UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Elmer Levano Huamaccto

Gerador estendido e estabilidade quase certa para processos de difusão degenerados

Campinas
2018

Elmer Levano Huamaccto

Gerador estendido e estabilidade quase certa para processos de difusão degenerados

Tese de Doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica, na Área de Automação.

Orientador: Prof. Dr. João Bosco Ribeiro Do Val

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DE DOUTORADO DEFENDIDA PELO ALUNO ELMER LEVANO HUAMACCTO E ORIENTADA PELO PROF. DR. JOÃO BOSCO RIBEIRO DO VAL.

Campinas
2018

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

L575g

Levano Huamaccto, Elmer, 1984-
Gerador estendido e estabilidade quase certa para processos de difusão degenerados / Elmer Levano Huamaccto. – Campinas, SP : [s.n.], 2018.

Orientador: João Bosco Ribeiro do Val.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Estabilidade. 2. Difusão de processos - Modelos matemáticos. 3. Sistemas Hamiltonianos. 4. Teoria de controle estocástico. 5. Sistemas estocásticos. I. Val, João Bosco Ribeiro do, 1955-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Extended generator and almost sure stability for degenerate diffusion processes
Palavras-chave em inglês:
Stability
Processes of diffution - Mathematical models
Hamiltonian systems
Stochastic control theory
Stochastic systems
Área de concentração: Automação
Titulação: Doutor em Engenharia Elétrica
Banca examinadora:
João Bosco Ribeiro do Val [Orientador]
Marcelo Dutra Fragoso
Daniel Oliveira Cajueiro
José Cláudio Geromel
Akebo Yamakami
Data de defesa: 21-11-2018
Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid/0000-0001-7660-9179
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/0515513770232580

COMISSÃO JULGADORA — TESE DE DOUTORADO

Candidato: Elmer Levano Huamaccto **RA:** 153783
Data da Defesa: 21 de Novembro de 2018

Título da Tese: "Gerador estendido e estabilidade quase certa para processos de difusão degenerados"

Prof. Dr. João Bosco Ribeiro Do Val (presidente, FEEC/UNICAMP)
Prof. Dr. Marcelo Dutra Fragoso (LNCC)
Prof. Dr. Daniel Oliveira Cajueiro (FACE/UnB)
Prof. Dr. José Cláudio Geromel (FEEC/UNICAMP)
Prof. Dr. Akebo Yamakami (FEEC/UNICAMP)

A ata de defesa, com as respectivas assinaturas dos membros da Comissão Julgadora, encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

Dedico esta tese a minha família, meus irmãos Luis no céu e Carlos na terra e todos meus amigos do LE16 grato por essa força nas horas incertas.

Agradecimentos

Agradeço,

à minha família por motivar meus estudos, em especial a meu irmão Carlos pelos grandes sacrifícios na vida, por ter me ensinado a correr atrás dos meus sonhos;

ao meu orientador, Prof. Dr. João Bosco, por compartilhar seu conhecimento, pela paciência, críticas construtivas, orientações e motivações que foram fundamentais para a realização deste trabalho e ajudaram a ampliar imensamente minha bagagem profissional;

ao prof. Dr. Alessandro do Nascimento Vargas por ter me incentivado a entrar na pós-graduação e pelos seus ensinamentos e troca de experiências que foram fundamentais para minha trajetória no mestrado e doutorado;

ao Prof. Dr. Ricardo C. L. F. Oliveira pelos valiosos conselhos durante as reuniões de cafés diários que ocorreram no LE16;

à Dra. Cecília Morais pela constante motivação no decorrer dos anos no doutorado, e fazer minha estancia muito agradável em Campinas;

ao corpo medico, enfermeiras e voluntárias do Instituto Nacional de Enfermidades Neoplásicas de Lima (INEN), por devolver esperança a toda minha família;

a minhas grandes amigas Stefany e Michelle pelos conselhos e paciência de minha falta de bom senso, gratidão por ter conhecido;

aos meus colegas do DSE, Cecília, Glauco, Renato, Marcio, Luciano, Licio, Isabela, Lailson, Henrique, Tábitha, Gustavo, Marciano, Polieny, Daniel, Filipe, Vinicius, Nereu, Raúl, Larissa, Lucas, Yasmin, M. Gorete, E. Ortega, Juan, Fredy, Powel, Cláudia, Rolando, aos meus colegas da matemática Leyter, Victor, Sergio, Dan, e recentemente e não menos importantes meus amiguinhos simpáticos e peculiares, Amanda-Daniel, Ariádne, Álvaro, Izabella, Julia, Juliane, Bruno, Rafael mineiro, Rafael, Monique, Gabriel, e entre outros, obrigado pela convivência nas horas do café e troca de experiências idiomáticas com acerto quase certamente por minha parte;

à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas professores e funcionários que deram o suporte necessário pela acolhida que oferece aos estudantes e pesquisadores.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) Código de Financiamento - 140861.

"Estude muito do que interessa a você e faça-o da maneira mais indisciplinada, irreverente e original possível"

(Richard Feynman)

"A mente humana é incrível, para atingir todo o seu potencial, precisa de uma faísca. A faísca do questionamento, da emoção, da paixão..."

Resumo

A principal contribuição desta tese é o desenvolvimento de um gerador estendido para processos de difusão em forma explícita e que está associado à existência de uma solução de viscosidade de uma equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB), no sentido que tal solução pertence ao domínio do gerador. Tem-se interesse pelos processos de difusão Markovianos, na medida em que a fórmula de Dynkin permite o cálculo em valor esperado da evolução dos funcionais não regulares, que não podem ser tratados adequadamente pelo cálculo de Itô.

Tal caracterização aplica-se em uma nova abordagem para lidar com a estabilidade quase certa (q.c.) na forma de recorrência finita para problemas de difusão invariantes ao longo do tempo afetados por um ruído persistente. A técnica proposta baseia-se nos resultados apresentados pelo método de Kushner-Khasminskii na forma clássica de estabilidade para a origem e na abordagem de Meyn para a caracterização do gerador estendido. Para sistemas semilineares com coeficiente de difusão convexo, esta tese mostra que a solução da equação HJB é uma função convexa quando o custo de operação é convexo. Assim, obtém-se uma função de Lyapunov a partir da solução ótima de uma maneira direta e, dessa forma, unindo otimalidade e estabilidade. As noções de estabilidade associadas a convergência para um conjunto compacto são exploradas e soluções estáveis subótimas podem ser obtidas pela imposição de uma função de Lyapunov não regular. Nesse contexto, existe um panorama pouco explorado na literatura no qual surgem possíveis aplicações, e que serão apresentadas na forma de exemplos nesta tese.

Palavras-chaves: estabilidade; difusão de processos - modelos matemáticos; sistemas hamiltonianos; teoria de controle estocástico; sistemas estocásticos.

Abstract

The thesis develops an extended generator for diffusion processes in explicit form that is associated to the existence of viscosity solution of Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equations, in the sense that such a solution belongs to the generator domain. It has a direct interest for Markovian diffusion processes, insofar Dynkin's formula allows the expected value calculus for the evolution of nonsmooth functionals, which cannot be handled by Itô's calculus.

Such a characterization applies in a novel approach to deal with the almost sure stability in form of finite recurrence for the solution of long run time invariant diffusion problems with persistent noise. The approach builds upon the results given by the Kushner-Khasminskii's approach in the classic stability to the origin method and on Meyn's approach for the extended generator characterization. For semilinear systems with convex diffusion coefficient, the thesis shows that the solution of the HJB is a convex function when the running cost also is, thus pointing out a Lyapunov function from the optimal solution, bridging optimality with stability. Notions of stability associated to convergence to a compact set is explored and the idea that suboptimal stable solutions can be obtained by imposing nonsmooth Lyapunov functions exemplifies possible applications.

Keywords: stability; diffusion of processes - mathematical models; Hamiltonian system; stochastic control theory; stochastic systems.

Lista de ilustrações

Lista de abreviaturas e siglas

EDE	equações diferencias estocásticas
EDO	equações diferenciais ordinárias
EDP	equações diferencias parciais
HJB	Hamilton Jacobi Bellman
NSS	*noise-to-state stable*
P_1	problema 1
P_2	problema 2
P_3	problema 3
sse	se somente se
v.a.	variável aleatória ou variáveis aleatórias
v.a.r.	variável aleatória real ou variáveis aleatórias reais
q.c.	quase certa
q.t.p.	quase todo ponto
$\sim$	significa "está distribuído como"

Lista de símbolos

$\mathbb{R}_+$	conjunto dos números reais não negativos
$\mathbb{R}^n$	conjunto dos números reais n-dimensionais
$\mathbb{S}^n$	conjunto das matrizes simétricas de ordem n
Ω	conjunto arbitrário não vazio
$\mathcal{F}$	σ-álgebra
$\mathbf{P}(\cdot)$	medida de probabilidade
$\mathcal{F}_t$	filtração
$\mathbf{E}[\cdot]$	valor esperado
$\mathbf{P}_x(\cdot)$	probabilidade com respeito a $\mathcal{F}_0$
$\mathbf{E}_x[\cdot]$	valor esperado com respeito a $\mathbf{P}_x$
$\mathbf{P}$-q.c.	probabilidade quase certa
$t \mapsto x_t$	um caminho ou uma trajetória em $\mathbb{R}^n$
$d(\cdot, \cdot)$	uma métrica em $\mathbb{R}^n$
$\\|\cdot\\|$	uma norma em $\mathbb{R}^n$
E	um espaço topológico
$\\|\cdot\\|_E$	uma norma em E
$(E, \\|\cdot\\|_E)$	espaço de normado ou de Banach
$\langle\cdot, \cdot\rangle$	produto interno
$(E, \langle\cdot, \cdot\rangle)$	espaço com produto interno ou de Hilbert
$\mathcal{H}$	funcional Hamiltoniano
$C(E)$	família de funções contínuas em $(E, \\|\cdot\\|_E)$
$C^k(E)$	família de funções contínuas k-diferenciável em $(E, \\|\cdot\\|_E)$
$L^p(0, T; E)$	espaço de Banach de funções $[0, T] \to E$ mensuráveis, p-integráveis
$\mathcal{B}(E)$	σ-álgebra de Borel em $(E, \\|\cdot\\|_E)$
$\mathbf{tr}(A)$	traço de uma matriz A
$A^\intercal$	transposto de matriz A
$\dot\cup$	união disjunta
$\succeq$	ordem padrão em matrizes
$\mathcal{A}$	gerador estendido
$\mathscr{D}(\mathcal{A})$	domínio do gerador estendido
$N(\mu, \Sigma)$	distribuição normal com média μ e variância Σ
$\bullet$	produto Hadamard
$O(\cdot)$	notação de Landau

Sumário

1 Introdução

Um dos problemas da matemática que perduram até nossos dias é que a maioria das equações diferenciais não possuem soluções analítica explícita. Dessa impossibilidade de resolver explicitamente de forma rigorosa as equações nasceu a teoria dos sistemas dinâmicos. Poincaré (1890) desenvolveu um método que descreve qualitativamente o movimento dos corpos celestes. Antes de Poincaré, o estudo do comportamento das soluções de uma equação era feito ao redor dos pontos estacionários ou pontos de equilíbrio. Essa teoria é conhecida como "a teoria local". Em 1892, Lyapunov publicou sua famosa monografia, "*Problème général de la stabilité du mouvement*", em que estabelece os fundamentos da teoria de estabilidade que leva seu nome. Uma das vantagens dessa teoria é que ela não requer conhecer a solução da equação a *priori*. A intenção original de Lyapunov foi determinar um critério para estudar a estabilidade na origem das soluções da EDO

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \ t \in \mathbb{R}_+, \tag{1.1}$$

e, com base em (1.1), concluir sobre a estabilidade para um sistema não linear dado por

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + \sigma(x(t)), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \ t \in \mathbb{R}_+. \tag{1.2}$$

Itô (1944) introduz a teoria de integração estocástica, que deu origem ao cálculo estocástico e posteriormente, a teoria das equações diferencias estocásticas (EDE). É importante mencionar também o trabalho de Skorokhod (1976) que generaliza a integral de Itô.

A estabilidade é um conceito importante no estudo de sistemas dinâmicos, que está relacionada ao comportamento qualitativo das trajetórias das soluções de um sistema. Nesse sentido, o método de Lyapunov foi generalizado e estendido e foram introduzidos os conceitos de estabilidade e convergência estocástica. Khasminskii (1967) e Kushner (1967) estudaram de forma independente a estabilidade estocástica das soluções de uma EDE linear da seguinte forma

$$dx_t = Ax_t dt + \sum_{i=1}^{m} \sigma_i x_t dW_t^i, \quad x_0 = x \in \mathbb{R}^n, \ t \in \mathbb{R}_+, \ i = 1{,}2, \ldots, m, \tag{1.3}$$

de maneira que (1.3) é considerada como o sistema linear (1.1) perturbado também chamado semilinear.

Existe uma conexão notável dos processos de difusão entre o valor esperado dos funcionais de Itô e uma equação diferencial parcial (EDP) de segunda ordem associada ao funcional com pouca regularidade, vide Yong e Zhou (1999), Fleming e Soner (2006). Considera-se $\{x_t\}_{t\geq 0}$ como um processo de difusão controlado[1] descrito pela seguinte EDE

$$dx_t = b(x_t, u_t)dt + \sigma(x_t, u_t)dW_t, \quad x_0 = x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.4}$$

Sob uma classe de controles admissíveis Markovianos $\mathcal{U} = \{u_t = u(t, x_t) \text{ mensurável}, u_t \in U \subset \mathbb{R}^m, t \geq 0\}$, o problema do controle ótimo com horizonte τ é determinar o controle pertencente à $\mathcal{U}$ que minimiza o custo:

$$J(x, u) = \mathbf{E}_x\left[\int_0^\tau f(x_t, u_t)dt + h(x_\tau)\right], \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.5}$$

no qual

$$v(x) = \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} \mathbf{E}_x\left[\int_0^\tau f(x_t, u_t)dt + h(x_\tau)\right], \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.6}$$

é denominado função valor. Se certas condições relacionadas ao domínio e ao tempo τ forem satisfeitas, vide Krylov (1980), v é única solução da equação de HJB,

$$\mathcal{H}(x, v_x(x), v_{xx}(x)) = 0, \tag{1.7}$$

em que, v_x e v_{xx} representam o gradiente e a hessiana de v, respectivamente. A função Hamiltoniana $\mathcal{H}$ é considerada de forma explícita como

$$\mathcal{H}(x, p, P) = \inf_{u\in U}\left\{f(x, u) + \langle p, b(x, u)\rangle + \frac{1}{2}\mathbf{tr}(P\sigma(x, u)\sigma(x, u)^\intercal)\right\}. \tag{1.8}$$

Existe um marco teórico desenvolvido desde o final do século passado, que dá sentido às EDP's que incluem à equação de HJB (1.7), como um caso particular, a ser resolvido com *soluções de viscosidade*, vide Lions (1983), Crandall, Ishii e Lions (1992). Os processos de difusão controlado sob esse ponto de vista foram abordados por Yong e Zhou (1999), Borkar (2005), Fleming e Soner (2006), entre outros.

Uma deficiência no desenvolvimento da relação entre EDE de difusão e as EDP como na equação de HJB, é que as EDP's não são acompanhadas por uma evolução dos processo de Itô de forma correspondente. Por um lado, a solução de viscosidade v não é necessariamente suave (de classe C^2), e por outro, o cálculo de Itô precisa recorrer ao tempo local[2] de Lévy, vide Karatzas e Shreve (1991, Sec. 3.6), Le Gall (2016, Ch. 9). Assim, a expressão da evolução infinitesimal dos funcionais de Itô, e que permitem que (1.7) seja desenvolvida é perdida. Nesse contexto, o cálculo do Itô é de pouca utilidade para lidar com o problema em (1.6) na teoria das soluções de viscosidade para (1.7).

Para contornar essas dificuldades volta-se para os processos de Feller e a noção correspondente de gerador infinitesimal e a fórmula de Dynkin, para expressar a evolução em valor esperado dos funcionais de Itô. Embora no caso clássico esses elementos são

[1] Na literatura é comum dizer que, se um processo satisfaz (1.4), é nomeado "processo de difusão controlado", vide Krylov (1980, Pag. vi).

[2] O tempo local é utilizado na integral estocástica se o integrando não for suficientemente regular.

aplicados em funções também suaves, existe na literatura conceitos para lidar com essa falta de regularidade. Isso é precisamente dado em Meyn e Tweedie (1993) com a ideia de um gerador estendido e a correspondente fórmula de Dynkin para processos de Hunt, baseado nas ideias iniciais de Davis (1993). Devido a abordagem dos processos martingais, é possível dessa maneira expandir o gerador infinitesimal clássico. No entanto, devido a essa generalidade, não existe uma caracterização explícita de um gerador para processos de difusão.

Ao longo desta tese, despendem-se os maiores esforços procurando caracterizar um gerador estendido que seja conectado às soluções de viscosidade no sentido padrão, ou seja, que elas pertençam ao domínio do gerador. Para a solução de viscosidade da equação de HJB (1.7), esse estudo obtém um gerador estendido explicitamente como um operador diferencial de segunda ordem, que envolve o sub e superdiferenciais da função $V(x)$ ao longo de trajetórias $t \mapsto v(x_t)$ para quase todo t, e para qualquer trajetória do processo de Itô. Essa construção apresentada no Teorema 3.1 estabelece a conexão entre a solução de viscosidade de (1.7) e o processo de Itô, por meio do gerador do processo de Markov, como na conexão clássica.

Além do interesse do gerador estendido para processos de difusão, em si, esse resultado permite o estudo da estabilidade estocástica, que utiliza as referências Khasminskii (2012) e Kushner (1967) como marcos iniciais. Nesses trabalhos, os autores concentram-se na convergência q.c. dos processos para a origem, a qual funciona como uma bacia atratora para o processo. Nesse sentido, Mao (2007) apresenta um ponto de vista mais recente com resultados de natureza similar.

Na literatura, existem várias noções de estabilidade de processos de Itô, como por exemplo a estabilidade (assintótica) em probabilidade, estabilidade quase certa (q.c), estabilidade em momentos e exponencial, entre outras. Khasminskii (2012) proporciona condições necessárias e suficientes para a estabilidade assintótica de (1.3). Arnold, Oeljeklaus e Pardoux (1984) estudam de forma sistemática a estabilidade q.c. e estabilidade de momentos para (1.3). Kozin (1969) introduz o conceito de estabilidade exponencial q.c. de sistemas lineares estocásticos e Mao (1990) estuda a estabilidade exponencial quase certa de (1.3) sob a condição chamada de expoente de Lyapunov:

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log(\|x_t\|^2) \leq -c, \quad \mathbf{P}-q.c., \tag{1.9}$$

para $c > 0$. Na literatura existem diversos autores que estenderam o método de Lyapunov para estudar estabilidade de sistemas excitados por alguma perturbação, entre eles mencionamos: Wonham (1966), Zhang e Kozin (1994), Arnold e Schmalfuss (2001), Kushner (2014).

A abordagem de Lyapunov-Kushner estuda estabilidade de processos de Itô via variação em valor absoluto dos funcionais de Itô que satisfazem a propriedade de supermartingais e a fórmula de Itô, vide Bucy (1965).

Pode-se citar a seguinte literatura básica que aborda sistemas de controle estocásticos: Kushner (1971), Fleming e Rishel (1975), Davis (1977), Caines (2018). Um estudo da estabilidade de sistemas estocásticos via a abordagem Kushner-Lyapunov pode ser encontrado em Wonham (1966), Kushner (1967), Arnold (1974), Khasminskii (2012), entre outros. Gihman e Skorohod e Skorohod (1965) estudam a estabilidade estocástica de sistemas lineares por um abordagem diferente, na qual, não se usa funções de Lyapunov.

Meyn e Tweedie (1993) revisitam as ideias de estabilidade estocástica as quais são generalizadas mediante o critério de Foster-Lyapunov desenvolvido para processos de Hunt, a partir de técnicas originadas da análise de cadeias de Markov.

O gerador estendido desenvolvido nesta tese, no Teorema 3.1, é usado para estabelecer noções de estabilidade q.c. para os processos de difusão, conforme apresentado a seguir. Considera-se $\mathcal{O}$ um conjunto compacto (pré-compacto) em $\mathbb{R}^n$ que contém a origem, e $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ o conjunto domínio tal que $\mathcal{O} \subset \mathcal{D}$.

(P_1) Em (1.6) $\tau = \inf\{t \geq 0 : x_t \in \mathcal{O}$ ou $x_t \in \mathcal{D}\}$, definido por $x_0 = x \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{O}$. Eventualmente, $\mathcal{D} \equiv \mathbb{R}^n$.

(P_2) Em (1.6) $f(t, x, u) = e^{\zeta t} f(x, u)$ e $h(t, x) = e^{\zeta t} h(x), \mathcal{D} \equiv \mathbb{R}^n$, e surgem dois casos: $\zeta < 0$ com $\mathcal{O} = \emptyset$ (caso controle com desconto), ou $\zeta > 0$.

(P_3) $\mathcal{D} \equiv \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{O} = \emptyset$, e o funcional de custo em (1.6) é substituído por

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(x_s, u_s)\, ds$$

no caso de controle ergódico.

O problema P_2 com $\zeta > 0$ permite estudar a noção de estabilidade exponencial, vide Teorema 4.2. Se $(x, u) \mapsto f(x, u)$ é uma função tipo-norma fora do conjunto $\mathcal{O}$, a estabilidade é no sentido da norma, e desenvolvida no Teorema 4.4.

A função valor correspondente a cada problema acima supõe-se que satisfaz a equação de HJB correspondente abaixo, no sentido da viscosidade.

(P_1) $\mathcal{H}(x, Dv(x), D^2v(x)) = 0$ para cada $x \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{O}$ com $v = h$ sobre $\partial\mathcal{O}$, quando for aplicável.

(P_2) $\zeta v(x) + \mathcal{H}(x, Dv(x), D^2v(x)) = 0$, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ para $\zeta < 0$, e para cada $x \in \mathcal{O}^c$ com $v(x) = h(x)$ sobre $\partial\mathcal{O}$ quando $\zeta > 0$.

(P_3) $-\rho + \mathcal{H}(x, Dv(x), D^2v(x)) = 0$, para algum $\rho > 0$ e cada $x \in \mathbb{R}^n$.

A partir deste ponto, duas linhas de ação são identificadas. A primeira é a preferencial em que v seja uma função tipo-norma sobre seu domínio tal que $v|_{\partial\mathcal{D}} > v|_{\partial\mathcal{O}}$. Como consequência, tem-se que a solução ótima é estável q.c. em um sentido apropriado para ser desenvolvido no Capítulo 4.

Considera-se um caso semilinear, no qual o coeficiente de difusão $(x,u) \mapsto \sigma(x,u)$ é convexo no sentido requerido na Hipótese 3 na Seção 3.2 e a função *drift* $(x,u) \mapsto b(x,u)$ linear. Quando o custo corrente $(x,u) \mapsto f(x,u)$ e o custo final $x \mapsto h(x)$ são funções convexas em seus domínios, esse demostra-se no Teorema 3.2 que a função valor v é convexa, e assim é uma candidata natural a ser uma função Lyapunov para o problema de controle ótimo.

Uma segunda forma possível de se garantir a estabilidade estocástica é assumir que v é uma função Lyapunov tipo-norma ou se impor uma função Lyapunov v_{Lyp} aos problemas descritos anteriormente. Nesse último caso, é necessário verificar o sinal, de acordo com:

(P_1) $\mathcal{H}(x, Dv_{\mathrm{Lyp}}(x), D^2 v_{\mathrm{Lyp}}(x)) < 0$ para cada $x \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{O}$ com v_{Lyp} dado sobre $\partial\mathcal{O}$, quando for aplicável.

(P_2) $\zeta\, v_{\mathrm{Lyp}}(x) + \mathcal{H}(x, Dv_{\mathrm{Lyp}}(x), D^2 v_{\mathrm{Lyp}}(x)) < 0$, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ quando $\zeta < 0$, ou para cada $x \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{O}$ com $v_{\mathrm{Lyp}}(x)$ dado sobre $\partial\mathcal{O}$ quando $\zeta > 0$.

(P_3) $-\rho + \mathcal{H}(x, Dv_{\mathrm{Lyp}}(x), D^2 v_{\mathrm{Lyp}}(x)) < 0$, para algum $\rho > 0$ e para cada $x \in \mathbb{R}^n$.

As desigualdades impostas acima nos problemas (P_1)-(P_3) levam às noções apropriadas de estabilidade q.c. a serem detalhadas no Capítulo 4. Nesses cenários, associa-se a estabilidade estocástica a controles sub-ótimos, obtidos através da função pré especificada v_{Lyp}.

Na literatura, existem notáveis referências que estudam processos de difusão controlados via soluções de viscosidade tais como: Yong e Zhou (1999), Borkar (2005), Fleming e Soner (2006). No caso de processos não degenerados, a equação de HJB é uniformemente elíptica e o domínio das soluções da equação de HJB são funções de classe $C^2(\mathbb{R}^n)$. Nesse contexto cita-se Kohn e Nirenberg (1967), Krylov (1980), Aubin e Da Prato (1995).

Diversos estudos de processos de difusão sem controle no coeficiente de difusão encontram-se em: Florchinger (1995), Florchinger (1997), Bardi e Cesaroni (2008), Arapostathis, Borkar e Ghosh (2012). Pode-se adicionar também Bardi e Cesaroni (2008) que estudam estabilidade q.c. de processos de Itô a partir de comparações particulares de uma EDE e o pior caso de um sistema determinístico.

Trabalhos de estabilidade de processos de difusão controlados não degenerados são encontrados em: Arisawa e Lions (1998), Arapostathis, Borkar e Ghosh (2012, Cap. 3) e em suas respectivas referências. Existe escassa literatura que aborda a estabilidade de processos de difusão degenerados, entre os quais: Bardi e Cesaroni (2005), Cesaroni (2006), Akian, David e Gaubert (2008), Arapostathis, Borkar e Ghosh (2012, Cap. 7), Cosso, Fuhrman e Pham (2016). Entre eles, destaca-se pela proximidade com este trabalho o de

Cesaroni (2006), que desenvolveu a estabilidade estocástica através de supersoluções de viscosidade e impondo-se uma condição de sinal na equação de HJB de difícil verificação.

Em outro contexto de estabilidade, Krstic e Hua (1998) introduzem a noção de estabilidade para estados permanentemente perturbados (NSS, pelas siglas em inglês de *noise-to-state stable*). Essa noção for introduzida de certo modo para tratar sistemas com ruído estocástico que não desaparece na origem do espaço de estado. Nesse cenário, Deng, Krstic e Williams (2001), Mateos e Cortés (2014) criam elementos necessários para tratar EDE com ruído persistente, em que a região de atração não é uma região de absorvente. Destaca-se também na linha de processos excitados persistentes o trabalho de Nishimura e Horoshi (2018) com uma abordagem da estabilidade de processos de difusão escalares.

Contribuições

Em resumo, este trabalho apresenta as contribuições detalhadas a seguir:

- Na Seção 3.1, é construído analiticamente um operador diferencial, nomeado de gerador estendido, para processos de difusão cujo domínio contém soluções de viscosidade. As avaliações são inspiradas no desenvolvimento do Teorema de Verificação Estocástica para soluções de viscosidade, vide Yong e Zhou (1999), Gozzi, Swiech e Zhou (2005), Gozzi, Swiech e Zhou (2010).
- Na Seção 3.2, demostra-se a convexidade da função valor no problema de controle ótimo estocástico sob condições particulares. Nesse sentido, adicionando o gerador estendido determinado no Teorema 3.1 é possível estabelecer a estabilidade dos processos de difusão com controle ótimo.
- A partir da concepção do gerador estendido, usa-se a abordagem de Meyn e Tweedie (1993) para estabelecer critérios de estabilidade para processos de difusão associados a diferentes funções de custo, estudadas no Capítulo 4.
- Na Seção 4.1, aborda-se diferentes problemas de estabilidade estocástica: o problema com desconto positivo e negativo, o problema de dois limites e o problema ergódico. Em todos esses casos o gerador estendido permite o estabelecimento da noção de estabilidade correspondente.
- Na Seção 4.1.4, utiliza-se a imposição de funções de Lyapunov não regulares para o estudo de estabilidade permitida pela abordagem aqui desenvolvida.

Organização do trabalho

Para facilitar a leitura e a compreensão deste trabalho, este foi estruturado da maneira que se passa a descrever:

- No Capítulo 1, expõe-se a introdução histórica com o objetivo de colocar o leitor na perspectiva da abordagem desta tese. Também, apresenta-se uma revisão bibliográfica sobre o assunto em foco.
- No Capítulo 2, abordam-se os conceitos necessários da teoria da probabilidade, processos estocásticos, processos de Wiener, propriedade dos processos de Wiener, processos de difusão, o problema de controle, a equação de HJB, a teoria de soluções de viscosidade, entre outros. Na Seção 2.8, apresenta-se a equação de HJB no contexto das soluções de viscosidade, parte fundamental em todo o desenvolvimento.
- No Capítulo 3, apresenta-se os resultados principais desta tese no Teorema 3.1 o desenvolvimento do gerador estendido, e a Seção 3.2 explora uma propriedade intrínseca da função valor no Teorema 3.2 para dinâmicas quase lineares.
- No Capítulo 4, apresenta-se uma série de resultados sobre estabilidade estocástica. O Teorema 4.1 desenvolve a estabilidade dos processos entre duas fronteiras, o Teorema 4.2 desenvolve a estabilidade dos processos associados aos custos com desconto positivo ou negativo, o Teorema 4.3 desenvolve estabilidade dos processos associados ao problema ergódico e o Teorema 4.4 sem ajuda do gerador estendido desenvolveu estabilidade por momentos dos processos, sob uma condição na função de custo corrente. Estes resultados estão baseados nos critérios de convergência da literatura e no gerador estendido, segundo a abordagem de Meyn e Tweedie (1993), exceto o Teorema 4.4.
- Na Subseção 4.1.4, explora-se a estabilidade através do gerador estendido impondo-se funções de Lyapunov não diferenciáveis e ajustes correspondentes em uma condição de sinal da equação de HJB.
- Na Seção 4.2, apresenta-se alguns exemplos numéricos que detalham a aplicabilidade dos resultados obtidos neste trabalho.
- No Capítulo 5, apresenta-se as conclusões gerais e direcionamentos para trabalhos futuros.

2 Conceitos Básicos

Neste capítulo, definem-se alguns elementos básicos da teoria de probabilidades, processos estocásticos, equações diferencias parciais, equações diferencias estocásticas, teoria de controle ótimo estocástico, entre outros tópicos que serão fundamentais para o desenvolvimento dos modelos matemáticos abordados nesta tese. Primeiramente, apresentam-se alguns conceitos básicos da teoria da medida.

2.1 Elementos da teoria de probabilidades

Definição 2.1 *Seja Ω um conjunto não vazio. Uma coleção $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω é denominado uma σ-álgebra se satisfaz as seguintes propriedades:*

i) $\Omega \in \mathcal{F}$;

ii) *Se* $A \in \mathcal{F}$, *então* $A^c \in \mathcal{F}$;

iii) *Se* $A_1, A_2, A_3 \dots \in \mathcal{F}$, *então* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ *(união contável).*

Sejam $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ duas σ-álgebras em Ω. Diz-se que $\mathcal{F}_1$ é uma sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}_2$ se e somente se (abreviadamente, sse) $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$.

Definição 2.2 *O par $(\Omega, \mathcal{F})$ é denominado espaço mensurável sse $\mathcal{F}$ é um σ-álgebra. Cada elemento A da coleção $\mathcal{F}$ será denominado de conjunto mensurável.*

Lema 2.1 *Seja Ω um conjunto não vazio. Se $A \in \mathcal{F}$, então existe uma única σ-álgebra menor, denotada por $\sigma(A)$, contendo A.*

Definição 2.3 *$(\mathcal{M}, d)$ é um espaço métrico sse $\mathcal{M}$ é um conjunto não vazio e $d : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, tal que satisfaça as seguintes condições*

i) $d(x, y) \geq 0$ *para todo* $x, y \in \mathcal{M}$ *e será* "$=$" *se* $x = y$;

ii) $d(x, y) = d(y, x)$ *para qualquer* $x, y \in \mathcal{M}$;

iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *para qualquer* $x, y, z \in \mathcal{M}$.

Assim, $(\Omega, \mathcal{M})$ é um espaço topológico e os elementos de $\mathcal{M}$ são denominados de abertos.

Definição 2.4 *Dado um espaço topológico* $(\Omega, \mathcal{M})$ *e* $U \subset \mathcal{M}$*. Pelo Lema 2.1, existe uma* σ*-álgebra mínima, denotada por* $\mathcal{B}(U)$*, contendo* U*.* $\mathcal{B}(U)$ *é também uma* σ*-álgebra do espaço topológico. Assim, cada elemento* $B \in \mathcal{B}(U)$ *é denominado conjunto de Borel.*

Um espaço métrico é dito "completo" quando todas as sequências de Cauchy convergem para um limite que pertence ao espaço. Por outro lado, para estudar a convergência de séries de funções, precisa-se exigir que o espaço métrico tenha propriedades algébricas que nos permitam a soma de funções, então esta é uma razão para estudar espaços vetoriais normados.

Definição 2.5 *Seja* $\mathcal{V}$ *um espaço vetorial em* $\mathbb{R}$ *e* $\|\cdot\| : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ *satisfazendo as seguintes condições:*

i) $\|x\| \geq 0$ *para qualquer* $x \in \mathcal{V}$ *e será "* $=$ *" se* $x = 0$*;*

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \; \|x\|$ *para qualquer* $x \in \mathcal{V}$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$*;*

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *para qualquer* $x, y \in \mathcal{V}$*.*

Assim, $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$ é um espaço normado e $d(x, y) = \|x - y\|$. Diz-se que um espaço é Banach se for espaço vetorial normado completo.

Definição 2.6 *Seja* $\mathcal{V}$ *um espaço vetorial em* $\mathbb{R}$ *e* $\langle , \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ *satisfazendo as seguintes condições:*

i) $\langle x, x \rangle \geq 0$ *e igual a zero sse* $x = 0$ *para qualquer* $x \in \mathcal{V}$*;*

ii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ *para qualquer* $x, y \in \mathcal{V}$*;*

iii) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ *para qualquer* $x, y, z \in \mathcal{V}$*;*

iv) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ *para qualquer* $x, y \in \mathcal{V}$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$*.*

Assim, $(\mathcal{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é um espaço dotado de um produto interno, ou seja, com noções de distâncias e ângulos. Diz-se que um espaço é de Hilbert a todo espaço vetorial dotado de um produto interno.

Definição 2.7 *Sejam* $(\Omega_1, \mathcal{F}_{\Omega_1})$ *e* $(\Omega_2, \mathcal{F}_{\Omega_2})$ *dois espaços mensuráveis e* $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ *diz-se função mensurável sse as pré-imagens são conjuntos mensuráveis, isto é,* $f^{-1}(A_2) \in \mathcal{F}_{\Omega_1}$ *para qualquer* $A_2 \in \mathcal{F}_{\Omega_2}$*.*

Definição 2.8 *Seja* $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (R, \mathcal{M})$ *uma função, no qual,* $(\Omega, \mathcal{F})$ *é um espaço mensurável e* $(R, \mathcal{M})$ *é um espaço topológico. Diz-se que* X *é* $\mathcal{F}$*-mensurável se* $X^{-1}(U) \in \mathcal{F}$ *para todo* $U \in \mathcal{M}$*.*

Definição 2.9 *Considera-se um espaço mensurável* $(\Omega, \mathcal{F})$*. Diz-se que uma aplicação* $\mu : \mathcal{F} \to [0, +\infty)$ *é uma medida se as seguintes condições são verificadas*

i) $\mu\left(\dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$*;*

ii) $\mu(A) < +\infty$ *para qualquer* $A \in \mathcal{F}$*.*

Nesse caso, a tripla $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *é denominada espaço de medida.*

Uma medida de probabilidade $\mathbf{P}$, ou lei de probabilidade, ou simplesmente uma probabilidade, é uma função real $\mathbf{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ que satisfaz os seguintes axiomas (axiomas de Kolmogorov, vide Kolmogorov (1933)):

- $\mathbf{P}(\Omega) = 1$;
- $\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i)$, se $A_i \in \mathcal{F}$; $i \in \{1,2,\cdots\}$ e $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$;
- $\mathbf{P}(A) \geq 0$, para todo $A \in \mathcal{F}$.

Nesse caso, a tripla $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ é denominada um espaço de probabilidade. Diz-se que um espaço de probabilidade é completo, se satisfaz $B \in \mathcal{F}$, $A \subset B$, $\mathbf{P}(B) = 0$ então $A \in \mathcal{F}$.

Uma probabilidade condicional é uma nova medida e é definida da seguinte maneira.

Definição 2.10 *Dado* $A, B \in \mathcal{F}$ *em um espaço de probabilidade* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$*, define-se a probabilidade condicional de* A *dado que ocorreu* B*, ou simplesmente probabilidade condicional de* A *dado* B*, por*

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Na Definição 2.10 surgem algumas dificuldades, por exemplo quando B tem um elemento, então $\mathbf{P}(B) = 0$. Rigorosamente precisa-se de uma nova definição de probabilidade condicional.

Definição 2.11 *Seja* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *um espaço de probabilidade,* $(E, \mathcal{B})$ *um espaço mensurável e* $\tau : \Omega \to E$ *uma função mensurável. Uma probabilidade condicional regular com respeito a* τ *é definido como uma aplicação* $\nu : E \times \mathcal{F} \to [0,1]$ *tal que*

$$\mathbf{P}\left(A \cap \tau^{-1}(B)\right) = \int_B \nu(x, A)\mathbf{P}(\tau^{-1}(dx))$$

para todo $A \in \mathcal{F}$ *e* $B \in \mathcal{B}$*.*

Deste ponto em adiante, assume-se a tripla $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ como um espaço de probabilidades completo. Diz-se que um evento $A \in \mathcal{F}$ ocorre quase certamente (q.c), se $\mathbf{P}(A) = 1$.

Variáveis aleatórias. Sob um espaço de probabilidades e de acordo com Definição 2.7, define-se X uma variável aleatória (v.a.) como uma função mensurável de $(\Omega, \mathcal{F})$ em $(E, \mathcal{B}(E))$. Diz-se que X é uma variável aleatória real (v.a.r.), se é uma aplicação de $(\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, de modo que, $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ para todo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, no qual, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ representa a menor σ-álgebra gerada pelos conjuntos abertos em $\mathbb{R}$, comumente denominados de "Borelianos". Deve-se notar a diferença com vetor aleatório, nesse caso, o vetor de v.a. toma valores em $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$.

Um fato importante é que as funções mensuráveis (contínuas) transformam v.a. em v.a. Esta afirmação é reforçada com o próximo lema.

Lema 2.2 *(GRIMMETT;STIRZAKER, 2001) Sejam $(X_1, \dots, X_n)$ v.a.r. e $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma aplicação.*

i) Se ψ é uma função contínua, então $\psi(X_1, \dots, X_n)$ é uma v.a.r.

ii) Se ψ é uma função mensurável, então $\psi(X_1, \dots, X_n)$ é uma v.a.r.

Outro fato importante a enfatizar, é a lei de probabilidades das v.a.r. Seja X uma v.a.r. A lei de probabilidades de X é definida por $\mathbf{P}_x(B) := \mathbf{P}(X^{-1}(B))$ para todo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Desta forma, se define $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbf{P}_x)$ como um espaço de probabilidades.

Valor esperado de uma v.a. O valor esperado (esperança matemática ou média) de uma v.a.r. X é definida como

$$\mathbf{E}[X] = \int_\Omega X(\omega) d\mathbf{P}(\omega) = \int_\mathbb{R} x P_x(dx). \tag{2.1}$$

A penúltima integral é uma integral Lebesgue no espaço $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$; a última integral é uma integral Lebesgue no espaço $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbf{P}_x)$. O valor $\mathbf{E}[(X - b)^k]$, se existir, é denominado k-ésimo momento de X em torno de $b \in \mathbb{R}$, $k = 1,2,3, \dots$. O k-ésimo momento em torno de zero, $\mathbf{E}[X^k]$, é denominado simplesmente de k-ésimo momento de X ou "momento" de ordem k de X. O segundo momento em torno da média é denominado variância de X, o qual denota-se por $\mathrm{Var}[X]$, tal que $\mathrm{Var}[X] = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])^2]$. Diz-se que duas v.a. no mesmo espaço de probabilidade são independentes sse quaisquer eventos determinados por qualquer grupo dessas v.a. não têm elementos em comum, vide Barry (1996, Def. 2.8).

Propriedades do valor esperado. Nas seguintes propriedades, X, Y são variáveis aleatórias reais e c_1, c_2 são constantes.

i) $\mathbf{E}[c_1 + X] = c_1 + \mathbf{E}[X]$;

ii) $\mathbf{E}[c_1 X + c_2 Y] = c_1 \mathbf{E}[X] + c_2 \mathbf{E}[Y]$;

iii) No caso particular, em que, X e Y são independentes, então $\mathbf{E}[XY] = \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y]$.

Definição 2.12 *Seja X uma v.a.r. Se $\mathbf{E}[|X|]$ é finita, diz-se que X é integrável e denota-se $X \in L^1(\Omega;\mathbb{R})$. Denota-se também o conjunto de funções integráveis $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ por $L^1(a,b;\mathbb{R})$.*

O valor esperado condicional. Primeiramente apresenta-se uma motivação matemática para definir o valor esperado condicional. Seja X uma v.a.r. em $L^1(\Omega;\mathbb{R})$ e seja $\mathcal{G}$ uma σ-álgebra contida em $\mathcal{F}$. Desta forma pode-se calcular

$$\int_G X d\mathbf{P} \tag{2.2}$$

para qualquer G em $\mathcal{G}$. Nessas condições, com (2.2) bem definida, X é $\mathcal{G}$-mensurável? A resposta em geral é não, e para que isso aconteça é necessário a seguinte definição.

Definição 2.13 *Seja X uma v.a.r. em $L^1(\Omega;\mathbb{R})$ e $\mathcal{G}$ uma σ-álgebra contida em $\mathcal{F}$. Diz-se que $Y:(\Omega,\mathcal{G},\mathbf{P})\to(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ($\mathcal{G}$-mensurável) é o valor esperado de X condicionado à σ-álgebra $\mathcal{G}$, se para qualquer $G\in\mathcal{G}$, tem-se*

$$\int_G X(\omega)d\mathbf{P}(\omega) = \int_G Y(\omega)d\mathbf{P}(\omega). \tag{2.3}$$

De aqui em adiante, usa-se a notação $Y=\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]$ v.a. Entenda-se, uma σ-álgebra como a informação que se dispõe sobre uma certa v.a. X $\mathcal{F}$-mensurável (desconhecida para todos). Se restringirmos X a $\mathcal{G}$, então $Y=\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]$ é a informação que dispõe-se da v.a. X através do conhecimento de $\mathcal{G}$.

Lema 2.3 *Seja X uma v.a.r. e $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ σ-álgebras contidas em $\mathcal{F}$, tais que $\mathcal{G}_1$ está contida em $\mathcal{G}_2$. Então*

$$\mathbf{E}\left[(\mathbf{E}[X|\mathcal{G}_2])\,|\mathcal{G}_1\right] = \mathbf{E}[X|\mathcal{G}_1]. \tag{2.4}$$

O resultado anterior, indica que se $\mathcal{G}_1\subset\mathcal{G}_2$, então $\mathcal{G}_1$ tem menos informação que $\mathcal{G}_2$. Sendo assim, como as v.a. se condicionam com respeito à σ-álgebra o resultado sempre é a função que tem menos informação.

Diz-se que uma v.a.r. X é independente da σ-álgebra $\mathcal{G}$ se, a σ-álgebra $\{X^{-1}(B): B$ é conjunto de Borel em $\mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ é independente da σ-álgebra $\mathcal{G}$.

Lema 2.4 *Seja X uma v.a.r. e $\mathcal{G}$ σ-álgebra contida em $\mathcal{F}$. Suponha que X é independente de $\mathcal{G}$. Então*

$$\mathbf{E}[X|\mathcal{G}] = \int_\Omega X(\omega)d\mathbf{P}(\omega). \tag{2.5}$$

Denota-se por $L^p(\Omega;\mathbb{R})$ ou simplesmente L^p o conjunto das v.a. integráveis definidas sobre $(\Omega;\mathbb{R})$ para todo $1\le p<\infty$, isto é, o espaço vetorial de v.a.r. tais que

$$L^p = \{X : X \text{ é mensurável e } |X|^p \in L^1\},$$

com a norma

$$\|X\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |X|^p d\mathbf{P}\right)^{1/p}. \tag{2.6}$$

Lema 2.5 *(BREZIS, 2011, Th. 4.7) L^p é um espaço vetorial e* (2.6) *representa uma norma para todo $1 \leq p < \infty$.*

Lema 2.6 *(BREZIS, 2011, Th. 4.8) L^p é um espaço de Banach para todo $1 \leq p < \infty$.*

As seguintes desigualdades são frequentemente utilizadas na teoria de probabilidades.

Lema 2.7 (Desigualdade de Jensen) *Se $X \in L^1(\Omega; \mathbb{R})$ e $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função convexa, então $\psi(\mathbf{E}[X]) \leq \mathbf{E}[\psi(X)]$.*

A desigualdade $|\mathbf{E}[X]| \leq \mathbf{E}[|X|] \leq (\mathbf{E}[X^2])^{1/2}$ é obtida usando o Lema 2.7 desde que $| \cdot |$ e x^2 são funções convexas. Adiciona-se o Lema 2.5, tem-se o próximo lema.

Lema 2.8 *L^2 é um subespaço vetorial de L^1, isto é, $L^2 \subset L^1$.*

A desigualdade $|xy| \leq \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$ origina o seguinte resultado conhecido na literatura como a desigualdade de *Cauchy-Schwarz*.

Lema 2.9 *Sejam X e Y duas v.a.r. em L^2, então $|XY| \in L^1$.*

Existe um resultado que generaliza o Lema 2.9 e é conhecido na literatura como a desigualdade de Hölder, vide Brezis (2011, Th. 4.6).

Lema 2.10 (Desigualdade de Hölder para espaços L^p) *Sejam $1 \leq p, q \leq \infty$ conjugados de Lebesgue, ou seja, $1/p + 1/q = 1$. Sejam $\psi \in L^p$ e $\phi \in L^q$, então*

$$\|\phi\psi\|_{L^1} \leq \|\psi\|_{L^p} \|\phi\|_{L^q}.$$

Convergência de variáveis aleatórias. Aqui, considera-se um espaço de probabilidades completo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ e neste espaço se toma $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ uma sequência de v.a.r Também seja X uma v.a.r. definida no mesmo espaço. Todas as noções de convergência tratadas, podem ser estendidas a vetores aleatórios, ou seja, $X_n \in \mathbb{R}^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$. Para o desenvolvimento detalhado de cada lema exposto em seguida, o leitor pode consultar Barry (1996), Grimmett e Stirzaker (2001, Cap. 7) e Resnick (2005).

Definição 2.14 (Convergência q.c) *Diz-se que X_n converge q.c. para X, se $\mathbf{P}(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$. Denota-se por $X_n \xrightarrow{q.c} X$.*

Definição 2.15 (Convergência em probabilidade) *Diz-se que X_n converge em probabilidade para X se $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0$, para todo $\epsilon > 0$. Denota-se por $X_n \xrightarrow{p} X$.*

Nota-se que a convergência q.c. é uma convergência pontual em Ω, com probabilidade 1. Por outro lado, a convergência em probabilidade não diz nada a respeito sobre a convergência pontual, esta proporciona o valor de n no qual as variáveis X_n e X estão muito próximas em probabilidade. Dessa forma pode-se concluir que a convergência em probabilidade é mais fraca que a convergência q.c.

Definição 2.16 (Convergência em L^p) *Seja $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ uma sequência de v.a.r. em L^p e X é uma v.a.r. em L^p. Diz-se que X_n converge em L^p para X (ou converge em média p) se $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{E}[|X_n - X|^p] = 0$ para $p \geq 1$. Denota-se por $X_n \xrightarrow{L^p} X$. No caso que $X_n \xrightarrow{L^1} X$, diz-se X_n converge em média a X.*

Lema 2.11 *Se $X_n \xrightarrow{q.c} X$ então $X_n \xrightarrow{p} X$.*

Em seguida, apresenta-se um caso particular, em que, o recíproco do Lema 2.11 é válido.

Lema 2.12 *Se $X_n \xrightarrow{p} X$ então existe uma subsequência $\{n_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$, tal que $X_{n_k} \xrightarrow{q.c} X$.*

Lema 2.13 *Se $X_n \xrightarrow{L^1} X$ então $X_n \xrightarrow{p} X$.*

Em seguida, apresenta-se um caso particular, em que, o recíproco do Lema 2.13 é válido.

Lema 2.14 *Se $X_n \xrightarrow{p} X$ e existe uma constante $c > 0$ tal que $|X_n| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$, então $X_n \xrightarrow{L^1} X$.*

Lema 2.15 (Teorema de convergência dominada) *Se $X_n \xrightarrow{q.c} X$ e existe uma v.a. $Y \in L^1$ tal que $|X_n| \leq Y$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$, então $X_n \xrightarrow{L^1} X$.*

Lema 2.16 (Lema de Fatou) *Seja $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ uma sequência de v.a.r. não negativas em L^1, então $\liminf\limits_{n\geq 1} X_n \in L^1$ e*

$$\mathbf{E}[\liminf_{n\geq 1} X_n] \leq \liminf_{n\geq 1} \mathbf{E}[X_n] \tag{2.7}$$

e

$$\mathbf{E}[\limsup_{n\geq 1} X_n] \geq \limsup_{n\geq 1} \mathbf{E}[X_n]. \tag{2.8}$$

A diagrama na Figura 1 mostra as relações entre as noções de convergência expostas.

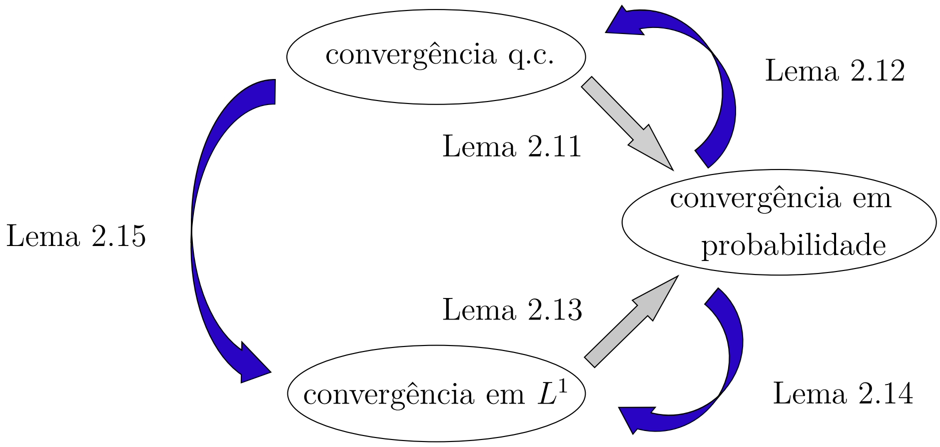

Figura 1: Diagrama de convergência das variáveis aleatórias.

2.2 Processos estocásticos

Antes de definir os processos de estocásticos, é instrutivo recuar e lembrar o que é um sistema dinâmico determinístico. Esse sistema tem como pano de fundo um conjunto denominado de espaço de estado no qual evolui. Sua evolução é dada pelo tempo $t \geq 0$, no qual, interpreta-se que para algum x_0 no espaço de estado, $x(t)$ representa a posição do sistema no tempo t, se começa em x_0 no instante inicial t_0, assim o caminho $t \mapsto x(t)$ é completamente determinado em cada instante t. Visivelmente, para sistemas dinâmicos estocásticos, não tem sentido exigir que o caminho futuro seja determinado completamente pela posição atual.

Nesse contexto, existe um conceito adequado para estudar a evolução estocásticas de um sistema, a "filtração". Uma família de σ-álgebras $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ é denominada de filtração sobre um espaço de probabilidades, se $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ para todo $0 \leq s < t$. Em seguida, dota-se o espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{F})$ com uma filtração $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, tal que, $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbf{P})$ representa um espaço de probabilidade filtrado.

Um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias $\{x_t \in \mathbb{R}^n : t \in [t_0, +\infty)\}$, no qual, t usualmente representa a variável tempo, definidas sobre algum espaço de probabilidade completo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Ressalta-se que $t \mapsto x_t$ representa uma aplicação $(t, \omega) \mapsto x(t, \omega)$, em que, $\omega \in \Omega$ é um evento elementar dos caminhos do processo. Para qualquer processo estocástico, a filtração mais simples que se pode escolher, é aquela gerada pelo próprio processo e denota-se por $\mathcal{F}_t^{\{x_t\}} := \sigma(x_s : t_0 \leq s \leq t)$. Nessa forma, a σ-álgebra anterior contem toda a informação do processo $\{x_t\}_{t\geq 0}$ até o instante t. Assim, uma sequência $\{x_t\}_{t\geq 0}$ representa um espaço de funções aleatórias e para cada t fixo, $x_t(\cdot)$ é uma v.a. Analogamente, para cada $\omega \in \Omega$ fixo, $x_{(\cdot)}(\omega)$ ou $t \mapsto x_t$ representa um caminho ou uma realização do processo estocástico.

Por outro lado, diz-se que um processo estocástico é estritamente estacionário se todas as funções de distribuição finitas-dimensionais são invariantes sob translações no tempo o que significa em particular que a média e a variância são constantes para todo t. Assim, um processo estocástico é "fracamente estacionário" ou estacionário de segunda ordem, sse $\mathbf{E}[x_t]$ e $\mathbf{E}[\|x_t\|^2]$ são finitas para todo t e a covariância é função de $t-s$, isto é, $\mathrm{Cov}[x_t, x_s] = g(t-s)$. Desta forma, denomina-se simplesmente por processo "estacionário" quando o processo for fracamente estacionário. Um processo estocástico estacionário diz-se "ergódico" se todas suas grandezas estatísticas podem ser determinadas a partir de qualquer função amostra. Destaca-se, que uma condição necessária para a ergodicidade é a estacionariedade do processo, vide Grimmett e Stirzaker (2001).

Em seguida, define-se outro tipo de processo com propriedades interessantes. Diz-se que $t \mapsto x_t$ é um $\mathcal{F}_t$-martingal (ou seja, é um martingal em relação à filtração $\mathcal{F}_t$ e à medida de probabilidade $\mathbf{P}$), se $t \mapsto x_t$ é $\mathcal{F}_t$-mensurável e $\mathbf{E}[\|x_t\|]$ é finita para todo t, tal que este satisfaz

$$\mathbf{E}\left[x_{t+s}|\mathcal{F}_t\right] = x_t \quad \text{q.c.} \quad \text{para todo} \quad t, s \geq 0.$$

Se $\mathbf{E}\left[x_{t+s} - x_t|\mathcal{F}_t\right] = 0$, então diz-se que $t \mapsto x_{t+s} - x_t$ é um $\mathcal{F}_t$-zero martingal. Assim, todas as propriedades do valor esperado condicional passam para o processo. No caso, em que, tivesse $\mathbf{E}\left[x_{t+s}|\mathcal{F}_t\right] \geq x_t$, então o processo é nomeado de submartingal, e se $\mathbf{E}\left[x_{t+s}|\mathcal{F}_t\right] \leq x_t$ o processo é denominado de supermartingal. Se cada componente de um vetor aleatório for um martingal em relação à mesma filtração o processo em questão é denominado de vetor martingal.

Uma v.a. $\tau : \Omega \to [0, +\infty]$ é denominada $\mathcal{F}_t$-tempo de parada se $\{\omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ para todo $t \in [0, \infty)$. Se $x_{(\cdot)}$ é um martingal e τ é $\mathcal{F}_t$-tempo de parada uniformemente limitado, então o processo de parada $x_{t\wedge\tau}$ é também um $\mathcal{F}_t$-martingal. Se existe uma sequência não decrescente $\{\tau_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ de $\mathcal{F}_t$-tempos de parada, tal que $\tau_n \to +\infty$ q.c. e para cada n o processo[1] $x_{t\wedge\tau_n}$ é um martingal, então $x_{(\cdot)}$ é denominado $\mathcal{F}_t$-martingal local.

Em seguida, explora-se as propriedades dos processos de Wiener. Entre elas, tem-se que o processo de Wiener é um processo de Markov e martingal ao mesmo tempo. O fato que os processos de Wiener serem processos de Markov permitem aproveitar as propriedades, como por exemplo a recorrência e transcendência de seus caminhos, vide Lema 2.17.

Definição 2.17 *Considera-se* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$ *um espaço de probabilidade filtrado. O processo* $\{W_t\}_{t\geq 0}$ *é denominado* $\mathcal{F}_t$*-processo de Wiener ou movimento Browniano, se satisfaz as seguintes condições:*

i) $W_0 = 0$, *q.c;*

[1] $f \wedge g$ denota $\min\{f, g\}$

ii) *W_t é $\mathcal{F}_t$-mensurável e tem incrementos independentes, isto é, $\sigma(W_s - W_t : s \geq t)$ é independente de $\mathcal{F}_t$ para todo $t \geq 0$;*

iii) *para $0 \leq s < t$, o incremento $W_t - W_s \sim N(0, \sigma(s-t))$;*

iv) *o caminho $t \mapsto W_t$ está em $C([0, +\infty))$.*

Da Definição 2.17 tem-se que o processo de Wiener é de variação ilimitada sob qualquer intervalo de tempo não degenerado q.c. No item (iii), se $\sigma = 1$ então o processo de Wiener é denominado processo de Wiener padrão.

Uma das particularidades dos processos de Wiener é a forma eficiente de simular fenômenos biológicos, físicos entre outros, a partir de suas propriedades. A recorrência e transcendência dos processos, é estudada a partir dos processos martingais formados pelo movimento Browniano, vide Seção 4 em Karatzas e Shreve (1991).

Lema 2.17 (Recorrência e transcendência) *Seja $W = \{W_t\}_{t \geq 0}$ um processo de Wiener r-dimensional:*

i) *se $r = 1$, W é dito recorrente q.c., para qualquer $x \in \mathbb{R}$, pois existe uma sequência $t_1 < t_2 < \ldots < t_n \nearrow +\infty$, tal que $W_{t_n} = 0$ para todo n;*

ii) *se $r = 2$, W é dito **V**-recorrente q.c. ('**V**' vizinhança), para qualquer aberto $G \subset \mathbb{R}^2$, pois existe uma sequência $t_1 < t_2 < \ldots < t_n \nearrow +\infty$, tal que $W_{t_n} \in G$ para todo n;*

iii) *se $r \geq 3$, W é dito transiente q.c., pois $\|W_t\| \to \infty$ quando $t \to \infty$.*

Para o estudo mais aprofundado das propriedades dos processos de Wiener e mais detalhes sobre esse assunto pode-se consultar Karatzas e Shreve (1991).

Na seção seguinte, apresentam-se alguns aspectos da integral estocástica de Itô. Esse tipo de integrais aparecem no contexto dos processos excitados por processos de Wiener. Ressalta-se que a versão apresentada aqui não é a mais geral para definir uma integral estocástica, pois existem outras extensões como por exemplo, integrais estocástica de Itô com respeito a um martingal, com respeito a um martingal contínuo, com respeito à soma de martingais contínuos, com respeito a processos de variação finita, com respeito aos martingais locais e com respeito a processos diferencias descontínuos, vide Protter (2004).

2.3 Integral estocástica de Itô

Antes de definir a integral de Itô em sua forma mais geral, primeiro trata-se a seguinte integral

$$\int_a^b \psi(t) dW_t(\omega), \tag{2.9}$$

em que, $\psi \in L^2(a,b;\mathbb{R}^r)$ é uma função determinística (não depende de $\omega \in \Omega$) e $W_t(\omega)$ é um processo de Wiener padrão r-dimensional. Nesse contexto, a integral (2.9) é uma v.a. gaussiana ou normal com média zero e variância $\|\psi\|_{L^2(a,b;\mathbb{R}^r)} = \int_a^b \psi(t)^2 dt$.

Em seguida, apresenta-se um importante resultado relacionando à v.a. (2.9) como martingal.

Lema 2.18 *(KUO, 2006) Seja $\psi \in L^2(a,b;\mathbb{R}^r)$, então o processo estocástico definido por*

$$\int_a^t \psi(r)dW_r, \quad a \leq t \leq b,$$

é um martingal com respeito à filtração $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s : s \leq t)$.

A Integral de Itô será definida de forma a generalizar a ideia da integral (2.9). Nesse sentido, estudam-se integrais do tipo

$$\int_a^b \psi(t,\omega)dW_t(\omega), \tag{2.10}$$

em que, $\psi(t,\omega) \in L^2([a,b]\times\Omega;\mathbb{R}^r)$ é um processo estocástico adaptado à filtração $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s;\ s \leq t)$ e

$$\int_a^b \mathbf{E}\left(\|\psi(t)\|^2\right) dt < \infty.$$

Lema 2.19 *(KUO, 2006, Th. 4.3.5) Suponha que $\psi \in L^2([a,b]\times\Omega;\mathbb{R}^n)$, então a integral* (2.10) *é uma v.a., tal que*

$$\mathbf{E}\left[\int_a^b \psi(t,\omega)dW_t(\omega)\right] = 0.$$

A regra básica para a diferenciação no cálculo é a regra da cadeia, isto é, se duas funções são diferenciáveis, então sua composição é diferenciável. No cálculo estocástico existe uma relação similar para processos estocásticos nomeada Fórmula de Itô.

Teorema 2.1 (Lema de Itô) *Seja $\psi \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Então*

$$\psi(W_t) - \psi(W_s) = \int_s^t \frac{\partial\psi}{\partial x}(W_r)dW_r + \frac{1}{2}\int_s^t \frac{\partial^2\psi}{\partial^2 x}(W_r)dr.$$

Pode-se consultar Oksendal (2003, Ch. 4) para algumas aplicações do Lema de Itô.

Em seguida, apresenta-se a teoria de EDE utilizada neste trabalho.

2.4 Equações diferenciais estocásticas

Nesta seção, estuda-se a existência e unicidade da solução de uma EDE homogênea no tempo (seus coeficientes não dependem explicitamente da variável t) e algumas propriedades de suas soluções. Itô estudou processos de difusão representados como soluções de uma EDE da seguinte forma,

$$dx_t = b(x_t)dt + \sigma(x_t)dW_t, \quad x_s = x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.11}$$

em que, $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times r}$ são funções mensuráveis e W_t é um processo r-dimensional de Wiener padrão.

Antes de estudar a existência e unicidade da solução de (2.11), precisa-se compreender o significado de um processo estocástico como solução de (2.11).

Definição 2.18 *Um caminho $t \mapsto x_t$, $a \le t \le b$, é dito solução de* (2.11), *se satisfaz as seguintes condições:*

i) o processo estocástico $r \mapsto \sigma(x_r)$ pertence a $L^2(a, b; \mathbb{R}^{n\times r})$ e é $\mathcal{F}_t$-adaptado, então

$$\int_a^t \sigma(x_r)dW_r \tag{2.12}$$

é uma integral de Itô para cada $t \in [a, b]$;

ii) quase todo caminho $t \mapsto b(x_t)$ pertence a $L^1(a, b; \mathbb{R}^n)$.

Em particular, pode-se provar a existência de soluções de (2.11) sob algumas hipóteses sobre as funções $b(\cdot)$ e $\sigma(\cdot)$, vide Karatzas e Shreve (1991, Sec. 5.2-5.3).

Definição 2.19 (Solução forte) *Uma solução forte de* (2.11) *sobre um espaço de probabilidade e com respeito a um processo de Wiener fixo e condição inicial $x \in \mathbb{R}^n$ é um caminho $t \mapsto x_t$ contínuo q.c. com as seguintes propriedades:*

i) x_t é um processo adaptado à filtração $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge 0}$;

ii) $\mathbf{P}(x_0 = x) = 1$;

iii) $\mathbf{P}\left(\int_0^t \{|b_i(x_r)| + \sigma_{ij}^2(x_r)\}ds < +\infty\right) = 1$ para cada $i \in \{1,2,\dots,n\}$, $j \in \{1,2,\dots,r\}$ e $t \in [0, +\infty)$;

iv) $x_t = x_0 + \int_0^t b(x_r)dr + \int_0^t \sigma(x_r)dW_r$, $t \in [0, +\infty)$ q.c.

Consideram-se x_t e y_t duas soluções fortes de (2.11). Diz-se que existe solução única no sentido da Definição 2.19 se $\mathbf{P}(x_t = y_t : 0 \le t < +\infty) = 1$.

Definição 2.20 (Solução fraca) *Uma solução fraca de* (2.11) *é uma tripla (x_t, W_t), $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, e $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge 0}$, no qual,*

i) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ é um espaço de probabilidade e $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge 0}$ é uma filtração de σ-subálgebras de $\mathcal{F}$ satisfazendo condições usuais (contínuas à direita e limitada pela esquerda);

ii) $t \mapsto x_t$ é um caminho contínuo q.c. em $\mathbb{R}^n$ e adaptada e $t \mapsto W_t$ é um processo de Wiener r-dimensional;

iii) são satisfeitas as condições (iii) e (iv) na Definição 2.19.

Sejam $x_t \equiv (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbf{P}, \{W_t\}_{t\geq 0}, X)$ e $y_t \equiv (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \{\tilde{\mathcal{F}}_t\}_{t\geq 0}, \tilde{\mathbf{P}}, \{\tilde{W}_t\}_{t\geq 0}, \tilde{X})$ duas soluções fracas de (2.11), com $\mathbf{P}(x_0 \in B) = \tilde{\mathbf{P}}(y_0 \in B)$ para todo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Diz-se que existe (no sentido da lei de probabilidade) solução fraca única se $\mathbf{P}(x_t \in A) = \tilde{\mathbf{P}}(y_t \in A)$ para todo $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, vide Karatzas e Shreve (1991, Def. 3.4). Se $\mathbf{P}(x_t = y_t : 0 \leq t < +\infty) = 1$, então diz-se que duas soluções fracas têm um único caminho, vide Karatzas e Shreve (1991, Def. 3.2).

Observação 2.1 *Uma diferença entre a formulação forte e fraca é que, no primeiro caso o espaço de probabilidade filtrado* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbf{P})$ *e os processos de Wiener* $\{W_t\}_{t\geq 0}$ *são fixos, dados a priori, enquanto na formulação fraca eles fazem parte da solução.*

Problema bem-posto. O termo matemático "problema bem-posto" ou "problema no sentido Hadamard" é dado aos modelos matemáticos que gozam das seguintes propriedades:

- admite solução;
- a solução é única;
- o comportamento da solução varia continuamente com a condição inicial.

Como exemplos, tem-se o problema de Dirichlet (EDP elíptica), a equação de calor (EDP parabólica). Uma EDE é dita ser "bem-posta" se para qualquer condição inicial $x \in \mathbb{R}^n$, esta admite uma solução fraca que é única no sentido da lei de probabilidades.

Hipótese 1: Nesta tese assume-se que uma solução da (2.11) é sempre bem-posta, isto é, satisfaz as seguintes condições, vide Karatzas e Shreve (1991, Th. 2.5-2.9) :

i) a condição inicial x_0 é considerada determinística;

ii) $b(\cdot)$ e $\sigma(\cdot)$ são funções Lipschitz-contínua;

iii) $\{W_t\}_{t\geq 0}$ é um processo de Wiener r-dimensional definido sobre um espaço de probabilidade completo.

Observação 2.2 *Em* (2.11)*:*

i) quando se diz processos de difusão refere-se em todo momento a um processo de Markov com caminhos contínuas q.c., vide Karatzas e Shreve (1991);

ii) de um modo geral, a existência e unicidade forte equivalem à existência fraca, mais a unicidade do caminho, vide Yong e Zhou (1999, Th. 6.8);

iii) existência de soluções fracas não implica, em geral, a existência de soluções fortes, vide Karatzas e Shreve (1991, pag. 301) para um exemplo;

iv) unicidade de soluções por caminhos implica unicidade fraca, vide Yong e Zhou (1999, Th. 6.9).

Observação 2.3 *A condição Lipschitz-continua sobre os coeficientes b e σ de* (2.11) *para soluções fortes, podem ser relaxados. Nesse contexto, se os coeficientes b e σ são localmente Lipschitz e gozam de um crescimento linear em x, uniformemente em (t, ω) então existe uma única solução forte* (2.11). *Esse relaxamento é possível só no caso escalar, vide Karatzas e Shreve (1991).*

Observação 2.4 *Uma solução de* (2.11) *é um processo de Markov no espaço filtrado completo com respeito à filtração $\{\mathcal{F}_t\}$, vide Le Gall (2016, Th. 2.5, 2.9). Um processo de difusão é um processo de Markov com caminhos contínuos q.c., isto é, o conjunto dos ω para os quais $t \mapsto x_t(\omega)$ não é função contínua tem probabilidade zero.*

Ikeda e Watanabe (1989, Pag. 155) estuda um processo, no qual, consideram-se $b(\cdot)$ e $\sigma(\cdot)$ progressivamente mensuráveis[2] e limitados sobre algum conjunto compacto, então solução fraca de (2.11). Em Krylov (1980, Pag. 87) o autor além das condições de mensurabilidade e limitação sobre $b(\cdot)$ e $\sigma(\cdot)$, adiciona a seguinte condição $\langle \sigma(x)\lambda, \lambda \rangle \geq \delta|\lambda|^2$ sempre que exista $\delta > 0$ e para todo $\lambda \in \mathbb{R}^n$, para garantir a existência de uma solução fraca de (2.11). A condição de limitação, com respeito aos resultados anteriores, é muito restritiva para o desenvolvimento da teoria de controle.

Processos degenerados. Diz-se um caso degenerado ao caso limite em que um elemento de uma classe de objetos é qualitativamente diferente do resto da classe e, portanto, pertence a outra classe. Nomeia-se soluções de (1.4) como processos de difusão controlados. Essas soluções são de dois tipos: processos de difusão controlados não degenerados ou degenerados. Um processo de difusão "não degenerado" é quando o menor autovalor de $\sigma(\cdot)\sigma(\cdot)^\intercal$ é limitado inferiormente por um valor positivo em cada subconjunto compacto de $\mathbb{R}^r$, e o caso degenerado quando isto não acontece, vide Pinsky (1969). De fato, as diferenças entre o caso não degenerado e o degenerado são notáveis, entre eles destaca-se as seguintes:

- No caso não degenerado, a solução de (1.4) é um processo de Feller forte sob um controle Markoviano (KURTZ;STOCKBRIDGE, 1998). Isso, por sua vez, facilita o estudo do comportamento ergódico do processo. Em contraste, no caso degenerado, sob um controle de Markov, (1.4) nem sempre é um problema bem-posto;

- De um ponto de vista analítico no caso não degenerado a equação HJB é uniformemente elíptica, as soluções são regulares de classe C^2 e as propriedades de regularidade associadas são benéficas ao seu estudo. Por outro lado, o caso degenerado

[2] um processo estocástico x_t é dito progressivamente mensurável se para todo $t \in [0, T]$, $(t, \omega) \mapsto x_t(\omega)$ é $\mathcal{B}([0, T]) \bigotimes \mathcal{F}_t$-mensurável.

é abordado através de uma classe particular de soluções fracas de EDP conhecidas como soluções de viscosidade, vide Seção 2.7.

2.5 Controle estocástico

Nesta seção, apresenta-se o problema de controle estocástico em horizonte finito com a dinâmica

$$dx_t = b(x_t, u_t)dt + \sigma(x_t, u_t)dW_t, \quad x_0 = x \in \mathbb{R}^n$$

no qual $b : \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$ e $\sigma : \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^{n\times r}$ são funções mensuráveis.

Na literatura atual, não foi encontrada uma definição rigorosa e estruturada para definir solução bem-posta de (1.4). Nesta tese, consideram-se condições necessárias de existência e unicidade das soluções fracas para (1.4), sendo definida a seguinte hipótese.

Hipótese 2: Nesta tese, assume-se que a solução de (1.4) é bem-posta, isto é, satisfaz as seguintes condições, vide Haussmann e Lepeltier (1990, Def. 2.2):

i) a condição inicial x_0 é determinística;

ii) U é um conjunto compacto em $\mathbb{R}^m$;

iii) $b(\cdot, \cdot)$ e $\sigma(\cdot, \cdot)$ são funções Lipschitz em seu primeiro argumento e satisfazem a seguinte desigualdade,

$$\|b(x, u) - b(y, u)\| + \|\sigma(x, u) - \sigma(y, u)\|_{\mathbb{R}^{n\times r}} \leq c\|x - y\|.$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{U}$ e uma constante $c > 0$;

iv) $\{W_t\}_{t\geq 0}$ é um processo de Wiener r-dimensional definido sobre um espaço de probabilidade completo.

Em seguida, expõem-se algumas definições importantes.

Definição 2.21 (Processos de controle) *Seja $T > s \geq 0$ e dado um conjunto compacto $U \subset \mathbb{R}^n$. Denota-se por $\mathcal{U}[s, T]$ o conjunto de todos os processos progressivamente mensuráveis $u = \{u_t : t \in [s, T]\}$ ou $\{u_t\}_{t\geq s}$ em U. Todos os elementos em $\mathcal{U}[s, T]$ são denominados processos de controle admissíveis. De forma geral, denota-se por $\mathcal{U}$ o conjunto de processos de controle em $[0, +\infty)$.*

Definição 2.22 (Processos controlados) *Para cada processo de controle $u \in \mathcal{U}$, considere (1.4). No caso, em que (1.4) tenha única solução para alguma condição inicial x, o processo $\{x_t\}_{t\geq 0}$ é denominado o processo controlado ou se diz que sua dinâmica é dirigida pela ação de controle.*

O funcional de custo no horizonte finito associado a (1.4), é definido como segue

$$J(s,x,u) = \mathbf{E}_x \left[\int_s^T f(x_r,u_r)dr + h(x_T) \right]. \tag{2.13}$$

no qual $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{U} \to \mathbb{R}_+$ é o "custo corrente" ou "custo atual" e $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ é o "custo final", $\mathbf{E}_x[\cdot]$ representa o valor esperado condicional sobre $x_s = x$ e T um horizonte finito e que posteriormente será substituído por um tempo de parada τ.

Por outro lado, considera-se o conjunto de todos os controles admissíveis, denotado por $\mathcal{U}[s,T]$ e escreve-se no contexto da formulação fraca $u_{(\cdot)} \in \mathcal{U}[s,T]$ em vez de $\Big(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbf{P}, W_{(\cdot)}, u_{(\cdot)}\Big) \in \mathcal{U}[s,T]$.

Na formulação das soluções de difusão fraca, o problema de controle ótimo estocástico, esta baseado em encontrar um processo $\{u_t\}_{t\geq 0}$ que minimize (2.13) sujeito a (1.4) sob $\mathcal{U}[s,T]$. Considera-se a função valor no horizonte finito como

$$v(s,x) = \inf_{u_{(\cdot)}\in\mathcal{U}[s,T]} J(s,x,u_{(\cdot)}), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.14}$$

2.6 A equação HJB no sentido clássico

Introduz-se aqui a equação de HJB derivada do princípio da programação dinâmica sob alguns supostos de regularidade sobre a função valor. Seja $\mathcal{H} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$, no qual, $\mathbb{S}^n$ denota o conjunto de todas as matrizes simétricas com coeficientes reais, tal que

$$\mathcal{H}(x,p,P) := \inf_{u\in U} \left\{ \langle p, b(x,u)\rangle + \frac{1}{2}\mathbf{tr}\{\sigma(x,u)P\sigma(x,u)^\top\} + f(x,u) \right\}. \tag{2.15}$$

Um operador linear de segunda ordem $\mathcal{L}^u$ associado a uma ação de controle $u \in U$, é dado por

$$\mathcal{L}^u\varphi(x) := b(x,u)^\top \varphi_x(x) + \frac{1}{2}\mathbf{tr}\{\sigma(x,u)\varphi_{xx}(x)\sigma(x,u)^\top\}. \tag{2.16}$$

no qual, φ_x e φ_{xx} denotam o gradiente e a hessiana, respectivamente para uma função de teste $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Com essa notação, tem-se do Lema de Itô

$$\varphi(x_t) - \varphi(x_s) = \int_s^t \mathcal{L}^u\varphi(x_r)dr + \int_s^t \varphi_x(x_r)^\top \sigma(x_r,u_r)dW_r. \tag{2.17}$$

Nos próximos resultados $C_b^k(\mathbb{R}^n)$ denota o espaço de funções limitadas para as quais as derivadas parciais de ordens menores e iguais a k existem e são contínuas limitadas. De forma similar $C_b^{p,k}(\mathbb{R}^n)$ denota o espaço de funções com derivadas parciais respeito à variável t de ordem menor e igual a p, e com respeito à variável espacial de ordem menor e igual a k, existem e são contínuas limitadas. Também $C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ denota o espaço de funções com derivada parciais com respeito à variável t de ordem 1, e com respeito à variável espacial de ordem 2, existe e são contínuos limitados.

Lema 2.20 *(YONG;ZHOU, 1999, Th. 4.1, Ch. I) Suponha que* $v \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$*,* f *em* (2.13) *e* $\mathcal{H}$ *em* (2.15) *funções contínuas nos seus argumentos. Então a função valor* (2.14) *resolve a seguinte equação de HJB*

$$v_t(t,x) + \mathcal{H}(x, v_x(t,x), v_{xx}(t,x)) = 0, \text{ para todo } (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n. \tag{2.18}$$

Sob certas condições pode-se concluir que existe solução única para a equação de HJB e esta coincidirá com a função valor $v \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$. Com o propósito de comparação com uma nova teoria apresentada mais adiante, expõe-se o teorema da verificação. Entretanto a prova com rigor matemático para soluções clássicas pode ser consultada em Fleming e Soner (2006, Th. 4.1, Ch. VIII).

Lema 2.21 *Seja* $v \in C^{1,2}([0,T) \times \mathbb{R}^n)$*. Assume-se que* v *e* f *tem um crescimento quadrático, isto é, existe alguma constante* c*, tal que*

$$|f(x,u)| + |v(t,x)| \leq c(1 + \|x\|^2), \text{ para todo } (t,x,u) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n \times U.$$

i) Suponha que $v(T,\cdot) \leq h$ *e*

$$v_t(t,x) + \mathcal{H}(x, v_x(t,x), v_{xx}(t,x)) \geq 0, \ (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n.$$

Então $v \leq V$ *em* $[0,T] \times \mathbb{R}^n$*.*

ii) Suponha ademais que $v(T,\cdot) = g$*, e existe* $(t,x) \mapsto u^*(t,x)$ *que atinge o mínimo de* $u \mapsto \mathcal{L}^u v(t,x) + f(x,u)$*, tal que*

$$v_t(t,x) + \mathcal{H}(x, v_x(t,x), v_{xx}(t,x)) = 0,$$

então $v(t,x) = V(t,x)$ *e a EDE*

$$dx_t = b(x_t, u^*(t,x_t))dt + \sigma(x_t, u^*(t,x_t))dW_t,$$

define uma única solução $\{x_t\}_{t \geq 0}$*,* $0 \leq t \leq T$ *para cada condição inicial* x*, e o processo de controle* $u^*(t,x_t)$*,* $0 \leq t \leq T$*, é bem definido em* $\mathcal{U}$*.*

Observação 2.5 *Quando* U *se reduz a um ponto, o problema de otimização é degenerado. Nesse caso, a equação de HJB é linear, e o teorema de verificação se reduz à formula de Feynman-Kac.*

O teorema de verificação assume a existência de tal solução, portanto não é um resultado de existência. No entanto, proporciona unicidade dentro de uma classe de função que tem crescimento quadrático. O seguinte resultado atende esse propósito supondo que a condição de uniformidade parabólica é satisfeita, isto é, existe $c > 0$, tal que

$$\xi^\top \sigma(x,u)\sigma(x,u)^\top \xi \geq c|\xi|^2, \text{ para todo } (x,u) \in \mathbb{R}^n \times U. \tag{2.19}$$

Lema 2.22 *(KRYLOV, 1980) Suponha que a condição* (2.19) *seja satisfeita, e considere além disso que:*

i) U é um conjunto compacto;

ii) b, σ e f estão em $C_b^2(\mathbb{R}^n)$;

iii) $h \in C_b^3(\mathbb{R}^n)$.

Então a seguinte equação de HJB

$$v_t(t,x) + \mathcal{H}(x, v_x(t,x), v_{xx}(t,x)) = 0, \quad em \quad [0,T) \times \mathbb{R}^n,$$

com condição de fronteira $v(x_T, \cdot) = h$ tem solução única $v \in C_b^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$.

O Lema 2.21 e o método de programação dinâmica em geral, tem uma deficiência inerente em que se deve assumir a regularidade da função valor. Na literatura especializada existem vários exemplos que mostram em condições mais gerais do que a do Lema 2.22 que a regularidade da função valor não é garantida, vide Yong e Zhou (1999, Ex. 5.5), Fleming e Soner (2006, Ex. 2.1).

Assim, considera-se o contexto em que o problema de controle ótimo pode não possuir uma função valor suave. Uma primeira generalização do 'Teorema de Verificação Estocástica' Lema 2.21 foi desenvolvido em Yong e Zhou (1999, Th. 5.1). Pouco depois, Gozzi, Swiech e Zhou (2005, Th. 4.1) perceberam uma falha na demostração do teorema de verificação. Especificamente o ponto chave foi o Lema 5.2 em Yong e Zhou (1999), que não é verdadeiro em geral. A prova do teorema de verificação estocástica teria ainda uma segunda correção dos mesmos autores da primeira correção. Gozzi, Swiech e Zhou (2010) adicionam condições extras na subsolução de viscosidade e assim justificam o uso do Lema de Fatou em Gozzi, Swiech e Zhou (2005, Eq. 19), no qual, "$\limsup$" é tomado ao longo de qualquer subsequência da subsolução de viscosidade. Para isto, precisa-se garantir que a convergência é dominada, vide Gozzi, Swiech e Zhou (2010, Eq. 3).

Cabe ressaltar-se que em Gozzi, Swiech e Zhou (2010) não são usadas as condições mais gerais como foi proposto inicialmente em Yong e Zhou (1999, Th. 5.1), em consequência o teorema da verificação estocástica é ainda um problema aberto.

Finalmente, como consequência é possível estudar o problema do controle ótimo estocástico em condições mais abrangentes, sem exigir regularidade para a função valor, envolvendo as soluções de viscosidade.

2.7 Soluções de viscosidade

Nesta seção, introduz-se uma nova notação. Considera-se a equação diferencial parcial elíptica não-linear de segunda ordem

$$F(x, Du(x), D^2u(x)) = 0, \quad \text{para todo} \quad x \in \mathcal{D}, \tag{2.20}$$

no qual $\mathcal{D}$ é um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e F é um funcional contínuo de $\mathcal{D} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^n$ em $\mathbb{R}$. Uma condição importante sobre F é a condição de elipticidade:

$$F(x, p, P_1) \leq F(x, p, P_2), \quad P_1 \geq P_2,$$

vide Crandall, Ishii e Lions (1992, Eq. 0.3). Em seguida, introduz-se a noção de solução de viscosidade de (2.20). Para este propósito, primeiramente define-se o conceito de subsolução e supersolução de (2.20).

Definição 2.23 *A função $u : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ é uma supersolução (resp, subsolução) clássica de* (2.20) *se $u \in C^2(\mathcal{D})$ e*

$$F(x, u_x(x), u_{xx}(x)) \geq (\textit{resp}, \ \leq)\ 0, \quad \textit{para todo} \ \ x \in \mathcal{D}. \tag{2.21}$$

A importância da condição de elipticidade é explicada no seguinte lema.

Lema 2.23 *As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $u \in C^2(\mathcal{D})$ é uma supersolução (resp, subsolução) clássica de (2.20).

ii) para qualquer $(x_0, \varphi) \in \mathcal{D} \times C^2(\mathcal{D})$, tal que x_0 é um mínimo (resp, máximo) da diferença de funções $u - \varphi$ sobre $\mathcal{D}$, tem-se

$$F(x_0, \varphi_x(x_0), \varphi_{xx}(x_0)) \geq 0 \ (\textit{resp}, \ \leq 0). \tag{2.22}$$

Nota-se que o item (ii) do Lema 2.23, não envolve condição de regularidade sobre a função u já que (2.22) só envolve a função φ. Em seguida, define-se uma solução de viscosidade de (2.20).

Definição 2.24 *$u \in C(\mathcal{D})$ é denominada subsolução (resp, supersolução) de viscosidade de* (2.20)*, se para qualquer $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ em que $u - \varphi$ é máximo (resp, mínimo) local em $x_0 \in \mathcal{D}$, tem-se*

$$F(x_0, \varphi_x(x_0), \varphi_{xx}(x_0)) \leq 0 \ (\textit{resp}, \ \geq 0). \tag{2.23}$$

Uma solução de viscosidade é uma função contínua que é simultaneamente, uma subsolução e supersolução de viscosidade.

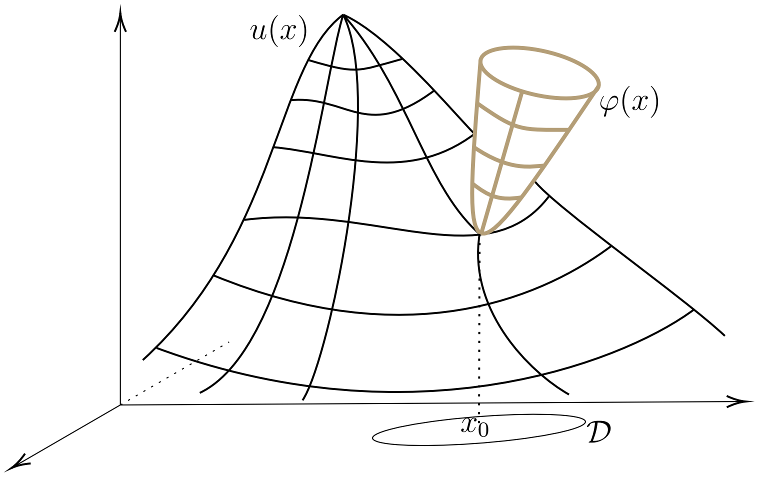

Figura 2: Apresenta-se uma subsolução de viscosidade u não diferenciável no ponto x_0.

Observação 2.6 *Na literatura sobre a teoria de soluções de viscosidade e controle estocástico estuda-se a equação diferencial parabólica não linear, vide Yong e Zhou (1999), Fleming e Soner (2006), entre outros. Nessas referências utilizam-se funções semicontínuas para referir-se à solução de viscosidade. Para deixar precedentes bem estabelecidos, a Definição 2.24 foi exposta pela primeira vez em Lions (1983) e mais recentemente em Caffarelli (1997). Em ambos aborda-se casos para equações diferenciais elípticas não lineares. Ainda um fato a destacar é que o estudo de equações elípticas contém o caso de equações parabólicas como caso particular mediante uma mudança de variáveis como foi exposta em Lions (1983).*

2.8 A equação de HJB no sentido da viscosidade

O objetivo nesta seção é expor como a noção de soluções de viscosidade é utilizada para relaxar a condição de regularidade da função de valor em (2.14).

Nota-se da Seção 2.7 que os resultados são obtidos por pequenas modificações do caso com regularidade. Em geral, a teoria de soluções de viscosidade não só se aplica às EDP não-lineares sobre domínios abertos $\mathcal{D}$, como exposto na Seção 2.7, senão também a domínios tais como $[0,T) \times \mathbb{R}^n$.

Em seguida, introduz-se a noção de subdiferenciais e superdiferenciais para a função valor com pouca regularidade (funções contínuas). Para $v \in C(\mathbb{R}^n)$ e $x \in \mathbb{R}^n$, o "subdiferencial elíptico" de segunda ordem de v em x é definido como:

$$D_x^{2,-}v(x) := \left\{ (p,P) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^n : \liminf_{y \to x} \frac{v(y) - v(x) - \langle p, y-x \rangle - \frac{1}{2}\langle P(y-x),(y-x)\rangle}{\|y-x\|^2} \geq 0 \right\} \tag{2.24}$$

e o "superdiferencial elíptico" de segundo ordem de v em x é definido como:

$$D_x^{2,+}v(x) := \left\{(p,P) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^n : \limsup_{y\to x} \frac{v(y) - v(x) - \langle p, y-x\rangle - \frac{1}{2}\langle P(y-x),(y-x)\rangle}{\|y-x\|^2} \leq 0\right\}. \tag{2.25}$$

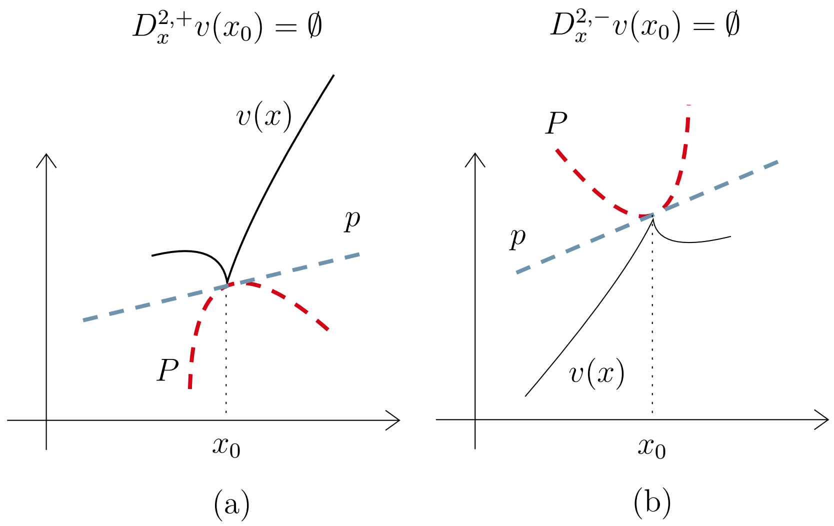

Figura 3: Em (a) $(p,P) \in D_x^{2,-}v(x_0)$. Em (b) $(p,P) \in D_x^{2,+}v(x_0)$. Em todo caso sempre tem-se $D_x^{2,-}v(x_0) \cup D_x^{2,+}v(x_0) \neq \emptyset$.

O seguinte resultado apresenta algumas propriedades dos subdiferencias e superdiferencias elípticos.

Lema 2.24 *(YONG;ZHOU, 1999, Prop. 2.6, Ch. 4)*

i) $D_x^{2,-}v(x)$ *e* $D_x^{2,+}v(x)$ *são conjuntos convexos;*

ii) $D_x^{2,+}(-v)(x) = -D_x^{2,-}v(x)$*;*

iii) $v \in C(\mathbb{R}^n)$ *é diferenciável em* x *sse* $D_x^{2,-}v(x) \bigcap D_x^{2,+}v(x) \neq \emptyset$.

Lema 2.25 *(YONG;ZHOU, 1999, Lem. 5.4, Ch. 4) Dado* $v \in C(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ *então existe* $(p,P) \in D_x^{2,+}v(x)$ $(D_x^{2,-}v(x))$ *sse existe* $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n)$*, tal que* $v - \varphi$ *atinge um máximo (mínimo) em* x *e*

$$\varphi(x) = v(x), \;\; \varphi_x(x) = p, \;\; \varphi_{xx}(x) = P. \tag{2.26}$$

e

$$0 > v(y) - \varphi(y) \; (resp, \; <), \quad t \leq T, \quad y \text{ numa vizinhança de } x. \tag{2.27}$$

Definição 2.25 *Diz-se que* $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ *é uma função de teste superior para uma subsolução* v *em* $x \in \mathcal{D}$ *se* $v(x') \leq \varphi(x')$ *para cada* x' *em uma vizinhança de* x, $v(x) = \varphi(x)$ *e* $\varphi - v$ *atinge um máximo local em* x*. Analogamente define-se função de teste inferior para uma supersolução de viscosidade.*

Observação 2.7 *Uma vez que a equação (2.25) e a Definição 2.24 sejam verificadas, tem-se a seguinte caraterização. Portanto, para qualquer função de teste superior tem-se que* $F(x, \varphi_x(x), \varphi_{xx}(x)) \leq 0$ *e* $(\varphi_x(x), \varphi_{xx}(x)) \in D_x^{2,+}v(x)$*. Por outro lado, para qualquer* $(p, P) \in D_x^{2,+}v(x)$*, existe uma função de teste superior tal que* $(\varphi_x(x), \varphi_{xx}(x)) = (p, P)$*. Usando argumentos similares é possível obter resultados análogos para funções de teste inferiores associadas a supersoluções* v*.*

Observação 2.8 *É necessário enfatizar que aqui se trata as equações elípticas ao invés das equações parabólicas como na literatura geral. É o objetivo resolver problemas de controle sem horizonte fixo, homogêneo no tempo e portanto sem dependência da variável temporal, vide Yong e Zhou (1999, Lem. 5.4(ii)-5.5(ii), Ch. 4).*

A função valor V em (2.14) será entendida como solução viscosa da equação de HJB (2.18) sob condições do Lema 2.20, retirando-se a suposição de regularidade sobre V em (2.14), isto é, $V \in C([0, T] \times \mathbb{R}^n)$, vide (YONG;ZHOU, 1999, Teo. 5.2, Ch. 4).

A equação de HJB em (1.7) é substituída pelo Hamiltoniano correspondente sem controle

$$\mathcal{H}_0(x, p, P) = f(x) + \langle p, b(x) \rangle + \frac{1}{2}\, \mathbf{tr}(P\sigma(x)\sigma(x)^\intercal), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.28}$$

Por outro lado, a Hipótese 1 garante que as soluções de (2.11) são processos de Markov em um espaço de probabilidade com respeito a filtração $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, vide Le Gall (2016, Th. 8.6). Neste trabalho, o controle u_t é dado pela realimentação de estado, então é conveniente trabalhar com processos u_t Markovianos.

3 Resultados Principais

O conceito de gerador infinitesimal é importante na teoria de processos Markovianos pois dá sentido à evolução infinitesimal de um processo em valor esperado, vide Øksendal (2003, Sec. 7.3). Neste Capítulo apresenta-se uma construção analítica de um gerador infinitesimal para processos de difusão, conhecido na literatura como gerador estendido, de forma que a solução de viscosidade de equações de HJB esteja no domínio desse gerador.

Primeiramente, discute-se a ligação entre o gerador infinitesimal e os processos de Markov. Nesse sentido, aproveita-se de uma característica que associa qualquer semigrupo linear de operadores (em espaços de Banach) aos processos de Markov, vide Wentzell, Chomet e Chung (1981) e Arapostathis, Borkar e Ghosh (2012).

Gerador infinitesimal clássico. Dado um conjunto aberto A e um instante $t \geq 0$, define-se uma probabilidade de transição de x_0 para A no t como

$$\mathbf{P}_t(x_0; A) = \mathbf{P}(\omega \in \Omega : x_t(\omega) \in A | x_0 = x).$$

Essa probabilidade de transição da solução da EDE (2.11) (processos de Markov homogêneos no tempo) está associada a um semigrupo. Esse semigrupo é nomeado "semigrupo de operadores de Feller" ou simplesmente "semigrupo de Feller", e é denotado por $\mathcal{P}_t$, no qual, $\mathcal{P}_t : C_0(\mathbb{R}^n) \to C_0(\mathbb{R}^n)$, para todo $t \geq 0$, em que $C_0(\mathbb{R}^n)$ representa o espaço das funções contínuas com suporte compacto. Um semigrupo de operadores de Feller agindo sobre $C_0(\mathbb{R}^n)$ satisfaz as seguintes propriedades:

i) É contínuo e positivo em $C_0(\mathbb{R}^n)$ (isto é, $\mathcal{P}_0 = I$ $\|\mathcal{P}_t\| \leq 1$) e é um operador positivo para todo $t \geq 0$;

ii) $\mathcal{P}_{t+s} = \mathcal{P}_t \circ \mathcal{P}_s$ para todo $t, s \geq 0$;

iii) $\lim_{t \to 0} \|\mathcal{P}_t(f) - f\| = 0$ para todo $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$.

As probabilidades de transição geram o seguinte semigrupo de Feller

$$(\mathcal{P}_t f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \mathbf{P}_t(x, dy),$$

o qual também pode ser escrito como

$$(\mathcal{P}_t f)(x) = \mathbf{E}_x[f(x_t)].$$

Semigrupos de Feller ou probabilidades de transição podem ser descritos por seu gerador infinitesimal. Dada uma função $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, define-se um gerador infinitesimal, denotado por $\mathcal{A}$, associado ao semigrupo $\mathcal{P}_t$ para um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ como

$$\mathcal{A}f(x_0) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathbf{E}_{x_0}[f(x_t)] - f(x_0)}{t}, \quad t \geq 0, \tag{3.1}$$

quando o limite existe. Denota-se o domínio do gerador uma parte do espaço de Banach E por $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ (isto é, $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset E$). Se (3.1) é válida, então $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Na literatura diz-se que (3.1) representa a derivada à direita em $t = 0$ do semigrupo $\mathcal{P}_t$ para alguma função f no domínio do gerador.

Usa-se o Teorema 2.1 para materializar o gerador infinitesimal associado à EDE (2.11). Em seguida, verifica-se que a classe de funções C^2 está no domínio do gerador infinitesimal, isto é, satisfaz (3.1).

Lema 3.1 *(HANSEN;SCHEINKMAN, 1995) Considera-se o processo de difusão escalar definido como solução de*

$$dx_t = b(x_t)dt + \sigma(x_t)dW_t, \tag{3.2}$$

no qual $\{W_t\}_{t\geq 0}$ *é um processo de Wiener padrão. Seja* $\mathcal{L}$ *um operador diferencial definido por*

$$\mathcal{L} = b(x)\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{d^2}{dx^2},$$

então $\mathcal{A}f(x_0) = \mathcal{L}f(x_0)$ *para qualquer* $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ *e* $x_0 \in \mathbb{R}^n$*, e adicionalmente* $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \equiv C^2(\mathbb{R})$.

Lema 3.2 *(OKSENDAL, 2003, Th. 7.3.3) O gerador infinitesimal do processo de Markov associado à EDE* (2.11) *é dado pelo operador de segunda ordem* $\mathcal{A}$*, que aplicado a* $f \in C_o^2(\mathbb{R}^n)$ *produz*[1]

$$\mathcal{A}f(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \sigma_i(x)^{\intercal}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\sigma_j(x). \tag{3.3}$$

No seguinte resultado, explora-se a conexão entre a fórmula de Itô (Teorema 2.1) e os processos de difusão através da Fórmula de Dynkin. É importante mencionar que a fórmula de Dynkin representa um resultado semelhante ao Teorema Fundamental do Cálculo Clássico no contexto do cálculo estocástico.

Lema 3.3 (Fórmula de Dynkin) *Sejam* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* $C_o^2(\mathbb{R}^n)$ *e* $\{x_t\}_{t\geq 0}$ *um processo solução de* (2.11) *com* $x_0 = x$*, então*

$$\mathbf{E}_x[f(x_\tau)] - f(x) = \mathbf{E}_x\left[\int_0^\tau \mathcal{A}f(x_r)dr\right], \tag{3.4}$$

em que, τ *é um* $\mathcal{F}_t$*-tempo de parada.*

[1] $C_0^2(\mathbb{R}^n)$ denota o espaço de funções de classe $C^2(\mathbb{R}^n)$ com suporte compacto.

3.1 Construção de um gerador infinitesimal estendido

Nesta seção, apresenta-se a construção analítica de um gerador para o processo de difusão (2.11). Também é mostrado que o domínio desse gerador contém as soluções de viscosidade das equações do tipo HJB. A construção analítica do gerador estendido é baseada nos argumentos do Teorema de Verificação Estocástico apresentado em Gozzi, Swiech e Zhou (2005) e posteriormente corrigido em Gozzi, Swiech e Zhou (2010). O gerador estendido é definido como segue.

Definição 3.1 *(REVUZ;YORK, 1999, Ch. VII, Def. 1.8) Considere um processo Markoviano em um espaço de probabilidade filtrado* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbf{P})$ *e uma trajetória* $t \mapsto z_t$ *nesse espaço. Supondo que para algum* $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *existe uma função mensurável* $t \mapsto \Phi(z_t)$*, tal que*

$$\int_s^t \Phi(z_r)dr - \phi(z_t) + \phi(z_s) \tag{3.5}$$

é um $\mathcal{F}_s$*-zero martingal para cada* $t > s$*, então* $t \mapsto \Phi(z_t)$ *é denominado gerador estendido de um processo* $\{z_t\}_{t\geq 0}$*, denotado usualmente por* $t \mapsto \mathcal{A}\phi(z_t)$*. Dessa forma, para qualquer função* ψ *tal que* $\mathcal{A}\psi$ *torne* (3.5) *um* $\mathcal{F}_s$*-zero martingal pertence ao domínio do gerador estendido* $\mathcal{A}$*, isto é,* $\psi \in \mathscr{D}(\mathcal{A})$*.*

Considerando a Hipótese 1 válida e que $v \in C(\mathbb{R})$ é uma subsolução de viscosidade da equação de HJB (1.8), tem-se

$$\inf_{(p,P)\in D_x^{2,+}v(x)} \mathcal{H}(x,p,P) \leq 0, \tag{3.6}$$

se $D_x^{2,+}v(x)$ é não vazio. Em outro caso, se v é uma supersolução de viscosidade,

$$\inf_{(p,P)\in D_x^{2,-}v(x)} -\mathcal{H}(x,p,P) \geq 0. \tag{3.7}$$

Observação 3.1 *Em relação aos conjuntos* (2.24) *e* (2.25) *de sub e superdiferenciais, note que* $D_x^{2,+}v(x)$ *e* $D_x^{2,-}v(x)$ *podem ser conjuntos individualmente vazios em alguns conjuntos de Lebesgue de medida zero em* $\mathbb{R}^n$*, porém não são simultaneamente vazios para todo ponto* x*. Portanto,* $t \mapsto D_x^{2,+}v(x_t)$ *ou* $t \mapsto D_x^{2,-}v(x_t)$ *podem ser vazios em alguns intervalos de* t *possivelmente de medida de Lebesgue diferente de zero em* $\mathbb{R}_+$*. Para garantir a existência de escolhas mensuráveis de elementos do sub e superdiferenciais a seleção mensurável* $t \mapsto p_t^*, P_t^*$*, deve-se tomar*

$$(p_t^*, P_t^*) \in D_x^{2,+}v(x_t) \cup D_x^{2,-}v(x_t), \ \mathbf{P}\text{-}a.s. \tag{3.8}$$

Este fato é negligenciado na literatura quando se lida apenas com subsoluções como em Bardi e Cesaroni (2005),Gozzi, Swiech e Zhou (2005),Gozzi, Swiech e Zhou (2010),Cesaroni (2006).

Com respeito ao controle, a seleção mensurável $t \to \bar{u}_t$ não garante um controle admissível na forma de realimentação de estados, e outras condições são necessárias neste contexto. Com essa preocupação, Haussmann e Lepeltier (1990) sob hipótese de convexidade dos coeficientes b e σ garante a existência de um controle Markoviano, vide também Kurtz e Stockbridge (1998).

No que segue, supõe-se a existência de uma seleção mensurável como em (3.8) e um controle Markoviano ótimo. Para uma notação mais leve desconsidere-se a variável de controle na notação ao menos que surja alguma ambiguidade. A partir daqui nos referimos aos processos de Itô associados a EDE (2.11), vide Mao (2007).

Teorema 3.1 *Considere o processo* $\{x_t\}_{t\geq 0}$ *em* (2.11) *e seja* $v \in C(\mathbb{R}^n)$ *uma solução de viscosidade de* $\mathcal{H}_0(x, Dv(x), D^2v(x)) = 0$ *satisfazendo um crescimento polinomial. Então o gerador estendido aplicado sobre* v *tem a seguinte forma*

$$\mathcal{A}v(x) = \langle p, b(x)\rangle + \mathbf{tr}\{P\sigma(x)\sigma(x)^\intercal\}, \quad x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n,$$

para qualquer $(p, P) \in D_x^{2,+}v(x) \cup (p, P) \in D_x^{2,-}v(x)$. *Portanto,* $v \in \mathscr{D}(\mathcal{A})$.

O desenvolvimento do gerador estendido baseia-se em alguns dos argumentos empregado no Teorema de Verificação em Gozzi, Swiech e Zhou (2005) e depois completado em Gozzi, Swiech e Zhou (2010), válido para soluções de viscosidade. Essa ideia tem seu início em Yong e Zhou (1999, Ch. 5, Sec.6). Uma dificuldade dessa abordagem é a suposição sem mencionar que $t \mapsto D_x^{2,+}v(x_t)$ é não vazio fora de um conjunto de medida nula em um intervalo de $\mathbb{R}$. Conforme indicado na Observação 3.1, essa condição nem sempre é verdadeira e não se pode ser dada como certa.

A prova é dividida em estágios preparatórios com diferentes objetivos. A primeira tarefa é mostrar a relação entre os pontos de Lebesgue e as propriedades de continuidade das funções mensuráveis, empregando alguns resultados em espaços de Banach.

Definição 3.2 *Um ponto de Lebesgue de uma função integrável* $\chi : \mathbb{R} \to E$, *com valores em um espaço de Banach* E, *é um ponto* $t_0 \in \mathbb{R}$ *que satisfaz*

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} \left\|\chi(r) - \chi(t_0)\right\|_E dr = 0. \tag{3.9}$$

Assim, um ponto de Lebesgue é qualquer valor de t_0 para o qual o valor médio da oscilação de χ tende a zero em t_0. Se χ é contínua então (3.9) é válida em cada ponto $t_0 \in \mathbb{R}$ e qualquer t_0 é um ponto de Lebesgue de χ. Daqui em diante, considera-se que $t_0 \in [s, T]$ representa um ponto de Lebesgue.

Lema 3.4 *(DIESTEL;UHL, 1977, Th. 9) Seja* $\chi \in L^1(s, T; E)$, *então o conjunto de pontos de Lebesgue de* χ *é de medida total*[2] *em* $[s, T]$.

[2] Um conjunto é de medida total quando seu complemento é de medida nula.

Lema 3.5 *(GOZZI;SWIECH;ZHOU, 2005, Lem. 3.6) Seja $\chi \in L^1(s,T;E)$, então esse processo é uma aplicação de $[s,T]$ em $L^1(\Omega;E)$ também é integrável.*

O seguinte resultado é produto dos Lemas 3.4 e 3.5 associados ao processo (2.11).

Lema 3.6 *Definem-se as trajetórias $t \mapsto z_1(t) = b(x_t)$ e $t \mapsto z_2(t) = \sigma(x_t)\sigma(x_t)^\intercal$, em que b e σ são coeficientes de* (2.11)*, então*

$$\lim_{h \downarrow 0} \mathbf{E}\left[\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h} \left\| z_i(r) - z_i(t_0)\right\|_E dr\right] = 0 \quad q.t.p \quad t_0 \in [s,T], \ i = 1{,}2. \tag{3.10}$$

Prova. Pela Hipótese 1(ii) do Capítulo 2 tem-se que $z_1 \in L^1_{\mathcal{F}_t}(s,T;\mathbb{R}^n)$ e $z_2 \in L^1_{\mathcal{F}_t}(s,T;\mathbb{R}^{n\times n})$. Além disso, o Lema 3.5 diz que z_1 e z_2 são aplicações de $[s,T]$ em $L^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$ e $L^1(\Omega;\mathbb{R}^{n\times n})$, respectivamente. Adicionalmente, o Lema 2.6 garante que $L^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$ e $L^1(\Omega;\mathbb{R}^{n\times n})$ são espaços de Banach. Então pelo Lema 3.4, o conjunto de pontos de Lebesgue de z_1 como aplicação de $[s,T]$ em $L^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$ é de medida total em $[s,T]$, analogamente para z_2. Assim, obtêm-se o resultado desejado. ■

Processos fracos e pontos de Lebesgue. Considera-se uma filtração crescente $\mathcal{F}_t^s = \sigma(x_t : s \le t \le T)$ como uma sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$. Sob essa filtração se estabelece uma "probabilidade regular condicional" para qualquer v.a. ou vetores aleatórios, vide Ash (1972, Th. 6.6.5). Denota-se por $\mathbf{P}(\cdot|\mathcal{F}_t^s)(\omega)$ a probabilidade regular condicional.

Para $\omega_0 \in \Omega$ fixo, define-se uma medida de probabilidade, denotada por $\mathbf{P}(\cdot|\mathcal{F}_t^s)(\omega_0)$, vide Karatzas e Shreve (1991, Def. 6.12). Dessa forma, é possível considerar em cada ponto t, um novo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot|\mathcal{F}_t^s)(\omega_0))$, em que, x_t, $p(t)$, $P(t)$ são vetores aleatórios q.c. constantes e iguais a $x_t(\omega_0)$, $p(t,\omega_0)$, $P(t,\omega_0)$, respectivamente.

O processo de Wiener é padrão e note que W_{t_0} será igual a uma constante $W_t(\omega_0)$ q.c. sob a medida de probabilidade $\mathbf{P}(\cdot|\mathcal{F}_t^s)(\omega_0)$. Ademais, $t \mapsto x_t$ é uma trajetória associada a (2.11) em $[t_0,T]$, em um novo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot|\mathcal{F}_t^s)(\omega_0))$ com condição inicial $x_t(\omega_0)$. Finalmente, denota-se $\mathbf{E}_{\omega_0}[\cdot]$ o valor esperado com respeito à nova medida de probabilidade $\mathbf{P}(\cdot|\mathcal{F}_t^s)(\omega_0)$ e consideram-se $L^p_{\mathcal{F}_t,\omega_0}(t_0,T;E)$ e $L^p_{\omega_0}(\Omega;E)$ os espaços definidos com respeito a essa nova medida de probabilidade.

Funções de teste e fórmula local de Itô. Considere do Teorema 3.1 uma solução de viscosidade v e uma função de teste φ em concordância com a Observação 2.7, tal que em x_{t_0} a função de teste φ satisfaz

$$\varphi(x_{t_0}) = v(x_{t_0}), \ \varphi_x(x_{t_0}) = p_{t_0} \text{ e } \varphi_{xx}(x_{t_0}) = P_{t_0}. \tag{3.11}$$

Além disso, da condição de crescimento polinomial sobre v pode-se escolher uma função de teste φ tal que φ, φ_x e φ_{xx} satisfazem a condição de crescimento polinomial com diferente constantes segundo seja o caso.

Seja $t_0 \in [s, T]$ um ponto de Lebesgue. Aplica-se a fórmula de Itô para $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot|\mathcal{F}^s_{t_0})(\omega_0))$, porém antes deste uso são necessárias algumas avaliações prévias. Primeiro, consideram-se as estimativas em Yong e Zhou (1999, Ch. 1, Th. 6.16), para $k \geq 1$,

$$\mathbf{E}_{\omega_0}\left[\sup_{t_0 \leq r \leq T} \|x_r\|^k\right] \leq K\left(1 + \mathbf{E}_{\omega_0}[\|x_{t_0}(\omega_0)\|^k]\right), \tag{3.12}$$

$$\mathbf{E}_{\omega_0}\left[\sup_{t_0 \leq r \leq T} \|x_r - x_s\|^k\right] \leq K\left(1 + \mathbf{E}_{\omega_0}[\|x_{t_0}(\omega_0)\|^k]\right)|r - s|^{k/2} \ \forall r, s \in [t_0, T], \tag{3.13}$$

e nota-se que $x_{t_0}(\omega_0) \in L^k_{\mathcal{F}_t,\omega_0}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ (constante q.c.) de forma imediata, e sob a Hipótese 1(ii), $x_{t_0} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ (variável aleatória).

Lema 3.7 *Se $b(x_{t_0})$, $\varphi_x(x_{t_0}) \in L^2_{\mathcal{F}_t,\omega_0}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ e também $\sigma(x_{t_0})$, $\varphi_{xx}(x_{t_0}) \in L^2_{\mathcal{F}_t,\omega_0}(\Omega; \mathbb{R}^{n\times r})$, então*

$$t \mapsto \langle\varphi_x(x_t), b(x_t)\rangle, \quad t \mapsto \left\langle\varphi_x(x_t), \sigma^i(x_t)\right\rangle, \quad t \mapsto \mathbf{tr}\left\{\sigma(x_t)^\intercal\varphi_{xx}(x_t)\sigma(x_t)\right\}, \tag{3.14}$$

pertencem a $L^2_{\mathcal{F}_t,\omega_0}(t_0, T; \mathbb{R})$, no qual, σ^i denota a i-ésima coluna da matriz $\sigma(x_t)$.

Prova. Considere-se $x_{t_0} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$, b é uma função Lipschitz e φ é uma função de teste que herda o crescimento polinomial da solução de viscosidade v segue a afirmativa sobre as variáveis aleatórias $b(x_{t_0})$, $\varphi_x(x_{t_0}) \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e $\varphi_{xx}(x_{t_0}) \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^{n\times r})$. Depois, aplica-se a condição de Lipschitz sobre b para alguma constante de Lipschitz $c_L > 0$, tal que

$$\|b(x_t)\|^2 \leq c_L\|x_t - x_{t_0}\|^2 + \|b(x_{t_0})\|^2,$$

e de (3.12) e (3.13) tem-se que $t \mapsto b(x_t) \in L^2_{\mathcal{F}_t,\omega_0}(t_0, T; \mathbb{R}^n)$. Ademais, $\varphi_x(x_t)$ tem crescimento polinomial, então por avaliações que envolvem a estimativa (3.12) prontamente obtêm-se que $t \mapsto \varphi_x(x_t) \in L^2_{\mathcal{F}_t,\omega_0}(t_0, T; \mathbb{R})$. Assim, a desigualdade de Cauchy-Schwarz implica que

$$|\langle\varphi_x(x_t), b(x_t)\rangle|^2 \leq \|\varphi_x(x_t)\|^2\|b(x_t)\|^2$$

e de (3.12) tem-se que $t \mapsto \langle\varphi_x(x_t), b(x_t)\rangle \in L^2_{\mathcal{F}_t,\omega_0}(t_0, T; \mathbb{R})$. Para o segundo e terceiro processos em (3.14) se faz avaliações similares para concluir que eles pertencem a $L^2_{\mathcal{F}_t,\omega_0}(t_0, T; \mathbb{R})$. ■

Considera-se φ uma função de teste superior ou inferior em x_{t_0}. Em seguida, aplica-se a fórmula de Itô à função φ para $h > 0$ suficientemente pequeno, tal que,

$$\varphi(x_{t_0+h}) - \varphi(x_{t_0}) = \\ \int_{t_0}^{t_0+h}\langle\varphi_x(x_r), b(x_r)\rangle\, dr + \int_{t_0}^{t_0+h}\frac{1}{2}\mathbf{tr}\left\{\sigma(x_r)^\intercal\varphi_{xx}(x_r)\sigma(x_r)\right\} dr + \int_{t_0}^{t_0+h}\langle\varphi_x(x_r), \sigma(x_r)dW_r\rangle. \tag{3.15}$$

Para avaliar-se a variação infinitesimal de (3.15), divide-se (3.15) por $h > 0$, toma-se o valor esperado com respeito a $\mathbf{P}(\cdot|\mathcal{F}^s_{t_0})$ e aplica-se o limite $h \downarrow 0$. Como decorrência dos Lemas 3.7 e 2.8, (3.15) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\omega_0}\left[\frac{\varphi(x_{t_0+h}) - \varphi(x_{t_0})}{h}\right] &= \\ \mathbf{E}_{\omega_0}\left[\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h}\langle\varphi_x(x_r), b(x_r)\rangle\, dr\right] &+ \mathbf{E}_{\omega_0}\left[\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h}\frac{1}{2}\mathbf{tr}\left\{\sigma(x_r)^\intercal\varphi_{xx}(x_r)\sigma(x_r)\right\} dr\right] \\ &+ \mathbf{E}_{\omega_0}\left[\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h}\langle\varphi_x(x_r), \sigma(x_r)dW_r\rangle\right]. \quad (3.16)\end{aligned}$$

Em seguida, avalia-se o primeiro termo do lado direito da igualdade em (3.16), subtraindo-se $\langle\varphi_x(x_{t_0}), b(x_{t_0})\rangle$ para obter a seguinte variação

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\omega_0}\left[\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h}\langle\varphi_x(x_r), b(x_r)\rangle\, dr - \langle\varphi_x(x_{t_0}), b(x_{t_0})\rangle\right] &= \\ \mathbf{E}_{\omega_0}\left[\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h}\langle\varphi_x(x_r) - \varphi_x(x_{t_0}), b(x_r)\rangle\, dr\right] &+ \mathbf{E}_{\omega_0}\left[\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h}\langle\varphi_x(x_{t_0}), b(x_r) - b(x_{t_0})\rangle\, dr\right]. \\ &\quad (3.17)\end{aligned}$$

Agora, avalia-se o primeiro termo do lado direito da igualdade em (3.17) e pelo fato que φ_x e $b \in L^2_{\mathcal{F}_t,\omega_0}(t_0, T; \mathbb{R}^n)$ usa-se a desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned}\left|\mathbf{E}_{\omega_0}\left[\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h}\langle\varphi_x(x_r) - \varphi_x(x_{t_0}), b(x_r)\rangle\, dr\right]\right| &\leq \\ \mathbf{E}_{\omega_0}\left[\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h}\|\varphi_x(x_r) - \varphi_x(x_{t_0})\|^2 dr\right]^{\frac{1}{2}} &\mathbf{E}_{\omega_0}\left[\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h}\|b(x_r)\|^2 dr\right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.18)\end{aligned}$$

Em (3.18) usa-se a continuidade q.c. da trajetória $t \mapsto x_t$ e a continuidade de φ_x para estabelecer que

$$\lim_{h\downarrow 0}\mathbf{E}_{\omega_0}\left[\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h}\|\varphi_x(x_r) - \varphi_x(x_{t_0})\|^2 dr\right] = 0. \quad (3.19)$$

O Lema 3.7 estabelece que $t \mapsto b(x_t) \in L^2_{\mathcal{F}_t,\omega_0}(t_0, T; \mathbb{R}^n)$, portanto o segundo termo multiplicativo do lado direito de (3.18) tem um limitante superior uniforme. Consequentemente, o primeiro termo do lado direito da igualdade de (3.17) tende a zero quando $h \downarrow 0$.

Em seguida, avalia-se o segundo termo do lado direito da igualdade de (3.17), e como resultado da desigualdade de Jensen e da desigualdade de Cauchy Schwarz, tem-se

$$\begin{aligned}\left|\mathbf{E}_{\omega_0}\left[\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h}\langle\varphi_x(x_{t_0}), b(x_r) - b(x_{t_0})\rangle\, dr\right]\right| &\leq \mathbf{E}_{\omega_0}\left[\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h}|\langle\varphi_x(x_{t_0}), b(x_r) - b(x_{t_0})\rangle|\, dr\right] \\ &\leq \left\|\varphi_x(x_{t_0})\right\|\mathbf{E}_{\omega_0}\left[\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h}\left\|b(x_r) - b(x_{t_0})\right\| dr\right] \quad (3.20)\end{aligned}$$

e pelo Lema 2.8 tem-se que $\varphi_x(x_{t_0}) \in L^1_{\mathcal{F}_t,\omega_0}(t_0,T;\mathbb{R}^n)$ e $b(x_t) - b(x_{t_0}) \in L^1_{\mathcal{F}_t,\omega_0}(t_0,T;\mathbb{R}^n)$. Portanto, existe um limitante superior uniforme para (3.20).

Adicionalmente, segue do Lema 3.6 que

$$0 = \lim_{h\downarrow 0} \mathbf{E}\left[\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h} \left\|b(x_r) - b(x_{t_0})\right\| dr\right] = \lim_{h\downarrow 0} \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h} \left\|b(x_r) - b(x_{t_0})\right\| dr \middle| \mathcal{F}^s_{t_0}\right]\right].$$

A expressão anterior garante que $\mathbf{E}_{w_0}\left[\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h}\left\|b(x_r) - b(x_{t_0})\right\|dr\right]$ converge a 0 em $L^1(\Omega;\mathbb{R})$ quando $h \downarrow 0$. Logo, aplicando-se o Lema 2.13 e posteriormente o Lema 2.12, é possível estabelecer a existência de uma subsequência $h_\ell \downarrow 0$ tal que

$$\mathbf{E}_{\omega_0}\left[\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h} \left\|b(x_r) - b(x_{t_0})\right\| dr\right] \to 0, \ \mathbf{P}\text{-a.s.}$$

Pelos argumentos anteriores, pode-se mostrar que o segundo termo do lado direito de (3.17) tende para zero quando $h_\ell \downarrow 0$ em valor esperado com respeito à medida de probabilidade $\mathbf{P}(\cdot|\mathcal{F}^s_{t_0})$.

Passa-se agora para a avaliação do segundo termo do lado direito da igualdade de (3.16). Para isso, deve-se levar em conta as seguintes propriedades: $\mathbf{tr}\{\sigma^\intercal\varphi_{xx}\sigma\} = \mathbf{tr}\{\varphi_{xx}\sigma\sigma^\intercal\}$ e a expressão $\mathbf{tr}\{(\varphi_{xx}(x) - \varphi_{xx}(y))\sigma\sigma^\intercal\} = \mathbf{tr}\{\varphi_{xx}(x)\sigma\sigma^\intercal\} - \mathbf{tr}\{\varphi_{xx}(y)\sigma\sigma^\intercal\}$. Subtraindo-se $\mathbf{tr}\{\varphi_{xx}(x_{t_0})\sigma(x_{t_0})\sigma(x_{t_0})^\intercal\}$ do segundo termo do lado direito da igualdade de (3.16), tem-se

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\omega_0}&\left[\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h} \frac{1}{2}\left(\mathbf{tr}\{\varphi_{xx}(x_r)\sigma(x_r)\sigma(x_r)^\intercal\} - \mathbf{tr}\{\varphi_{xx}(x_{t_0})\sigma(x_{t_0})\sigma(x_{t_0})^\intercal\}\right) dr\right] = \\
&\mathbf{E}_{\omega_0}\left[\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h} \frac{1}{2}\mathbf{tr}\{\left(\varphi_{xx}(x_r) - \varphi_{xx}(x_{t_0})\right)\sigma(x_r)\sigma(x_r)^\intercal\} dr\right] + \\
&\mathbf{E}_{\omega_0}\left[\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h} \frac{1}{2}\mathbf{tr}\left\{\varphi_{xx}(x_{t_0})\left(\sigma(x_r)\sigma(x_r)^\intercal - \sigma(x_{t_0})\sigma(x_{t_0})^\intercal\right)\right\} dr\right]. \quad (3.21)
\end{aligned}$$

Pelos mesmos argumentos usados para calcular o limite do primeiro termo do lado direito de (3.16), pode-se dizer que existe uma subsequência $h_\ell \downarrow 0$, tal que (3.21) tende a zero, ou seja, o segundo termo do lado direito da equação (3.16) tende a $\mathbf{tr}\{\phi_{xx}(x_{t_0})\sigma(x_{t_0})\sigma(x_{t_0})^\intercal\}$.

Finalmente, para o terceiro termo do lado direito da igualdade em (3.16), o integrando é tal que $\langle\varphi_x(x_t), \sigma(x_t)dW_t\rangle = \sum_{i=1}^n \langle\varphi_x(x_t), \sigma^i(x_t)\rangle dW^i_t$. Pelo Lema 3.7 tem-se que $\langle\varphi_x(x_t), \sigma^i(x_t)\rangle \in L^2_{\mathcal{F}_t,\omega_0}(t_0,T;\mathbb{R})$. Uma vez que W_t é um processo de Wiener padrão, então pelo Lema 2.19,

$$\mathbf{E}_{\omega_0}\left[\int_{t_0}^{t_0+h} \langle\varphi_x(x_t), \sigma(x_t)dW_t\rangle\right] = 0.$$

Resumindo, até agora foi demostrado a existência de um subsequência $h_\ell \downarrow 0$ tal que

$$\mathbf{E}_{\omega_0}\left[\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h}\Big(\langle\varphi_x(x_r), b(x_r)\rangle + \frac{1}{2}\mathbf{tr}\{\varphi_{xx}(x_r)\sigma(x_r)\sigma(x_r)^\intercal\}\Big)\,dr\right]$$
$$\to \langle\varphi_x(x_{t_0}), b(x_{t_0})\rangle + \frac{1}{2}\mathbf{tr}\left\{\varphi_{xx}(x_{t_0})\sigma(x_{t_0})\sigma(x_{t_0})^\intercal\right\} \quad \mathbf{P}-q.c.,$$

para um ponto de Lebesgue $t_0 \in [s, T]$.

Desigualdades para a função de teste. Suponha que φ é uma função de teste superior ou inferior em x_{t_0}. Então,

$$v(x_{t_0+h}) - v(x_{t_0}) \leq \varphi(x_{t_0+h}) - \varphi(x_{t_0}) \tag{3.22a}$$

ou

$$v(x_{t_0+h}) - v(x_{t_0}) \geq \varphi(x_{t_0+h}) - \varphi(x_{t_0}) \tag{3.22b}$$

ou ambos são validos se v é diferenciável em x_{t_0}. Suponha que a desigualdade em (3.22a) é válida. Toma-se o valor esperado com respeito a $\mathbf{P}(\cdot|\mathcal{F}^s_{t_0})$ na variação de v, e tem-se

$$\frac{1}{h}\mathbf{E}_{\omega_0}[v(x_{t_0+h}) - v(x_{t_0})] \leq$$
$$\frac{1}{h}\mathbf{E}_{\omega_0}\left[\int_{t_0}^{t_0+h}\Big(\langle\varphi_x(x_r), b(x_r)\rangle + \frac{1}{2}\mathbf{tr}\left\{\varphi_{xx}(x_r)\sigma(x_r)\sigma(x_r)^\intercal\right\}\Big)\,dr\right] =$$
$$\langle\varphi_x(x_{t_0}), b(x_{t_0})\rangle + \frac{1}{2}\mathbf{tr}\left\{\varphi_{xx}(x_{t_0})\sigma(x_{t_0})\sigma(x_{t_0})^\intercal\right\} + O(h). \tag{3.23}$$

para algum $h > 0$ suficientemente pequeno. No caso em que (3.22b) é válida, considera-se a desigualdade em (3.22b) e analogamente tem-se,

$$\frac{1}{h}\mathbf{E}_{\omega_0}[v(x_{t_0+h}) - v(x_{t_0})] \geq \langle\varphi_x(x_{t_0}), b(x_{t_0})\rangle + \frac{1}{2}\mathbf{tr}\left\{\varphi_{xx}(x_{t_0})\sigma(x_{t_0})\sigma(x_{t_0})^\intercal\right\} + O(h). \tag{3.24}$$

Limitantes para o lado esquerdo de (3.23)–(3.24)**.** A seguinte avaliação primeiro apareceu em Yong e Zhou (1999, Lem. 5.2, Ch. 5) de forma incorreta e depois foi corrigida em Gozzi, Swiech e Zhou (2010). Aqui, é convenientemente adaptada aos nossos propósitos.

Lema 3.8 *Assuma-se que* (3.23) *é válida para algum $h > 0$ suficientemente pequeno e seja $t_0 \in [s, T]$ um ponto de Lebesgue, então existe $\rho^+ \in L^1(\Omega; \mathbb{R})$, tal que*

$$\mathbf{E}_{\omega_0}\left[\frac{v(x_{t_0+h}) - v(x_{t_0})}{h}\right] \leq \rho^+(\omega_0), \ \textit{para qualquer}\ \omega_0 \in \Omega. \tag{3.25}$$

Em outro caso, se (3.24) *é válida, então existe $\rho^- \in L^1(\Omega; \mathbb{R})$, tal que*

$$\mathbf{E}_{\omega_0}\left[\frac{v(x_{t_0+h}) - v(x_{t_0})}{h}\right] \geq \rho^-(\omega_0), \ \textit{para qualquer}\ \omega_0 \in \Omega. \tag{3.26}$$

Prova. Pela definição de subsolução de viscosidade, existe um par de vetores aleatórios (p_{t_0}, P_{t_0}) em $D_x^{2,+}v(x_{t_0})$ e uma constante $c_0 > 0$, tal que

$$\begin{aligned}
&v(x_{t_0+h}) - v(x_{t_0}) \leq \\
&\qquad \langle p_{t_0}, x_{t_0+h} - x_{t_0}\rangle + \frac{1}{2}\langle P_{t_0}(x_{t_0+h} - x_{t_0}), x_{t_0+h} - x_{t_0}\rangle + O\left(\|x_{t_0+h} - x_{t_0}\|^2\right) \\
&\qquad\qquad \leq \langle p_{t_0}, x_{t_0+h} - x_{t_0}\rangle + c_o\|x_{t_0+h} - x_{t_0}\|^2. \quad (3.27)
\end{aligned}$$

Toma-se o valor esperado com respeito a $\mathbf{P}(\cdot|\mathcal{F}_{t_0}^s)$ e para o primeiro termo do lado direito de (3.27) usa-se o fato que $t \mapsto \sigma(x_t) \in L^2_{\mathcal{F}_t,\omega_0}(t_0, T; \mathbb{R}^{r\times n})$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\omega_0}\left[\langle p_{t_0}, x_{t_0+h} - x_{t_0}\rangle\right] &= \mathbf{E}_{\omega_0}\left[\left\langle p_{t_0}, \int_{t_0}^{t_0+h} b(x_r)dr + \int_{t_0}^{t_0+h}\sigma(x_r)dW_r\right\rangle\right] \\
&= \mathbf{E}_{\omega_0}\left[\left\langle p_{t_0}, \int_{t_0}^{t_0+h} b(x_r)dr\right\rangle\right]. \quad (3.28)
\end{aligned}$$

Para obter um limitante de (3.28), primeiramente aplica-se (3.11) e (3.12), para conseguir que

$$\|p_{t_0}\| = \|\varphi_x(x_{t_0})\| \leq c_0(1 + \mathbf{E}_{\omega_0}[\|x_{t_0}\|^k]).$$

Em seguida, pela condição de Lipschitz sobre $b(\cdot)$, tem-se para algum $c_L > 0$ que $\|b(x_r)\| \leq c_L(1 + \|x_r\|)$, e aplicando estimativa (3.12), resulta que

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\omega_0}\left[\int_{t_0}^{t_0+h}\|b(x_r)\|dr\right] &\leq c_L\int_{t_0}^{t_0+h}(1 + \mathbf{E}_{\omega_0}[\|x_r\|^2])dr \\
&\leq c_L(1 + K(1 + \mathbf{E}_{\omega_0}[\|x_{t_0}(\omega_0)\|^2]))h. \quad (3.29)
\end{aligned}$$

Portanto, para algumas constantes $m_1 \geq 1$ e $c_1 > 0$, obtêm-se um limitante uniforme superior para (3.28), tal que

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\omega_0}\left[\left\langle p_{t_0}, \int_{t_0}^{t_0+h} b(x_r)dr\right\rangle\right] &\leq \|p_{t_0}\|\mathbf{E}_{\omega_0}\left[\int_{t_0}^{t_0+h}\|b(x_r)\|dr\right] \\
&\leq c_1\left(1 + \mathbf{E}_{\omega_0}[\|x_{t_o}(\omega_0)\|^{m_1}]\right)h. \quad (3.30)
\end{aligned}$$

Para o segundo termo do lado direito da igualdade de (3.27), usa-se a estimativa (3.13) diretamente de forma que

$$\mathbf{E}_{\omega_0}[\|x_{t_0+h} - x_{t_0}\|^2] \leq K(1 + \mathbf{E}_{\omega_0}[\|x_{t_0}(\omega_0)\|^2])h,$$

no qual, (3.25) é verificada para $\rho^+(\omega_0) = c_2(1 + \|x_{t_0}(\omega_0)\|^{m_2})$ com $m_2 = \max\{m_1,2\}$ e algum $c_2 > 0$. A prova para (3.26) segue ao longo de avaliações semelhantes de limites. ■

Finalmente, tem-se as condições para apresentar o resultado principal deste capítulo.

Prova do Teorema 3.1] O Lema 3.8 proporciona um limitante superior ou inferior para a variação em valor esperado em um ponto de Lebesgue $t_0 \in [s,T]$, então, considera-se (3.22a) e (3.23), e pode-se escrever pelo teorema de convergência dominada

$$\limsup_{h\downarrow 0} \mathbf{E}_{\omega_0}\left[\frac{v(x_{t_0+h}) - v(x_{t_o})}{h}\right] \\ \leq \Big\langle p(t_0,\omega_0), b(x_{t_0}(\omega_0))\Big\rangle + \frac{1}{2}\mathbf{tr}\Big\{P(t_0,\omega_0)\sigma(x_{t_0}(\omega_0))\sigma(x_{t_0}(\omega_0))^{\intercal}\Big\}$$

por identificação $\varphi_x(x_{t_0}) = p(t_0,\omega_0)$ e $\varphi_{xx}(x_{t_0}) = P(t_0,\omega_0)$, é satisfeito para qualquer subsolução de viscosidade v.

No outro caso, considera-se (3.22b) e (3.24), e tem-se de forma similar que,

$$\liminf_{h\downarrow 0} \mathbf{E}_{\omega}\left[\frac{v(x_{t_0+h}) - v(x_{t_0})}{h}\right] \geq \\ \Big\langle p(t_0,\omega_0), b(x_{t_0}(\omega_0))\Big\rangle + \frac{1}{2}\mathbf{tr}\Big\{P(t_0,\omega_0)\sigma(x_{t_0}(\omega_0))\sigma(x_{t_0}(\omega_0))^{\intercal}\Big\}$$

é satisfeito para qualquer supersolução de viscosidade v.

Portanto, se v é uma solução de viscosidade de $\mathcal{H}_0(x, Dv(x), D^2v(x)) = 0$, então existe,

$$\mathcal{A}v(x) = \langle p, b(x)\rangle + \frac{1}{2}\mathbf{tr}\left\{P\sigma(x)\sigma(x)^{\intercal}\right\}, \ \mathbf{P}\text{-a.s.}, \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

em que, $(p,P) \in D_x^{2,-}v(x)$ ou $(p,P) \in D_x^{2,+}v(x)$, ou pertence à união de ambos conjuntos. Como consequência, v pertence ao domínio $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ e para cada $0 \leq s \leq t$, $-v(x_t) + v(x_s) + \int_s^t \mathcal{A}v(x_r)dr$ é um $\mathcal{F}_t$-zero martingal. Assim, o teorema esta provado. ■

3.2 O caso semilinear e a convexidade da função custo

Nesta seção, desenvolve-se a propriedade de convexidade da função valor de um problema de controle ótimo estocástico. Nesse sentido, será abordado um cenário no qual a função valor possui como propriedade intrínseca a convexidade. Essa propriedade é baseada sobre adequado um ordenamento estocástico, como se destaca aqui.

Leva-se em consideração a caracterização do gerador estendido no Teorema 3.1, para estudar a estabilidade estocástica para a seguinte classe de processo de difusão. Defina-se sobre um espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathcal{F}_t)$, escrito como

$$dx_t = (Fx_t + Gu_t)dt + \sigma(x_t, u_t)dW_t, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n \tag{3.31}$$

para controles Markovianos, $\mathcal{U} = \{u_t = u(t,x_t), t \geq 0, u(\cdot,\cdot) \in \mathbb{R}^m \text{ mensurável}\}$. O processo (3.31) pertence à classe de sistemas lineares perturbados, algumas vezes chamados EDE semilineares, vide Mao (2007), Khasminskii (2012).

O elemento que se procura é uma função de Lyapunov que é por sua vez uma solução de viscosidade do Hamiltoniano $\mathcal{H}(x, Dv(x), D^2v(x)) = 0$ em (1.8) (ou do $\mathcal{H}_0$ em (2.28) caso sem controle). Aqui, se mostra que a função valor é convexa, e quando esta pode ser estritamente convexa. Esta caracterização resolve o problema de estabilidade de uma ótica diferente, no qual, a existência de uma solução de viscosidade garante ao problema a estabilidade estocástica de forma direta. Esta conexão é exposta de forma mais detalhada no Capítulo 4.

A ideia é mostrar que o processo em (3.31) com custo corrente convexo produz uma função valor convexa. A convexidade da função valor para certo tipo de sistemas estocásticos em horizonte finito foi estudada em Clark e Kiessler (2002) com custo corrente positivo. No entanto, o resultado aplica-se apenas aos processos de difusão escalares, e estes argumentos não podem ser generalizados para o caso de difusão controlados n-dimensionais, devido ao ordenamento particular utilizado, válido somente na reta real. Aqui utiliza-se um ordenamento estocástico encontrado em Scarsini (1998), Muller (2001), Shaked e Shanthikumar (2007).

Lema 3.9 *Sejam X, Y dois vetores aleatórios n-dimensionais com distribuição normal $N(\mu_x, \Sigma_x)$ e $N(\mu_y, \Sigma_y)$, respectivamente. Então, para qualquer função convexa $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,*

$$\mu_x = \mu_y \text{ e } \Sigma_y - \Sigma_x \succeq 0 \text{ sse } \mathbf{E}[\phi(X)] \leq \mathbf{E}[\phi(Y)].$$

Hipótese 3: Suponha-se que $(x, u) \mapsto f(x, u)$ e $x \mapsto h(x)$ em (1.6) são funções convexas. A função *drift* $(x, u) \mapsto b(x, u)$ é uma função linear, tal que, $b(x, u) = Fx + Gu$. O coeficiente de difusão $(x, u) \mapsto \sigma(x, u)$ é convexo no sentido de matriz semidefinida positiva como se segue. Para $\theta, \bar{\theta} \geq 0, \theta + \bar{\theta} = 1$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $u, v \in \mathbb{R}^m$,

$$\begin{aligned}(\theta\sigma(x,u) + \bar{\theta}\sigma(y,v))(\theta\sigma(x,u) + \bar{\theta}\sigma(y,v))^{\intercal} - \\ \sigma(\theta x + \bar{\theta}y, \theta u + \bar{\theta}v)\sigma(\theta x + \bar{\theta}y, \theta u + \bar{\theta}v)^{\intercal} \succeq 0. \quad (3.32)\end{aligned}$$

Na sequência, a fim de simplificar expressões, elimina-se a dependência do controle sem perda de generalidade.

Teorema 3.2 *Sob as Hipóteses 1 e 3, a função valor em (1.6) é convexa.*

As seguintes preliminares são necessárias para a prova.

Lema 3.10 *Consideram-se as Hipóteses 1 e 3 sobre os dados do problema. Sejam $t \mapsto x_t, y_t$ dois processos de difusão como em (2.11) com $x_s = y_s = x$. Se para cada t em $[s, T]$, $\mathbf{E}[y_t] = \mathbf{E}[x_t]$ e $\mathrm{Var}[y_t] - \mathrm{Var}[x_t] \succeq 0$, então a seguinte desigualdade é verdadeira,*

$$\mathbf{E}_x\left[\int_s^T f(x_r)dr + h(x_T)\right] \leq \mathbf{E}_x\left[\int_s^T f(y_r)dr + h(y_T)\right].$$

Prova. Das afirmações no lema tem-se

$$\mathbf{E}_x[f(x_t)] \leq \mathbf{E}_x[f(y_t)], \quad s \leq t < T, \tag{3.33}$$

$$\mathbf{E}_x[h(x_T)] \leq \mathbf{E}_x[h(y_T)]. \tag{3.34}$$

Considera-se a integral sobre $[s, T]$ de (3.33) como uma integral sobre $\mathbb{R} \times \Omega$ sob uma medida finita. Logo, aplica-se o Teorema de Fubini para intercambiar a integral em t e o valor esperado (integral em ω). Assim, obtêm-se

$$\mathbf{E}_x\left[\int_s^T f(x_t)dt\right] \leq \mathbf{E}_x\left[\int_s^T f(y_t)dt\right]$$

em seguida, adiciona-se (3.34) para completar o resultado. ■

Prova do Teorema 3.2] Deseja-se mostrar que para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\theta, \bar{\theta} \geq 0, \theta + \bar{\theta} = 1$,

$$V(s, \theta x + \bar{\theta} y) \leq \theta V(s, x) + \bar{\theta} V(s, y)$$

é válido para a função valor V e cada $s \in [0, T]$. Para este propósito, considera-se uma única realização sobre $\mathbb{R}^n$ do processo em (2.11), com trajetórias diferentes associados a condições inicias diferentes, tais que,

$$\begin{cases} dx_t &= b(x_t)dt + \sigma(x_t)dW_t, \quad x_s = x, \\ dy_t &= b(y_t)dt + \sigma(y_t)dW_t, \quad y_s = y. \end{cases} \tag{3.35}$$

Baseado em (3.35), considera-se uma combinação convexa de trajetórias $t \mapsto x_t$ e $t \mapsto y_t$ para formar o processo $t \mapsto w_t$, como,

$$w_t = w_s + \int_s^t \left(\theta b(x_r) + \bar{\theta} b(y_r)\right) dr + \int_s^t \left(\theta \sigma(x_r) + \bar{\theta} \sigma(y_r)\right) dW_r, \tag{3.36}$$

com condição inicial $w_s = \theta x + \bar{\theta} y$. Então $w_t = \theta x_t + \bar{\theta} y_t$, e desde que f e h são funções convexas,

$$f(w_t) \leq \theta f(x_t) + \bar{\theta} f(y_t), \quad s \leq t \leq T, \tag{3.37}$$

$$h(w_T) \leq \theta h(x_T) + \bar{\theta} h(y_T). \tag{3.38}$$

Integrando (3.37) sobre o intervalo $[s, T]$, e adicionando (3.38), tem-se

$$\int_s^T f(w_t)dt + h(w_T) \leq \theta \left(\int_s^T f(x_t)dt + h(x_T)\right) + \bar{\theta} \left(\int_s^T f(y_t)dt + h(y_T)\right).$$

Toma-se o valor esperado da expressão anterior para obter

$$\mathbf{E}\left[\int_s^T f(w_t)dt + h(w_T) \middle| \mathcal{F}_s\right] \leq \theta V(s, x) + \bar{\theta} V(s, y). \tag{3.39}$$

A prova do Teorema 3.2 é completada com a desigualdade (3.40) no próximo lema. ■

Lema 3.11 *Seja $t \mapsto z_t$ uma trajetória de processos que satisfaz a Hipótese 3, com condição inicial $z_s = w$, e $t \mapsto w_t$ a combinação convexa definido em* (3.36). *Então,*

$$V(s,w) = \mathbf{E}\left[\int_s^T f(z_t)dt + h(z_T)\middle|\mathcal{F}_s\right] \leq \mathbf{E}\left[\int_s^T f(w_t)dt + h(w_T)\middle|\mathcal{F}_s\right]. \tag{3.40}$$

Prova. Considera-se o processo original (2.11) sob a Hipótese 3,

$$dz_t = b(z_t)dt + \sigma(z_t)dW_t, \quad z_s = w, \tag{3.41}$$

e compara-se com $t \mapsto w_t$ definido em (3.36). Adicionalmente, considera-se um terceiro processo,

$$d\tilde{w}_t = b(z_t)dt + \left(\theta\sigma(x_t) + \bar{\theta}\sigma(y_t)\right)dW_t, \quad \tilde{w}_s = w,$$

Então, $\mathbf{E}[\tilde{w}_t] = \mathbf{E}[z_t]$ e $\mathrm{Var}[\tilde{w}_t] = \mathrm{Var}[w_t]$ para cada $t \in [s,T]$. Aplica-se a hipótese imposta sobre σ em (3.32) para obter-se

$$\mathrm{Var}[\tilde{w}_t] = \mathrm{Var}[w_t] = \mathbf{E}[(\theta\sigma(x_t) + \bar{\theta}\sigma(y_t))(\bullet)^\intercal] \succeq \mathbf{E}[\sigma(\omega_t)\sigma(\omega_t)^\intercal] = \mathrm{Var}[\sigma(w_t)]$$

e portanto,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\mathrm{Var}[\tilde{w}_t] - \mathrm{Var}[z_t]\right) &= \frac{d}{dt}\left(\mathrm{Var}[w_t] - \mathrm{Var}[z_t]\right) \\ &\succeq \frac{d}{dt}\mathbf{E}[\sigma(w_t)\sigma(w_t)^\intercal - \sigma(z_t)\sigma(z_t)^\intercal], \quad s \leq t \leq T. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Desde que $w_s = z_s = w$, $\mathrm{Var}[w_s] - \mathrm{Var}[z_s] \succeq 0$, da última expressão tem-se

$$\mathrm{Var}[w_{s+\epsilon}] - \mathrm{Var}[z_{s+\epsilon}] \succeq 0, \text{ com } \epsilon > 0 \text{ suficientemente pequeno.} \tag{3.43}$$

Da Hipótese 3 e sendo b uma função linear, e com $w_s = z_s = w$, tem-se

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[w_{s+\epsilon}] - \mathbf{E}[\tilde{w}_{s+\epsilon}] = \mathbf{E}\left[\int_s^{s+\epsilon}\left(\theta b(x_r) + \bar{\theta}b(y_r) - b(z_t)\right)dr\right] = \\ \mathbf{E}\left[\int_s^{s+\epsilon}\left(b(\theta x_r + \bar{\theta}y_r) - b(z_t)\right)dr\right] = \mathbf{E}[w_{s+\epsilon}] - \mathbf{E}[z_{s+\epsilon}] = 0\end{aligned} \tag{3.44}$$

do fato que $\mathbf{E}\left[\theta x_r + \bar{\theta}y_r\right] = \mathbf{E}\left[z_t\right]$.

Tendo (3.43) e (3.44) em consideração, por aplicação direta do Lema 3.9 prevê-se que $\mathbf{E}[\phi(z_{s+\epsilon})] \leq \mathbf{E}[\phi(w_{s+\epsilon})]$ para qualquer função real e convexa ϕ.

Os argumentos anteriores mostram que um ordenamento para a variância e a coincidência das médias são obtidas para qualquer t arbitrário em $[s,T]$, repetindo-se um número suficiente de vezes o argumento para algum $\epsilon > 0$. Como consequência o Lema 3.10 aplica-se para verificar a desigualdade (3.40) e assim a prova é finalizada. ■

4 Critérios de Estabilidade

Nesta seção, apresenta-se uma análise de longo tempo do comportamento dos processos de difusão, a partir das condições que envolvem o gerador associado ao processo. Das propriedades ergódicas, tem-se interesse pela estabilidade q.c. dos processos de difusão homogêneos no tempo, vide Bellet (2006). Também será abordada a estabilidade dos processos controlados associados ao problema de controle estocástico.

O interesse aqui é caracterizar a estabilidade dos processos de difusão sendo permanentemente excitados pelo ruído ou não. As noções mais usuais encontradas na literatura são a estabilidade (assintótica) em probabilidade, a estabilidade (assintótica) q.c. e a estabilidade (assintótica) de momentos, estudadas em Kushner (1967), Kozin (1969), Khasminskii (2012), Thygesen (1997), Mao (1999), Taniguchi (2003), Mao (2007). No entanto, essas noções não se aplicam quando o processo de difusão é permanentemente afetado pelo ruído aditivo, porque exigem que o efeito do ruído no interior do conjunto de equilíbrio desapareça ou decaia com o tempo, vide Krstic e Hua (1998). A literatura mencionada e os trabalhos de Florchinger (1995), Florchinger (1997), Deng, Krstic e Williams (2001), Bardi e Cesaroni (2005), Cesaroni (2006), todos eles empregam suposições semelhantes sobre a existência de uma ação de controle $\bar{u}$, tal que

$$b(0, \bar{u}) = 0 \text{ e } \sigma(0, \bar{u}) = 0 \tag{4.1}$$

nesse caso ao "capturar o processo", o equilíbrio na origem será preservado na presença de ruído pois será um estado absorvente do processo. Mateos e Cortés (2014) estudaram a estabilidade sob ruído persistente usando propriedades relacionadas a NSS desenvolvidas em Deng, Krstic e Williams (2001). Porém uma condição de captura semelhante à que aparece acima é empregada. Em Nishimura e Horoshi (2018) um estudo para processos escalares permanentemente excitados por ruído, que usam as especificidades desse caso.

Existem múltiplas noções de estabilidade estocástica, que por sua vez, estão associadas à diferentes formas de convergência estocástica, vide Kozin (1969) para um clássico sobre esse assunto. Em particular, o critério de Foster-Lyapunov estende a análise de Lyapunov para o campo dos processos estocásticos e permite uma caracterização das propriedades ergódicas dos processos de Markov, vide Meyn e Tweedie (1993). Os elementos básicos dessa abordagem é uma adequada noção de gerador infinitesimal associada ao processo, junto com uma função tipo-norma (ou coerciva[1]) que faz o papel de função de Lyapunov. Nesse sentido, introduz-se a definição.

[1] Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é dita coerciva se $\frac{\langle f(x), x\rangle}{\|x\|} \to \infty$ quando $\|x\| \to \infty$ e se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ é dita tipo-norma se $f(x) \to \infty$ quando $\|x\| \to \infty$.

Definição 4.1 (Função de Lyapunov) *A função $V : \mathcal{D} \to \mathbb{R}_+$ é uma função de Lyapunov estocástica se V é uma função tipo-norma em que $V \in \mathscr{D}(\mathcal{A})$ e $\mathcal{A}V(x) < 0$ em $\mathcal{D} \setminus \mathcal{O}$, tal que, $0 \in \mathcal{O} \subset \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{A}$ é o gerador estendido do Teorema 3.1. Se $\mathcal{D}$ é um conjunto compacto, V é uma função de Lyapunov (se $\mathcal{D} \equiv \mathbb{R}^n$, V é uma função de Lyapunov global).*

Observação 4.1 *Na literatura especializada, existe uma variedade de definições equivalentes para a função tipo-norma. A mais óbvia é exigir que $\rho_1\|x\|^p \leq V(x) \leq \rho_2\|x\|^q$ para algum $\rho_1, \rho_2 > 0$, $0 < p < q$ e $\|x\|^p$ suficientemente grande. Por exemplo, o conjunto de funções crescentes contínuas $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ com $g(0) = 0$ denotado por $\mathcal{K}$ em composição com alguma norma $\|x\|^p$ também é usado o conjunto de funções em $\mathcal{K}$ tal que $g(r) \to \infty$ quando $r \to \infty$ denotado por $\mathcal{K}_\infty$; o conjunto de funções l de $\mathcal{K} \times [0,\infty)$ em $\mathbb{R}$ tal que $l(r,\cdot) \in \mathcal{K}$ e $\lim_{t\to\infty} l(\cdot,t) = 0$, denotado por $\mathcal{KL}$, vide Mao (2007).*

Para um conjunto mensurável $\mathcal{O} \subset \mathcal{D}$, considera-se o seguinte $\mathcal{F}_t$-tempo de parada,

$$\tau_{\mathcal{O}} := \inf\{t \geq 0 : x_t \in \mathcal{O}\}, \tag{4.2}$$

com $\tau_{\mathcal{O}} = +\infty$ para as trajetórias que nunca atingem o conjunto $\mathcal{O}$.

As noções principais de estabilidade consideradas neste trabalho são apresentadas a seguir.

Definição 4.2 (Recorrência (positiva) com respeito a $\mathcal{O}$) *Um conjunto $\mathcal{O}$ é dito recorrente se $\mathbf{P}_x(\tau_{\mathcal{O}} < \infty) = 1$ para qualquer $x \in \mathcal{D}$, ou equivalentemente, $\mathbf{P}_x(\eta_{\mathcal{O}} = \infty) = 1$, no qual, $\eta_{\mathcal{O}}$ representa o número de visitas ao conjunto $\mathcal{O}$. Diz-se que $\mathcal{O}$ é recorrente positivo se $\sup_{x\in\mathcal{D}} \mathbf{E}_x[\tau_{\mathcal{O}}] < +\infty$.*

Definição 4.3 (Estabilidade exponencial a $\mathcal{O}$) *Diz-se que a trajetória $t \mapsto x_t$ converge exponencialmente rápida q.c. a $\mathcal{O}$ se existe $p, q, \alpha, \beta > 0$ tal que*

$$\mathbf{E}_x\left[\inf_{y\in\mathcal{O}} \|y - x_t\|^p\right] \leq \beta\|x\|^q e^{-\alpha t}, \text{ para cada } x \in \mathcal{D}. \tag{4.3}$$

Definição 4.4 (Estabilidade no p-ésimo momento a $\mathcal{O}$) *Diz-se que a trajetória $t \mapsto x_t$ converge no p-ésimo momento q.c. a $\mathcal{O}$, se*

$$\mathbf{E}_x\left[\inf_{y\in\mathcal{O}} \|y - x_t\|^p\right] \to 0, \text{ quando } t \to \infty, \text{ para cada } x \in \mathcal{D}. \tag{4.4}$$

Condição sobre o *drift* e gerador estendido. A condição de Foster-Lyapunov sobre o *drift* aplica-se aos processos através de um gerador bem definido. O contexto aqui é o dos processos de difusão associados ao gerador estendido de acordo com a noção fornecida no Teorema 3.1. Procuram-se condições suficientes para a estabilidade estocástica.

A ideia de conjuntos pequenos (*petite*) é usada em conexão com processos recorrentes no espaços de estado. A probabilidade de retorno ao estado inicial para um processo é quase nula, mas pode ser certo que retornará a um conjunto compacto que contenha o estado inicial. Tais conjuntos são denominados conjuntos *petite*.

O seguinte Lema é adaptado de Meyn e Tweedie (1993, Th. 4.2).

Lema 4.1 (Condição para recorrência positiva) *Suponha que $\mathcal{O} \subset \mathcal{D}$ é um conjunto petite e para algum $f(\cdot) > 0$, $c, d > 0$, $V \in \mathscr{D}(\mathcal{A})$,*

$$\mathcal{A}V(x) \leq -cf(x) + d\mathbb{1}_{\mathcal{O}}, \ x \in \mathcal{D}, \tag{4.5}$$

é válida com V uma função tipo-norma em $\mathcal{D} \setminus \mathcal{O}$. Então o processo $t \mapsto x_t$ é positivo recorrente.

Nos seguintes exemplos pode-se notar a necessidade de funções de Lyapunov não regulares.

Exemplo 4.1 *(NISHIMURA;ITO, 2016) Considera-se a EDE escalar $dx_t = -ax_tdt + \sigma x_t dW_t$ com $a, \sigma > 0$, um modelo linear simples com ruído multiplicativo. A origem é um ponto de equilíbrio, e se $x_0 = 0$ então $x_t = 0, t \geq 0$ por tanto a origem é absorvente. A solução dessa EDE é $x_t = x_0 \exp(-at + \sigma W_t)$, vide Khasminskii (2012, Rem. 5.5). Considera-se agora $v_2(x) = x^2$ como uma possível função de Lyapunov, e assim $\mathcal{A}v_2(x) = 2(-a + \sigma^2)x^2 \geq 0$. Para $a \leq \sigma^2$, v_2 falha em descrever a estabilidade, entretanto, para $v_p(x) = |x|^p$, obtêm-se*

$$\mathcal{A}v_p(x) = p(-a + \frac{1}{2}\sigma^2 p)|x|^p < 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

quando $p < 2a/\sigma^2$. Esse exemplo indica o uso de funções não diferenciáveis como candidatas a funções de Lyapunov.

Exemplo 4.2 *(NISHIMURA;ITO, 2016) Considera-se agora $dx_t = -axdt + \sigma dW_t$, uma situação simples em que o coeficiente de difusão não é zero quando $x_0 = 0$. A escolha de $v_1(x) = |x|$ leva a*

$$\mathcal{A}v_1(x) = -a|x| < 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

e pode-se esperar que a origem seja um ponto atrator, no sentido que ela pode assumir o papel do compacto $\mathcal{O}$ como no Lema 4.1. De fato, a solução da EDE em questão é

$$x_t = e^{-at}x_0 + \int_0^t e^{-a(t-s)}\sigma dW_s$$

e o cálculo de Itô fornece,

$$\mathbf{E}[|x_t|^2] = \sigma^2 \int_0^t e^{-2a(t-s)}ds = \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}) \to \frac{\sigma^2}{2a}, \text{quando } t \to \infty.$$

Assim, o efeito atrator da origem não é verificado, sendo que apenas o segundo momento é limitado.

4.1 Estabilidade e problemas relacionados.

Nesta seção, apresentam-se alguns problemas de estabilidade estocástica que foram tratados usando o gerador estendido e a conexão com as soluções de viscosidade da equação de HJB. Estudos anteriores sobre esse assunto podem ser encontrados em Cesaroni (2006). Destaca-se desse trabalho o uso de supersoluções viscosas da equação de HJB para estabelecer resultados de estabilidade. Além das dificuldades já apontadas na Seção 3.1 ao se tratar somente supersoluções de viscosidade, a noção usa uma condição de sinal na desigualdade da equação de HJB difícil de ser verificada.

4.1.1 O problema de duas fronteiras (P_1)

Consideram-se os conjuntos compactos $\mathcal{D}$ e $\mathcal{O}$, com $\mathcal{O} \subset \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ e $\partial\mathcal{D}$ denota a fronteira de $\mathcal{D}$. O problema surge quando o valor esperado de um funcional do processo,

$$J_{\tau_\mathcal{D}}(x) = \mathbf{E}_x\left[\int_0^{\tau_\mathcal{D}} f(x_r)dr + h(x_{\tau_\mathcal{D}})\right],\ x_0 = x \in \mathcal{D}\setminus\mathcal{O}, \tag{4.6}$$

é de interesse até um $\mathcal{F}_t$-tempo de parada $\tau_\mathcal{D}$ dado por

$$\tau_\mathcal{D} := \min\Big\{\inf\{t \geq 0 : x_t \in \mathcal{O}\}, \inf\{t \geq 0 : x_t \in \partial\mathcal{D}\}\Big\}.$$

Aqui f é uma função não negativa sobre $\mathcal{D}\setminus\mathcal{O}$, e h é contínua sobre $\partial\mathcal{D}$ e sobre $\partial\mathcal{O}$ com $\min_{\partial\mathcal{D}} h(x) > \max_{\partial\mathcal{O}} h(x)$ e $0 \in \mathcal{O}$. Assume-se que existe $v \in C(\mathbb{R}^n)$ solução de viscosidade da seguinte equação de HJB

$$\mathcal{H}_0(x, Dv(x), D^2v(x)) = 0, \quad x \in \mathcal{D}\setminus\mathcal{O}, \tag{4.7}$$

com $v(x) = h(x),\ x \in \partial\mathcal{O}\cup\partial\mathcal{D}$.

Uma questão neste ponto seria sobre a atratividade do ponto de equilíbrio local representado pela origem. No sentido do problema (4.6), o processo atingiria primeiro o conjunto “seguro” $\mathcal{O}$ antes de deixar o domínio de atração representado por $\mathcal{D}$?

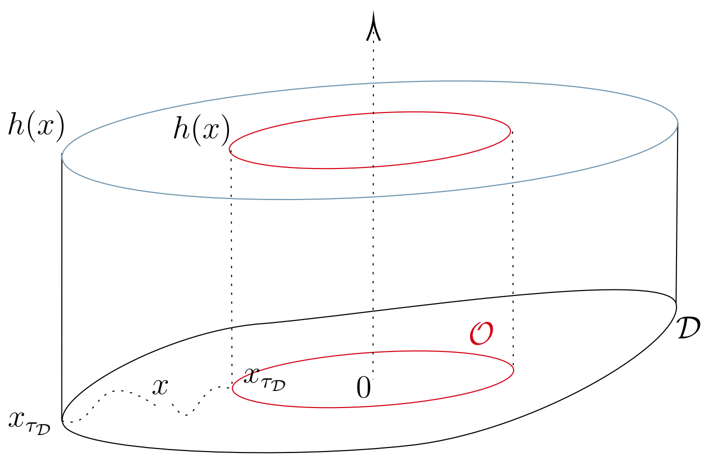

Figura 4: O problema de duas fronteiras.

O seguinte resultado permite responder essa pergunta e expande o resultado para diversas situações.

Teorema 4.1 *Seja $J_{\tau_{\mathcal{D}}}(x)$ uma solução de (4.7) com $f(\cdot) \geq 0$.*
(i) Se $\rho_1\|x\|^p \leq J_{\tau_{\mathcal{D}}}(x) \leq \rho_2\|x\|^p$ para algum $p > 0$ e $0 < \rho_1 \leq \rho_2$, então

$$\mathbf{E}_x\left[\|x_{\tau_{\mathcal{D}}}\|^p\right] \leq \frac{\rho_2}{\rho_1}\|x\|^p.$$

(ii) Se $f \equiv 0$ em $\mathcal{D} \setminus \mathcal{O}$, $h = 0$ em $\partial\mathcal{O}$ e $h = 1$ em $\partial\mathcal{D}$, então $\mathbf{P}(x_{\tau_{\mathcal{D}}} \in \partial\mathcal{O}) = 1 - J_{\tau_{\mathcal{D}}}(x)$.
(iii) Se $\mathcal{D} \equiv \mathbb{R}^n$, $f > 0$ e $J_{\tau_{\mathcal{D}}}$ é tipo-norma sobre $\mathcal{D} \setminus \mathcal{O}$ para algum conjunto compacto $\mathcal{O}$, então o processo $t \mapsto x_t$ é recorrente positivo.

Prova. (i) Nota-se que $\mathbf{E}_x[J_{\tau_{\mathcal{D}}}(x_{\tau_{\mathcal{D}}})] = \mathbf{E}_x[h(x_{\tau_{\mathcal{D}}})]$ e

$$\mathbf{E}_x[h(x_{\tau_{\mathcal{D}}})] = J_{\tau_{\mathcal{D}}}(x) - \mathbf{E}_x\left[\int_0^{\tau_{\mathcal{D}}} f(x_r)dr\right] \leq J_{\tau_{\mathcal{D}}}(x),$$

a partir do qual segue a primeira afirmação do teorema de uma maneira simples. (ii) Se $f \equiv 0$, $h = 0$ sobre $\partial\mathcal{O}$ e $h = 1$ sobre $\partial\mathcal{D}$, então

$$J_{\tau_{\mathcal{D}}}(x) = \mathbf{E}_x[\mathbb{1}_{\{x_{\tau_{\mathcal{D}}} \in \partial\mathcal{D}\}}] = 1 - \mathbf{P}_x(x_{\tau_{\mathcal{D}}} \in \partial\mathcal{O}).$$

(iii) Quando $\mathcal{D} \equiv \mathbb{R}^n$, tendo-se em conta o Teorema 3.1, o Hamiltoniano em (4.7) fornece a seguinte relação,

$$\mathcal{H}_0(x, Dv(x), D^2v(x)) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{A}v(x) = -f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}.$$

Se $f > 0$ e $J_{\tau_{\mathcal{D}}}$ é uma função tipo-norma sobre $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}$, a desigualdade em (4.5) é verificada fora do conjunto $\mathcal{O}$, e do Lema 4.1 segue que o processo é recorrente positivo. ■

4.1.2 O problema com desconto positivo ou negativo (P_2)

Considera-se um conjunto compacto $\mathcal{O} \subset \mathcal{D} \equiv \mathbb{R}^n$, e $\tau_{\mathcal{O}}$ um $\mathcal{F}_t$-tempo de parada como em (4.2). Seja $\mathcal{O}^c = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}$. O problema aqui apresentado tem o seguinte funcional de custo,

$$J_{\tau_{\mathcal{O}}}(x) = \mathbf{E}_x\left[\int_0^{\tau_{\mathcal{O}}} e^{\zeta t} f(x_t)dt + e^{\zeta\tau_{\mathcal{O}}} h(x_{\tau_{\mathcal{O}}})\right], \ x \in \mathcal{O}^c \tag{4.8}$$

com $f, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções não negativas e $f > 0$ para todo $x \in \mathcal{O}^c$. Se $\zeta < 0$ e $\mathcal{O} = \emptyset$, então (4.8) trata-se de um custo descontado em horizonte infinito, vide Arapostathis, Borkar e Ghosh (2012, Eq. 2.7.1). Considere-se $J_{\tau_{\mathcal{O}}}$ uma solução de viscosidade de

$$\mathcal{H}_0(x, Dv(x), D^2v(x)) + \zeta v(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}, \tag{4.9}$$

com $v(x) = h(x)$ em $\partial\mathcal{O}$, $\mathcal{H}_0$ como em (1.7).

Teorema 4.2 *Suponha que $J_{\tau_{\mathcal{O}}}$ em (4.8) e é uma função tipo-norma.*
(i) Quando $\zeta < 0$ e $\mathcal{O} = \emptyset$, o processo $t \mapsto x_t$ é estável q.c. no sentido que $e^{\zeta t} x_t \to 0$ $\mathbf{P}$-q.c.
(ii) Quando $\zeta > 0$, suponha que existem $0 < p \leq q$ e $0 < \rho_1 \leq \rho_2$ tais que

$$\rho_1 \|x\|^p \leq J_{\tau_{\mathcal{O}}}(x) \leq \rho_2 \|x\|^q, \quad x \in \mathcal{O}^c,$$

para algum conjunto compacto $\mathcal{O}$ que contém a origem, então o processo $t \mapsto x_t$ converge exponencialmente rápido q.c. a $\mathcal{O}$, no sentido da Definição 4.3.

Prova. Considera-se o funcional ζ-"descontado" em (4.8), e defina-se um processo de difusão auxiliar, $z_t := e^{c_1 t} x_t$ para alguma constante $c_1 > 0$, tal que

$$dz_t = c_1 e^{c_1 t} x_t dt + e^{c_1 t} dx_t = \tilde{b}(t, z_t)dt + \tilde{\sigma}(t, z_t)dW_t$$

no qual, $\tilde{b}(t, z_t) = e^{c_1 t}\left(c_1 z_t e^{-c_1 t} + b\left(z_t e^{-c_1 t}\right)\right)$ e $\tilde{\sigma}(t, z_t) = e^{c_1 t} \sigma\left(z e^{-c_1 t}\right)$. Define-se $Z(s, x) := e^{(\zeta - c_1)s} J_{\tau_{\mathcal{O}}}(x)$ para cada $(s, x) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$. Uma representação equivalente para o funcional (4.8) é

$$Z(s, x) = \mathbf{E}_x \left[\int_s^{\tilde{\tau}_{\mathcal{O}}} e^{(\zeta - c_1)t} \tilde{f}(t, z_t)dt + e^{(\zeta - c_1)\tilde{\tau}_{\mathcal{O}}} Z(\tilde{\tau}_{\mathcal{O}}, z_{\tilde{\tau}_{\mathcal{O}}} e^{-c_1 \tilde{\tau}_{\mathcal{O}}}) \right]$$

no qual, $\tilde{f}(t, z) = e^{c_1 t} f(z e^{-c_1 t})$, $Z(\tilde{\tau}_{\mathcal{O}}, z_{\tilde{\tau}_{\mathcal{O}}} e^{-c_1 \tilde{\tau}_{\mathcal{O}}}) = e^{c_1 \tilde{\tau}_{\mathcal{O}}} J_{\tau_{\mathcal{O}}}(x_{\tilde{\tau}_{\mathcal{O}}}) = e^{c_1 \tilde{\tau}_{\mathcal{O}}} h(x_{\tilde{\tau}_{\mathcal{O}}})$ e $\tilde{\tau}_{\mathcal{O}} = \inf\{t \geq s : z_t e^{-c_1 t} \in \mathcal{O}\} = \tau_{\mathcal{O}}$.

Nota-se que $DZ(t, x) = e^{(\zeta - c_1)t} DJ_{\tau_{\mathcal{O}}}(x)$ e $D^2 Z(t, x) = e^{(\zeta - c_1)t} D^2 J_{\tau_{\mathcal{O}}}(x)$ representam o gradiente e a hessiana de Z com respeito a x, respectivamente. Logo, o funcional $Z(s, x)$ associado a $J_{\tau_{\mathcal{O}}}(z)$ satisfaz a equação de HJB,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Z(s, z)}{\partial s} + \mathcal{H}(s, z, DZ(s, z), D^2 Z(s, z)) &= (\zeta - c_1)Z(s, z) + \langle DZ(s, z), \tilde{b}(s, z)\rangle \\
&\quad + \frac{1}{2}\mathbf{tr}(D^2 Z(s, z)\tilde{\sigma}(s, z)\tilde{\sigma}(s, z)^{\intercal}) + e^{(\zeta - c_1)s}\tilde{f}(s, z) \\
&= (\zeta - c_1)Z(s, z) + e^{(\zeta - c_1)s}\langle DJ_{\tau_{\mathcal{O}}}(s, z), \tilde{b}(s, z)\rangle + \\
&\quad \frac{1}{2} e^{(\zeta - c_1)s}\,\mathbf{tr}(D^2 J_{\tau_{\mathcal{O}}}(z)\tilde{\sigma}(s, z)\tilde{\sigma}(s, z)^{\intercal}) + e^{(\zeta - c_1)s}\tilde{f}(s, z) = 0.
\end{aligned}$$

Agora, defina $\zeta = c_1$ para obter

$$\langle DJ_{\tau_{\mathcal{O}}}(z), \tilde{b}(s, z)\rangle + \frac{1}{2}\mathbf{tr}\{D^2 J_{\tau_{\mathcal{O}}}(z)\tilde{\sigma}(s, z)\tilde{\sigma}(s, z)^{\intercal}\} + \tilde{f}(s, z) = 0 \tag{4.10}$$

e pode-se escrever a partir de uma simples inspeção que

$$\mathcal{A}^z J_{\tau_{\mathcal{O}}}(z) = -\tilde{f}(s, z) \leq -e^{\zeta s} f(z e^{-\zeta s}) \mathbb{1}_{\mathcal{O}^c}(z), \quad \forall (s, z) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n,$$

pois graças ao Teorema 3.1, tem-se

$$\mathcal{A}^z J_{\tau_{\mathcal{O}}}(z) = \langle DJ_{\tau_{\mathcal{O}}}(z), \tilde{b}(s, z)\rangle + \frac{1}{2}\mathbf{tr}(D^2 J_{\tau_{\mathcal{O}}}(z)\tilde{\sigma}(s, z)\tilde{\sigma}(s, z)^{\intercal}).$$

Como $\tilde{f}(s,z) > 0$, $\forall(s,z) \in [0,\infty) \times \mathcal{O}^c$ e $J_{\tau_{\mathcal{O}}}$ uma função tipo-norma sobre $\mathcal{O}^c$, $z_t \to \mathcal{O}$ $\mathbf{P}$-q.c. e portanto, $e^{\zeta t}x_t \to \mathcal{O}$ $\mathbf{P}$-q.c. Tomando-se $\zeta < 0$ e $\mathcal{O} = \emptyset$, a afirmação (i) no teorema é provada.

Levando em conta os limitantes para $J_{\tau_{\mathcal{O}}}(x)$ em $\mathcal{O}^c$, pode-se escrever

$$\rho_1 \mathbf{E}_x[\|z_t\|^p] \leq \mathbf{E}_x[J_{\tau_{\mathcal{O}}}(z_t)] \leq J_{\tau_{\mathcal{O}}}(x) \leq \rho_2 \|x\|^q,$$

depois de tomar-se o valor esperado e aplicar-se a fórmula de Dynkin. Portanto,

$$\mathbf{E}_x[\|z_t\|^p] \leq \frac{\rho_2}{\rho_1}\|x\|^q. \tag{4.11}$$

Por outro lado, como $0 \in \mathcal{O}$ então para cada $z \in \mathcal{O}^c$, existe[2] $y \in \overline{\mathcal{O}}$ tal que $d(0,y) + d(y,z) = d(0,z)$ no qual d representa uma métrica. Adicionalmente, para tal ponto y, $\inf_{y' \in \mathcal{O}} d(y',z) = d(y,z)$. Aqui $d(x,\mathcal{O}) = \inf_{y' \in \mathcal{O}} \|y' - x\|^p$ e o fato de que $\|y - z\|^p \leq \|z\|^p$ é usado a seguir. Avalia-se

$$\mathbf{E}_x\left[\inf_{y' \in \mathcal{O}} \|y' - x_t\|^p\right] \leq \mathbf{E}_x\left[\inf_{y' \in \mathcal{O}} \|y' e^{-\zeta t} - x_t\|^p\right] = \\ e^{-\zeta p t}\mathbf{E}_x\left[\|y - z_t\|^p\right] \leq e^{-\zeta p t}\mathbf{E}_x\left[\|z_t\|^p\right] \leq \frac{\rho_2}{\rho_1} e^{-\zeta p t}\|x\|^q.$$

Tomando-se $\alpha = \zeta p$ e $\beta = \rho_2/\rho_1$, a noção de estabilidade exponencial para $\mathcal{O}$ é obtida, e a parte (ii) do teorema é provada. ∎

4.1.3 O problema ergódico (P_3)

O problema ergódico é associado ao funcional de custo,

$$\varrho = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau}\mathbf{E}_x\left[\int_0^\tau f(x_r)dr\right], \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.12}$$

A existência de tal solução limite está associada à seguinte equação, vide Arapostathis, Borkar e Ghosh (2012, Sec. 3.6.2),

$$\mathcal{H}_0(x, Dv(x), D^2v(x)) = \varrho, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{4.13}$$

para $\varrho > 0$.

Teorema 4.3 *Suponha que f é uma função tipo-norma e a solução de viscosidade de (4.13) também é uma norma. Então o processo $t \mapsto x_t$ é recorrente positivo.*

Prova. Nas condições do Teorema 3.1 a equação de HJB (4.13) estabelece a seguinte relação,

$$\mathcal{H}_0(x, Dv(x), D^2v(x)) = \rho \Leftrightarrow \mathcal{A}v(x) = -f(x) + \rho, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Portanto, define-se $\mathcal{O} = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \rho\}$ e pode-se escrever $\mathcal{A}J(x) \leq -f(x) + \rho \mathbb{1}_{\mathcal{O}}(x)$. A desigualdade em (4.5) é verificada e do Lema 4.1 segue-se que o processo é positivo recorrente. ∎

[2] $\overline{\mathcal{O}}$ é o fecho de $\mathcal{O}$.

Noções de convergência mais fortes Os critérios de estabilidade examinados até o momento levam à convergência $\mathbf{P}$-q.c. para um conjunto compacto que contém a origem, e o Teorema 4.2 reforça a noção de convergência exponencial para $\mathcal{O}$, no sentido de (4.3). A estabilidade no p-ésimo memento pode ser desenvolvida com argumentos próprios a partir de suposições sobre a função de custo f.

Teorema 4.4 *Suponha que f é uma função tipo-norma tal que,*

$$f(x) \geq \rho_1 \|x\|^p, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O},$$

para algum conjunto compacto $\mathcal{O}$ que contem a origem.

i) Considera-se o problema de duas fronteiras com $\mathcal{D} \equiv \mathbb{R}^n$ e a solução de viscosidade de (4.7)*. Então $x_t \to \mathcal{O}$ no p-ésimo momento no sentido da Definição 4.4.*

ii) Considera-se o problema ergódico com função de custo (4.12) *e a solução de viscosidade em* (4.13)*, então $\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}_x[\|x_t\|^p]$ existe e é limitado.*

Prova. (i) Considera-se $\mathcal{D} \equiv \mathbb{R}^n$ no problema de duas fronteiras em (4.6) e a equação de HJB (4.7) correspondente . Nesta situação, $\tau_{\mathcal{D}} = \inf\{t \geq 0 : x_t \in \mathcal{O}\}$ e para $x_0 = x \in \mathcal{O}^c$,

$$\begin{aligned} V_{\tau_D}(x) = \mathbf{E}_x \left[\int_0^{\tau_D} f(x_r) dr + h(x_{\tau_D}) \right] &\geq \mathbf{E}_x \left[\int_0^{\tau_D} f(x_r) dr \right] \\ &\geq \rho_1 \mathbf{E}_x \left[\int_0^{\tau_D} \|x_r\|^p dr \right] = \rho_1 \mathbf{E}_x \left[\int_0^{\infty} \mathbb{1}_{\{r \leq \tau_D\}} \|x_r\|^p dr \right] \end{aligned}$$

a partir do qual tem-se $\mathbf{E}_x[\mathbb{1}_{\{t \leq \tau_D\}} \|x_t\|^p] \to 0$, quando $t \to \infty$, necessariamente. Usando argumentos similares aos da prova do Teorema 4.2,

$$\inf_{y' \in \mathcal{O}} \|y' - x_t\|^p = \inf_{y' \in \mathcal{O}} \|y' - \mathbb{1}_{\{t \leq \tau_D\}} x_t\|^p \leq \mathbb{1}_{\{t \leq \tau_D\}} \|x_t\|^p,$$

e o resultado segue da relação acima.
(ii) No problema ergódico, nota-se que

$$\lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \mathbf{E}_x \left[\int_0^{\tau} \mathbb{1}_{\{x_r \in \mathcal{O}\}} \|x_r\|^p dr \right] \leq \sup_{y' \in \mathcal{O}} \|y'\|^p \leq c_0 < \infty$$

e

$$\varrho \geq \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \mathbf{E}_x \left[\int_0^{\tau} \mathbb{1}_{\{x_r \in \mathcal{O}^c\}} f(x_r) dr \right] \geq \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \mathbf{E}_x \left[\int_0^{\tau} \mathbb{1}_{\{x_r \in \mathcal{O}^c\}} \rho_1 \|x_r\|^p dr \right],$$

o que mostra que

$$\lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \mathbf{E}_x \left[\int_0^{\tau} \|x_r\|^p dr \right] \leq c_0 + \frac{\varrho}{\rho_1}$$

e o resultado decorre do fato de que o processo é ergódico. ■

Nota-se que o Teorema 4.4 impõe condições sobre a função f, mas não impõe restrição à solução de viscosidade da equação HJB relacionada ao problema. Portanto, o Teorema 4.4 não está ligado diretamente à abordagem Foster-Lyapunov.

Observação 4.2 *Quando* $b(0) = 0, \sigma(0) = 0$*, e* $\min f = 0$ *ou similarmente, a condição (4.1), pode-se identificar* $\mathcal{O} = \{0\}$*, e recuperam-se os resultados clássicos de estabilidade assintótica q.c. para origem, vide Khasminskii (2012), Kushner (1967), Mao (2007). Nessa situação a origem serve como uma bacia atratora para o processo, isto é,* $x_t \equiv 0$ *para todo* t *após a ocorrência de* $\tau_{\mathcal{D}}$*, um* $\mathcal{F}_t$*-tempo de parada.*

No entanto, se o conjunto de destino $\mathcal{O}$ *não atua como um estado absorvente para o processo, o cenário é de uma noção de estabilidade mais fraca, àquela do Lema 4.1, levando em conta as condições lá impostas. A noção remanescente é a de um processo recorrente positivo relativo a algum compacto não determinado no domínio. Este é o caso do problema ergódico quando o ruído é persistente. Essas dificuldades são expostas no próximo exemplo simples.*

Exemplo 4.3 *Considera-se o Teorema 4.4, que pode ser aplicado com* $f(x) = p(a - \sigma^2 p/2)|x|^p$ *para* $p < 2a/\sigma^2$*. Isto garante a existência de um conjunto* $\mathcal{O}$ *que contem a origem e* $\mathbf{E}_x[\inf_{y' \in \mathcal{O}} |y' - x_t|^p] \to 0$*, quando* $t \to \infty$*, é válido para cada* $x_0 = x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{O}$*. Assim, poder-se-ia imaginar a partir da função* f *que definir* $\mathcal{O} = \{0\}$*, é uma possibilidade que entretanto não é válida. Se* $a > \sigma^2$*, pode-se tomar* $p = 2$ *e do Exemplo 4.2 tem-se que* $\mathcal{O} = [-\sigma/\sqrt{2a}, +\sigma/\sqrt{2a}]$ *pode ser definido para estabelecer a estabilidade em média-quadrada a* $\mathcal{O}$*.*

O problema de controle Para tratar processos de difusão controlados no âmbito do Teorema 3.1, é necessário considerar o resultado em Haussmann e Lepeltier (1990, Th. 4.7, Cor. 4.8). Esse resultado garante que existe um controle ótimo por realimentação de estados no sentido fraco de (1.4). Considere os problemas com desconto positivo ou negativo, o problema das duas fronteiras, o problema ergódico, com os funcionais de custo (4.8), (4.6) e (4.12), respectivamente. De Haussmann e Lepeltier (1990), a estabilidade para o problema de controle estão cobertos pelos Teoremas 4.1, 4.2 e 4.3.

4.1.4 Encontrando uma função Lyapunov apropriada.

A interação entre o gerador estendido e uma função Lyapunov que é solução de viscosidade de alguma equação HJB, estabelece condições interessantes para o estudo da estabilidade estocástica. O primeiro cenário a considerar é o caso convexo semilinear apresentado na Seção 3.2. Ele foi desenvolvido em Do Val e Souto (2017, Th. 1) para uma classe de processos similares com custo descontado e estabilidade q.c. no sentido do Teorema 4.2 com $\zeta < 0$. A partir da convexidade da solução de viscosidade, os resultados de estabilidade nas seções anteriores podem ser imediatamente aplicados.

Outra forma de explorar a estabilidade em combinação com o gerador estendido é fazer uma tentativa de ajuste de uma função Lyapunov predefinida v_{Lyp} e verificar se o gerador aplicado a v_{Lyp} satisfaz a desigualdade associada a algum critério de estabilidade.

Na sequência, exploram-se duas construções,

$$v_1(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i |x_i|^p \tag{4.14}$$

para um vetor $\beta = [\beta_1, \ldots, \beta_n]$ tal que cada $\beta_i > 0, i = 1,2, \ldots, n$, e

$$v_2(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} |x_i|^p |x_j|^q = (|x|^q)^\intercal \boldsymbol{\beta} |x|^p, \tag{4.15}$$

com matriz $\boldsymbol{\beta} = [\beta_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $x^\intercal \boldsymbol{\beta} y > 0$ para cada $x, y \neq 0$ tal que $x_i, y_i \geq 0, i = 1,2, \ldots, n$.

As funções em (4.14) e (4.15) são não diferenciáveis nas fronteiras dos ortantes de $\mathbb{R}^n$, e o gerador estendido do Teorema 3.1 pode ser aplicado aqui.

Exemplo 4.4 *Considera-se a função de Lyapunov teste* (4.14). *Então, para cada* $x \in \mathbb{R}^n, x_i \neq 0$,

$$Dv_1(x) = p \left[\beta_1 |x_1|^{p-1} \operatorname{sign}(x_1) \ldots \beta_n |x_n|^{p-1} \operatorname{sign}(x_n) \right] = p\beta \,\centerdot\, \operatorname{sign}(x) \,\centerdot\, |x|^{p-1}$$

$$D^2 v_1(x) = \operatorname{Diag}\left(p(p-1) \begin{bmatrix} \beta_1 |x_1|^{p-2} & \ldots & \beta_n |x_n|^{p-2} \end{bmatrix} \right) = p(p-1) \operatorname{Diag}(\beta \,\centerdot\, |x|^{p-2}).$$

Os elementos β *e* $\operatorname{sign}(x)$ *denotam vetores e* $\operatorname{Diag}(x)$ *denota uma matriz diagonal* $n \times n$ *com diagonal formados pelos componentes de* $x \in \mathbb{R}^n$. *Portanto, a equação de HJB em* (4.7) *com* $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$ *e algum* f *pode-se escrever como*

$$\mathcal{H}_0(x, Dv_1(x), D^2 v_1(x)) = \mathcal{A}v(x) + f(x) = 0$$

em que, $Dv_1(x)$ *e* $D^2 v_1(x)$ *são como descritos acima, para* x *com cada componente* $x_i \neq 0$. *No problema* (P_1) *o conjunto* $\mathcal{O}$ *é recorrente positivo (atrator) se* $f(x) > 0, \forall x \in \mathcal{O}^c$ *ou equivalentemente se* $\mathcal{A}v_1(x) < 0$, $\forall x \in \mathcal{O}^c$, *no qual,*

$$\mathcal{A}v_1(x) = p \sum_{i=1}^{n} \beta_i \operatorname{sign}(x_i) |x_i|^{p-1} b_i(x) + \frac{1}{2} p(p-1) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_i |x_i|^{p-2} \sigma_{ji}(x)^2 =$$
$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i |x_i|^{p-2} \Big(x_i b_i(x) + \frac{1}{2}(p-1) \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ji}(x)^2 \Big) =$$
$$p \left\langle \operatorname{Diag}(\beta \,\centerdot\, |x|^{p-2}) x, b(x) \right\rangle + \frac{1}{2}(p-1) \,\mathbf{tr}\Big\{ \operatorname{Diag}(\beta \,\centerdot\, |x|^{p-2}) \sigma(x) \sigma(x)^\intercal \Big\} < 0.$$

Interessante aqui é escolher $0 < p < 1$, *já que o termo dentro do operador traço é não negativo e essa escolha garante o sinal negativo de tal têrmo.*

No entanto, se $g(\|X\|^q) \leq g_0 - \mathcal{A}v(x)$ *é válida para uma função* g *em* $\mathcal{K}_\infty$ *e escalares* $q > 0$, $g_0 \geq 0$, *existe então um conjunto compacto absorvente* $\mathcal{O}$ *para* $t \mapsto x_t$ *no problema* (P_1).

Em particular, para $p = 1$, a expressão acima é equivalente a exigir

$$\mathcal{A}v_1(x_t) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i b_i(x) \operatorname{sign}(x_i) < 0, \quad \forall x \in \mathcal{O}^c, x_i \neq 0,$$

para $p = 2$,

$$\mathcal{A}v_1(x_t) = \langle \operatorname{Diag}(\beta)x, b(x)\rangle + \frac{1}{2}\,\mathbf{tr}\{\operatorname{Diag}(\beta)\sigma(x)\sigma(x)^\intercal\} < 0, \quad \forall x \in \mathcal{O}^c,$$

para $p = 3$,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}v_1(x_t) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i |x_i| \Big(x_i b_i(x) + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ji}(x)^2 \Big) = \\ \langle \operatorname{Diag}(\beta \,\mathbf{.}\, |x|)x, b(x)\rangle + \mathbf{tr}\{\operatorname{Diag}(\beta \,\mathbf{.}\, |x|)\sigma(x)\sigma(x)^\intercal\} < 0.\end{aligned}$$

Exemplo 4.5 *Como Exemplo 4.4, escolha-se agora v_2 em* (4.15)*, definido para uma matriz adequada $\boldsymbol{\beta} = [\beta_{ij}]$ como sugerido. Pode-se avaliar,*

$$\begin{aligned}Dv_2(x) = \begin{bmatrix} \operatorname{sign}(x_1) \sum_{j=1}^{n} (q\beta_{1j}|x_1|^{q-1}|x_j|^p + p\beta_{j1}|x_1|^{p-1}|x_j|^q) \\ \vdots \\ \operatorname{sign}(x_n) \sum_{j=1}^{n} (q\beta_{nj}|x_n|^{q-1}|x_j|^p + p\beta_{jn}|x_n|^{p-1}|x_j|^q)|x_j|^q \end{bmatrix} = \\ q \operatorname{Diag}(\operatorname{sign}(x) \,\mathbf{.}\, |x|^{q-1})\boldsymbol{\beta}|x|^p + p \operatorname{Diag}(\operatorname{sign}(x) \,\mathbf{.}\, |x|^{p-1})\boldsymbol{\beta}^\intercal |x|^q\end{aligned}$$

para cada x com $x_i \neq 0, \forall i$. Escreve-se $D^2v_2(x) = P = [P_{ij}]$, tal que

$$\begin{aligned}P_{ii} = \sum_{j=1}^{n} (q(q-1)\beta_{ij}|x_i|^{q-2}|x_j|^p + p(p-1)\beta_{ji}|x_i|^{p-2}|x_j|^q) + \beta_{ii}qp|x_i|^{q+p-2} \\ P_{ij} = qp \operatorname{sign}(x_i) \operatorname{sign}(x_j)(\beta_{ij} + \beta_{ji})|x_i|^{q-1}|x_j|^{p-1},\end{aligned}$$

ou, na forma matricial,

$$\begin{aligned}D^2v_2(x) = q(q-1) \operatorname{Diag}(\operatorname{Diag}(|x|^{q-2})\boldsymbol{\beta}|x|^p) \\ + pq \operatorname{Diag}(\operatorname{sign}(x) \,\mathbf{.}\, |x|^{p-1})\boldsymbol{\beta}^\intercal \operatorname{Diag}(\operatorname{sign}(x) \,\mathbf{.}\, |x|^{q-1}) \\ + p(p-1) \operatorname{Diag}(\operatorname{Diag}(|x|^{p-2})\boldsymbol{\beta}^\intercal |x|^q) \\ + pq \operatorname{Diag}(\operatorname{sign}(x) \,\mathbf{.}\, |x|^{q-1})\boldsymbol{\beta} \operatorname{Diag}(\operatorname{sign}(x) \,\mathbf{.}\, |x|^{p-1})\end{aligned}$$

e procura-se uma matriz $\boldsymbol{\beta}$ e escalares $p, q > 0$ para se ter

$$\frac{1}{2}\,\mathbf{tr}\{D^2v_2(x)\sigma(x)\sigma(x)^\intercal\} + \langle Dv_2(x), b(x,u)\rangle < 0,$$

para cada x fora de um compacto $\mathcal{O}$.

Observação 4.3 *Um controle subótimo que é estocasticamente estável e permite capturar em algum sentido razoável a síntese de controle, é obtido através do problema de otimização,*

$$\inf_{u\in U}\left\{\langle Dv(x), b(x,u)\rangle + \frac{1}{2}\,\mathbf{tr}\left\{D^2v(x)\sigma(x,u)\sigma(x,u)^{\intercal}\right\} + f(x,u)\right\} < 0,\ \forall x \in \mathcal{O} \tag{4.16}$$

condição de sinal que deve ser satisfeita fora de um conjunto compacto $\mathcal{O}$. Aqui v seria uma função Lipchitz imposta.

Quando se desenvolve o problema de custo descontado positivo ou negativo, a condição de estabilidade se transforma em

$$\inf_{u\in U}\left\{\langle Dv(x), b(x,u)\rangle + \frac{1}{2}\,\mathbf{tr}\left\{D^2v(x)\sigma(x,u)\sigma(x,u)^{\intercal}\right\} + f(x,u)\right\} + \zeta v(x) < 0,\ \forall x \in \mathcal{O}$$

fora do conjunto compacto $\mathcal{O}$. Logo, para o caso $\zeta > 0$, associado à estabilidade exponencial a $\mathcal{O}$, impõe-se uma exigência mais forte, quando comparado com o caso $\zeta = 0$ e $\zeta < 0$. Analogamente, uma condição imposta ao problema de controle estável no p-ésimo momento a $\mathcal{O}$, será tomar (4.16) *com $f(x,u) \geq \rho_1\|x\|^p$ para cada $u \in U$, para algum $p > 0$ e $\rho_1 > 0$, válido fora de um conjunto compacto $\mathcal{O}$. Nesse caso, $v \geq 0$ mas não necessita de antemão uma função Lyapunov, ver o Teorema 4.4.*

4.2 Experimentos Numéricos

Exemplo 4.6 *O modelo dinâmico em Ladino e Valverde (2012) que descreve o comportamento da pesca equilibrada de peixes é dado pela parte não estocástica da seguinte EDE,*

$$\begin{bmatrix} d\tilde{x}_t \\ d\tilde{y}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta\tilde{y}(t) - \dfrac{\alpha\tilde{x}(t)}{\beta+\tilde{x}(t)} - \mu\tilde{x}(t) \\ \dfrac{\alpha\tilde{x}(t)}{\beta+\tilde{x}(t)} - (\mu+F)\tilde{y}(t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 10|\tilde{x}(t)|^{\frac{1}{5}} + 0{,}1 & 5|\tilde{y}(t)|^{\frac{1}{5}} \\ -3|\tilde{x}(t)|^{\frac{1}{5}} & 10|\tilde{y}(t)|^{\frac{1}{5}} + 0{,}1 \end{bmatrix} dW_t$$

no qual o estado (x,y) representa respectivamente a população de peixes juvenis (considera-se também ovas de peixe) e população explorável (peixes adultos). Os dados numéricos são $\delta = 14{,}6$; $\alpha = 20$; $\beta = 60$; $\mu = 0{,}63$; e a taxa de mortalidade de captura é proporcional ao esforço de captura e é dada nominalmente por $F = 0{,}75$. Os pontos de equilíbrio da EDE não linear são $(0;0)$ e $(244{,}11;11{,}63)$ as variáveis $(\tilde{x};\tilde{y}) = (x-244{,}11;y-11{,}63)$ são portanto variáveis de desvio relativa ao equilíbrio fora de extinção.

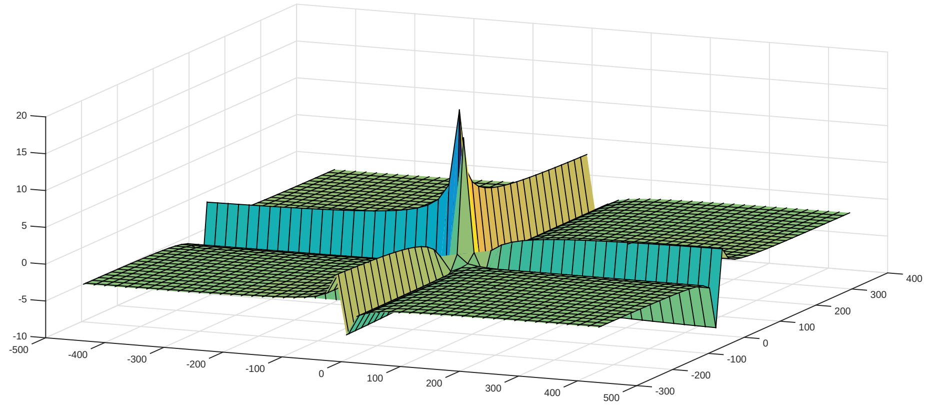

Figura 5: Função $(x, y) \mapsto \mathcal{A}V(x, y)$ com $p = 0{,}2$.

Nota-se que existem regiões ilimitadas cujo sinal é positivo, e em concordância com (4.14) *não é possível fazer uma afirmação sobre a estabilidade.*

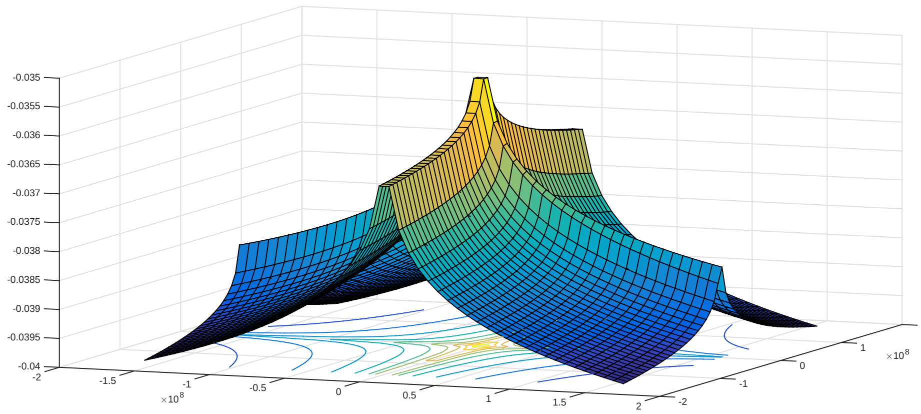

Figura 6: Função $(x, y) \mapsto \mathcal{A}V(x, y)$ com $p = 0{,}2$.

Já que a Figura 6 apresenta a mesma função $(x, y) \mapsto \mathcal{A}V(x, y)$ com $p = 0{,}2$ porém com controle em malha fechada para todo (x, y). A figura é limitada superiormente por um sinal negativo $-0{,}054$ para uma taxa de pesca $F = u_t$ em que $u_t = (\tilde{y}(t) - y_e)^2 |\tilde{y}(t)|^{(p-2)/2r}$, e em concordância com (4.14) com $p = 0{,}2$ pode-se afirmar que o sistema é estável.

Exemplo 4.7 (Função valor convexa) *Considere uma EDE em* $\mathbb{R}$ *controlada definida como*

$$dx_t = -u_t |x_t|^{1/p} \operatorname{sign}(x_t) dt + \sigma dW_t,$$

associada à função de custo dada por

$$\varrho = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \mathbf{E} \left[\int_0^T \left(\alpha |x_s| + r u^2 \right) ds \right],$$

calculando o controle ótimo a partir do custo quadrático,

$$\min_u \left\{ -u|x|^{1/p}\operatorname{sign}(x)\frac{dV(x)}{dx} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{d^2V(x)}{dx^2} + \alpha|x| + ru^2 \right\} = 0, \tag{4.17}$$

este é tal que

$$u^* = \frac{1}{2r}\frac{dV(x)}{dx}|x|^{1/p}\operatorname{sign}(x), \tag{4.18}$$

depois, utilizando (4.18) *em* (4.17), *tem-se*

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = \frac{2}{\sigma^2}\left(\frac{1}{4r}\left(\frac{dV(x)}{dx}\right)^2 |x|^{2/p} - q|x| \right). \tag{4.19}$$

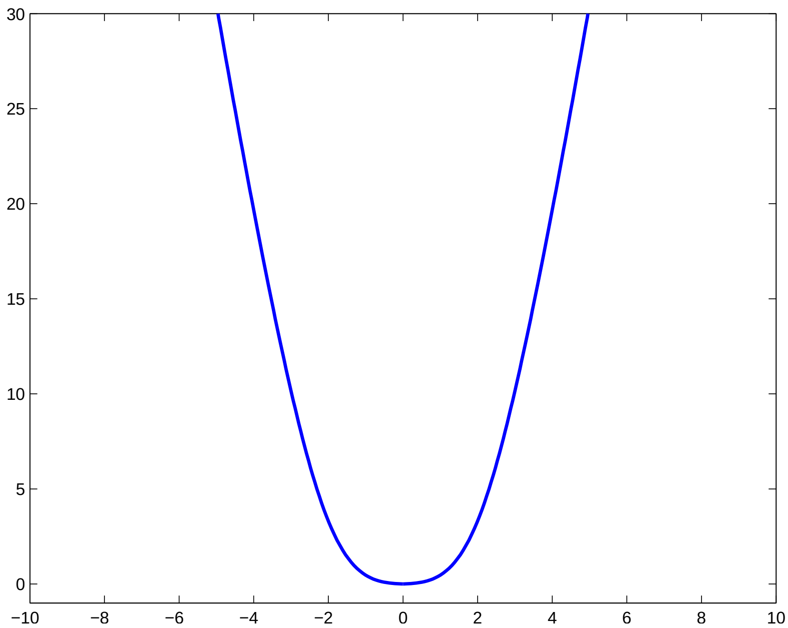

Figura 7: Soluções numéricas da função valor para o Exemplo 4.7.

A Figura 7 mostra a solução numérica da equação diferencial (4.19), em que, toma-se $p = 2$; $r = 4$; $q = 2$; $\sigma = \sqrt{2}$ e a inicialização $V(0) = 0{,}01$; $\frac{V(0)}{dx} = 0{,}1$; e depois rebatem-se a curva obtida para os valores positivos de x (ou em seguida $\frac{V(0)}{dx} = -0{,}1$). Verifica-se que a função valor tem um comportamento convexo.

5 Conclusões

Essa tese apresenta o desenvolvimento de um gerador infinitesimal para processos de difusão na forma de um gerador estendido. A construção analítica desse operador infinitesimal foi apresentada no Teorema 3.1 no Capítulo 3. No caso clássico usa-se a associação que existe entre os processos Markovianos e os semigrupos de Feller para definir o gerador infinitesimal. No caso abordado neste trabalho emprega-se a fórmula de Dynkin e a teoria de martingal para definir esses operadores infinitesimais estendidos. Utiliza-se o fato que uma solução de viscosidade é também uma sub e uma supersolução de viscosidade.

Tratar os processos de difusão degenerados tem suas dificuldades pelas razões expostas neste trabalho e bem estudadas na literatura. Uma dificuldade ao resolver uma EDP elíptica não uniforme (equação HJB) é que as soluções são não regulares, portanto a abordagem via soluções de viscosidade (aqui tomadas como funções contínuas e mensuráveis). Mediante o desenvolvimento de um gerador estendido bem definido é possível utilizar a fórmula de Dynkin com um tempo de parada finito q.c. para definir o domínio do gerador. Dessa forma o gerador estendido toma forma explicita e contém as soluções de viscosidade das equações de HJB no domínio do gerador. No caso clássico verificou-se que o domínio do gerador coincide com a família de funções de classe $C^2(\mathbb{R}^n)$, vide Equação 3.3. Portanto, para o caso abordado neste trabalho, o domínio do gerador é formado por soluções de viscosidade da equação de HJB.

Sendo a convexidade da função uma caraterística importante no estudo de estabilidade, desenvolve-se de forma analítica a convexidade da função valor a partir de condições de convexidade impostas sobre os custos para um problema cuja dinâmica é descrita por uma EDE semilinear. Tendo caracterizado uma função valor convexa e um gerador estendido é possivel estudar a estabilidade dos processos ótimos para um controle Markoviano.

Nesta tese, trataram-se noções de estabilidade estocástica para diferentes problemas com critérios de estabilidade adaptados. Esses critérios na sua formulação estão ligados ao gerador estendido aqui desenvolvido. A estabilidade de um processo de difusão entre duas fronteiras foi analisada no Teorema 4.1 para um horizonte definido por um tempo de parada. Ressalta-se que a estabilidade global está associada ao gerador estendido e está ligada à escolha do sinal da função de custo corrente. A estabilidade para um problema com desconto positivo ou negativo é apresentada no Teorema 4.2. Neste caso, obtêm-se a estabilidade q.c. para a origem e estabilidade exponencial q.c. para um conjunto compacto que supomos é caracterizável a partir dos dados do problema. A estabilidade estocástica do problema ergódico associado a um funcional de custo também foi abordada no Teorema 4.3. Nesse caso, a estabilidade global também é garantida através do gerador estendido via uma escolha adequada da função de custo atual.

Em resumo, em todos esses casos que envolvem a associação com o gerador é suficiente impor uma condição de sinal sobre a equação de HJB via a função de custo corrente $f \geq 0$ e função valor tipo-norma para estabelecer a estabilidade.

Outra noção de estabilidade que não necessariamente envolve a associação com o gerador estendido também foi proposta, vide Teorema 4.4. Nesse critério, o custo corrente é limitado inferiormente por uma p norma. Essa limitação sobre o custo corrente é de fácil verificação.

Finalmente, aproveitando o gerador estendido é possível estudar a estabilidade de processos via a imposição de certas funções de Lyapunov pré-definidas. Da equação de HJB esse ajuste é realizado mediante uma condição de sinal como desenvolvido na Seção 4.1.4. Assim, sob certas garantias de sinal pode-se estabelecer a estabilidade estocástica dos processos de difusão envolvidos. Alguns exemplos numéricos são desenvolvidos, ilustrando com aplicações simples os resultados.

5.1 Trabalhos futuros

Durante a elaboração e após a conclusão deste estudo, foram identificados diversos pontos que podem ser melhorados ou podem complementar este trabalho. São apresentados a seguir alguns direcionamentos para trabalhos futuros:

- Na Seção 3.1, foi feita uma análise para processos Markovianos completamente observáveis, mas existe a possibilidade de estender essa análise a outros processos, como por exemplo, aos processos de Markov parcialmente observáveis. Como ponto de partida Arapostathis, Borkar e Ghosh (2012, Cap. 8) e Kushner (2014) introduzem uma discussão sobre processos Markovianos parcialmente observáveis no contexto estudado.

- Na Seção 3.1, foi construído um gerador estendido associado a uma solução de viscosidade contínua. Na literatura, existem soluções de viscosidade descontínuas, vide Fleming e Soner (2006, Sec. VII4). Dessa forma, um desafio é propor um gerador estendido associado a esse tipo de soluções de viscosidade e neste contexto, desenvolver critérios de estabilidade para os processos de difusão.

- Na Seção 3.2, não foi abordado o problema da convexidade da função valor em seu contexto mais geral, isto é, supondo que o coeficiente *drift* de (3.31) fosse uma função convexa. Nas primeiras tentativas foram consideradas funções convexas crescentes (decrescentes) em seu domínio de forma proposital para estabelecer uma ordem estocástica, vide Shaked e Shanthikumar (2007, Def. 7.A.1). No entanto, esse esforço foi infrutífero no estabelecimento da função valor como uma função estritamente convexa.

- A existência de processos de difusão com coeficientes (*drift* e difusão) descontínuos dá origem a novas perspectivas de soluções de uma EDE, vide Stramer e Tweedie (1997). Nessas condições é desafiador estudar estabilidade desses processos e portanto, surgem algumas perguntas

  1) é possível estudar estabilidade através de um gerador estendido associado a uma solução de viscosidade relativa aos processos de difusão com coeficientes descontínuos?
  2) é possivel obter uma função de Lyapunov a partir das condições de estabilidade estabelecidas em Stramer e Tweedie (1997), como feito em Cesaroni (2006a)?

- A junção de processos com saltos e de difusão é conhecida como processo de "salto-difusão misto", vide Merton (1976), Bakshi, Cao e Chen (1997). Pretende-se no futuro estudar a estabilidade estocástica desses processos através de um gerador estendido apropriado.

5.2 Publicações

A seguir é listado o trabalho proveniente do resultado da pesquisa reportado nesta tese.

- DO VAL, J. B. R. and LEVANO, E.: *An Extended Generator for Degenerate Time-Homogeneous Diffusion Processes and Almost Sure Stability. Submetido em SIAM Journal on Control and Optimization (SICON) com processo número de processo MS#M123230.*

Referências

ARAPOSTATHIS, A. and BORKAR, V. and GHOSH, M. K., *Ergodic Control of Diffusion Processes*, 1st. Ed, Cambridge University Press, 2012. Citado 5 vezes nas páginas 18, 43, 61, 63 e 72.

AKIAN, M. and DAVID, B. and GAUBERT, S., *"Un théorème de représentation des solutions de viscosité d'une équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman ergodique dégénérée sur le tore"*, Comptes Rendus Mathematique, n. 21–22, v. 346, p. 1149–1154, 2008. Citado na página 18.

ARISAWA, M. and LIONS, P. L., *"On ergodic stochastic control"*, Communi. Partial Differential Equations, n.11-12, v. 23, p. 2187–2217, 1998. Citado na página 18.

ARNOLD, L., *Stochastic Differential Equations, Theory and Applications*, Wiley, 1974. Citado na página 17.

ARNOLD, L. and OELJEKLAUS, E. and PARDOUX, E., *"Almost sure and moment stability for linear Itô equations. In Lyapunov Exponents (L.Arnold & V. Wihstutz(Eds))"*, Lecture Notes in Mathematics Springer, v. 1186, p. 129–159, 1986. Citado na página 16.

ARNOLD, L. and SCHMALFUSS, B., *"Lyapunov's second method for random dynamical systems"*, J. of Differential Equations., n. 1, v. 177, p. 235–265, 2001. Citado na página 16.

ASH, R. B., *Real Analysis and Probability.* 1st. Ed, Academic Press, 1972. Citado na página 47.

AUBIN, J. P. and DA PRATO, G. *"Stochastic Lyapunov method"*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl., n. 4, v. 2, p. 511–525, 1995. Citado na página 18.

BAKSHI, G. and CAO, C. and CHEN, Z. *"Empirical performance of alternative option pricing models"*, The Journal of Finance, n. 5, v. 52, p. 2003–2049, 1997. Citado na página 73.

BELLET, L. R. *"Ergodic properties of Markov processes"*, Open quantum systems II. Springer, p. 1–39, 2006. Citado na página 57.

BORKAR, v. S. *Controlled diffusion processes*, Probability Surveys, v. 2, p. 213–244, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 18.

BARDI, M. and , CESARONI, A., *"Almost sure stabilizability controlled degenerate diffusions"*, SIAM J. Control Optimi., v. 44, n. 1, p. 75–98, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 18, 45 e 57.

BARDI, M. and CESARONI, A., *"Almost sure properties of controlled difusions and worst properties of deterministic systems"*, ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, v. 14, p. 343–355, 2008. Citado na página 18.

BARRY, R. J. *Probabilidade: um curso em nível intermediário*, Projeto Euclides - IMPA, 2nd. Ed, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 26.

BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* 1st. Ed, Springer-Verlag, 2011. Citado na página 26.

BUCY, R. S. *Stability and Supermartingales*, J. Differential Equations, v. 1, p. 151–155, 1965. Citado na página 16.

CAFFARELLI, L. A. *Fully nonlinear elliptic equations*, Bull. American Mathematical Society, n. 2, v. 34, p. 187–191, 1997. Citado na página 40.

CAINES, P. E. *Linear Stochastic Systems*, v. 77, SIAM, 2018. Citado na página 17.

CESARONI, A. *"A converse Lyapunov theorem for almost sure stabilizability"*, Systems & Control Letters, n. 12, v. 55, p. 992–998, 2006. Citado na página 73.

CESARONI, A. *"Lyapunov stabilizability of controlled diffusions via a superoptimality principle for viscosity solutions"*, Appl. Math. Optim., n. 1, v. 53, p. 1–29, 2006. Citado 5 vezes nas páginas 18, 19, 45, 57 e 60.

CLARK, S. P. and KIESSLER, P. C. *"On the convexity of value function for certain class of stochastic dynamic programming problem"*, Stochastic Analysis and Applications, n. 20, v. 4, p. 783–789, 2002. Citado na página 54.

COSSO, A. and FUHRMAN, M. and PHAM, H. *"Long time asymptotics for fully nonlinear Bellman equations: a backward SDE approach"*, Stochastic Processes and their Applications, n. 7, v. 126, p. 1932–1973, 2016. Citado na página 18.

CRANDALL, M. G. and ISHII, H. and LIONS, P. L. *"User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations"*, Bull Amer. Math. Soc., n. 27, p. 1–67, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 39.

DAVIS, M. H. A. *Linear Estimation and Stochastic Control.* 1st. Ed, Wiley, 1977. Citado na página 17.

DAVIS, M. H. A. *Markov Models & Optimization.* 1st. Ed, Chapman & Hall, 1993. Citado na página 16.

DENG, H. and KRSTIC, M. and WILLIAMS, R. *"Stabilization of stochastic nonlinear systems driven by noise of unknown covariance"*, IEEE Transactions on automatic control., n. 8, v. 46, p. 1237–1253, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 57.

DIESTEL, J. and UHL, J. Jr. *Vector Measure*, Mathematical Surveys and Monographs, 1977. Citado na página 46.

DO VAL, J. B. and SOUTO R. F. *"Modeling and control of stochastic systems with poorly known dynamics"*, IEEE Transactions on Automatic Control, n. 9, v. 62, p. 4467–4482, 2017. Citado na página 65.

FLEMING, W. H. and RISHEL, R. W. *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, 1st. Ed, Springer-Verlag, 1975. Citado na página 17.

FLEMING, W. H. and SONER, H. M. *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*, 2nd. Ed, Springer, 2006. Citado 6 vezes nas páginas 15, 18, 37, 38, 40 e 72.

FLORCHINGER, P. *"Lyapunov-like techniques for stochastic stability"*, SIAM J. Control Optimi., n. 4, v. 33, p. 1151–1169, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 57.

FLORCHINGER, P. *"Feedback stabilization of affine in the control stochastic differential systems by the control Lyapunov function method"*, SIAM J. Control Optimi., n. 2, v. 35, p. 500–511, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 57.

GIHMAN, I. I. and SKOROHOD, A. V. *Stochastic Differential Equations*, 1st. Ed, Springer-Verlag, 1965. Citado na página 17.

GOZZI, F. and SWIECH, A. and ZHOU, X. Y. *"A corrected proof of the stochastic verification theorem within the framework of viscosity solutions"*, SIAM J. Control Optimi, n. 6, v. 43, p. 2009–2019, 2005. Citado 5 vezes nas páginas 19, 38, 45, 46 e 47.

GOZZI, F. and SWIECH, A. and ZHOU, X. Y. *Erratum:"A corrected proof of the stochastic verification theorem within the framework of viscosity solutions"*, SIAM J. Control Optimi, n. 6, v. 48, p. 4177–4179, 2010. Citado 5 vezes nas páginas 19, 38, 45, 46 e 51.

GRIMMETT, G. and STIRZAKER, D. *Probability and Random Processes*, 3rd. Ed, Oxford University Press, 2001. Citado 3 vezes nas páginas 24, 26 e 29.

HANSEN, P. and SCHEINKMAN, J. A. *Back to the future: Generating moment implications for continuous-time Markov processes*, *Econometrica*, v. 4, n. 63, p. 767–804, 1995. Citado na página 44.

HAUSSMANN, U. G. and LEPELTIER, J. P. *"On the existence of optimal controls"*, SIAM J. Control Optimi. n. 4, v. 28, p. 851–902, 1990. Citado 3 vezes nas páginas 35, 46 e 65.

ITÔ, K. *"Stochastic integration"*, Proc. Imp. Acad. Tokyo, n. 20, v. 1, p. 519–524, 1944. Citado na página 14.

IKEDA, N. and WATANABE, S. *Stochastic Differential Equations and Diffusion processes*, North-Holland, 2nd ed. 1989. Citado na página 34.

KARATZAS, I. and SHREVE, S. E. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, 1st. Ed, Springer, 1991. Citado 6 vezes nas páginas 15, 30, 32, 33, 34 e 47.

KHASMINSKII, R. Z. *"Necessary and sufficient conditions for the asymptotic stability of linear stochastic systems"*, Theory Probab. Appl., v. 12, p. 144–147, 1967. Citado na página 14.

KHASMINSKII, R. Z. *Stochastic Stability of Differential Equations*, 2nd. Ed, Springer-Verlag, 2012. Citado 6 vezes nas páginas 16, 17, 53, 57, 59 e 65.

KOHN, J. J. and NIRENBERG, L. *"Degenerate elliptic-parabolic equations of second order"*, Commu. Pure Appl. Math., n. 4, v. 20, p. 797–872, 1967. Citado na página 18.

KOLMOGOROV, A. N. *Foundations of the Theory of Probability*, 2nd. Ed, trans. Nathan Morrison(1956), 1933. Citado na página 23.

KOZIN, F. *"A survey of stability of stochastic systems"*, Automatica, n. 1, v. 5, p. 95–112, 1969. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 57.

KRSTIC, M. and HUA, D. *Stabilization of Nonlinear Uncertain Systems*, 1st. Ed, Springer-Verlag, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 57.

KRYLOV, N. V. *Controlled Diffusion Processes.* 1st. Ed, Springer-Verlag, 1980. Citado 4 vezes nas páginas 15, 18, 34 e 38.

KUO, H. H. *Introduction to Stochastic Integration*, 1st. Ed, Springer-Verlag, 2006. Citado na página 31.

KURTZ, T. G. and STOCKBRIDGE, R. H. *"Existence of Markov controls and characterization of optimal Markov controls"*, SIAM J. Control Optimi, n. 2, v. 36, p. 609–653, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 46.

KUSHNER, H. J. *Stochastic Stability and Control*, 1st. Ed, Academic Press, 1967. Citado 5 vezes nas páginas 14, 16, 17, 57 e 65.

KUSHNER, H. J. *"Introduction to stochastic control"*, Holt, Rinehart, and Winston, 1971. Citado na página 17.

KUSHNER, H. J. *"A partial history of the early development of continuous-time nonlinear stochastic systems theory"*, Automatica, n. 2, v. 50, p. 303–334, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 72.

LADINO L. M. and VALVERDE, J. C. *"Population dynamics of a two-stage species with recruitmen"*, Math. Methods Appl. Sciences, n. 6, v. 36, p. 722–729, 2012. Citado na página 68.

LIONS, P. L. *"Optimal control of diffusion processes and Hamilton–Jacobi–Bellman equations part II: viscosity solutions and uniqueness"*, Commun. Partial Diffe. Equa., n. 11, v. 8, p. 1229–1276, 1983. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 40.

LE GALL, J. F. *Brownian Motion, Martingales, and Stochastic Calculus*, v. 276, 1st. Ed. Springer, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 15, 34 e 42.

OKSENDAL, B. *Stochastic Differential Equations, an Introduction with Applications.* 6th. Ed. Universitext, Springer Verlag, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 44.

MATEOS-NÚNEZ, D. and CORTÉS, J. *"pth Moment noise-to-State stability of stochastic differential equations with persistent noise"*, SIAM J. Control Optimi., n. 4, v. 52, p. 2399–2421, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 57.

MAO, X. *"Stochastic versions of the LaSalle theorem"*, J. of Differential Equations. n. 1, v. 153, p. 175–195, 1999. Citado na página 57.

MAO, X. *"Exponential stability for stochastic differential equations with respect semimartingales"*, Stochastic processes and their applications. n. 1, v. 79, p. 45–67, 1990. Citado na página 16.

MAO, X. *"Stochastic Differential Equations and Applications"*, Elsevier, 1st. Ed, 2007. Citado 6 vezes nas páginas 16, 46, 53, 57, 58 e 65.

MERTON, R. C. *"Option pricing when underlying stock returns are discontinuous"*, J. Financial Economics, n. 1–2, v. 3, p. 125–144, 1976. Citado na página 73.

MEYN, S. P. and TWEEDIE, R. L. *Stability of Markovian processes III: Foster-Lyapunov criteria for continuous-time processes*, Advances in Applied Probability, n. 3, v. 25, p. 518–548, 1993. Citado 6 vezes nas páginas 16, 17, 19, 20, 57 e 59.

MULLER, A. *Stochastic ordering of multivariate normal distributions*, *Ann. Inst. Statist. Math.*, v.53, n. 3, p. 567–575, 2001. Citado na página 54.

NISHIMURA, Y. and ITO, H. *"Stochastic stability via Lyapunov functions without differentiability at supposed equilibria"*, IFAC-PapersOnLine, n. 18, v. 49, p. 321–326, 2016. Citado na página 59.

NISHIMURA, Y. and HOROSHI, I. *"Stochastic Lyapunov functions without differentiability at supposed equilibria"*, Automatica, v. 92, p. 188–196, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 57.

ØKSENDAL, B. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications.* Springer-Verlag, 6th ed, 2003. Citado na página 43.

PINSKY, M. A. *"A note on degenerate diffusion processes"*, Theor. Probab. Appl., n. 3, v. 14, p. 502–506, 1969. Citado na página 34.

POINCARÉ, H. *"Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique"*, Acta Mathematica, n. 1, v. 13, p. A3–A270, 1890. Citado na página 14.

PROTTER, P. *Stochastic Integration and Differential Equations*, 2nd. Ed, Springer-Verlag, 2004. Citado na página 30.

RESNICK, S. *Adventures in Stochastic Processes.* 4th Ed, Birkhöauser, 2005. Citado na página 26.

REVUZ, D. and YORK, M. *Continuous Martingales and Brownian Motion*, 3rd. Ed, Springer-Verlag, 1999. Citado na página 45.

SCARSINI, M. *"Multivariate convex orderings, dependence, and stochastic equality"*, Journal of applied probability, n. 1, v. 35, p. 93–103, 1998. Citado na página 54.

SHAKED, M. and SHANTHIKUMAR, J. G. *Stochastic Orders*, 1st. Ed, Springer-Verlag, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 54 e 73.

STRAMER, A. V. and TWEEDIE, R. L. *"Existence and stability of weak solutions to stochastic differential equations with non-smooth coefficients"*, Statistica Sinica., p. 577–593, 1997. Citado na página 73.

SKOROKHOD, A. V. *"On a generalization of a stochastic integral"*, Theor. Probab. Appl., n. 2, v. 20, p. 219–233, 1976. Citado na página 14.

TANIGUCHI, T. *"The asymptotic behaviour of solutions of stochastic functional differential equations with finite delays by the Lyapunov-Razumikhin method"*, Adv. Stability Theory at the End of the 20th Century, v. 13, p. 175–188, 2003. Citado na página 57.

THYGESEN, U. H. *"A survey of Lyapunov techniques for stochastic differential equations"*, Department of Mathematical Modeling, Technical University of Denmark, 1997. Citado na página 57.

WENTZELL, A. D. and CHOMET, S. and CHUNG, K. L., *A Course in the Theory of Stochastic Processes*, 1st Ed, McGraw-Hill, 1981. Citado na página 43.

WONHAM, W. M. *"Liapunov criteria for weak stochastic stability"*, J. Differential Equations., n. 2, v. 2, p. 195–207, 1966. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.

YONG, J. and ZHOU, X. Y. *Stochastic Controls: Hamiltonian Systems and HJB Equations*. 1st. Ed, Springer, 1999. Citado 13 vezes nas páginas 15, 18, 19, 33, 34, 37, 38, 40, 41, 42, 46, 48 e 51.

ZHANG, Z. Y. and KOZIN, F. *"On almost sure sample stability of nonlinear stochastic dynamic systems"*, IEEE Trans. Automatic Control, n. 3, v. 39, p. 560–565, 1994. Citado na página 16.