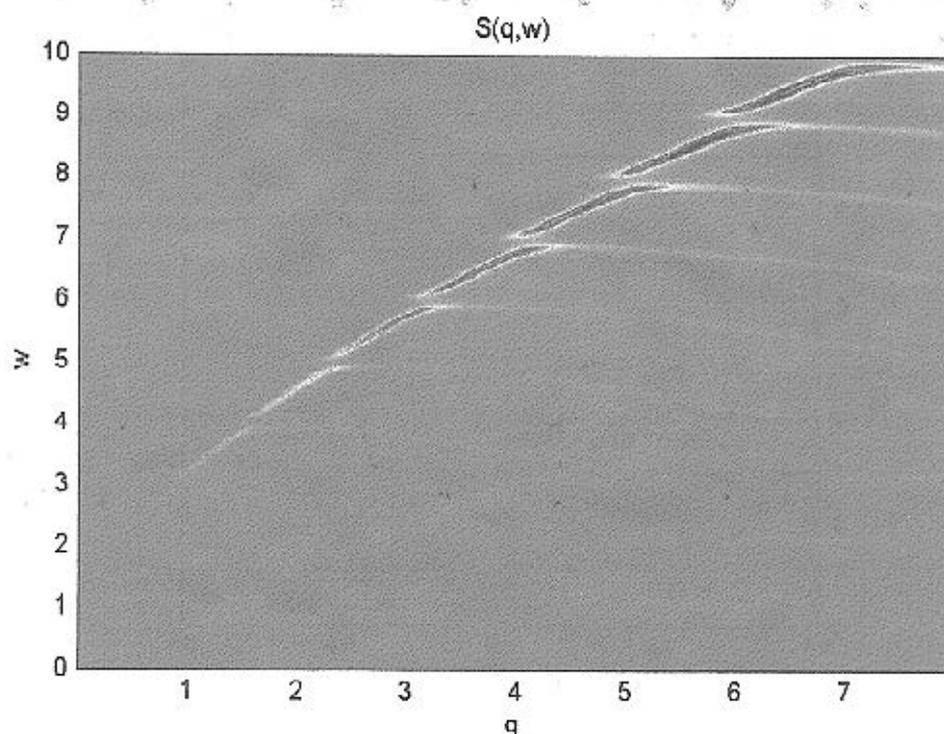


FIGURA 3.4.2. Fator de forma dinâmico calculado para $\nu r_s = 8$, com q dado em unidades de $1/R_c$ e ω em unidades de ω_c . A função delta é substituída por uma distribuição Lorentziana de largura $1/2\nu$.

“gaps” nos pontos de interseção entre as suas relações de dispersão, permanecendo, contudo, estável como modo coletivo.

Nota-se também que, para $q \ll 1/R_c$, o modo de magneto-plasmon praticamente esgota a “*f-sum rule*” e, portanto, a descrição adequada a este caso é a de uma teoria hidrodinâmica para as flutuações de densidade, como a desenvolvida por *Aleiner, Baranger e Glazman*[40]. Realmente, como veremos a seguir, quando se impõe um “cutoff” nos momenta da ordem de $1/R_c$, é possível recuperar o resultado desta teoria hidrodinâmica.

Embora o fator de forma dinâmico nos forneça boa parte das características do sistema interagente, a total compreensão do comportamento do sistema depende, ainda, da investigação da densidade espectral de um corpo

$$A(\omega) \propto \text{Re} \int_0^{\infty} dt e^{i\omega t} [K(t) + K^*(t)]$$

onde

$$K(t) = \langle G | \Psi(0, t) \Psi^\dagger(0, 0) | G \rangle.$$

Esta densidade espectral $A(\omega)$ possibilita prever como o sistema interagente se comporta quando uma nova partícula é adicionada (ou retirada). Foi através dela que se demonstrou a inexistência de quasi-partículas fermiônicas no gás 1D de elétrons interagentes e como o gás 2D de elétrons no campo responde ao repentino aparecimento de um potencial local.

Aqui também podemos utilizar a forma bosônica do operador fermiônico (3.3.3) para calcular diretamente o propagador local $K(t)$ do sistema interagente. Para tal, inicialmente, supomos que toda a dinâmica do operador fermiônico vem da parte de desordem, ou seja,

$$\Psi(0, t) = \sigma(0) \mu(0, t).$$

Esta suposição é plausível pois, pelas definições (3.3.5) e (2.2.7), o operador σ só depende dos operadores número nos canais de momento angular N_{m_z} , os quais, em média, não são alterados pela interação entre os fermions. Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} K(t) &= \langle G | \Psi(0, t) \Psi^\dagger(0, 0) | G \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon\ell^2} e^{(D(0,t) - D(0,0))} \end{aligned}$$

onde

$$D(0, t) = \langle G | \Theta(0, t) \Theta(0, 0) | G \rangle = \sum_{\vec{q}} \frac{\langle G | P_{\vec{q}}(t) P_{\vec{q}}(0) | G \rangle}{q^2},$$

é uma função de correlação bosônica entre os momenta $\vec{\Pi}$.

Na seção 3.2, o objetivo da expansão dos campos vetoriais \vec{A} e $\vec{\Pi}$ em termos dos operadores bosônicos foi a investigação da dinâmica destes campos através da dinâmica conhecida dos bosons livres. Contudo, no caso interagente, os bosons livres não são mais os magneto-excitons mas sim os obtidos pela transformação de Bogoliubov. Assim, utilizando a transformação canônica (3.4.1) podemos descrever a dinâmica dos campos vetoriais como

$$\begin{aligned} a_{\vec{q}}(t) &= -i \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\Gamma_l(q)}{q} \left(\beta_l^\dagger(\vec{q}, t) + \beta_l(-\vec{q}, t) \right) - i \frac{\rho_{0,\vec{q}}}{q} \\ P_{\vec{q}}(t) &= - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{q\Gamma_l(q) f(q)}{N_\phi \Omega_l(q)} \left(\beta_l^\dagger(\vec{q}, t) - \beta_l(-\vec{q}, t) \right) - q\Theta_{0,\vec{q}}, \end{aligned}$$

onde

$$\beta_l(\vec{q}, t) = e^{-i\Omega_l(q)t} \beta_l(\vec{q})$$

$$e f(q) = 1 + u(q) (\mathcal{J}_0^2(qR_c) - 1) \sim 1.$$

Finalmente, isto nos permite determinar o propagador fermiônico :

$$(3.4.5) \quad K(t) = \frac{1}{2\pi\varepsilon\ell^2} e^{\frac{1}{N\phi} \sum_q \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Gamma_i^2(q)(e^{-i\Omega_i(q)t}-1)}{\Omega_i^2(q)}}.$$

Este é o principal resultado desta seção, pois mostra como, uma vez conhecidos os modos normais e os coeficientes $\Gamma_l(q)$ da transformação de Bogoliubov, obtemos também o espectro fermiônico do sistema.

O caso mais simples em que este propagador pode ser calculado ocorre quando o espectro de excitação é completamente dominado (satura a regra de soma) pelo modo de magneto-plasmon ($q \ll 1/R_c$). Neste caso, $\Omega_1^2(q) \sim 1 + r_s \nu q R_c$ e $\Gamma_1^2(q) \Omega_1(q) \sim \frac{q^2}{2}$, o que, no limite assintótico⁸ de tempos $t \gg \omega_c^{-1}$, leva ao resultado aproximado:

$$\begin{aligned} K(t) &\sim e^{-i\omega_0 t} \\ A(\omega) &\sim \delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0), \end{aligned}$$

onde $\omega_0 = \frac{\ln(\nu r_s)}{\nu}$ representa o gap de excitação de um corpo devido a efeitos de correlação.

Este foi o resultado obtido por *Aleiner, Baranger e Glazman* [40] numa abordagem hidrodinâmica e discutida à luz do fenômeno de “Coulomb-Blockade” no tunelamento entre gases bidimensionais de elétrons na presença de um campo magnético uniforme. Aqui, ele aparece como uma aproximação ao caso particular em que o magneto-plasmon satura a regra de soma. Vale ressaltar que o resultado (3.4.5) é mais geral e permite, a princípio, avaliar os efeitos da perda de densidade espectral do magneto-plasmon para os magneto-excitons.

⁸Este limite só faz sentido quando o potencial químico está sobre o último nível de Landau ocupado. Apesar de termos trabalhado sobre a hipótese do fator de preenchimento ν ser inteiro, a generalização para este caso é direta, desde que $\nu \approx \text{inteiro}$.

CAPÍTULO 4

Sistemas interagentes no campo magnético fraco: fermions compostos

Aplicaremos agora o método de bosonização para o estudo de um gás de elétrons bidimensional, imerso em um campo magnético uniforme B , com densidade eletrônica ($n_e = \frac{N_e}{S}$), tal que o fator de preenchimento ν é um número **fracionário**. Sob estas condições, sabe-se que o gás de elétrons exibe um fenômeno conhecido como efeito Hall Quântico Fracionário[31, 32, 7].

Trata-se de uma manifestação da formação de um estado incompressível de um gás bidimensional de elétrons interagentes na presença de um campo magnético uniforme, de densidade correspondente a um preenchimento fracionário do primeiro nível de Landau.

Num trabalho pioneiro, realizado antes mesmo da descoberta experimental do efeito Hall Quântico, *Fukuyama, Platzman e Anderson* [66] propuseram que, num limite quântico em que apenas o primeiro nível de Landau esteja parcialmente ocupado, na aproximação Hartree-Fock o gás de elétrons correlacionados é instável, tendendo à formação de uma onda de densidade de carga (CDW). Mais tarde *Yoshioka e Fukuyama* [67] desenvolveram esta idéia, mostrando que o período desta CDW coincide com o de um cristal de Wigner clássico (WC). Entretanto, esta aproximação Hartree-Fock falhou em explicar por que o Efeito Hall Quântico Fracionário, ao contrário do que propunha a teoria de formação de uma CDW, só ocorria em determinados valores de preenchimento do primeiro nível de Landau.

O maior avanço para compreensão deste fenômeno foi devido a *Laughlin*[68], que propôs um ansatz variacional para a função de onda do estado fundamental destes sistemas, que correspondia a um líquido incompressível de elétrons a um preenchimento $\nu_m = 1/m$, onde m é um número inteiro ímpar. Apesar do enorme avanço trazido pela teoria de *Laughlin*, há pelo menos uma década, a área de FQHE tem recebido inúmeras contribuições no sentido de se formular uma teoria efetiva de campo para o FQHE [7].

Dentre as principais razões para este interesse estão: a necessidade de uma teoria que lide, não apenas com as frações ν_m , mas com toda a hierarquia de estados observados experimentalmente; a necessidade de se calcular funções de correlação que descrevam as propriedades físicas próximas às frações estáveis de preenchimento e a necessidade de tratar situações em que a concentração de quasi-partículas seja grande.

Neste contexto, a teoria bosônica do FQHE, que converte elétrons em bosons pela introdução de um campo de Chern-Simons[73], teve um grande sucesso, mostrando que, numa aproximação de campo médio, os estados fundamentais em frações ν_m são mapeados em superfluidos dos bosons[69], enquanto as quasi-partículas são mapeadas em vórtices. Acontece que esta teoria também abrange apenas as frações ν_m .

Foi então que surgiu a teoria de Fermions Compostos (CF), proposta por Jain[70]. Nela, o sistema de elétrons interagentes via repulsão Coulombiana pode ser transformado em um sistema de novas quasi-partículas. Estas novas quasi-partículas, que têm a mesma densidade dos elétrons originais, aparentemente incorporam parte do campo magnético externo (através de sua ligação a $2p$ quanta de fluxo magnético), possuem uma massa maior que a massa do elétron e se movimentam independentemente. Mais ainda, a massa destas quasi-partículas, que é devida puramente a efeitos de correlação entre os elétrons, é de fato uma medida da intensidade de interação Coulombiana entre eles.

Então, de forma brilhante, esta teoria foi capaz de descrever frações do tipo $\nu_n^p = \frac{n}{2pn+1}$, que melhor correspondem à hierarquia experimental de estados incompressíveis. De fato, nesta teoria, o FQHE dos elétrons é visto como o efeito Hall quântico inteiro (IQHE) dos CF, onde n aparece como o número inteiro de níveis de Landau preenchidos pelos CF ($\nu_{cf} = n$), o que pode ser qualitativamente entendido através do seguinte argumento:

\Rightarrow Seja $n_e = \frac{N_e}{S}$ a densidade eletrônica (que é igual à densidade de CF) e B o campo total aplicado sobre os elétrons, tal que o fator de preenchimento eletrônico ν_e é dado por

$$(4.0.6) \quad \nu_e = \frac{\phi_0 n_e}{B}.$$

Se considerarmos que os fermions compostos são elétrons ligados a $2p$ quanta de fluxo magnético, que servem de blindagem contra o campo externo, o campo efetivo sentido por esta partícula composta será igual ao campo externo, menos o campo de blindagem, ou seja, $B_{cf} = B - 2p\phi_0 n_e$. Assim sendo, o fator de preenchimento do CF é dado por

$$(4.0.7) \quad \nu_{cf} = \frac{\phi_0 n_e}{B_{cf}} = \frac{1}{1/\nu_e - 2p},$$

o que equivale a

$$(4.0.8) \quad \nu_e = \frac{\nu_{cf}}{2p\nu_{cf} + 1},$$

como queríamos demonstrar.

Mais ainda, fazendo $\nu_{cf} \rightarrow \infty$, ou seja $B \rightarrow 2p\phi_0 n_e$, chegamos a frações do tipo $\nu_n^\infty = \frac{1}{2p}$ nas quais há uma revelação inesperada: Quando o campo magnético externo é intenso o suficiente para produzir exatamente $2p$ quanta

de fluxo por elétron, estes se comportam como fermions livres[71, 75, 73], ou seja, o estado fundamental do sistema se torna compressível.

A introdução dos CF por Jain foi feita através de uma generalização da função de onda de Laughlin para as frações ν_n^p . Com efeito, esta função de onda é dada por

$$\Xi_{n,p} = D^p \Phi_n$$

onde, em termos das coordenadas complexas z_i dos elétrons, $D^p = \prod_{j < k} (z_j - z_k)^{2p}$ é o fator que “liga” os $2p$ quanta de fluxo aos elétrons e Φ_n é o determinante de Slater para um estado com n níveis de Landau preenchidos. Pode-se ver facilmente que a função de onda de Laughlin para $\nu = 1/(2p + 1)$ é um caso especial desta função de onda quando $n = 1$.

4.1. Transformação de Chern-Simons

Uma das formas que se mostrou mais interessantes para descrever este cenário numa formulação de teoria de quântica de campos é a da transformação de Chern-Simons. Nesta transformação, os elétrons são sujeitos a uma transformação matemática que os converte em um novo sistema de fermions chamados de Fermions de Chern-Simons (CSF). Mais ainda, após esta transformação, além da interação Coulombiana original, os novos fermions passam a interagir através de um campo de gauge, denominado de campo de Chern-Simons. Isto é o que descreveremos a seguir. Vale a pena ressaltar que, como ficará claro no que segue, há diferenças fundamentais entre os CSF e os CF. Lembramos que as semelhanças e diferenças entre estas duas quasi-partículas ainda são temas em ativa discussão nesta área.

Aqui, estaremos fundamentalmente interessados na situação em que o campo magnético tenha uma intensidade B próxima da necessária para se formar um preenchimento $\nu_e = 1/2$, ou seja, B esteja próximo de $B_{1/2} = 2\phi_0 n_e$. Assim, partiremos de um conjunto de fermions bidimensionais, sem spin (os graus de liberdade de spin estão “congelados” pelo acoplamento Zeeman), sujeitos a um campo magnético constante $B = B_{1/2} + B_{cf}$,¹ onde $B_{cf} \ll B_{1/2}$.

A Hamiltoniana que descreve esta situação é a seguinte:

$$(4.1.1) \quad H_0 = \frac{1}{2m} \int d^2\vec{r} \psi_e^\dagger(\vec{r}) \left\{ \vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}) \right\}^2 \psi_e(\vec{r}),$$

onde

$$B\hat{z} = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}),$$

sendo que a condição para que o campo magnético externo seja $B = B_{1/2} + B_{cf}$ é completamente equivalente às condições

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}_{1/2}(\vec{r}) + \vec{A}_{cf}(\vec{r}),$$

¹A notação é clara: B_{cf} é o campo externo efetivo sentido pelos fermions compostos.

e

$$(4.1.2) \quad \vec{\nabla} \times \vec{A}_{1/2}(\vec{r}) = B_{1/2} \hat{z},$$

$$(4.1.3) \quad \vec{\nabla} \times \vec{A}_{cf}(\vec{r}) = B_{cf} \hat{z}.$$

Nosso próximo passo será introduzir o operador de criação do CSF [71, 73, 75], definido por

$$(4.1.4) \quad \psi_{cs}^\dagger(\vec{r}) = \psi_e^\dagger(\vec{r}) e^{-i \frac{\phi}{\phi_0} \chi(\vec{r})},$$

onde

$$\chi(\vec{r}) = \int d^2 \vec{r}' \arg(\vec{r} - \vec{r}') \rho(\vec{r}').$$

Na definição (4.1.4) do operador de criação de quasi-partícula, $\psi_e^\dagger(\vec{r})$ é o operador de criação eletrônico e $\arg(\vec{r} - \vec{r}')$ é o ângulo polar do vetor $\vec{r} - \vec{r}'$. Na realidade, esta transformação já foi discutida na bosonização vetorial, e como lá, aqui o seu objetivo é controlar a estatística das quasi-partículas.

A relação entre $\psi_{cs}^\dagger(\vec{r})$ e $\psi_e^\dagger(\vec{r})$ é não-local e se comporta como uma versão em segunda quantização de uma transformação de gauge. Contudo, esta transformação de gauge generalizada pode, através do parâmetro $\frac{\phi}{\phi_0}$, controlar a estatística das quasi-partículas. Isto pode ser demonstrado pelo cálculo da relação de comutação obedecida por $\psi_{cs}^\dagger(\vec{r})$:

Utilizando a formula de Baker-Hausdorff podemos mostrar que

$$\begin{aligned} \psi_e^\dagger(\vec{r}) e^{-i \frac{\phi}{\phi_0} \chi(\vec{r}')} &= e^{-i \frac{\phi}{\phi_0} \chi(\vec{r}')} \left\{ 1 + i \frac{\phi}{\phi_0} [\chi(\vec{r}'), \psi_e^\dagger(\vec{r}')] + \dots \right\} \\ &= e^{i \frac{\phi}{\phi_0} \arg(\vec{r}' - \vec{r})} e^{-i \frac{\phi}{\phi_0} \chi(\vec{r}')} \psi_e^\dagger(\vec{r}'), \end{aligned}$$

de onde podem ser inferidas as relações de “comutação generalizadas” obedecidas por $\psi(\vec{r}')$:

$$\psi_{cs}^\dagger(\vec{r}) \psi_{cs}(\vec{r}') = \delta(\vec{r}' - \vec{r}) - e^{i \frac{\phi}{\phi_0} (\arg(\vec{r}' - \vec{r}) - \arg(\vec{r} - \vec{r}'))} \psi_{cs}(\vec{r}') \psi_{cs}^\dagger(\vec{r}).$$

Mas, como $\arg(-\vec{r}) = \pi + \arg(\vec{r})$, segue diretamente que

$$\psi_{cs}^\dagger(\vec{r}) \psi_{cs}(\vec{r}') + e^{i \frac{\phi}{\phi_0} \pi} \psi_{cs}(\vec{r}') \psi_{cs}^\dagger(\vec{r}) = \delta(\vec{r}' - \vec{r})$$

e, da mesma forma,

$$\psi_{cs}(\vec{r}) \psi_{cs}(\vec{r}') + e^{i \frac{\phi}{\phi_0} \pi} \psi_{cs}(\vec{r}') \psi_{cs}(\vec{r}) = 0.$$

Estes últimos resultados implicam que, se $\frac{\phi}{\phi_0}$ for um número ímpar, a estatística das quasi-partículas é bosônica; se $\frac{\phi}{\phi_0}$ for par, a estatística é fermiônica e, em qualquer outro caso, a estatística é denominada anyônica.

Sob influência da transformação de gauge generalizada (4.1.4), os elementos de matriz de um corpo se transformam de acordo com as regras

$$\begin{aligned}\vec{P} &\rightarrow \vec{P} - \hbar \frac{\phi}{\phi_0} \vec{\nabla} \chi(\vec{r}) \\ \vec{r} &\rightarrow \vec{r}.\end{aligned}$$

Desta forma, em termos dos operadores de quasi-partícula, a Hamiltoniana (4.1.1), com que iniciamos o problema, muda para

$$\begin{aligned}(4.1.5) \quad H_0 &= \frac{1}{2m} \int d^2\vec{r} \psi_{cs}^\dagger(\vec{r}) \left\{ \vec{P} - \hbar \frac{\phi}{\phi_0} \vec{\nabla} \chi(\vec{r}) - \frac{-e}{c} \vec{A}(\vec{r}) \right\}^2 \psi_{cs}(\vec{r}) \\ &= \frac{1}{2m} \int d^2\vec{r} \psi_{cs}^\dagger(\vec{r}) \left\{ \vec{P} - \frac{|e|}{c} \vec{a}(\vec{r}) - \frac{-e}{c} \vec{A}(\vec{r}) \right\}^2 \psi_{cs}(\vec{r})\end{aligned}$$

onde introduzimos o campo de gauge $\vec{a}(\vec{r}) \equiv \phi \vec{\nabla} \chi(\vec{r})$, conhecido como campo de Chern-Simons.

Utilizando a definição de $\chi(\vec{r})$, o campo de Chern-Simons pode ser reescrito como

$$\vec{a}(\vec{r}) \equiv \frac{\phi}{2\pi} \int d^2\vec{r}' g(\vec{r} - \vec{r}') \rho(\vec{r}')$$

onde

$$g(\vec{r}) \equiv \frac{(\hat{z} \times \vec{r})}{r^2}.$$

Analogamente ao que vimos na bosonização vetorial, devido à singularidade em $\vec{a}(\vec{r})$, vemos que o seu rotacional é diferente de zero. Mais especificamente,

$$(4.1.6) \quad \vec{\nabla} \times \vec{a}(\vec{r}) = \phi \rho(\vec{r}) \hat{z}.$$

O lado direito da equação acima pode ser interpretado como o campo magnético gerado por $\vec{a}(\vec{r})$, que, por sua vez, é proporcional à densidade de quasi-partícula na posição \vec{r} . Consequentemente, ϕ é simplesmente a quantidade de fluxo carregada pela quasi-partícula. No caso em que estamos interessados $\phi = 2\phi_0$. Esta escolha nos leva a quasi-partículas de estatística fermiônica: os tais Fermions de Chern-Simons.

O objetivo de se acoplar a quasi-partícula ao campo de gauge de Chern-Simons é fazer com que o fluxo magnético carregado por ela cancele (parcial ou completamente) o campo magnético externo. Ou seja, o campo de gauge de Chern-Simons atua como uma blindagem do campo externo de uma forma semelhante ao quadro proposto por *Jain*. Na verdade, a conexão entre a teoria de *Jain* dos CF e a das

quasi-partículas de Chern-Simons não é tão óbvia, sendo que o passo fundamental para a solução deste problema foi dado no ano passado por *Shankar e Murthy*[77].

4.2. Flutuações de gauge e bosonização

Se considerarmos que o estado fundamental dos CSF se comporta como um líquido, será útil separar o operador densidade da seguinte forma

$$\rho(\vec{r}) = n_e + \delta\rho(\vec{r}),$$

onde $\delta\rho(\vec{r})$ representa as flutuações de densidade na posição \vec{r} , as quais esperamos que sejam pequenas se comparadas à densidade n_e .

Substituindo este resultado na equação (4.1.6), que define o campo magnético carregado pela quasi-partícula, teremos

$$\vec{\nabla} \times \vec{a}(\vec{r}) = 2\phi_0 n_e + 2\phi_0 \delta\rho(\vec{r}).$$

Isto nos permite separar o potencial vetor de Chern-Simons em duas componentes:

$$\vec{a}(\vec{r}) = \vec{A}_{1/2}(\vec{r}) + \delta\vec{a}(\vec{r}).$$

A primeira componente $\vec{A}_{1/2}(\vec{r})$ é tal que $\vec{\nabla} \times \vec{A}_{1/2}(\vec{r}) = B_{1/2} \hat{z}$, ou seja, é a parte do campo de Chern-Simons que cancela a porção $B_{1/2} \hat{z}$ do campo externo. Já a segunda componente de $\vec{a}(\vec{r})$ está vinculada às flutuações de carga do sistema, através da equação

$$(4.2.1) \quad \vec{\nabla} \times \delta\vec{a}(\vec{r}) = 2\phi_0 \delta\rho(\vec{r}).$$

Feitas estas considerações, a Hamiltoniana inicial, em termos das quasi-partículas fermiônicas, fica da forma

$$(4.2.2) \quad H_0 = \frac{1}{2m} \int d^2\vec{r} \psi_{cs}^\dagger(\vec{r}) \left\{ \vec{P} - \frac{-e}{c} \vec{A}_{cf}(\vec{r}) - \frac{|e|}{c} \delta\vec{a}(\vec{r}) \right\}^2 \psi_{cs}(\vec{r}),$$

onde $\vec{A}_{cf}(\vec{r})$ é o potencial vetor efetivo (4.1.3) sentido pelos FCS. Em decorrência disto, a transformação unitária (4.1.4) mapeia um problema de elétrons independentes, sujeitos a um campo forte B , num problema de quasi-partículas fermiônicas, os CSF, sujeitas a um campo $B_{cf} = (B - B_{1/2})$, supostamente fraco. Tal mapeamento, apesar de anular parte do campo magnético externo, introduz uma interação entre as quasi-partículas através das flutuações do campo de gauge dadas por (4.2.1).

Em primeira aproximação (campo médio) podemos desprezar as flutuações de densidade ($\delta\rho(\vec{r}) = 0$). Isto é equivalente a desprezar as flutuações do campo de gauge e, conseqüentemente, transformar a Hamiltoniana (4.2.2) em uma Hamiltoniana de fermions independentes, na presença de um campo magnético efetivo $B_{cf} = B - B_{1/2}$. Desta forma, quando B_{cf} for tal que haja um número inteiro de

níveis de Landau de CSF preenchidos, abre-se um gap ciclotrônico $\omega_c^{(cs)} = \frac{|e|B_{cf}}{mc}$ entre o estado fundamental e os estados excitados. A princípio, poder-se-ia identificar este como sendo o gap de excitação da teoria de *Laughlin*. Todavia, isto não corresponde à realidade, pois, na teoria de *Laughlin*, o gap de excitação é um efeito puramente devido à interação Coulombiana, não dependendo da massa dos elétrons.

Uma solução para este problema foi proposta por *Halperin Lee e Read* [75], introduzindo uma massa efetiva $1/m^* \sim O(e^2\ell)$ fenomenológica para as quasi-partículas, a fim de que o gap ciclotrônico dos CSF passasse a ter a dependência correta com o campo magnético e não dependesse da massa “nua” dos elétrons. Esta teoria foi aperfeiçoada alguns anos mais tarde por *Simon, Halperin e Stern* [76], para que os vínculos impostos pelas regras de soma fossem obedecidos. Na verdade, a introdução desta massa efetiva fenomenológica foi uma tentativa de se incluir as flutuações do campo de gauge e a interação Coulombiana de forma que refletisse a essência da física do efeito Hall Quântico Fracionário.

Muitas foram as tentativas de se entender (partindo de uma formulação de primeiros princípios) como a massa efetiva surge da interação Coulombiana entre os fermions. Entretanto, em tratamentos perturbativos, as flutuações de baixa energia do campo de gauge levam a resultados que não correspondem à realidade. Foi, talvez, a solução de *Shankar e Murthy* [77] a primeira formulação de teoria de campos capaz de prever a maior parte das características dos Fermions Compostos, como a massa efetiva, carga efetiva e momento de dipolo, fazendo ainda com que a função de onda do sistema tivesse as características dos ansatz variacionais de *Laughlin e Jain*.

Aqui não trataremos diretamente da aproximação de massa efetiva, mas apenas mostraremos como a transformação de Chern-Simons, aliada à bosonização em níveis de Landau, pode ser usada no problema em que os fermions estão inicialmente acoplados via interação Coulombiana. Dentro do esquema proposto, esta Hamiltoniana pode ser diagonalizada por uma transformação de Bogoliubov, como havíamos feito anteriormente.

Expandindo o termo entre chaves na Hamiltoniana (4.2.2), teremos

$$(4.2.3) \quad H_0 = \frac{1}{2m} \int d^2\vec{r} \psi_{cf}^\dagger(\vec{r}) \left\{ \vec{P} - \frac{-e}{c} \vec{A}_{cf}(\vec{r}) \right\}^2 \psi_{cf}(\vec{r}) + \frac{1}{2m} \frac{e^2}{c^2} \int d^2\vec{r} \rho(\vec{r}) |\delta\vec{a}(\vec{r})|^2 - \frac{|e|}{c} \int d^2\vec{r} \vec{J}(\vec{r}) \cdot \delta\vec{a}(\vec{r}).$$

Daí, supondo-se que o campo efetivo B_{cf} é tal que formam-se ν_{cf} níveis de Landau de CSF, podemos aplicar a bosonização para reescrever H_0 numa forma bosônica

$$(4.2.4) \quad H_0 = \sum_{\vec{q}} \sum_n \hbar \omega_c^{(cf)} n b_n^\dagger(\vec{q}) b_n(\vec{q}) + \frac{1}{2m} \frac{e^2}{S^2 c^2} \sum_{\vec{q}, \vec{p}} \rho_{\vec{q}} \delta \vec{a}_{-\vec{p}} \cdot \delta \vec{a}_{-(\vec{p}+\vec{q})} - \frac{|e|}{S c} \sum_{\vec{q}} \vec{J}_{\vec{q}} \cdot \delta \vec{a}_{-\vec{q}}$$

onde $\delta \vec{a}_{\vec{q}} = \int d^2 \vec{r} e^{-i \vec{q} \cdot \vec{r}} \delta \vec{a}(\vec{r})$ é a componente de Fourier da flutuação do campo de Gauge, que obedece à equação $i \vec{q} \times \delta \vec{a}_{\vec{q}} = 2 \phi_0 \delta \rho_{\vec{q}} \hat{z}$, derivada a partir da transformada de Fourier da equação (4.1.3), e $\vec{J}_{\vec{q}}$ é o operador corrente definido em (3.1.4) e (3.1.5).

A solução da equação acima no gauge de Coulomb ($\delta \vec{a}_{\vec{q}} \cdot \vec{q} = 0$) é

$$\delta \vec{a}_{\vec{q}} = (-i 2 \phi_0) \frac{\delta \rho_{\vec{q}}}{q} \hat{z} \times \hat{q}.$$

Utilizando então os resultados acima teremos

$$\delta \vec{a}_{\vec{p}} \cdot \delta \vec{a}_{-\vec{p}-\vec{q}} = (2 \phi_0)^2 f(\vec{q}, \vec{p}) \delta \rho_{\vec{p}} \cdot \delta \rho_{-\vec{p}-\vec{q}}$$

com

$$f(\vec{q}, \vec{p}) \equiv \frac{\vec{p} \cdot (\vec{p} + \vec{q})}{p^2 |\vec{p} + \vec{q}|^2},$$

e

$$\vec{J}_{\vec{q}} \cdot \delta \vec{a}_{-\vec{q}} = \frac{i 2 \phi_0}{q} \vec{J}_{\vec{q}}^{(t)} \delta \rho_{-\vec{q}}.$$

Para incluirmos a interação Coulombiana no problema, basta acrescentar o termo

$$H_I = \frac{1}{2S} \sum_{\vec{q}} \frac{2\pi e^2}{q} \delta \rho_{\vec{q}} \delta \rho_{-\vec{q}}$$

à Hamiltoniana (4.2.4).

As interações cúbicas nas flutuações de densidade são menos relevantes em um sistema em que estas flutuações são pequenas. Logo, se substituirmos $\rho_{\vec{q}}$ por $S \rho_0 \delta_{\vec{q},0} + \delta \rho_{\vec{q}}$ e desprezarmos os termos na Hamiltoniana que contêm as flutuações ao cubo, ficaremos apenas com termos quadráticos. Ou seja, neste caso, a Hamiltoniana (energia e momentum em unidades de $\hbar \omega_c^{(cf)}$ e $1/R_{cf}$ respectivamente), fica

$$H = \sum_{\vec{q}} \sum_n n b_n^\dagger(\vec{q}) b_n(\vec{q}) + H_I$$

onde a Hamiltoniana de interação é do tipo corrente-corrente dada por

$$H_I = \frac{1}{N_\phi} \sum_{\vec{q}} J_{\nu, \vec{q}} V_{\mu\nu}(\vec{q}) J_{\nu, -\vec{q}}$$

e $V_{\mu\nu}(\vec{q})$ é

$$(4.2.5) \quad V = \begin{pmatrix} \frac{8\nu_{cf}^2}{q^2} + \frac{\nu_{cf} r_s}{q} & 0 & \frac{i}{v_f} \frac{4\nu_{cf}}{q} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{i}{v_f} \frac{4\nu_{cf}}{q} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Evidencia-se, portanto, que com as escalas utilizadas para o momentum e energia na Hamiltoniana acima, os termos de interação vindos das flutuações de gauge não dependem da massa eletrônica e o único termo que dela depende explicitamente é o que vem da interação Coulombiana, proporcional à $r_s \propto m$.

4.3. Modos normais dos fermions de Chern-Simons

À semelhança do que foi feito para a Hamiltoniana de interação Coulombiana, explorada na seção anterior, esta Hamiltoniana pode ser diagonalizada por uma transformação de Bogoliubov do mesmo tipo visto em (3.4.1). Só que, aqui, os coeficientes de Bogoliubov obedecem à equação matricial

$$\begin{pmatrix} \mu_{nl}(q) \\ \vartheta_{nl}(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A}{(\Omega_l(q)-n)} & \frac{B}{(\Omega_l(q)-n)} \\ -\frac{A}{(\Omega_l(q)+n)} & -\frac{B}{(\Omega_l(q)+n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_l(q) \\ D_l(q) \end{pmatrix}$$

onde

$$A = \left(\frac{8\nu_{cf}^2}{q^2} + \frac{\nu_{cf} r_s}{q} \right) \sqrt{n} \mathcal{J}_n(q) + \frac{4\nu_{cf}}{q} \sqrt{n} \mathcal{J}'_n(q)$$

e

$$B = \frac{4\nu_{cf}}{q} \sqrt{n} \mathcal{J}_n(q).$$

Também analogamente ao caso anterior, os coeficientes $C_l(q)$ e $D_l(q)$ desempenham o papel de constantes de normalização e obedecem às equações

$$\begin{aligned} C_l(\vec{q}) &= \left[\frac{8\nu_{cf}^2}{q^2} \chi_{00}(q, \omega) + \frac{4\nu_{cf}}{q} \chi_{02}(q, \omega) \right] C_l(q) + \frac{4\nu_{cf}}{q} \chi_{00}(q, \omega) D_l(q) \\ D_l(\vec{q}) &= \left[\frac{8\nu_{cf}^2}{q^2} \chi_{20}(q, \omega) + \frac{4\nu_{cf}}{q} \chi_{22}(q, \omega) \right] C_l(q) + \frac{4\nu_{cf}}{q} \chi_{02}(q, \omega) D_l(q) \end{aligned}$$

sendo que as funções χ_{00} , χ_{02} e χ_{22} que aparecem nas expressões acima, nada mais são do que componentes do tensor polarização explorado no apêndice F.

Neutral Normal Modes

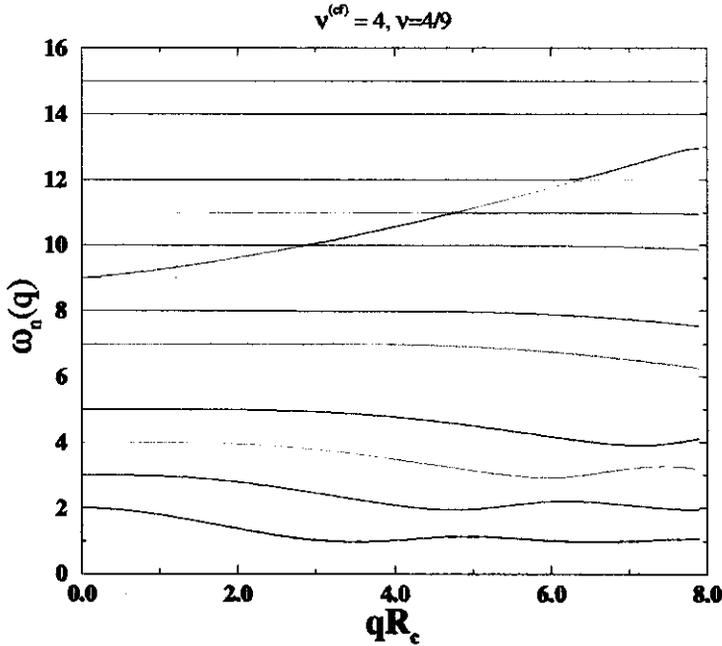


FIGURA 4.3.1. Modos Normais CF-h

O sistema de equações acima admite soluções não triviais apenas se $\det [1 - \chi(q, \omega)V(q)] = 0$, onde $\chi(q, \omega)$ é o tensor de polarização definido no apêndice F e $V(q)$ é o tensor de interação (4.2.5). Esta equação é idêntica à obtida na aproximação RPA [76], podendo ser resolvida numericamente, conforme demonstrado na figura 4.3.1.

Como se pode observar no exemplo da figura 4.3.1, os modos normais de excitação neutra são pouco modificados em relação ao caso não-interagente, à exceção do modo que começa em $\omega = 9\omega_c^{(cf)} = (2\nu + 1)\omega_c^{(cf)}$, que sofre uma dispersão maior, cruzando as autofrequências superiores a ele. Este é o **modo coletivo de magneto-plasmon** dos fermions compostos, responsável pela blindagem das interações.

Pela sua localização no espectro, podemos relacioná-lo com o primeiro modo de excitação neutra dos elétrons, cuja energia é dada por $\omega_c = (2\nu + 1)\omega_c^{(cf)}$. E, como se evidencia no fator de forma dinâmico da figura 4.3.2, ele satura a regra de soma para $q \rightarrow 0$.

No trabalho de *Shankar e Murthy* [77] demonstrou-se que este modo coletivo é o responsável pelo comportamento assintótico correto para a função de onda dos CF em termos dos CSF. Numa formulação semelhante à introduzida por *Bohn e Pines*, *Shankar e Murthy* trataram este modo coletivo $\omega_c = (2\nu + 1)\omega_c^{(cf)}$ como sendo separável dos modos de excitação do tipo partícula-buraco, através de um “cut-off” variacional de separação no espaço de momentum. Mais ainda, mostraram que o acoplamento deste modo coletivo com os modos de partícula-buraco é o que

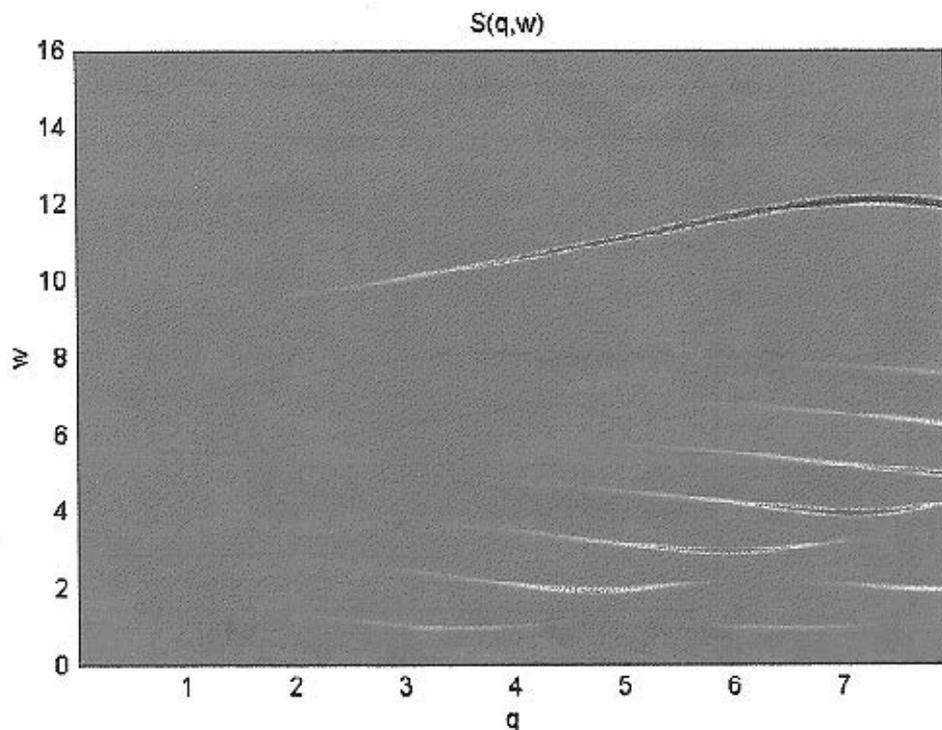


FIGURA 4.3.2. Fator de forma dinâmico dos CF, calculado para $\nu = 4/9$ e $r_s = 1$, com q dado em unidades de $1/R_c$ e ω em unidades de ω_c . A função delta é substituída por uma distribuição Lorentziana de largura $1/2\nu$.

“liga” os quanta de fluxo aos CSF, fazendo com que as novas quasi-partículas, os *fermions compostos de Jain*, tenham carga efetiva $e^* = e/(2\nu_{cf} + 1)$ e massa efetiva $m^* \propto 1/(e^2\ell)$.

No nosso esquema, a separação entre o modo coletivo e os modos de partícula-buraco aparece diretamente nos coeficientes da transformação de Bogoliubov e conseqüentemente no propagador dos FCS, sem a necessidade de se introduzir um parâmetro variacional de “cut-off”. Esta é a última parte dos trabalhos realizados durante o programa de Doutorado, a que daremos continuidade, pois foi um dos caminhos mais interessantes abertos por este novo método teórico de investigação dos sistemas interagentes de baixa dimensionalidade.

Conclusões e Direções Futuras

Neste trabalho, propusemos um novo método de bosonização bidimensional para tratar de problemas que envolvam gases bidimensionais de elétrons correlacionados na presença de um campo magnético uniforme. Mostramos que há, basicamente, duas formas equivalentes de se bosonizar este tipo de sistema, dependendo das leis de conservação envolvidas.

Na primeira, em analogia com a bosonização da Superfície de Fermi, dividimos o problema bidimensional em vários canais unidimensionais, utilizando a divisão natural da degenerescência dos níveis de Landau. Neste caso, as excitações neutras (elétron-buraco) comportam-se como fonons de campos escalares unidimensionais “chirais” e as excitações carregadas, os fermions propriamente ditos, se apresentam como excitações topológicas destes campos. Já na segunda forma, adotamos uma descrição das excitações neutras em termos de magneto-excitons e mostramos que estes entes podem ser interpretados como os “fotons” de uma teoria quântica de campos vetoriais, de tal forma que, como na bosonização vetorial de fermions relativísticos sem massa em 2D, os fermions aparecem como vórtices destes campos.

Na sua versão em canais unidimensionais, este método foi aplicado a problemas de magneto-ótica, onde calculamos exatamente o espectro de absorção e emissão para transições entre um nível localizado e os níveis de Landau do gás de elétrons. Muito embora a frequência ciclotrônica proíba as singularidades existentes a campo zero, o padrão de absorção/emissão encontrado é remanescente deste comportamento singular, sendo que o único parâmetro que governa este padrão é, como no caso a campo zero, o “phase shift” do potencial. Já na sua versão vetorial, aplicamos a bosonização em níveis de Landau a problemas envolvendo fermions interagentes e mostramos que o espectro de excitações neutras, bem como o fator de forma dinâmico do sistema, podem ser obtidos através de uma simples rotação (transformação de Bogoliubov) nos campos bosônicos. Os resultados obtidos para as excitações neutras equivalem aos obtidos através da aproximação de fase aleatória (RPA). Além disso, mostramos como a função de Green de um corpo do sistema interagente pode ser calculada exatamente através da forma bosônica dos operadores fermiônicos e dos parâmetros da transformação de Bogoliubov. A aplicação deste último resultado é um assunto ainda em desenvolvimento e que terá continuidade ao final da Tese, por ser um dos caminhos de pesquisa mais promissores abertos pelo método ora apresentado.

APÊNDICE A

Partículas carregadas no campo magnético

Classicamente, quando uma partícula de massa m e carga q , cuja posição no plano é dada por um vetor \vec{r} , se move na presença de um campo magnético $\vec{B}(\vec{r})$, ela experimenta uma força de Lorentz da forma $\vec{f} = q \frac{d\vec{r}}{cdt} \times \vec{B}(\vec{r})$.

No caso em que o campo magnético é constante em todo o plano, esta força faz com que a partícula se mova em uma órbita circular com uma frequência angular $\omega_c = \frac{-qB}{mc}$. Além disso, como o campo magnético não realiza nenhum trabalho (a força de Lorentz é sempre perpendicular à trajetória), a Hamiltoniana clássica desta partícula é descrita simplesmente pela sua energia cinética:

$$H_0 = \frac{m |\vec{v}|^2}{2},$$

onde $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ é a velocidade da partícula no campo magnético $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})$, que se relaciona com o momentum \vec{p} , canonicamente conjugado a \vec{r} , através de

$$\vec{v} = \frac{1}{m} \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}(\vec{r}) \right).$$

Além da velocidade, existe ainda uma segunda constante de movimento, que é o centro da órbita ciclotrônica no plano dado pelo vetor

$$\vec{R}_0 = \vec{r} - \hat{z} \times \frac{\vec{v}}{\omega_c}.$$

A adoção de um gauge simétrico ($\vec{A}(\vec{r}) = \frac{B}{2} \hat{z} \times \vec{r}$) possibilita que estas duas constantes de movimento sejam reescritas mais facilmente em um sistema de coordenadas complexas

$$\begin{aligned} V &= \frac{P}{m} + i \frac{\omega_c Z}{2} \\ Z_0 &= Z + i \frac{V}{\omega_c}, \end{aligned}$$

sendo que a quantização da dinâmica desta partícula no campo magnético é feita através da *regra de quantização canônica* de variáveis canonicamente conjugadas.

Quando aplicada neste problema, esta regra nos leva diretamente à conclusão de que os operadores V e Z_0 obedecem às seguintes relações de comutação:

$$\begin{aligned} [V, V^\dagger] &= -2\ell^2\omega_c^2 \\ [Z_0, Z_0^\dagger] &= 2\ell^2 \\ [V^\dagger, Z_0] &= 0 \\ [V, Z_0] &= 0 \end{aligned}$$

onde $\ell = \sqrt{\hbar/m\omega_c}$ é chamado de comprimento magnético.

As relações de comutação acima são igualmente obtidas se utilizarmos os operadores *escada* independentes d e g :

$$(A.0.1) \quad V = i\sqrt{2}\ell\omega_c d^\dagger$$

$$(A.0.2) \quad Z_0 = \sqrt{2}\ell g.$$

Assim, em termos destas novas variáveis, o operador Hamiltoniano desta partícula fica

$$H_0 = \hbar\omega_c (d^\dagger d + dd^\dagger)$$

e os auto-estados

$$|n, m\rangle = \frac{(d^\dagger)^n (g^\dagger)^m}{\sqrt{n!} \sqrt{m!}} |0, 0\rangle,$$

o que indica que os números quânticos n e m , que rotulam os auto-estados da partícula, estão respectivamente relacionados com o módulo da *velocidade da partícula* e com o *raio do círculo em que se encontra o centro da órbita* ciclotrônica.

Deve-se observar que o momento angular da partícula é também conservado. No entanto, não se trata de uma terceira constante de movimento, pois pode ser escrita em termos das outras duas:

$$L_z = \hbar(n - m).$$

Isto leva à interpretação de que os operadores d^\dagger e g^\dagger aumentam, de forma quantizada, a circulação da partícula para direita e para esquerda, respectivamente.

APÊNDICE B

Estados de Fase

Portanto, os graus de liberdade de uma partícula carregada na presença de um campo magnético uniforme podem ser descritos por operadores tipo escada. Em particular, o operador posição (complexa) da partícula carregada, medido em relação ao centro de órbita (A.0.2) é dado por $Z - Z_0 = \sqrt{2}ld^\dagger$. Consequentemente, o quadrado do raio da órbita ciclotrônica $|Z - Z_0|^2 = \ell^2 (2N_d + 1)$ tem um espectro de oscilador harmônico, onde $N_d = d^\dagger d$ é um operador tipo número. Assim, a base de auto-estados de H_0 , $|n, m\rangle$, é também uma base de autoestados $|Z - Z_0|^2$ em que o raio da órbita ciclotrônica está bem definido.

Surge naturalmente a pergunta: Há uma base de autoestados em que o operador $|Z - Z_0|^2$ (ou N_d equivalentemente) não esteja bem definido, mas sim um operador canonicamente conjugado a ele, de forma análoga ao que acontece entre a base de momentum (ondas planas) e posição (funções delta)?

Esta pergunta data dos primórdios da eletrodinâmica quântica, quando se investigava a possibilidade de haver um operador Hermitiano de fase Θ do campo eletromagnético, canonicamente conjugado ao operador N (número de fons). Até hoje permanece controversa a resposta a esta pergunta. Parece inviável, em condições usuais, fazer com que o operador Θ obedeça simultaneamente às condições de Hermiticidade e conjugação canônica com o operador N . Isto porque o operador N tem um espectro discreto limitado inferiormente ($N \geq 0$).

Para contornar esta situação foram propostas duas soluções: A primeira, por *Susskind e Glogower*[78], propõe a extensão artificial do espectro do operador número para valores negativos; a segunda, por *Pegg e Barnett*[78], propõe que se limite também superiormente o espectro do operador número. Para o caso do campo Eletromagnético a segunda parece ser a solução mais razoável, uma vez que não faz muito sentido valores negativos de fons no campo eletromagnético. Já no nosso caso, como utilizaremos a extensão do espectro de N_d para valores negativos na de bosonização do sistema de fermions, a primeira opção se encaixa perfeitamente!

Assim, podemos definir um operador Θ_d , canonicamente conjugado a N_d , de tal forma que

$$d^\dagger = \sqrt{N_d} e^{i\Theta_d}.$$

É fácil perceber que esta representação dos operadores escada obedece a todas as regras de comutação necessárias¹.

Daí, o operador Θ_d é interpretado como um operador que dá a fase (equivalente à posição em um problema 1D) da órbita ciclotrônica, enquanto $\sqrt{2N_d\ell}$ é o raio desta órbita (equivalente ao momentum em um problema 1D):

$$Z - Z_0 = \sqrt{2N_d\ell}e^{i\Theta_d}$$

¹Existem ainda alguns problemas com valores de N_d próximos de zero. Entretanto, no nosso problema estaremos interessados apenas em valores próximos ao fator de preenchimento de Landau $\nu \gg 1$.

APÊNDICE C

Teorema de Kohn

Um dos vínculos mais importantes na teoria de muitas partículas (2D) carregadas interagentes na presença de um campo magnético é fornecido pelo teorema derivado por WALTER KOHN no início dos anos 60. Este teorema afirma que a ressonância ciclotrônica não é alterada pelas interações entre as partículas, desde que estas interações sejam de curto alcance. A seguir apresentaremos a prova deste teorema:

Seja um sistema de N partículas carregadas interagentes no campo magnético cuja dinâmica é dada pelo Hamiltoniano

$$H = \sum_{i=1}^N \hbar\omega_c \left(d_i^\dagger d_i + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N U(\vec{r}_i - \vec{r}_j).$$

O termo de interação pode ainda ser escrito como

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N U(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = \frac{1}{2} \int d^2\vec{q} \tilde{U}(\vec{q}) \rho(\vec{q}) \rho(-\vec{q})$$

onde

$$\rho_{\vec{q}} = \sum_{i=1}^N e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}_i}$$

é o operador densidade do sistema. Mas, se utilizarmos a representação do operador posição \vec{r}_i em termos dos operadores escada definidos na seção anterior, teremos:

$$\rho_{\vec{q}} = \sum_{i=1}^N e^{-\frac{i\ell}{\sqrt{2}} [(q_x + iq_y)^*(d^\dagger + g) + (q_x + iq_y)(d + g^\dagger)]}$$

Agora, podemos estudar a dinâmica do operador velocidade (em representação complexa) do centro de massa do sistema, dada por:

$$V_{cm} = \sum_{i=1}^N v_i = \frac{i\hbar\sqrt{2}}{m\ell} \sum_{i=1}^N d_i^\dagger.$$

Aplicando a equação de Heisenberg no operador acima, teremos

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial V_{cm}}{\partial t} = [H, V_{cm}].$$

Com o auxílio das expressões acima este comutador pode ser calculado, resultando em

$$\begin{aligned}
 [H, V_{cm}] &= \hbar\omega_c V_{cm} \\
 &+ \frac{\hbar}{2m} \int d^2\vec{q} \tilde{U}(\vec{q}) \{-(q_x + iq_y) \rho_{\vec{q}} \rho_{-\vec{q}} + (q_x + iq_y) \rho_{\vec{q}} \rho_{-\vec{q}}\} \\
 \text{(C.0.3)} \quad &= \hbar\omega_c V_{cm},
 \end{aligned}$$

ou seja, para qualquer tipo de interação carga-carga a dinâmica do operador V é dominada apenas pelo termo livre da Hamiltoniana. Consequentemente, na dinâmica do operador \vec{V} , predomina a força de Lorentz resultante do movimento coletivo do sistema de partículas:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial V_{cm}}{\partial t} &= i\omega_c V_{cm} \\
 &\Downarrow \\
 \frac{\partial m\vec{V}_{cm}}{\partial t} &= \frac{q}{c} \vec{V}_{cm} \times \vec{B}.
 \end{aligned}$$

Seja agora $|\Psi_0\rangle$ o estado fundamental deste sistema interagente. Se aplicarmos a equação (C.0.3) a ele, teremos

$$HV_{cm}|\Psi_0\rangle = (E_0 + \hbar\omega_c) V_{cm}|\Psi_0\rangle$$

ou seja, $|\Psi_1\rangle \equiv V_{cm}|\Psi_0\rangle$ é o primeiro estado excitado deste sistema. Seguindo este raciocínio, conclui-se que

$$|\Psi_n\rangle \equiv \frac{\left(\sum_{i=1}^N d_i^\dagger\right)^n}{\sqrt{n!}} |\Psi_0\rangle$$

são autoestados normalizados do sistema, com energia $E_n = E_0 + n\hbar\omega_c$.

A ressonância ciclotrônica ocorre quando este sistema é submetido a uma radiação uniforme de microondas com polarização circular. Nesta situação, a Hamiltoniana original é perturbada por um termo da forma

$$\begin{aligned}
 H_{ext} &= \sum_{i=1}^N \frac{-e}{c} \vec{A}(\vec{r}_i) \cdot \vec{v}_i \\
 &= \frac{-ie}{2\omega} V_{cm}^\dagger e^{-i\omega t}.
 \end{aligned}$$

De acordo com tudo o que acabamos de ver, pela regra de ouro de Fermi, a radiação de microondas irá induzir transições entre o estado fundamental $|\Psi_0\rangle$ e um dos estados excitados $|\Psi_n\rangle$, sendo que a energia necessária para a transição é $n\hbar\omega_c$, mesmo no sistema interagente.

APÊNDICE D

O magneto-exciton de Kallin e Halperin

Neste apêndice, consideramos o problema de dois fermions sem spin e de cargas opostas, cada um de massa m , confinados respectivamente em níveis de Landau p e $n + p$. Este problema é o ponto de partida para entendermos o caráter bosônico das excitações em que um fermion é transferido de um nível p para um nível $n + p$, deixando para trás um buraco no nível p . A Hamiltoniana destas duas partículas é a seguinte:

$$(D.0.4) \quad H = H_{0_e} - H_{0_h} + V(\vec{r}_e - \vec{r}_h)$$

onde

$$H_{0_e} = \frac{1}{2m} \left(\vec{p}_e - \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}_e) \right)^2,$$

$$H_{0_h} = \frac{1}{2m} \left(\vec{p}_h + \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}_h) \right)^2$$

e

$$V(\vec{r}_e - \vec{r}_h) = -\frac{e^2}{|\vec{r}_e - \vec{r}_h|}$$

é a interação Coulombiana atrativa entre o elétron e o buraco.

As Hamiltonianas não interagentes H_{0_e} e H_{0_h} podem ser representadas em termos dos operadores escada descritos no apêndice A como

$$\begin{aligned} H_{0_e} &= \hbar\omega_c (d_e^\dagger d_e + 1/2) \\ H_{0_h} &= -\hbar\omega_c (g_h^\dagger g_h + 1/2), \end{aligned}$$

sendo que a diferença entre as duas representações se deve à carga oposta das partículas.

As demais diferenças nas representações devidas ao sinal da carga são:

$$V = \begin{cases} \frac{i\hbar\sqrt{2}}{\ell m} d_e^\dagger & q < 0 \\ -\frac{i\hbar\sqrt{2}}{\ell m} g_h & q > 0 \end{cases},$$

e

$$Z_o = \begin{cases} \sqrt{2}\ell g_e & q < 0 \\ \sqrt{2}\ell d_h^\dagger & q > 0 \end{cases} .$$

Como este é um problema de apenas dois corpos, será conveniente introduzir um operador do "centro de massa" dos centros de órbita

$$Z_o = \frac{Z_{o_e} + Z_{o_h}}{2} = \frac{\ell}{\sqrt{2}} (d_h^\dagger + g_e) ,$$

e seu momentum canonicamente conjugado

$$P_o^\dagger = \frac{-i\hbar}{\sqrt{2}\ell} (d_h - g_e^\dagger) .$$

Os operadores P_o^\dagger e P_o comutam com $V(\vec{r}_e - \vec{r}_h)$, o que é mera consequência da conservação do momentum do centro de massa do par. Sendo assim, os autoestados de P_o constituem uma boa base para o problema de pares elétron-buraco interagentes (D.0.4). Estes autoestados são dados por

$$(D.0.5) \quad |\Psi_{n,p}(\vec{q})\rangle = e^{-q^2/4} \sum_{m_1, m_2} G_{m_1, m_2}(\vec{q}) |n + p, m_1; m_2, p\rangle$$

sendo que

$$P_o |\Psi_{n,p}(\vec{q})\rangle = \hbar (q_x + iq_y) |\Psi_{n,p}(\vec{q})\rangle$$

e onde as funções $G_{m_1, m_2}(\vec{q})$ estão definidas em (3.1.2)

P_o é a forma complexa do operador "momentum do magneto-exciton", primeiramente derivado por *Kallin e Halperin*. Contudo, ele é na realidade o momentum do "centro de massa dos centros de órbita" e não exatamente o momentum do centro de massa do par, como se afirma no referido trabalho.

Se impusermos a condição de que os fermions não sofram transições entre níveis de Landau, a Hamiltoniana (D.0.4) se torna diagonal na base (D.0.5) e suas autoenergias são dadas por

$$E_{n,p}(\vec{q}) = \hbar\omega_c n - \frac{e^2}{\ell} \int d^2\vec{k} \frac{e^{-q^2\ell^2/2} e^{i\ell(k_x q_y - q_x k_y)}}{k} L_{n+p}\left(\frac{k^2}{2}\right) L_p\left(\frac{k^2}{2}\right) .$$

Então, podemos interpretar

$$e_{n,p}^\dagger(\vec{q}) = e^{-q^2/4} \sum_{m_1, m_2} G_{m_1, m_2}(\vec{q}) c_{n+p, m_1}^\dagger c_{p, m_2}$$

como um operador que cria um par elétron buraco num estado ligado. Este ente isolado é denominado *magneto-exciton*. No caso em que há um estado de excitação

coletiva formada por superposições coerentes (como é o caso das soluções da equação de Kallin e Halperin) eles são chamados de *magneto-plasmons*.

APÊNDICE E

O operador densidade de corrente

A componente de Fourier $\vec{J}_{\vec{q}}$ do operador densidade de corrente é dada por

$$\begin{aligned}\vec{J}_{\vec{q}} &= \int d^2\vec{r} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} \vec{J}(\vec{r}) \\ &= \sum_{nmn'm'} \langle n'm' | \frac{\vec{v}e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} + e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}\vec{v}}{2} | nm \rangle c_{n',m'}^\dagger c_{n,m}.\end{aligned}$$

Para decompor $J_{\vec{q}}$ em operadores de criação de magneto-plasmons, é preferível usar a função complexa $j = J_x + iJ_y$. Através desta função e de sua conjugada Hermitiana podemos expressar as componentes do operador $\vec{J}_{\vec{q}}$, como segue

$$\begin{aligned}J_x(\vec{q}) &= \frac{j(\vec{q}) + j^\dagger(-\vec{q})}{2}, \\ J_y(\vec{q}) &= \frac{j(\vec{q}) - j^\dagger(-\vec{q})}{2i}\end{aligned}$$

onde

$$j(\vec{q}) = \sum_{nmn'm'} \langle n'm' | \frac{V e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} + e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} V}{2} | nm \rangle c_{n',m'}^\dagger c_{n,m}$$

e V está definido em A.0.1.

Se utilizarmos a relação de comutação $[e^{-i\vec{q}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)}, V] = \frac{\hbar}{m} (q_x + iq_y) e^{-i\vec{q}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)}$, teremos que

$$\begin{aligned}j(\vec{q}) &= \frac{i\sqrt{2}\hbar}{\ell m} \left\{ \sum_{nmn'm'} \langle n' | d^\dagger e^{-i\vec{q}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)} | n \rangle \langle m' | e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}_0} | m \rangle c_{n',m'}^\dagger c_{n,m} \right\} \\ &\quad + \frac{\hbar}{2m} (q_x + iq_y) \rho(\vec{q}),\end{aligned}$$

Partindo desta última descrição, podemos utilizar as propriedades dos operadores escada d^\dagger para mostrar que, dentro da aproximação de campo fraco

$$\begin{aligned}\langle n+p | d^\dagger e^{-i\vec{q}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)} | p \rangle &\approx i e^{i \arg(\vec{q})} \sqrt{\nu} (-i)^n e^{-in \arg(\vec{q})} \left(\mathcal{J}'_n(qR_c) + \frac{n}{\kappa R_c} \mathcal{J}_n(qR_c) \right) \\ \langle p | d^\dagger e^{-i\vec{q}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)} | p+n \rangle &\approx i e^{i \arg(\vec{q})} \sqrt{\nu} (-i)^n e^{-in \arg(\vec{q})} \left(\mathcal{J}'_n(qR_c) + \frac{n}{\kappa R_c} \mathcal{J}_n(qR_c) \right)\end{aligned}$$

e, conseqüentemente,

$$j(\vec{q}) = j^{(1)}(\vec{q}) + j^{(2)}(\vec{q})$$

onde

$$j^{(1)}(\vec{q}) = -\frac{\omega_c e^{i \arg(\vec{q})}}{q} \sum_n \sqrt{n^3 N_\phi} \mathcal{J}_n(qR_c) \{b_n^\dagger(\vec{q}) - b_n(-\vec{q})\}$$

e

$$j^{(2)}(\vec{q}) = e^{i \arg(\vec{q})} \sum_n \sqrt{n N_\phi} \left\{ \frac{\hbar q}{2m} \mathcal{J}_n(qR_c) - R_c \omega_c \mathcal{J}'_n(qR_c) \right\} \{b_n^\dagger(\vec{q}) + b_n(-\vec{q})\}$$

Agora, as componentes longitudinal e transversa do operador densidade de corrente podem ser obtidas através das relações

$$\begin{aligned}J_{\vec{q}}^{(l)} &= \vec{J}_{\vec{q}} \cdot \hat{q} = \frac{j(\vec{q}) e^{-i \arg(\vec{q})} + e^{i \arg(\vec{q})} j^\dagger(-\vec{q})}{2} \\ J_{\vec{q}}^{(t)} \vec{q} &= \vec{J}_{\vec{q}} \cdot (\hat{z} \times \hat{q}) = \frac{j(\vec{q}) e^{-i \arg(\vec{q})} - e^{i \arg(\vec{q})} j^\dagger(-\vec{q})}{2i},\end{aligned}$$

o que dá diretamente as expressões (3.1.4) e (3.1.5)

APÊNDICE F

Resposta linear e Funções de polarização

A resposta a um campo de gauge em termos de corrente induzida em um gás de elétrons é descrita por

$$\langle J_\mu(\vec{q}, \omega) \rangle = \chi_{\mu\nu}(\vec{q}, \omega) \left(\frac{-e}{c} A_\nu(\vec{q}, \omega) \right),$$

onde $J_\mu(\vec{r}, t) \equiv \frac{1}{2m} \sum_i (p_{i,\mu} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) + \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) p_{i,\mu})$, $p \equiv (c, \vec{p})$, $A \equiv (\phi, \vec{A})$ e o tensor de polarização χ , que mede a resposta ao campo de gauge, é dado por

$$(F.0.6) \quad \chi_{\mu\nu}(\vec{q}, \omega) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^\infty e^{(-i\omega + \eta)t} \langle [J_\mu(\vec{q}, t), J_\nu^\dagger(\vec{q}, 0)] \rangle dt.$$

Sabe-se que a corrente de transporte de carga, que é um invariante de gauge, não é obtida pelo momentum das partículas mas sim pela velocidade. Logo, a corrente realmente medida é

$$\begin{aligned} \langle \vec{j}(\vec{r}, t) \rangle &\equiv \left\langle \frac{e}{2m} \sum_i \left(\left(\vec{p}_i - \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}_i) \right) \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) + \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \left(\vec{p}_i - \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}_i) \right) \right) \right\rangle \\ &\equiv e \langle \vec{J}(\vec{r}, t) \rangle - \frac{e^2}{mc} \sum_i \vec{A}(\vec{r}_i) \delta(\vec{r} - \vec{r}_i). \end{aligned}$$

Tomando a transformada de Fourier da equação acima e, lembrando que num gás de elétrons uniforme $\langle \rho(\vec{q}) \rangle = N \delta_{\vec{q},0}$, concluímos que a resposta linear da corrente real induzida é dada por

$$\langle j_\mu(\vec{q}, \omega) \rangle = e \left(\chi_{\mu\nu}(\vec{q}, \omega) + \frac{N}{m} \delta_{\mu\nu} (1 - \delta_{\mu 0}) \right) \left(\frac{-e}{c} A_\nu(\vec{q}, \omega) \right).$$

Agora, convencionando $\hat{x} \parallel \vec{q}$ e utilizando as definições das correntes (3.1.4) e (3.1.5), a função resposta (F.0.6) pode ser facilmente calculada com a ajuda das seguintes propriedades de soma das funções de Bessel,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \mathcal{J}_{n+m}(x) \mathcal{J}_{n-m}(x)}{\omega^2 - n^2} = -\frac{1}{2} \delta_{m,0} + \frac{(-1)^m}{2} \frac{\pi \omega \mathcal{J}_{m+\omega}(x) \mathcal{J}_{m-\omega}(x)}{\sin(\pi \omega)}$$

$$(F.0.7) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \mathcal{J}_n(x) = \frac{x^2}{4}.$$

Assim teremos,¹

$$\begin{aligned} \chi_{00}(\vec{q}, \omega) &= \frac{N_\phi}{i\hbar} \sum_{n=1}^{\infty} n \mathcal{J}_n^2(\kappa R_c) \int_0^{\infty} e^{(-i\omega+\eta)t} \{e^{-in\omega_c t} - e^{in\omega_c t}\} dt \\ &= \frac{N_\phi}{\hbar\omega_c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 \mathcal{J}_n^2(q)}{(\omega + i\eta)^2 - n^2} \\ &= \frac{N_\phi}{\hbar\omega_c} \left\{ \frac{\pi\omega}{\sin(\pi\omega)} \mathcal{J}_\omega(q) \mathcal{J}_{-\omega}(q) - 1 \right\}, \end{aligned}$$

onde o termo constante é exatamente a contribuição diamagnética para a corrente de que falamos ($\frac{N_\phi v_f^2}{2\hbar\omega_c} = \frac{N}{m}$),

$$\begin{aligned} \chi_{02}(\vec{q}, \omega) &= -iv_f \frac{2N_\phi}{\hbar\omega_c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \mathcal{J}_n(q) \mathcal{J}'_n(q)}{(\omega + i\eta)^2 - n^2} \\ &= \frac{-iv_f}{2} \frac{\partial}{\partial q} \chi_{00}(\vec{q}, \omega) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \chi_{22}(\vec{q}, \omega) &= v_f^2 \frac{2N_\phi}{\hbar\omega_c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 (\mathcal{J}'_n(q))^2}{(\omega + i\eta)^2 - n^2} \\ &= v_f^2 \frac{2N_\phi}{\hbar\omega_c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \left(\frac{n^2}{q^2} \mathcal{J}_n^2(q) - \mathcal{J}_{n-1}(q) \mathcal{J}_{n+1}(q) \right)}{(\omega + i\eta)^2 - n^2} \\ &= \chi_{11}(\vec{q}, \omega) + v_f^2 \frac{N_\phi}{\hbar\omega_c} \left\{ \frac{\pi\omega}{\sin(\pi\omega)} \mathcal{J}_{1+\omega}(q) \mathcal{J}_{1-\omega}(q) \right\}. \end{aligned}$$

Os resultados obtidos acima são iguais aos resultados semi-clássicos obtidos na teoria de *Landau-Silin* [4, 76] no campo magnético.

Sabemos, ainda, que a parte longitudinal A_1 do potencial vetor gera apenas um campo elétrico, uma vez que o seu rotacional é nulo. Obviamente, como decorrência da invariância de gauge, este mesmo campo elétrico pode ser obtido se aplicarmos um potencial escalar A_0 da forma

$$A_0(\vec{q}, \omega) = \frac{-\omega}{cq} A_1(\vec{q}, \omega).$$

¹Estamos adotando a convenção de que ω é dado em unidades de ω_c e q é dado em unidades de $1/R_c$.

Este fato, aliado a equação de continuidade

$$\vec{q} \cdot \vec{J}(q, \omega) = \omega \rho(\vec{q}, \omega),$$

leva às seguintes relações entre as componentes do tensor de funções resposta:

$$\begin{aligned} \chi_{11}(\vec{q}, \omega) + \frac{N}{m} &= \left(\frac{\omega}{q}\right)^2 \chi_{00}(\vec{q}, \omega), \\ \chi_{01}(\vec{q}, \omega) &= \frac{\omega}{q} \chi_{00}(\vec{q}, \omega), \\ \chi_{12}(\vec{q}, \omega) &= \frac{\omega}{q} \chi_{02}(\vec{q}, \omega). \end{aligned}$$

Disto, finalmente podemos escrever:

$$\chi(\vec{q}, \omega) = \frac{N_\phi}{\hbar\omega_c} \begin{pmatrix} \chi_{00}(\vec{q}, \omega) & v_f \frac{\omega}{q} \chi_{00}(\vec{q}, \omega) & -\frac{iv_f}{2} \frac{\partial}{\partial q} \chi_{00}(\vec{q}, \omega) \\ v_f \frac{\omega}{q} \chi_{00}(\vec{q}, \omega) & v_f^2 \left[\left(\frac{\omega}{q}\right)^2 \chi_{00}(\vec{q}, \omega) - \frac{1}{2} \right] & -\frac{iv_f^2}{2} \frac{\omega}{q} \frac{\partial}{\partial q} \chi_{00}(\vec{q}, \omega) \\ \frac{iv_f}{2} \frac{\partial}{\partial q} \chi_{00}(\vec{q}, \omega) & \frac{iv_f^2}{2} \frac{\omega}{q} \frac{\partial}{\partial q} \chi_{00}(\vec{q}, \omega) & v_f^2 \chi_{22}(\vec{q}, \omega) \end{pmatrix}$$

que, para $q \ll 1$ e $\omega \ll 1$, onde valem as aproximações

$$\begin{aligned} \chi_{00}(\vec{q}, \omega) &\approx \frac{q^2}{2} \frac{1}{\omega^2 - 1} \\ \frac{\partial}{\partial q} \chi_{00}(\vec{q}, \omega) &\approx q \frac{1}{\omega^2 - 1} \\ \chi_{22}(\vec{q}, \omega) &\approx \frac{q^2}{4} \frac{1}{\omega^2 - 1}, \end{aligned}$$

pode ser aproximado por

$$\chi(\vec{q}, \omega) \approx \frac{N_\phi}{2\hbar\omega_c} \frac{1}{\omega^2 - 1} \begin{pmatrix} q^2 & v_f q \omega & -iv_f q \\ v_f q \omega & v_f^2 & -iv_f^2 \omega \\ iv_f q & iv_f^2 \omega & v_f^2 \left(1 + \frac{q^2}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Referências Bibliográficas

- [1] P. Drude, *Annalen der Physik* **1**, 566 and **3**, 369 (1900).
- [2] N. W. Ashcroft e N. D. Mermin, *Solid State Physics*, (Saunders Colledge, Phyladelphia, 1976).
- [3] L. D. Landau, Sov. Phys. JETP **3**, 920 (1957); **5**, 101(1957); **8**, 70 (1958).
- [4] D. Pines and P. Nozieres, *Theory of Quantum Liquids*, v.I (Benjamin, New York, 1966).
- [5] J. Voit, Rep.Prog.Phys. **58**, 977 (1995).
- [6] H. J. Schulz, cond-mat/9503150.
- [7] Das Sarma and Pinczuk, *Perspectives in Quantum Hall Effects* (John Wiley & Sons, New York, 1997).
- [8] J. G. Bednorz and K. A. Mueller, Z. Phys. B **64**,189 (1986).
- [9] M. J. Kelly, *Low Dimensional Semiconductors* (Claredon Press, Oxford, 1995).
- [10] F. Bloch, Z. Phys. **81**, 363 (1933).
- [11] S. Tomonaga, Prog. Theor. Phys. (Kyoto), **5**, 544, (1950).
- [12] W.Thirring, Ann.Phys.(N.Y.) **3**, 91 (1958); J.M.Luttinger, J.Math.Phys. **4**, 1154, (1963); D.Mattis and E.Lieb, J.Math.Phys.**6**, 304 (1965); A.Luther, Phys.Rev.B **14**, 2153 (1975); S.Coleman, Phys.Rev.D.**11**, 2088 (1975).
- [13] S. Mandelstam , Phys. Rev. D **11** ,3026 (1975).
- [14] F.D.M. Haldane, J. Phys. C **14** , 2585 (1981).
- [15] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons* (North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1982).
- [16] E. Fradkin, *Field Theories of Condensed Matter Physics*, (Addison-Wesley, Redwood City 1991).
- [17] A.Luther, Phys. Rev. B, **19**, 320 (1979).
- [18] E. C. Marino, Phys. Lett. **263**, 63 (1991).
- [19] E. C. Marino, Annals. of Phys. **223**, 225 (1993).
- [20] L. P. Kadanov and E. H. Ceva, Phys. Rev. B **3**, 3918 (1971).
- [21] E. Fradkin and L.Susskind, Phys. Rev. D **17**, 2637 (1978).
- [22] E. C. Marino and J. A. Swieca, Nuc. Phys. B **170**, 175 (1980).
- [23] F.D.M. Haldane, Varenna Lectures (1992) and Helv. Phys. Acta. **65**, 152 (1992).
- [24] A. Houghton and B. Marston, Phys. Rev. B **48**, 7790 (1993).
- [25] H.J. Kwon, A. Houghton and B. Marston, Phys. Rev. B **52**, 8002 (1995).
- [26] A.H. Castro Neto and Eduardo Fradkin, Phys. Rev. Lett. **72**, 1393 (1993).
- [27] A.H. Castro Neto and Eduardo Fradkin, Phys. Rev. B, **51**, 4048 (1995).
- [28] P. Kopietz and G.E. Castilla, Phys.Rev.Lett. **76**, 4777 (1996); P.Kopietz, J. Hermisson and K. Schonhammer, Phys.Rev.B **52**, 10877 (1995).
- [29] P. Kopietz, *Bosonization of interacting fermions in any dimension* , (Springer, Berlin Heidelberg, 1996).
- [30] C. Castellani, C. Di Castro, and W. Metzner, Phys. Rev. Lett. **72**, 316 (1994).
- [31] R.E. Prange and S.M. Girvin eds., *The Quantum Hall Effect*, 2nd ed. (Springer-Verlag, New York, 1990).
- [32] A.Karlhede, S.A. Kivelson, and S.L. Sondhi, *The Quantum Hall Effect : The article*, Lectures pres. at the 9th Jerusalem Winter School on Theor. Phys. (1992).

- [33] A.H. MacDonald, *The Quantum Hall Effect: A Perspective*, (Kluwer Academic Dordrecht, 1989).
- [34] H. Westfahl Jr., A. H. Castro Neto and A. O. Caldeira, *Phys. Rev. B* **55**, R7347 (1997).
- [35] H. Westfahl Jr., A. H. Castro Neto and A. O. Caldeira, *Zeits. Für Physik B* **103**, 279 (1997).
- [36] C. Kallin and B.I. Halperin, *Phys. Rev. B*, **30**, 5655, (1984).
- [37] A.H. MacDonald, *Phys. Rev. B* **30**, 4392 (1984).
- [38] S. M. Girvin, A. H. MacDonald, P. M. Platzman, *Phys. Rev. B* **33**, 2481 (1986).
- [39] S. Conti and G. Vignale, *cond-mat/9801318*
- [40] I.L. Aleiner, H. U. Baranger, and L.I. Glazman, *Phys.Rev.Lett.*, **74**, 3435, (1995).
- [41] I.L. Aleiner and L.I. Glazman, *Phys.Rev.B*, **52**, 11296, (1995).
- [42] M. M. Fogler, A. A. Koulakov, and B. I. Shklovskii, *Phys.Rev.B*, **54**, 1853, (1996).
- [43] L.S. Levitov and A.V. Shytov, *cond. mat. /9507058*.
- [44] J.P.Eisenstein, L.N. Pfeiffer and K.W. West, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 1419 (1995).
- [45] X. G. Wen, *Phys.Rev.B*, **43**, 11025, (1991); *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2206 (1990).
- [46] H. Westfahl Jr., A. O. Caldeira, D. Baeriswyl and E. Miranda *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2953 (1998).
- [47] K. D. Schotte and U. Schotte, *Phys. Rev* **182**, 479 (1969).
- [48] G.D. Mahan *Many-Particle Physics* (Plenum Press, New York, 1981).
- [49] P. W. Anderson, *Phys. Rev. Lett.* **18**, 1049 (1967).
- [50] G. D. Mahan, *Phys. Rev.* **153**, 882 (1967); **163**, 612 (1967).
- [51] S. Doniach and Sunjie, *J. Phys. C* **3**, 285 (1970).
- [52] P. Nozieres and C.T. de Dominicis, *Phys. Rev.* **178**, 1097 (1969).
- [53] J. Gavoret, P. Nozieres, B. Roulet, and M. Combescot, *J. Phys. (Paris)* **30**, 987 (1969).
- [54] E. Mueller-Hartmann, T. V. Ramakrishnan and G. Toulouse, *Phys. Rev. B* **3**, 1102 (1971).
- [55] T. Uenoyama and L. J. Sham, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 1048 (1990).
- [56] M. S. Skolnick et al., *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2130 (1987).
- [57] K. J. Nash et al. *Phys. Rev. Lett.* **70**, 3115 (1993).
- [58] P. Hawrylak, *Phys. Rev. B* **42**, 8986 (1991), *Phys. Rev. B* **44**, 3821,6262,11236, (1991).
- [59] G. E. Bauer and T. Ando, *J. Phys C* **19**, 1553 (1986).
- [60] T. Uenoyama and L. J. Sham, *Phys. Rev. B* **39**, 11044 (1989).
- [61] M. W. Dellow, *et. al* *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1754 (1992).
- [62] A. K. Geim, *et. al* *Phys. Rev. Lett.* **72**, 2061 (1994).
- [63] P. J. McDonnell, *Physica B* **211**, 433 (1995).
- [64] J. Rubio, *et. al* *Phys. Rev. B* **55**, 16390 (1997).
- [65] G. Coli, *et. al* *Phys. Rev. B* **55**, R7391 (1997).
- [66] H. Fukuyama, P. M. Platzman, P. W. Anderson, *Phys. Rev.B* **19**, 5211 (1979).
- [67] D. Yoshioka and H. Fukuyama, *J. Phys. Soc. Jpn.* **47**, 394 (1979).
- [68] R. B. Laughlin, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1395 (1983).
- [69] S. M. Girvin and A. H. MacDonald, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1252 (1987).
- [70] J. K. Jain, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 199 (1989).
- [71] A.Lopez and E.Fradkin, *Phys. Rev. B* **44**, 5246 (1991); *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2126 (1992); *Nucl. Phys. B* **33 C**, 67 (1993).
- [72] A. H. MacDonald, E. H. Rezayi and David Keller, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1939 (1992).
- [73] S. C. Zhang, *Int. J. Mod. Phys. B* **6**, 25 (1992).
- [74] V. Kalmeyer and S.-C. Zhang, *Phys.Rev.B* **46**, 9889(1992).
- [75] B.I.Halperin, P.A.Lee and N.Read, *Phys.Rev.B* **47**, 7312 (1993).
- [76] S. H. Simon and B. I. Haperin, *Phys. Rev. B* **48**, 17368 (1993); A. Stern and B. Halperin, *Phys. Rev. B* **52**, 5890 (1995).
- [77] R. Shankar and G. Murthy, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 22 (1997); *cond-mat/9802244*.
- [78] D. T. Pegg and S. M. Barnett, *Euophysics Letters*, **6**, 483 (188).

- [79] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik *Tables of Integrals, Series, and Products*, Fifth Edition (New York: Academic Press 1963).